氏名　田中利史

研究成果

私の研究分野は幾何学的トポロジーであり，特に，結び目理論及び 4 次元多様体論を用いた低次元多様体の研究を行っている．私のこれまでの研究は，以下の 8 個のテーマに分類することができる．

1.「結び目コボルディズムと結び目解消数」

近年，Gauge 理論を用い Tom 予想が Kronheimer と Mrowka により解決された．その結果を用いると，擬正結び目の 4 次元種数の公式を得る．一方で位相的 4 次元種数の評価が位相的 G 符号数定理や Freedman の定理を用いて得られる．以上のことから， 4 次元種数と位相的 4 次元種数の差が，任意に与えられた非負整数と一致するような一次独立である結び目の無限族を構成することができた．同様な手法をもちいて，結び目解消数の評価を行っている．特に，最小交点数が 10 である結び目のリストのなかで，それまで知られていなかった **3 個の結び目の結び目解消数を決定することができた**.

2.「リボン結び目と対称和」

1 次元リボン結び目とは，単位 4-球体の中にプロパーかつ可微分に埋め込まれた円板の境界となる結び目である．私は，結び目の対称和という特殊な 1 次元結び目の Jones 多項式の性質を調べることにより，結び目のリボン種数は Jones 多項式の最小次数以上であろう，という **Fiedler の予想（1991 年）に対して無限個の反例を与えた**.
その後の研究として，結び目の対称和をもちいて **2 次元リボン結び目**の特徴づけを行っている．

3.「色付き Jones 多項式と体積予想」

結び目の量子不変量の一種である色付き Jones 多項式と結び目の補空間の体積との関係を示唆しているものが体積予想である．私はスケイン理論を用いて，**2 重化結び目の色付き Jones 多項式に対する公式を得ることができた**.
これは Masbaum のツイスト結び目に対する公式の一般化になっている．その結果として，**もし 2 重化結び目に対して体積予想が正しければ，色付き Jones 多項式は自明な結び目を決定することが分かった**．また，Stoimenow との共同研究においては，色付き Jones 多項式はミュータントな結び目を特徴づけるであろう，という Pzytycki の予想に対する無限個の反例を与えている．

4.「有限型不変量と結び目コボルディズム」

ベッチ数が 1 以上の連結単純グラフクラスパー手術により移りある結び目はリボンコンコーダントであることが知られていた．私は，この結果を，各**連結成分のベッチ数が 1 以上のグラフクラスパー手術により移りある結び目**に対して拡張した．

5.「極大 Thurston-Bennequin 数」

Thurston-Bennequin 数は 3 次元ユークリッド空間の標準的接触構造にいたるところ接している，Legendrian 結び目の不変量である．位相的手法を用いると，それは Kauffman 多項式の次数による上限をもつことがわかる．特に正結び目に対しては，位相形を固定したときの **Thurston-Bennequin 不変量の最大値が Kauffman 多項式の次数に一致する**ことが分かった．また，同様な結果を交代絡み目に対して得ている．　その結果の応用として，2001 年の **Ferrand の論文で述べられている，交代結び目の HOMFLY 多項式と Kauffman 多項式との次数の間には不等号が成り立つであろう，という予想を肯定的に解決した**.

6.「4 次元多様体のエキゾチックな微分構造」

4 次元トポロジーの分野での重要な結果のひとつが，任意の Casson ハンドルが標準的 2-ハンドルに位相同型である，という Freedman の結果である．なぜなら，その結果は 4 次元 Poincaré 予想の解決に用いられているからである．Donaldson の定理を用いると，標準的 2-ハンドルに微分同相でないような Casson ハンドルの存在を証明することができる．私は Khovanov ホモロジーから定義される Rasmussen 不変量をもちいて，Casson ハンドルの無限族の存在や 4 次元 Euclid 空間の任意の非コンパクト部分多様体がエキゾチックな微分構造を許容することの Gauge 理論を用いない別証明を与えた．また，一方で Donaldson の定理を用いることで，**複素射影平面の無限個の連結和の任意の非コンパクトな部分多様体がエキゾチックな微分構造を持つことを示した**.

7.「空間グラフの円周型埋め込み」

空間グラフとはグラフの 3 次元空間への埋め込みである．Conway と Gordon により，7 頂点完全グラフの全ての埋め込みには非自明な結び目が含まれることが示されている．グラフの直線型埋め込みとは，全ての辺を直線の一部に移す埋め込みである．根上により，与えられた絡み目に対し，それを含むような完全グラフの直線型埋

め込みが存在することが示されている．私は，小畑との共同研究において，トーラス結び目 $T(2n-5,2)$ を含む $2n-1$ 頂点完全グラフの直線的埋め込みが存在することを示した．一方で，我々はグラフの全ての辺を円周の一部に移すような埋め込みを考えた．我々は結び目に対して，このような埋め込みを構成する円弧の個数の最小数として，結び目の不変量を定義し，これを結び目の円周型数と呼ぶことにした．そして，**円周型数が 3 であることと結び目が三葉結び目であることが同値であることを示した**．また，その結果として八の字結び目の円周型数は 4 であることが分かった．

8.「結び目のゴルディアン距離」

2 つの結び目のゴルディアン距離とは，一方の結び目を交差交換して他方の結び目が得られるときの交差交換数の最少数のことである．私は**ジョーンズ多項式及び Q 多項式を用い結び目のゴルディアン距離を評価するための基準を与えた**．この結果は **Traczyk 及び Stoimenow の結果の拡張となっている**．一方で Rasmussen 不変量をもちいてゴルディアン距離の下からの評価式を与えた．これらの結果を用いることでいくつかの結び目の対にたいして，これまで知られていなかったゴルディアン距離を求めることが出来た．