ある手錠型空間グラフの初等イデアルについて

池崎　茂雄（大阪市立大学）

2009年 1月24日

Definition

G：有限グラフ

$f : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$, 埋め込み

$K := f(G)$ を G の空間グラフという.

Definition

$K \subset \mathbb{R}^3$：空間グラフ

$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, 射影

$\pi(K)$ は 2 重点しかもたず, それらは全て横断的に交わる 2 辺の 2 重点とする.

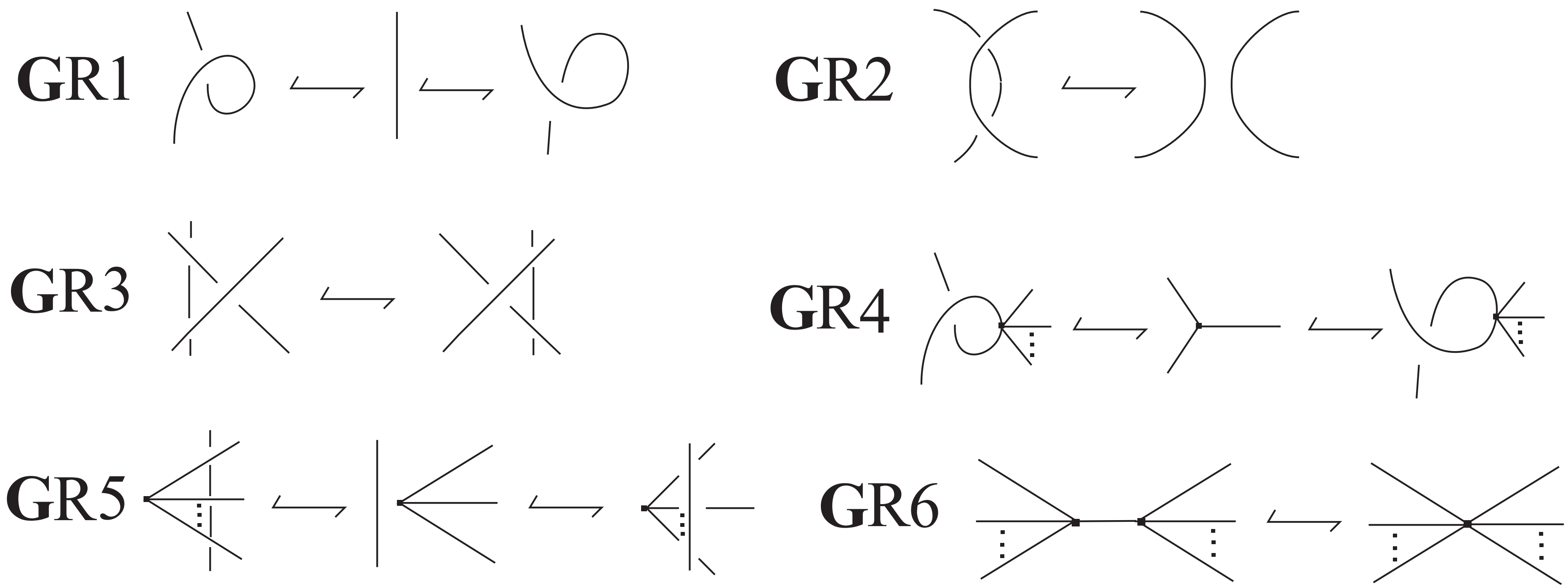
$\pi(K)$ の 2 重点に上下の情報を加えたものを K の図式という.

Definition

$\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$: 空間グラフ

$\boldsymbol{D}$: $\boldsymbol{K}$ の図式

次のような局所変形を空間グラフのReidemeister変形という.



Definition

$\boldsymbol{K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3}$: 空間グラフ

(1) $\boldsymbol{K_1}$と$\boldsymbol{K_2}$が同値$\boldsymbol{(K_1 \approx K_2)}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{K_1}$と$\boldsymbol{K_2}$が$\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$内のイソトピーで移り合う.

(2) $\boldsymbol{K_1}$と$\boldsymbol{K_2}$が近傍同値$\boldsymbol{(K_1 \overset{N}{\approx} K_2)}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\boldsymbol{N(K_1)}$と$\boldsymbol{N(K_2)}$が$\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$内のイソトピーで移り合う.

ここで, $\boldsymbol{N(K_i)}$は$\boldsymbol{K_i}$の管状近傍である.

<u>Fact</u>

$\boldsymbol{K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3}$：空間グラフ

$\boldsymbol{D_1, D_2}$：$\boldsymbol{K_1, K_2}$の図式

(1) $\boldsymbol{K_1 \approx K_2}$

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{D_1}$と$\boldsymbol{D_2}$がReidemeister変形GR1 $\sim$ GR5を有限回使って互いに移り合う.

(2) $\boldsymbol{K_1 \overset{N}{\approx} K_2}$

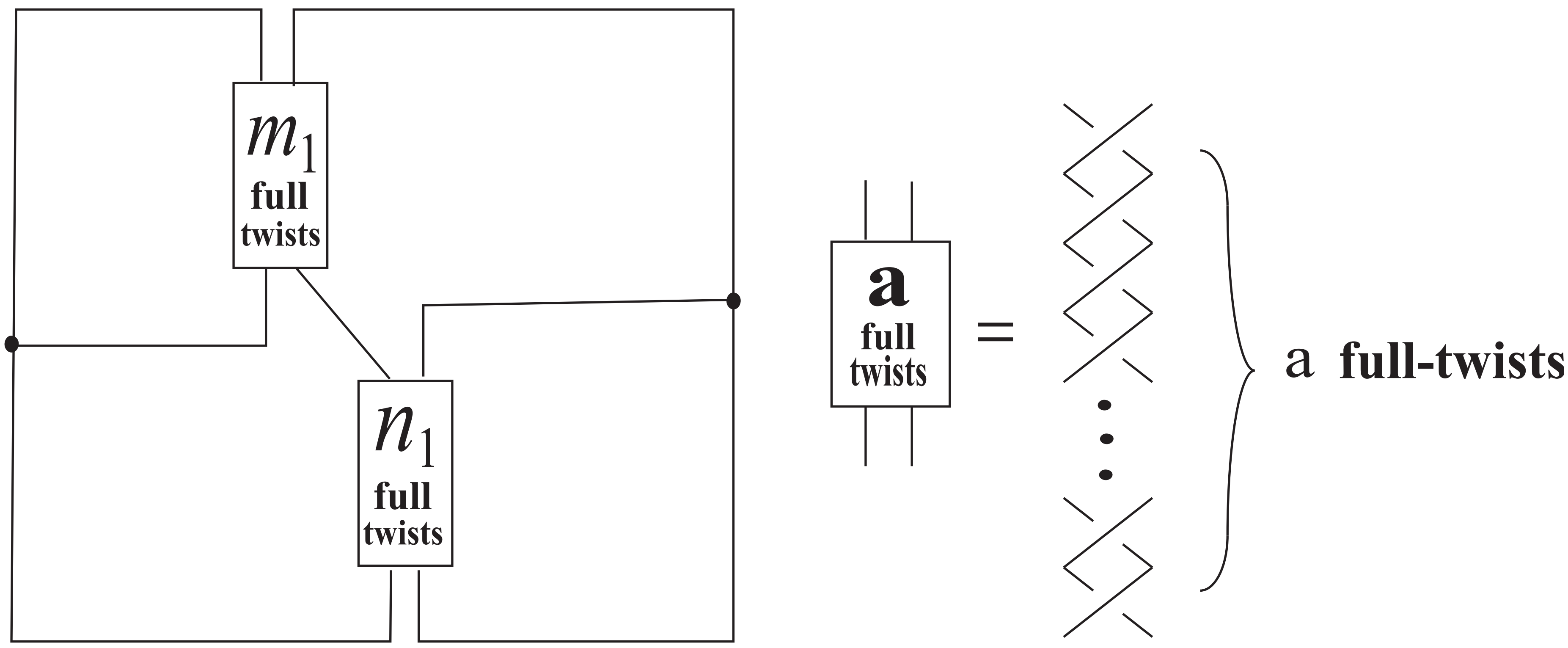
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{D_1}$と$\boldsymbol{D_2}$がReidemeister変形GR1 $\sim$ GR6を有限回使って互いに移り合う.

Definition

$\boldsymbol{m_1,\ n_1 \in \mathbb{Z}_{>0}}$

下図の図式をもつ$\mathbb{R}^3$内の手錠型空間グラフを$\boldsymbol{K(m_1; n_1)}$とする.

$\boldsymbol{K(m_1; n_1) = K(n_1; m_1)}$



Main theorem

$m_1,\ n_1,\ m'_1,\ n'_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$

$K := K(m_1; n_1),\ K' := K(m'_1; n'_1)$

次が成り立つ.

$$(1)\ E_d(K) = \begin{cases} (0) & (d = 0,\ 1) \\ (x^{m_1} + y^{n_1} - 1) & (d = 2) \\ (1) = \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] & (d \geq 3) \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} K \approx K' & ((m_1, n_1) = (m'_1, n'_1) \text{ or } (n'_1, m'_1)) \\ K \not\approx K' & (\text{その他}) \end{cases}$$

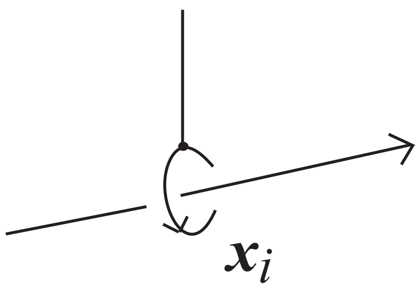
$$(3)\ \begin{cases} K \overset{N}{\approx} K' & ((m_1, n_1) = (m'_1, n'_1) \text{ or } (n'_1, m'_1)) \\ K \overset{N}{\not\approx} K' & (\text{その他}) \end{cases}$$

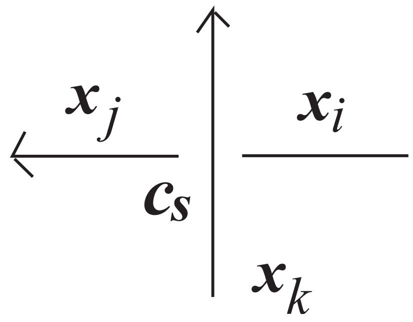
Definition (Wirtinger表示)

$K \subset \mathbb{R}^3$：空間グラフ，D：Kの図式

$x_1, \cdots, x_n$：Dの上道

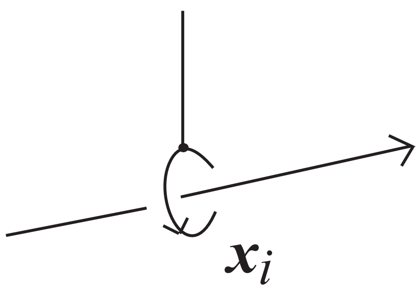
Dの交点$c_1, \cdots, c_p$に対して次のように$r_1, \cdots, r_p$を対応させる.

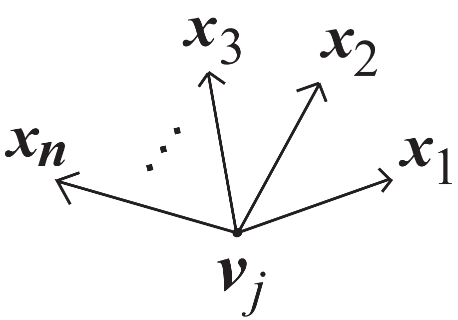




r_s： $x_i^{-1} x_k x_j x_k^{-1}$

Dの頂点$v_1, \cdots, v_q$に対して次のように$s_1, \cdots, s_q$を対応させる.





s_j： $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$

Theorem

$\boldsymbol{K} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$：向き付けられた空間グラフ

$\boldsymbol{\pi_1}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{K})$ は表示 $(\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n} \mid \boldsymbol{r_1}, \cdots, \boldsymbol{r_p}, \boldsymbol{s_1}, \cdots, \boldsymbol{s_q})$ を群表示としてもつ.

このとき，表示 $(\boldsymbol{x_1}, \cdots, \boldsymbol{x_n} \mid \boldsymbol{r_1}, \cdots, \boldsymbol{r_p}, \boldsymbol{s_1}, \cdots, \boldsymbol{s_q})$ を $\boldsymbol{\pi_1}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}-\boldsymbol{K})$ の図式 $\boldsymbol{D}$ に関するWirtinger表示という.

Definition

G : 有限表示群，　$\mathbb{Z}G$: $\mathbb{Z}$上のGの群環

任意の$g_i \in G$に対して，次の(1), (2), (3)を満たす関数

$$\frac{\partial}{\partial g_i} : G \longrightarrow \mathbb{Z}G$$

をg_iに関する自由微分という．

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial g_i}(g_j) = \delta_{ij} \quad \text{ここで，} \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial g_i}(e) = 0 \quad (e : \text{単位元})$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial g_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial g_i}(u) + u\frac{\partial}{\partial g_i}(v) \quad (\forall u, v \in G)$$

Definition

$G := \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_m \rangle$

$H := G/[G, G]$: Gの可換化群

$F(\mathrm{X}) := \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$

$\gamma : F(\mathrm{X}) \longrightarrow G$を自然な準同型写像(i.e. $\gamma(x_i) = x_i$)とし,

$\alpha : G \longrightarrow H$をアーベル化写像とする.

$$\mathbb{Z}F(\mathrm{X}) \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F(\mathrm{X}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H.$$

GのAlexander行列$A(G)$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad A(G) = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \alpha \circ \gamma \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$$

Definition

$\boldsymbol{R}$：乗法単位元$\mathbf{1}$をもつ可換環

$\boldsymbol{A}$：$\boldsymbol{R}$の元を成分にもつ$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$行列

$\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}_{\geq \mathbf{0}}$

$\boldsymbol{A}$の$\boldsymbol{d}$番目の初等イデアル$\boldsymbol{E_d(A)}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\boldsymbol{E_d(A)} = \begin{cases} \boldsymbol{A}\text{の}\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d})\,\text{小行列式全体が生成するイデアル} \\ \hfill (\mathbf{0}<\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}\leq\boldsymbol{m}) \\ (0) \quad (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}>\boldsymbol{m}) \\ (1) = \boldsymbol{R} \quad (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}\leq 0) \end{cases}$$

Theorem

G : 有限表示群

任意の負でない整数dに対して，GのAlexander行列のd番目の初等イデアルはGの表示によらず一意に定まる．

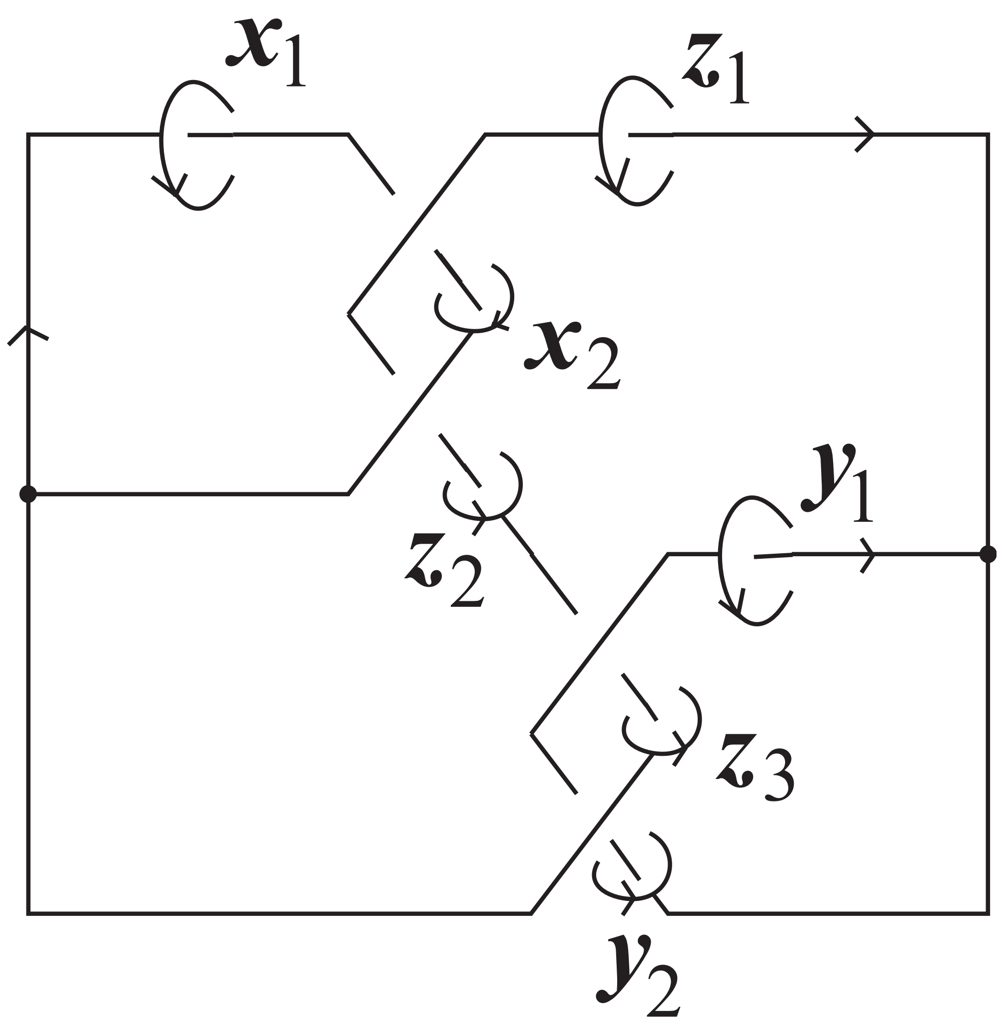
Remark

$K \subset \mathbb{R}^3$: 空間グラフ

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$のAlexander行列のd番目の初等イデアル$E_d(K)$は近傍同値類の不変量である．

Main theorem の証明の概略

(1) $K := K(1;1)$ の初等イデアル $E_d(K)$ を計算する.



各交点と各頂点のまわりの関係子:

$$\begin{cases} x_2^{-1} z_1 x_1 z_1^{-1} \\ z_2^{-1} x_2^{-1} z_1 x_2 \\ z_3^{-1} y_1 z_2 y_1^{-1} \\ y_2^{-1} z_3 y_1 z_3^{-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2^{-1} y_1 z_1 \\ z_3 x_2^{-1} x_1 \end{cases}$$

$\therefore\ G(K)$ の表示は

$$\left(x_1,\ y_1,\ z_1 \;\middle|\; (y_1 R) y_1^{-1} (y_1 R)^{-1} y_1 z_1 \right), \quad R = (z_1 x_1^{-1}) z_1 (z_1 x_1^{-1})^{-1}$$

初等イデアル $E_d(K)$ を求める.

$$G(K) := \left\langle x_1,\ y_1,\ z_1 \ \middle|\ (y_1R)y_1^{-1}(y_1R)^{-1}y_1z_1 \right\rangle$$

$$r := (y_1R)y_1^{-1}(y_1R)^{-1}y_1z_1$$

$$\mathbb{Z}F_3 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j}} \mathbb{Z}F_3 \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}G(K) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}H$$

ここで, $H := G(K)/[G(K), G(K)]$

$$\begin{cases} \alpha \circ \gamma(x_1) = x \\ \alpha \circ \gamma(y_1) = y \\ \alpha \circ \gamma(z_1) = z \end{cases}$$

$\boldsymbol{A(G(K)) = (a_{11},\ a_{12},\ a_{13})}$: $\boldsymbol{G(K)}$ の Alexander 行列

$$\boldsymbol{a_{11} = \alpha \circ \gamma \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \right) = 0}$$

$$\boldsymbol{a_{12} = \alpha \circ \gamma \left(\frac{\partial r}{\partial y_1} \right) = 0}$$

$$\boldsymbol{a_{13} = \alpha \circ \gamma \left(\frac{\partial r}{\partial z_1} \right) = x^{-1}y - x^{-1} + 1}$$

$$\boldsymbol{\therefore\ A(G(K)) = (0,\ 0,\ x^{-1}y - x^{-1} + 1)}$$

$$\boldsymbol{\therefore\ E_d(K) = \begin{cases} (0) & (d = 0,\ 1) \\ (x + y - 1) & (d = 2) \\ (1) = \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] & (d \geq 3) \end{cases}}$$

同様にして一般に，

$G(K)$の表示は

$$\left(x_1,\ y_1,\ z_1 \;\middle|\; (y_1R)^{n_1}y_1^{-1}(y_1R)^{-n_1}y_1z_1 \right)$$

但し，$R = (z_1x_1^{-1})^{m_1}z_1(z_1x_1^{-1})^{-m_1}$

$G(K)$の初等イデアル$E_d(K)$は

$$E_d(K) = \begin{cases} (0) & (d = 0,\ 1) \\ (x^{m_1} + y^{n_1} - 1) & (d = 2) \\ (1) = \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] & (d \geq 3) \end{cases}$$

(3) $\quad K \overset{N}{\approx} K'$ とする.

$G(K) \cong G(K') \Longrightarrow H \cong H'$

ここで, $H' := G(K')/[G(K'), G(K')]$

$$\begin{cases} x, y \ : \ H \text{の基底} \\ x', y' \ : \ H' \text{の基底} \end{cases}$$

$K \overset{N}{\approx} K'$ かつ $H \cong H'$ より, 基底 x, y と基底 x', y' の変換は次のようになる.

$$\begin{cases} x' = x^t y^s \\ y' = x^u y^v \\ tv - su = \pm 1 \quad (t, s, u, v \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$G(K) \cong G(K')$より,

$$
\begin{aligned}
& E_2(K) = E_2(K') \\
& \iff (x^{m_1} + y^{n_1} - 1) = \left((x^t y^s)^{m'_1} + (x^u y^v)^{n'_1} - 1\right) \\
& \iff \exists \varepsilon \in \{+1, -1\}, \exists a, b \in \mathbb{Z} \\
& \qquad s.t. \quad (x^t y^s)^{m'_1} + (x^u y^v)^{n'_1} - 1 = \varepsilon x^a y^b (x^{m_1} + y^{n_1} - 1)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$x^{tm'_1} y^{sm'_1} + x^{un'_1} y^{vn'_1} - 1 = \varepsilon x^a y^b (x^{m_1} + y^{n_1} - 1)$$

をx, yについての恒等式とみる.

明らかに$\varepsilon = +1, a = 0, b = 0$である. このとき,

$$x^{tm'_1} y^{sm'_1} + x^{un'_1} y^{vn'_1} - 1 = x^{m_1} + y^{n_1} - 1$$

$$\Longrightarrow \text{(i)} \begin{cases} tm_1' = m_1 \\ sm_1' = 0 \\ un_1' = 0 \\ vn_1' = n_1 \end{cases} \quad \textbf{または} \quad \text{(ii)} \begin{cases} tm_1' = 0 \\ sm_1' = n_1 \\ un_1' = m_1 \\ vn_1' = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{(i)} \begin{cases} m_1 = m_1' \\ \\ n_1 = n_1' \end{cases} \quad \textbf{または} \quad \text{(ii)} \begin{cases} m_1 = n_1' \\ \\ n_1 = m_1' \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} K \overset{N}{\approx} K' & \Big((m_1, n_1) = (m_1', n_1') \text{ or } (n_1', m_1')\Big) \\ \\ K \overset{N}{\not\approx} K' & (\textbf{その他}) \end{cases}$$

■