

これまでの研究経過

新庄玲子

応募者は、空間グラフ (結び目等を含む) の図式から計算可能な代数的不変量と空間グラフ (結び目等を含む) の幾何的な性質との関連および、それを用いた分類問題に興味を持ち、研究を行っている。以下、これまでの研究成果を述べる。文中の論文番号は研究業績書と一致する。

(1) 空間グラフのグラフホモロジー分類に関する研究 (谷山公規氏との共同研究)

論文 [1] においては、空間グラフの Wu 不変量は、2 つの 1 次元球面の非交和、5 頂点完全グラフ、もしくは 3-3 頂点完全二部グラフに同相な部分グラフに対応する部分空間グラフの絡み数と Simon 不変量のみで決まることを示した。絡み数と Simon 不変量は、ともに図式から簡単に計算ができるので、空間グラフのグラフホモロジー分類が簡単な計算で与えられることになった。また、この結果よりグラフの空間埋め込みの次数 1 の有限型不変量が絡み数と Simon 不変量によって決定されることも分かった。

(2) 空間グラフに含まれる結び目の張る曲面に関する研究 (一部、新國亮氏との共同研究)

K. Kobayashi によって導入された局所自明空間埋め込みに着想を得て、グラフの空間埋め込み (空間グラフ) の (a collection of) spanning surfaces という概念を導入し、研究を行った。空間グラフの spanning surfaces とは、空間グラフに含まれる結び目に張られた異なる境界を持つ互いに内部の交わらない連結でコンパクトな向き付け可能曲面の集合のことである。特に各曲面が円板と同相なとき spanning disks という。論文 [3] では、与えられた空間グラフに対して張ることのできる spanning surface の枚数を上から評価し、さらにそれが上限となることを、その値を円板で実現する空間埋め込みを与えることによって示した。論文 [2] では、含まれる全ての結び目に対応する spanning surfaces が存在するグラフの空間埋め込みをグラフの境界空間埋め込みと定義し、それに関する研究を行った。論文 [3] で与えた評価式より、境界空間埋め込みを持たないグラフがあることが分かるので、始めに境界空間埋め込みを持つグラフの完全な特徴づけを行い、境界空間埋め込みの自己パス変形による分類を与えた。さらに L. Cervantes-R. A. Fenn-T. Shibuya の境界絡み目に関する結果の拡張として、グラフの二つの境界空間埋め込みは自己シャープ変形と呼ばれる局所変形によって互いに移り合うことを示した。

(3) 同じ結び目を表す互いに共役でない既約な組み紐の無限列の構成法

n が 3 より小さいとき、 n 次の組み紐の閉包として表される絡み目に対し、その絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐の共役類は高々 3 つであることが知られている。その一方で、自明な結び目および $(2, p)$ -トラス絡み目 ($p \geq 2$) を閉包として持つ互いに共役でない 4 次の組み紐の無限列の具体例が構成されている。論文 [5] では、結び目不変量と、その値を変える絡み目の局所変形を用い、その局所変形による不変量の差を評価することで、結び目または、ある条件を満たす絡み目を閉包として持つ n 次の組み紐 ($n \geq 3$) と同じ閉包を持つ互いに共役でない $n+1$ 次の組み紐の無限列を構成した。論文 [4] では、ある条件を満たす 4 次の組み紐に対し、次数を上げることなくこのような無限列を既約な組み紐で構成できることを示した。

(4) 結び目と絡み目の図式の補領域に関する研究 (一部、Colin C. Adams 氏と田中 心氏との共同研究)

論文 [6] では、絡み目の図式に関する J. H. Lee と G. T. Jin の結果を空間グラフに拡張し、どの空間グラフも互いに辺の交わらない部分空間グラフへの分解を与えたとき、それぞれの部分空間グラフが許す図式を同時に実現する図式を持つことを示した。さらに [6] の結果を利用し、全ての結び目は奇数辺形がちょうど 2 個の図式を持つことを示せたことより、論文 [9] では、図式に付随する面に着目し、universal sequence を定義し、それに関する考察を中心に行った。狭義単調増加数列 $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ が universal であるとは、全ての結び目と絡み目が、ある n に対して各面が a_n 辺形になっている図式を持つときをいう。これまでに数列 $(3, 4, 5)$ や $(2, 4, 5)$ など universal であることがわかった。また、3 辺形と 4 辺形のみを補領域として持つ図式を持つ結び目は無限個あること、ツイスト結び目は、このような図式を持つことがわかっているが、 $(3, 4)$ が universal であるかはわかっていない。その決定は今後の課題である。