これまでの研究の概略

境 圭一
東京大学大学院数理科学研究科 特任研究員，大阪市立大学数学研究所（兼任）所員
ksakai@ms.u-tokyo.ac.jp

キーワード：long knot, little disks operad，配置空間積分，点配置空間，グラフ複体,（純）組みひも群

(1) 概要． 無限遠での挙動があらかじめ指定された埋め込み $f : \mathbb{R}^j \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ を，$\mathbb{R}^n$ 内の **long j-knot** と呼ぶ．long knot 全体のなす集合 $\mathcal{K}_{n,j}$ を C^∞ 位相で位相空間とみなす．私の研究対象は，**空間 $\mathcal{K}_{n,j}$ の位相幾何学的な性質**である．

$\mathcal{K}_{3,1}$ に関する V. Vassiliev の特異点論的な研究や，'Goodwillie calculus' によるホモトピー論的な方法など，$\mathcal{K}_{n,j}$ に関する研究は多岐に渡るが，私は特に operad の作用 [1, 8] により導かれる $\mathcal{K}_{n,j}$ の多重ループ空間のホモトピー型，および Chern-Simons 摂動理論の手法による，グラフを用いた $H^*(\mathcal{K}_{n,j})$ の記述 [2] に注目して研究を進めている．これまでの研究 [3, 4, 5, 6, 7] 等では，(i) $\mathcal{K}_{n,1}$ の二重ループ空間のホモトピー型から導かれる $H_*(\mathcal{K}_{n,1})$ の Poisson 構造の非自明性，(ii) 三価でないグラフによるコホモロジー類の最初の例の構成，(iii) グラフによる $H^*(\mathcal{K}_{n,j})$ の記述の $j > 1$ の場合への拡張，などの仕事を行ってきた．詳細は以下の通りである．

(2) 研究成果．

(2-1) [1] では,「枠つき long knot」の空間 $\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j}$ に対する **little $(j+1)$-balls operad** の作用が構成された．このような作用を持つ連結な空間は $(j+1)$ 重ループ空間のホモトピー型を持ち，そのホモロジー群上には **j-Poisson ブラケット** λ_j が定義される．j-Poisson-ブラケットとは，Leibniz 則を満たす次数つき Lie ブラケットである：

$$\lambda_j : H_p(\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j}) \otimes H_q(\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j}) \longrightarrow H_{p+q+j}(\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j}), \quad \lambda_j(x, yz) = \lambda_j(x, y)z \pm y\lambda_j(x, z)$$

ただし，積 yz 等は，結び目の連結和から誘導されるものである．j-Poisson 代数としての $H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j})$ を調べることで，多重ループ空間としての $\widetilde{\mathcal{K}}_{n,j}$ の性質がわかると考えられるが，これまでは $\mathcal{K}_{3,1}$ の場合を除いては，j-Poisson ブラケットの非自明性すら知られていなかった．この状況を踏まえ，私は次を示した．

定理 1 ([4])**.** $n > 3$ が奇数のとき，$\lambda_1(x, y) \neq 0$ であるような $x, y \in H_*(\widetilde{\mathcal{K}}_{n,1})$ が存在する． □

証明には**グラフによる $H^*_{DR}(\mathcal{K}_{n,1})$ の記述** [2] を用いた．[2] によると，グラフ Γ に付随して，点配置空間をファイバーに持つファイブレーション $C_\Gamma \to \mathcal{K}_{n,1}$ と，C_Γ の上の微分形式が定まり，ファイバー積分によって $\Omega^*_{DR}(\mathcal{K}_{n,1})$ の元 $I(\Gamma)$ を得られる．こうして定まる対応 I は，$n > 3$ ならばグラフ複体 $\mathcal{D}$ から $\Omega^*_{DR}(\mathcal{K}_{n,1})$ へのコチェイン写像となり，三価グラフのコサイクルに対し定まるコホモロジー類は結び目の有限型不変量の高次元化と呼べるものである．私はこの枠組みを利用し，定理 1 の $\lambda_1(x, y)$ の双対にあたるコホモロジー類を構成して定理 1 を示した．これは三価でないグラフコサイクル Γ による最初の非自明な例であり，次を示したことになる．

系 2 ([4])**.** $n > 3$ が奇数のとき，写像 I は三価でないグラフコサイクルに対しても非自明である． □

ここに現れたグラフコサイクル Γ に対しては，$n = 3$ でも非自明なコホモロジー類が定まる．

定理 3 ([6])**.** $I(\Gamma) \in \Omega^1_{DR}(\mathcal{K}_{3,1})$ は閉形式である．$\mathcal{K}_{3,1}$ の各連結成分上の "Gramain cycle" 上で $I(\Gamma)$ を積分した値は，long knot の Casson 不変量に一致する． □

(2-2) [8] では，'Goodwillie calculus' の応用として，$\mathcal{K}_{n,1}$ を点配置空間で近似する記述が得られた．系として，$\mathcal{K}_{n,1}$ への little 2-balls operad の作用が得られる．一方，この近似から，$H_*(\mathcal{K}_{n,1})$ に収束するスペクトル系列が構成される．その E^1 項は **Hochschild 複体**と呼ばれるものに一致し [9]，代数的な意味での little 2-balls operad の作用を許容する（'Deligne 予想'）．私はこれら二通りの operad 作用をホモロジー群のレベルで比較し，次を示した．

定理 4 ([3])**.** 上記のスペクトル系列は Poisson 代数として $H_*(\mathcal{K}_{n,1})$ に収束する． □

これは Deligne 予想に位相幾何学的な解釈の一つを与えるとともに，Poisson 代数構造をスペクトル系列上で計算する手段を与えるものでもある．定理 1 はこの観点からも導かれる．

(2-3) $\mathcal{K}_{n,1}$ の研究に現れた手法は，多くが $\mathcal{K}_{n,j}$ の研究に応用できると期待される．私は (2-1) で述べた配置空間積分の手法を [10] などに倣って拡張し，結び目不変量の新しい定式化を得た．

定理 5 ([5, 7])**.** $n > j \geq 3$ が共に奇数ならば，あるグラフ複体 $\mathcal{D}^*$ からのコチェイン写像 $I : \mathcal{D}^* \to \Omega^*_{DR}(\mathcal{K}_{n,j})$ が存在し，I は $H^{2k(n-j-2)}_{DR}(\mathcal{K}_{n,j})$ $(k \geq 1)$ の非自明な元を与える．$n - j \geq 3$ が奇数の場合も同様の構成により $H^{2n-3j-3}_{DR}(\mathcal{K}_{n,j})$ の元を構成でき，特に $2n - 3j - 3 = 0$ ならば，それは $\mathcal{K}_{6k,4k-1}$ に対する Haefliger 不変量に一致する． □

References

[1] R. Budney, *Little cubes and long knots*, Topology **46** (2007), 1–27.

[2] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, and R. Longoni, *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimensions*, Algebr. Geom. Topol. **2** (2002), 949–1000.

[3] K. Sakai, *Poisson structures on the homology of the space of knots*, Geom. Topol. Monogr. vol. 13, 2008, pp. 463–482.

[4] ———, *Nontrivalent graph cocycle and cohomology of the long knot space*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 1499–1522.

[5] ———, *Configuration space integrals for embedding spaces and the Haefliger invariant*, math:0811.3726.

[6] ———, *Another perturbative description of Casson's knot invariant*, in preparation, draft available at http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~ksakai/index.html

[7] ———, T. Watanabe, *1-loop graphs and configuration space integral for embedding spaces*, in preparation, draft available at the above website.

[8] D. Sinha, *Operads and knot spaces*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 2, 461–486.

[9] V. Tourtchine, *On the other side of the bialgebra of chord diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007), no. 5, 575–629.

[10] T. Watanabe, *Configuration space integral for long n-knots and the Alexander polynomial*, Algebr. Geom. Topol. **7** (2007), 47–92.