

## これまでの研究成果のまとめ

黒木慎太郎

現在まで多様体上の変換群を位相幾何的な視点から研究してきました。大きく分けると以下の三つに分類できます。書いてある番号は“List of publications and preprints”の“1.ACCEPTED PAPERS”と“2.PREPRINTS”にある番号に対応しています。

**0.1. トーリックトポロジー.** トーリックトポロジーとはトーラス作用の軌道空間が良い構造を持つ場合に、その作用の代数的な、組み合わせ的な、解析的な、幾何的な、そしてホモトピー論的な側面を研究することの総称のことです。

論文(5)と(8)はその組み合わせ的な側面の研究に当たります。(5)では、ハイパートーラスグラフ(HTG)と言う新しいGKMグラフに類似したグラフのクラスを定義し、そのグラフの同変コホモロジー環構造を研究しました。この論文におけるHTGの同変コホモロジーに関する結果はハイパートーリックに関する結果の拡張とすることができます。(8)では、3次元スモールカバーの手術操作( $b, \sharp^e, \sharp^{eve}$ )が他の手術操作( $\sharp, \natural$ )で構成できることを示しました。これらの操作は3次元多面体上の組み合わせ的な操作とすることができます。この結果から、NishimuraやLü-Yuの3次元スモールカバーに対する構成定理、すなわち3次元スモールカバーは基本となるスモールカバーと手術操作から構成できる、を改良することができます。

論文(4),(6),(7),(9)と(10)はその幾何的な(変換群論的な)側面に当たります。(4),(6),(7)では、等質トーラス多様体と余次元一の拡張作用を持つトーラス多様体を分類しました。特にそのような(擬)トーリック多様体(あるトーラス多様体の中の良いクラス)は複素射影空間の直積上の複素射影束になり、(擬)トーリック多様体のそのような拡張作用は全てMoment-angle多様体上の作用から誘導されてくることが分かりました。更に(9)では、KAISTのChoi氏と共にそのようなトーラス多様体(制限した場合に限りますが)の位相型を決定しました。コホモロジー環と特性類がその場合の位相型を完全に決定します。この結果からトーラス多様体でその軌道空間がホモトピーセルである場合のコホモロジー剛性に関する反例を与える事ができます。(10)では、復旦大のLü氏と共に2次元スモールカバー上の射影束に関する構成定理を示しました。

**0.2. コンパクトリー群の作用の分類.** (3)では、有理コホモロジー複素二次超曲面(有理数係数コホモロジー環が $Q_{2n} \cong SO(2n+2)/SO(2n) \times SO(2)$ と同型になるような多様体)上に余次元一の作用を持って働くコンパクトリー群とその多様体の位相型の分類をしました。結果として、8通りの異なる作用と多様体の対が存在していることが分かりました。特に、複素二次超曲面とは位相型の異なる多様体の一つ、Kollrossの結果( $G/H$ に対する $G$ の部分群 $K$ が余次元一の主軌道を持って作用する場合の分類)には現れない群の作用が一つ存在していることが分かりました。

**0.3. 非コンパクトリー群の可微分作用.** (1)では、 $S^{4(m+n)-1}$ 上の可微分( $C^\infty$ )な $SL(m, \mathbb{H}) \times SL(n, \mathbb{H})$ 作用を $\mathbb{R}^2$ の $S^7$ 上への作用をベクトル場を用いて構成することにより非可算無限個の異なる $C^\infty$ 級作用を構成しました。

(2)では、 $CP(2)$ を複素共役写像で割れば4次元球面になる(よく知られている)事実をUchidaの方法を用いて直接証明して、その事実を用いて $SL(3, \mathbb{R})$ の4次元球面への連続な作用で制限 $SO(3)$ 作用が共役作用になるようなものを構成しました。