研究計画

渡辺　達也

1: 非斉次項を持つ非線形楕円型方程式の研究

次のような非線形楕円型方程式を考える。

$$-\Delta u + u = g(u) + \lambda f(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

ただし $f(x) \geq 0,\ f(x) \not\equiv 0$ とする。このとき λ が小さいならば正値解が二つ存在することがわかっている。そのうち一つ目の解は $\lambda = 0$ とした方程式:

$$-\Delta u + u = g(u) \text{ in } \mathbb{R}^N \tag{2}$$

における自明解の摂動として特徴付けられる。したがって λ が十分小ならば、一つ目の解は線形方程式 $-\Delta u + u = \lambda f(x)$ の一意解に近いことが分り、その形状を知ることが出来る。

一方、二つ目の解は (2) のエネルギー最小解の摂動であることが予想される。そこで、この解の形状を知ることが目的となる。(2) のエネルギー最小解は正値で、一点に関し球対称・球減少関数であることが知られている。方程式 (2) は平行移動不変なので、最大点は任意の場所に設定できる。しかし $\lambda > 0$ となった瞬間に平行移動不変性が崩れるため、最大点の位置は然るべき場所に決まることが予想される。$f(x)$ がある一点に関し球対称・球減少関数ならば、Moving plane method より (1) のすべての正値解は同じ点に関して球対称・球減少となることが知られている。つまり (1) の正値解の最大点の位置は f の最大点の位置と同じであることが分かる。このことから f が球対称・球減少のどちらかを満たさない場合に、f のどのような情報がその位置に反映されるかに興味を持っている。この問題は非線形項 g が典型例である $g(u) = |u|^{p-1}u$ の場合でも未解決となっている。

また既存の結果のほとんどは $\lambda > 0$ の場合を扱っている。分岐理論より (2) のエネルギー最小解から分岐する解の枝は λ が負の範囲まで伸びることが分かる。そこで、その解の枝が正値関数であるかが問題となる。エネルギー最小解は正値なので、少しの摂動ではその正値性は崩れないことが予想される。しかし $\lambda < 0$ の場合、楕円型方程式において解の正値性を導くために頻繁に用いる最大値原理を適用することが出来ない。そのため妥当であると思われるにもかかわらず、この問題は未だ未解決である。最大値原理が使えなくても、特徴付けなどから解の正値性が導けるかという問題は、難しいけれども興味深いものと感じている。また (1) において $\lambda < 0$ とした方程式は non-positone であるとも言われ、領域が有界の場合には多くの研究がなされており、対称性の崩れなども示されている。一方で非有界領域上の non-positone problem はほとんど研究がされていない。この観点からも興味深い問題だと考えている。

2: 二次元非線形シュレディンガー方程式におけるボルテクスを持つ解の研究

最も興味のあることは、次のような方程式：

$$-\epsilon^2 \Delta u + \left(\frac{\epsilon^2 n^2}{|x-a|^2} + \frac{\epsilon^2 m^2}{|x-b|^2} + V(x)\right)u = f(u), x \in \mathbb{R}^2$$

において二点 a, b にボルテクスを持つ解は存在するかということ。またその漸近挙動は n と m の値によって変化するのかということである。これまでの研究では対応する常微分方程式を解析することによって解の漸近挙動を得た。しかし今の場合は常微分方程式に帰着できないため、これまでの研究とは異なる議論を通じて解析する必要がある。そのためのステップとして次のような空間二次元での非線形シュレディンガー方程式：

$$-\epsilon^2 \Delta u + \left(\frac{\epsilon^2 n^2}{|x|^2} + V(x)\right)u = f(u), x \in \mathbb{R}^2$$

において、ポテンシャル $V(x)$ が球対称でない場合を考察したい。ポテンシャルが球対称でなくても、球対称の時と同様、Mountain Pass 解 $u_\epsilon(x)$ は原点の近くで $u_\epsilon(x) \sim |x|^n$ の挙動を持つと考えるのが妥当であり、これを示すことがこの研究を進める上で最も重要であると考えている。

また最近四階楕円型方程式を扱ったが、これに関連した話題として、Laplace-Beltrami 作用素の四階版である、Paneitz-Branson 作用素及びそれに対応する Yamabe type の問題に興味を持っている。特に解の定性的性質に関心を持っている。四階楕円型方程式の難しさの一つとしては最大値原理が一般に成り立たないとことが挙げられる。実際様々な状況下での証明・反例など、高階楕円型作用素の最大値原理及び関連する内容は盛んに研究されている一方で、未解決問題も多く残されている。最大値原理・比較原理は解の定性・定量的性質を知る上で最も大事なツールである。したがって非線形問題だけでなく、線形楕円型作用素の最大値原理・比較原理さらには固有値問題なども同時に研究していきたいと考えている。