Quandle homotopy invariant について

野坂　武史

京都大学　数理解析研究所　修士２回

Introduction

X: 有限 quandle

L: link

(Fenn-Rourke-Sanderson, 1996*)

quandle homotopy invariant

$$\Xi_X(L) \quad \in \quad \mathbb{Z}[\,\pi_2(BX)\,]$$

導出 ↙ 導出 ↓ 導出 ↘

quandle cocycle invariant

(Carter -Jelsovsky -Kamada -Langford -Saito, 1999*)

generalized cocycle invariant

(Carter -Elhamdadi -Graña -Saito, 2004)

shadow cocycle invariant

(Carter -Kamada -Saito, 2001)

(Rourke -Sanderson, 2000*)

定理 A 有限 quandle X について

$\pi_2(BX)$ は有限生成

系 有限 quandle X について

$\{$ 各種の cocycle 不変量 $\}$ の基底は有限個

定理 B 有限連結 quandle X について

$\pi_2(BX)$ は有限アーベル群

定理 C

(1) 素数 dihideral quandle X について

$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$\forall\text{cocycle 不変量} = \text{const.}\begin{pmatrix}\text{望月 3-cocycle の} \\ \text{cocycle 不変量}\end{pmatrix}$$

(2) 四面体 quandle X について

$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\forall$cocycle 不変量 $=$

$$= \text{const.}\begin{pmatrix}\text{3-cocycle } \phi_3 \\ \text{の不変量}\end{pmatrix} + \text{const.}\begin{pmatrix}\text{2-cocycle } \phi_2 \\ \text{の不変量}\end{pmatrix}$$

(3)Knot quandle Q_K について $\pi_2(BQ_K) \cong \mathbb{Z}$

目次

Quandle $(X,*)$ とは

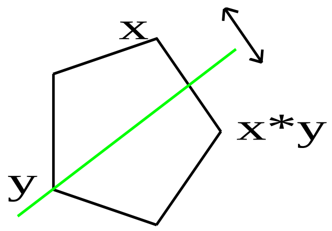
$$\begin{cases} X & : \text{集合} \\ * & : \ X \times X \longrightarrow X \end{cases}$$ で次をみたすもの

- ${}^{\forall} x \in X, \qquad x * x = x$
- ${}^{\forall} x, y \in X, \qquad x = {}^{\exists !} z * y$
- ${}^{\forall} x, y, z \in X, \quad (x*y)*z = (x*z)*(y*z)$

Dihedral quandle とは

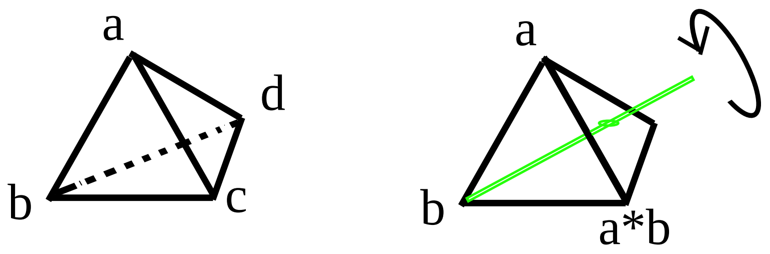
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \qquad x * y \overset{\text{def}}{=} 2y - x$

p : 奇素数,



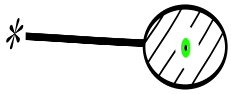
四面体 quandle とは

$\mathbb{Z}[T]/(2, T^2+T+1), \quad x*y \overset{\text{def}}{=} Tx+(1-T)y$

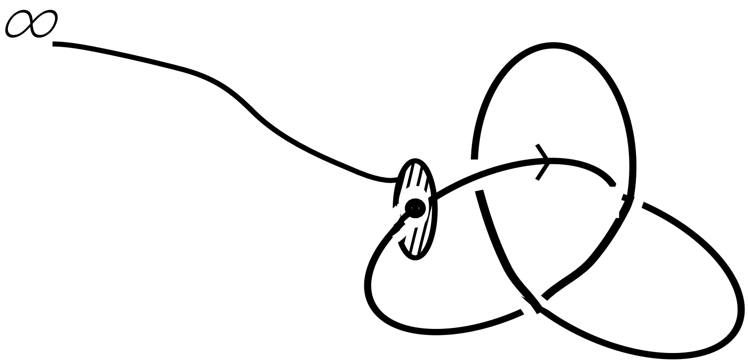


L: Link

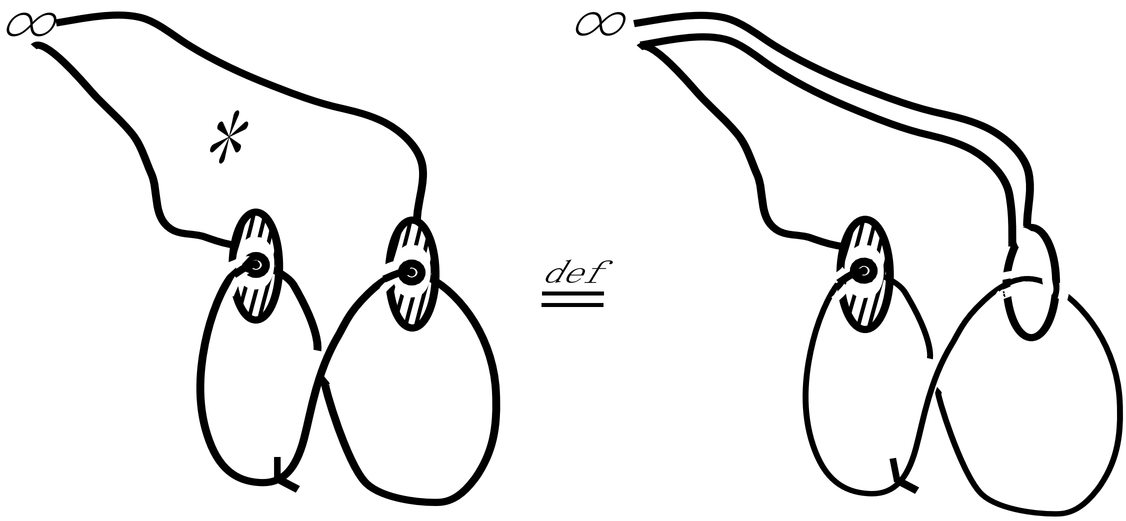
Link quandle とは

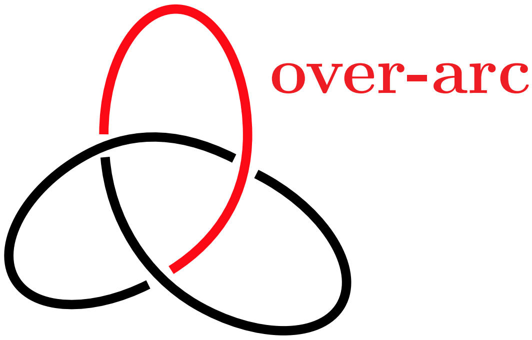
$Q_L \overset{\text{def}}{=} \{$ 

$\longrightarrow (S^3, L)\}/\text{homotopy}$



2 項演算



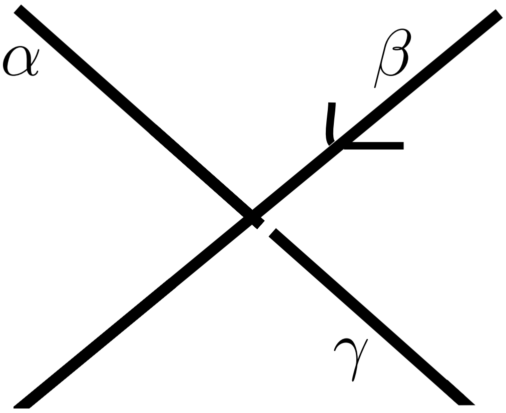


X: quandle
D: oriented link diagram

D の X-**coloring** とは

写像 $C : \{D \text{ の over-arcs }\} \to X$

で各交点で次をみたすもの



$$C(\alpha) * C(\beta) = C(\gamma)$$

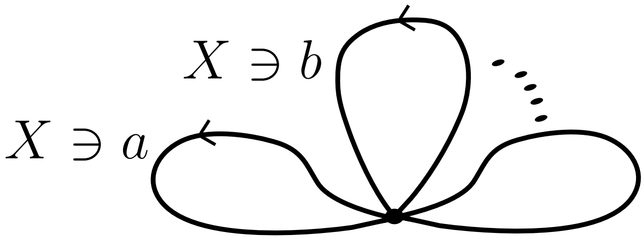
<u>性質</u>　D が link L の diagram のとき

- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Qnd}}(Q_L, X) \xrightarrow{1:1} \{D \text{ の } X\text{-coloring}\}$

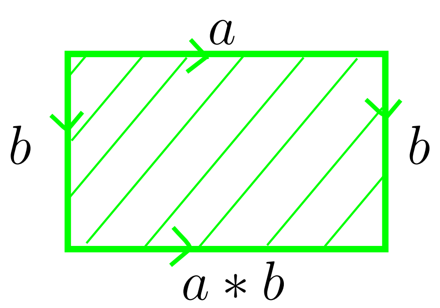
- 有限 quandle X について
「D の X-coloring の個数」は L の不変量

Quandle space $BX \overset{def}{=} \bigcup_{d}$(d-skelton)

1-skeleton

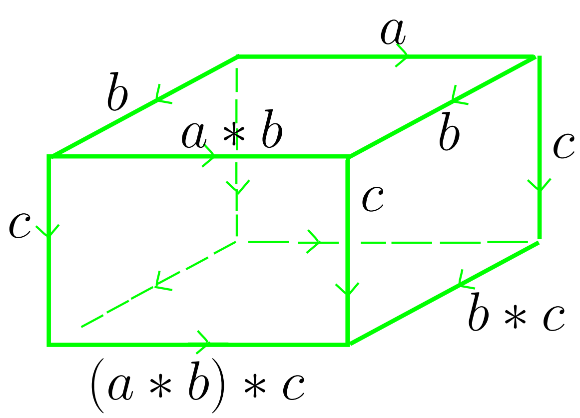


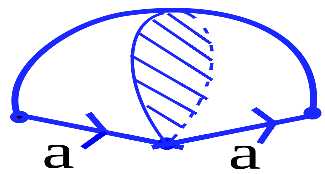
2-skelton $=$ 1-skeleton$\cup$((a,b)-$cells$)



3-skelton

$=$ 2-skeleton $\cup$((a,b,c)-$cells$)$\cup$((a,a)-cell に貼る 3-$cell$)





注「(a,a)-cell に貼る 3-cell)」を抜くと Fenn-Rourke-Sanderson の rack space である.

([Fenn-Rourke-Sanderson] の modification)

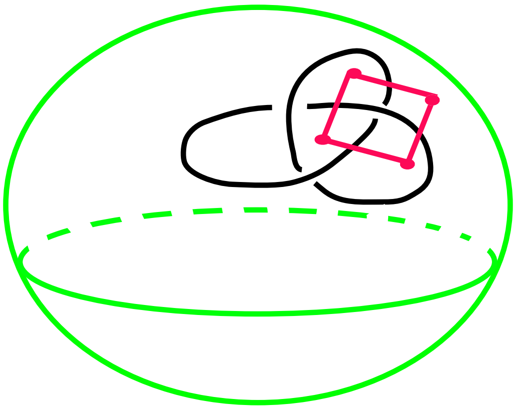
Quandle homotopy invariant

$$\Xi_X(L;C) \stackrel{\text{def}}{=} [\xi_{D,C}] \in \pi_2(BX)$$

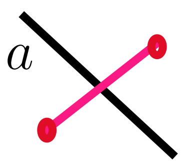
$$\Xi_X(L) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{coloring } C} \Xi_X(L;C) \in \mathbb{Z}[\pi_2(BX)]$$

ここで、$\begin{cases} \text{図式 } D \\ X\text{-coloring } \ C \end{cases}$ に対して

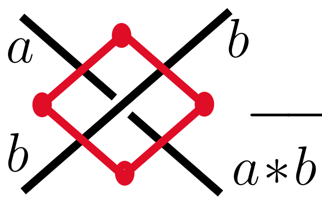
$\xi_{D,C}: \quad S^2 \longrightarrow BX$ を次のように定める



 $\longrightarrow$ 0-cell



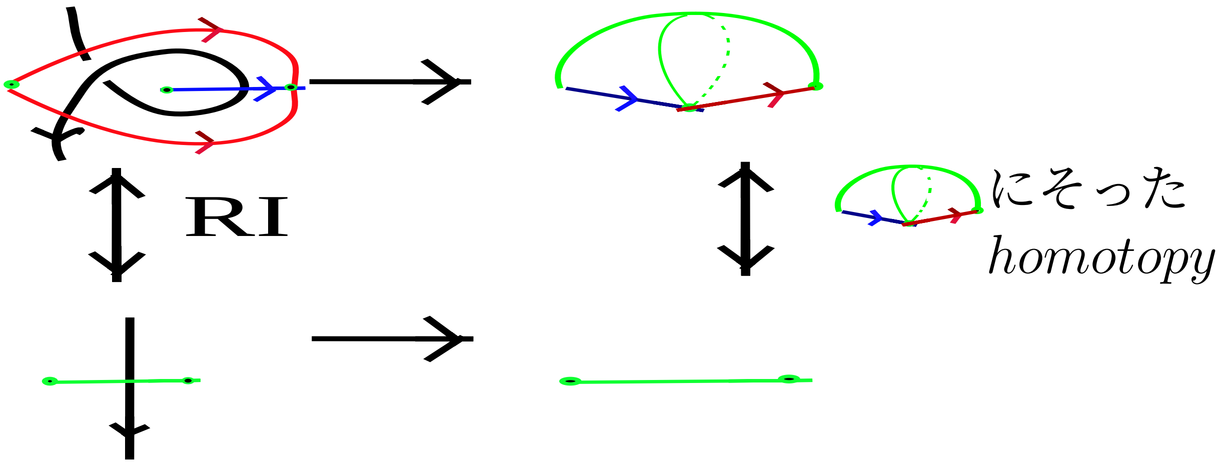
$\longrightarrow$ (a)-cell



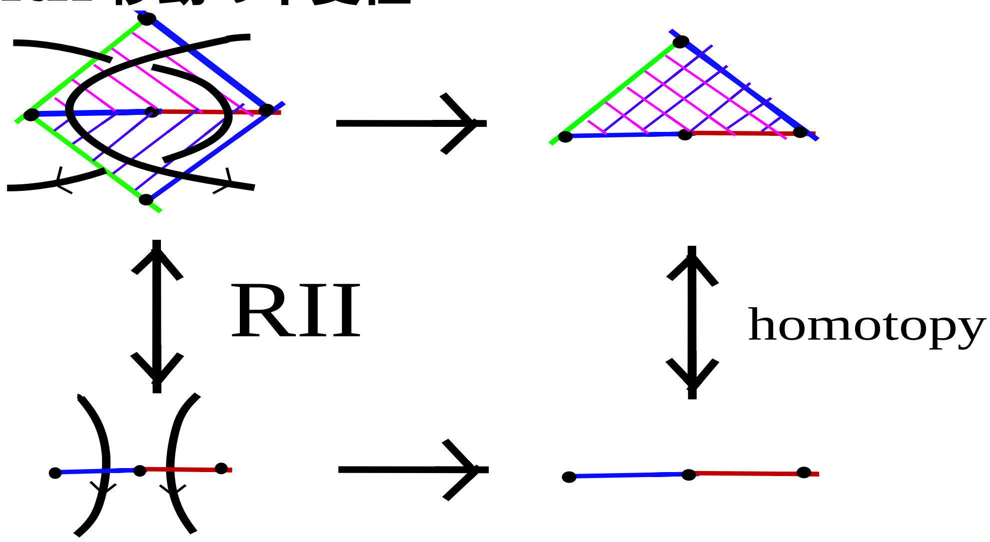
$\longrightarrow$ (a,b)-cell

homotopy invariant の不変性

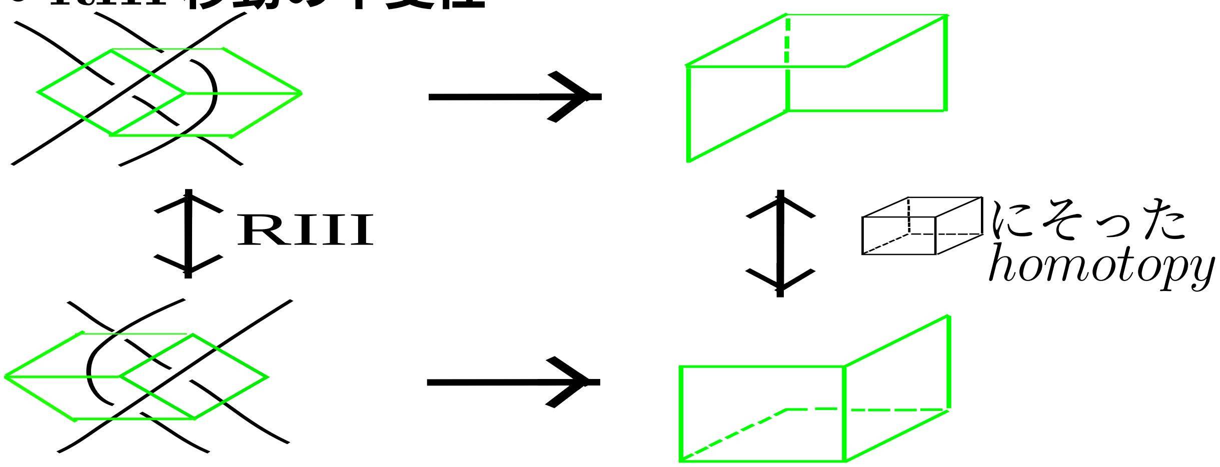
- **RI 移動の不変性**



- **RII 移動の不変性**



- **RIII 移動の不変性**



§2

Fact 1 連結 CW-複体 W について

$\pi_1(W) \curvearrowright \pi_2(W)$ の作用が自明のとき

$$H_3\big(\pi_1(W)\big) \xrightarrow[\text{転入射}]{} \pi_2(W) \xrightarrow[\substack{\text{Hurewicz}\\ \text{準同型}}]{} H_2(W) \quad \text{(完全系列)}$$

Fact 2 (Fenn- Rourke-Sanderson)

Quandle X について

$\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_2(BX)$ の作用は自明

定理 A の証明の outline

Facts 1,2 $\Longrightarrow$ $^\exists$ 次の完全系列

$$\underbrace{H_3\big(\pi_1(BX)\big)}_{\text{有限生成}} \longrightarrow \pi_2(BX) \longrightarrow \underbrace{H_2(BX)}_{\text{有限生成}}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$\pi_1(BX)$ は有限表示 $\qquad$ BX は有限複体

$$\Nwarrow \qquad \Nearrow$$

X は有限

$\therefore$ $\pi_2(BX)$ は有限生成 $\square$

Fact 3(Etingof-Graña)
連結 quandle X について, $H_2(BX;\mathbb{Q}) \cong 0$.

Fact 4(Soloviev)
有限連結 quandle X について $\pi_1(BX) \cong$ (有限群) $\ltimes \mathbb{Z}$

Fact 5 有限群 G に対して, $H_*(G;\mathbb{Q}) \cong 0$

定理 B の証明の outline

$\exists$ 次の完全系列

$$\begin{tikzcd} H_3(\pi_1(BX);\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_2(BX)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r] & H_2(BX;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\ 0 & & 0 \end{tikzcd}$$

$\Nwarrow$ スペクトル系列をつかった計算

Facts 4, 5
X は有限連結

$\Nearrow$ Fact 3
X は有限連結

$$\therefore \pi_2(BX)\otimes\mathbb{Q} \cong 0$$

$\therefore \pi_2(BX)$ は有限アーベル群 $\qquad \square$

注意 一般に m を X の連結成分とすると,

$$\frac{m(m-1)}{2} \le \dim_{\mathbb{Q}}(\pi_2(BX)\otimes\mathbb{Q}) \le \frac{m(m-1)(m+4)}{6}$$

Quandle cocycle 不変量 (Carter-Jelsovsky-Kamada -Langford-Saito)

A : アーベル群

$\forall\phi \in H^*(BX; A_\rho)$ $(* = 2,3)$ における

quandle cocycle 不変量とは,

$\Phi_\phi(L) \in \mathbb{Z}[A]$ に値を持つ不変量である.

Fact (Rourke-Sanderson, Carter-Kamada-Saito)

$\mathbb{Z}$-代数準同型 $^\exists F : \mathbb{Z}[\pi_2(BX)] \longrightarrow \mathbb{Z}[A]$ で

$$F(\Xi_X(L)) = \Phi_\phi(L) \quad \in \mathbb{Z}[A]$$

定理 A の系

有限 quandle における quandle cocycle 不変量の生成元は高々有限個である:

$$\mathrm{Hom}(\pi_2(BX), A) \text{ は有限生成である.}$$

諸性質 (証明省く)：

命題 1. (1)(連結和の公式)

X : 連結 quandle

$X \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \quad (x \mapsto (\bullet * x))$ は単射

(e.g. Alexander quandle $\mathbb{Z}[T^{\pm}]/(p, h(T)) \quad (h(1) \neq 0)$)

K_1, K_2 : 結び目.

$$\Xi_X(K_1 \sharp K_2) = \frac{1}{|X|} \Xi_X(K_1) \cdot \Xi_X(K_2) \in \mathbb{Z}[\pi_2(BX)]$$

(2)(鏡像の公式)

X : 有限 quandle. L :link

$$\Xi_X(-L^*) = \sum_{C \in \mathrm{Hom}(Q_L, X)} \Xi_X(L; C)^{-1}$$

※ 以上は quandle cocycle 不変量でも成立する.

※ 同じ不変量を持つ knot を無数に構成できる.

§4

定理 C (1)
奇素数 dihedral quandle X について

- $\pi_2(BX) \;\cong\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
  $\Xi_X\big(T(2,p)\big) \mapsto 1$
- ${}^\forall$cocycle 不変量 $=$ const. $\left(\begin{array}{c}\text{望月 3-cocycle の}\\ \text{cocycle 不変量}\end{array}\right)$

<u>証明の outline</u>

${}^\exists$ 次の完全系列

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\pi_1(BX);\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi_2(BX) & \longrightarrow & H_2(BX;\mathbb{Z}) \\ \| & & & & \| \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ $\pi_1(BX) \cong \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
(Huebschmann)

$\Leftarrow$ [Mochizuki]

$$\therefore \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{{}^\exists\text{全射}} \pi_2(BX)$$

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(BX) & \xrightarrow[]{\substack{\text{Mochizuki}\\ \text{3-cocycle}}} & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ \Xi_X(T(2,p)) & \longmapsto & \widetilde{\Phi_\phi}(T(2,p)) = 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad \pi_2(BX) \;\cong\; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \qquad \square$$

定理C (2)

四面体 quandle $X = \mathbb{Z}[T^{\pm}]/(2, T^2+T+1)$

$$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X(3_1) \longmapsto 1$$

$$\Xi_X(4_1) \longrightarrow 1$$

証明の outline

∃ 次の完全系列

$$\begin{array}{ccccc} H_3(\pi_1(BX);\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi_2(BX) & \longrightarrow & H_2(BX;\mathbb{Z}) \\ \| & \nwarrow\!\!\!\!\nwarrow & & & \| \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & \pi_1(BX) \cong \mathbb{Z} \rtimes A_4 & & & \end{array}$$

$\therefore\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_2(BX) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (完全系列)

$$\langle \cdot, \phi_2 \rangle \oplus \langle \cdot, \phi_3 \rangle \ :\ \pi_2(BX) \xrightarrow{\text{全射}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X(3_1) \longmapsto (1, 1)$$

$$\Xi_X(4_1) \longmapsto (0, 1)$$

$\therefore \pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

定理 C (3)

knot K について、$\pi_2(BQ_K) \cong \mathbb{Z}$

$$[\text{基本類}] \longmapsto 1$$

ここで、基本類とは

$$\left.\begin{array}{l} X = Q_K \\ C : Q_K \underset{\mathrm{id}}{\to} X \end{array}\right) \text{のときの } \Xi_X(K;C) \in \pi_2(BQ_K) \text{ のこと}$$

<u>証明の outline</u>

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z} \arrow[d, equal, "\Leftarrow\text{[Eisermann]}"] & \\
H_3\big(\pi_1(BQ_K)\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_2(BQ_K) \arrow[r] & H_2(BQ_K) \arrow[r] & H_2\big(\pi_1(BQ_K)\big) \arrow[d, equal] \\
H_3\big(\pi_1(S^3\backslash K)\big) \arrow[d, equal] & \Longleftarrow \quad \pi_1(BQ_K) \cong \pi_1(S^3\backslash K) & \text{(Joyce)} \quad \Longrightarrow & H_2\big(\pi_1(S^3\backslash K)\big) \arrow[d, equal] \\
H_3(S^3\backslash K) \arrow[d, equal] & \Longleftarrow \quad S^3\backslash K \text{ は } K(\pi,1) \text{ 空間} & \Longrightarrow & H_2(S^3\backslash K) \arrow[d, equal] \\
0 & & & 0
\end{tikzcd}$$

$\therefore \quad \pi_2(BQ_K) \cong \mathbb{Z}$ $\square$

米田の補題:

$$\pi_2(BQ_K) \cong \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{Qnd}(Q_K, \bullet), \pi_2(B\bullet))$$

$$\Xi_{Q_K}(K;C) \longmapsto \quad \Xi$$

系 $\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(Q_K, \bullet), \pi_2(B\bullet))$ の元は,
homotopy 不変量 Ξ のスカラー倍である.

計算例

四面体 quandle $X = \mathbb{Z}[T^{\pm}]/(2, T^2+T+1)$

$$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X(3_1) \longmapsto 1$$

$$\Xi_X(4_1) \longrightarrow 1$$

$X = QS(6)$: $(12) \in \mathfrak{S}_4$ の共役類

$$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{or} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X(3_1) \longmapsto 1$$

$$\Xi_X(4_1) \longrightarrow 1$$

$X = QS'(6)$: $(1234) \in \mathfrak{S}_4$ の共役類

$$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \quad \text{or} \quad \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X(3_1) \longmapsto 1$$

まとめ

Fact $\forall \phi \in H^*(BX; A_\rho)\ \ (* = 2,3)$ に対して,
$\mathbb{Z}$ 代数準同型 $\exists F : \mathbb{Z}[\pi_2(BX)] \longrightarrow \mathbb{Z}[A]$ で

$$F(\Xi_X(L)) = \Phi_\phi(L) \quad \in \mathbb{Z}[A]$$

定理 A　有限 quandle X について $\pi_2(BX)$ は有限生成

系　有限 quandle X について
{ 各種の cocycle 不変量 全体 } の基底は有限個

定理 B　有限連結 quandle X について $\pi_2(BX)$ は有限

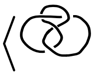
定理 C (1)　素数 dihedral quandle X について

$$\pi_2(BX) \quad \cong \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\Xi_X\big(T(2,p)\big) \mapsto 1$$

$$\forall \text{cocycle 不変量} \quad = \quad \text{const.}\begin{pmatrix} \text{望月 3-cocycle の} \\ \text{cocycle 不変量} \end{pmatrix}$$

(2) 四面体 quandle X について

$\pi_2(BX) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\langle$  $\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle$  $\rangle$

$$\forall \text{cocycle 不変量} = \text{const.}\begin{pmatrix} \text{3-cocycle } \phi_3 \\ \text{の不変量} \end{pmatrix} + \text{const.}\begin{pmatrix} \text{2-cocycle } \phi_2 \\ \text{の不変量} \end{pmatrix}$$