今後の研究計画

辻井 健修

任意標数の代数閉体上の簡約代数群のリー環における定理として、次が知られている。

(1) ベキ零軌道の個数は有限である。

(2) ベキ零元を含むボレル部分代数の為す多様体の次元の 2 倍とベキ零軌道の次元の和は、ルートの数に等しい。

悪い標数の場合は、共に具体的な計算を行うことで証明された事実である。そこで、悪い標数の場合を含めた統一的証明を与えられないかということについて興味を持っている。

まず、(1) について詳しく説明をしたい。ベキ零軌道の個数が有限であることが分かれば、既約性を用いることで、正則ベキ零軌道の存在、任意の放物型部分群の Richardson 元の存在、また、これらに付随する諸定理が証明できる。したがって、具体的な数が分からなくても、有限であることが示されることは大変重要なのである。良い標数の場合に関しては、40 年以上前に Richardson により (1) が証明されている。更に、Bala-Carter の定理、及び、Pommerening の定理により、具体的な数も知られている。ところが、悪い標数の場合は、B 型,C 型,D 型を Hesselink、G 型を Stuhler、E 型,F 型を Spaltenstein がベキ零軌道の数をそれぞれ計算し、1985 年にようやく解決された。特に、ルート系が E_7,E_8 の場合は、コンピューターにある計算をさせての結果である。具体的な個数を調べる上では理にかなっているとは思うが、有限かどうかは、場合分けをせずに証明ができないかという疑問が生じる。
一方、(2) からは、ベキ零軌道の次元が偶数であること、また、軌道多様体がどのように構成されるかが導かれる。更に、Springer 表現の理論と合わせることで、ベキ零軌道がワイル群の既約表現で分類されるという重要な結果が得られる。良い標数の場合は (2) は Pommerening の定理を用いることで証明できるが、悪い標数の場合は、(1) 同様、個別に計算をして結果が得られている状況なので、こちらも是非解決したいと考えている。なお、(2) が証明できれば同時に (1) も証明できる。

以上 2 つの統一的証明の研究に加えて、更に、新たな問題の研究にも力を入れたいと考えている。代数群の表現論は、様々な分野の理論が参入していることもあり、最先端の研究を理解するには、更に勉強を進める必要があるが、進歩の余地が多くあるので是非取り組んでいきたい。