今後の研究計画

大田武志

1) 量子 sine-Gordon 模型は，$1+1$ 次元における典型的な量子可解模型の 1 つで，これまでにさまざまな角度から研究がなされてきた。散乱行列や，形状因子 (form factor) については，ブートストラップという手法を用いて決定することができ，それらについて量子群 $U_q(\widehat{sl}_2)$ の表現論の立場から，理解がなされている。

最近，神保道夫氏らによって形状因子の空間の構造とその指標が詳しく調べられ，別の変形パラメータ q' に対応する量子群 $U_{q'}(\widehat{sl}_2)$ が背後に潜んでいることが示された。この 2 つ目の量子群は，形状因子そのものに働くのではなく，形状因子を積分表示したとき，被積分関数の一部,「変形サイクル」と呼ばれる部分にのみ作用する。

また，最初の量子群の変形パラメータ $q=e^{i\pi\tau}$ をモジュラー変換した $\tilde{q}=e^{-i\pi/\tau}$ をパラメータとする第 3 の量子群 $U_{\tilde{q}}(\widehat{sl}_2)$ は，sine-Gordon 模型の Lax 行列と深い関わりをもっていることが知られている。

つまり，少なくとも 3 種類の異なった量子群が，sine-Gordon 模型の背後に潜んでいるのであるが，それらの関係についてはまだよく理解されていない。そこで，L. D. Faddeev の提唱した,「モジュラー・ダブル量子群」という視点から，これらの量子群の関係を研究していきたい。

Faddeev は $U_q(sl_2)$ の場合に「モジュラー・ダブル量子群」を構成し，量子 dilogarithm 関数を用いてその普遍 R 行列を求めた。これを $U_q(\widehat{sl}_2)$ の場合に拡張し，sine-Gordon の対称性をより大きな枠組みで理解することを目指す。

量子 dilogarithm 関数の研究から，R. M. Kashaev が 3 次元双曲空間の「体積予想」にいたったわけで，この研究は，結び目の量子不変量についてもなんらかの示唆をあたえてくれるのではないかと期待している。

さらに，最近，Hikami-Kirillov によって，トーラス結び目の量子不変量がミニマル CFT の指標と関係あることが示された。彼らは，双曲空間が CFT の massive な変形と関係するのではないかという示唆を行っている。

制限 sine-Gordon 模型は，(ある系列の) ミニマル CFT の massive で可積分な変形となっているので，神保らによって構成された指標が，双曲結び目の量子不変量と関係するかどうかも調べていきたいと考えている。

2) Yang-Mills 理論は，さまざまな可解模型と深い関わりを持つ。自己双対 Yang-Mills 方程式は可解な方程式であるし，高エネルギー極限や，特別なヘリシティをもつ散乱振幅，そして Seiberg-Witten 理論など，さまざまな形で可解模型とのつながりが明らかにされてきた。

最近また新たな形で可解模型との関連が判明した。$3+1$ 次元 CFT である $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang-Mills 理論がスピン鎖模型と関係していることが示されたのである。ある特殊な演算子のセクターを考えると，その複合演算子の異常次元行列が，スピン鎖のハミルトニアンと同一視され，行列の対角化に，Bethe 仮説法が用いられた。

$\mathcal{N}=4$ に摂動を加えたとき，この新たな可積分構造がどこまで保存されるか研究していきたい。