研究成果

北川　友美子

私はサブリーマン幾何学に興味を持ち，研究しています．滑らかな多様体上の接分布と，その上のリーマンファイバー計量の組をサブリーマン多様体と呼びます．このリーマンファイバー計量はカルノ・カラテオドリー計量とも呼ばれ，工学の世界では制御理論における最適制御に深く関係しています．ここでは特に接分布が，そのセクションのブラケット積達で接空間全体を張るという条件をみたすようなものを考えます．この条件は，bracket-generating または非ホロノミーと呼ばれています．このようなサブリーマン多様体の局所的な分類や測地線を研究しています．

・分類問題について

多様体上の接分布の構造は，サブリーマン多様体に密接に関係していて，様々な問題を考える上での出発点となります．

非ホロノミーであるような接分布の代表的なものとして，Martinet 分布，接触構造，Engel 構造，カルタンの分布などが挙げられます．このような多様体上の接分布に，リーマンファイバー計量を入れます．つまりサブリーマン多様体を考えます．このとき，これらを分類しようという問題が自然に考えられます．まず，接分布の中でも最も幾何学的に重要である接触構造を対象にしました．[3] において，等質なサブリーマン接触構造の無限小自己同型の芽のなすリー代数を調べました．その結果，$2n+1$ 次元の多様体に対して，無限小自己同型は，$(n+1)^2$ 次元以下となり，最大次元をもつものは 3 つの類に分かれることがわかりました．また，その空間型も決定しました．現在取り組んでいるのは，エンゲル構造に対するサブリーマン多様体で等質なものの無限小自己同型の分類です．ジェットの関係性を用いて，サブリーマン接触構造と同型になるようなエンゲルサブリーマン構造のクラスを見つけることができました．しかし，無限小自己同型自体がこれに限るかどうかは分からないのでさらに研究を続けているところです．また，カルタンの分布に対するサブリーマン多様体を考え，その不変量を求める問題に取り組んでいます．カルタンの分布はそれ自身不変量を持つので，サブリーマン計量を入れることにより，さらに現れる不変量を調べたいと思っています．

・測地線について

リーマン多様体において 2 点を結ぶ最短線は測地線によって与えられ，測地線は局所的には最短となることが知られています．測地線は，通常，局所座標を用いて 2 階の常微分方程式で定義されますが，シンプレクティックの言葉を用いると，ハミルトンベクトル場の積分曲線を多様体に落としたものが測地線です．

サブリーマン幾何においては，2 点を結ぶ最短線を求める問題はリーマン幾何の場合より複雑な問題となります．リーマン幾何では変分法が用いられ，曲線を摂動させることによって求められますが，サブリーマン幾何では摂動を許さない曲線が存在することがあり，変分法では解くことができなくなるためです．

接分布とその上のリーマンファイバー計量から決まるエネルギーをとり，それに対応するベクトル場の積分曲線を多様体に射影したものを考えます．これを *Normal geodesic* といいます．これは，リーマン幾何の場合と同様に，局所的には最短となります．最初，サブリーマン幾何における測地線はこれだけだと思われていましたが，1990 年代に，R. Montgomery らによって局所的にも最短とならないような特殊なものが発見されました．これは *Abnormal geodesic* と呼ばれ，リーマン幾何には現れないサブリーマン幾何特有のもので，注目すべき研究対象です．余接束上に，計量にはよらずに接分布のみから決まる特性方程式が定義され，これをみたす余接束上の曲線を多様体に射影したものを *Abnormal geodesic* と呼びます．Optimal Control Theory における最大値原理によりサブリーマン多様体の最短線は Normal geodesic であるか，Abnormal geodesic のどちらかであることが知られています．そこで，カルタンの分布において， Normal と Abnormal の様子を詳しく調べました．余次元が 2 より小さい接分布に対しては，Abnormal geodesic は現れないので，余次元 2 以上の接分布を対象にしてこれらの例を作ることが今後の課題です．