高次元臨界ブラックホールの剛性問題

石橋　明浩

Cosmophysics Group　IPNS　KEK

Talk at Osaka City U. 6 June ’08

なぜ高次元時空を考えるのか？

- 基礎理論：力の統一の試み（ストリング理論 など）
- 現象論モデル：　ブレーン宇宙 / 大きな余剰次元
- 4 次元時空の理解：次元をパラメーターとみなす

高次元理論の構築、物理的結論の導出

$\Longrightarrow$ 高次元ブラックホール研究

e.g., Black hole エントロピーの起源

LHC による高次元 Black hole 生成、Hawking 輻射

ここでの目的と焦点

高次元一般相対性理論における定常ブラックホールの対称性

Outline

- 導入
- イベントホライズン とキリングホライズン
- 4 次元ブラックホール：主要定理のおさらい
- 高次元ブラックホール：概観
- 高次元 “非臨界” ブラックホールの剛性
- 高次元 “臨界”（0 温度）ブラックホールの剛性
- まとめ

事象の地平面 (Event horizon)

vs

キリング地平面 (Killing horizon)

宇宙のブラックホール

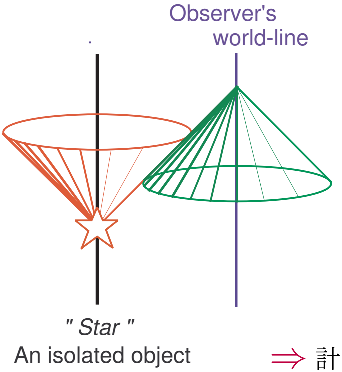
Black Hole ＝　重力が強すぎて、**光でさえ 逃れられない 領域**

どこへ向って逃れることができないのか？

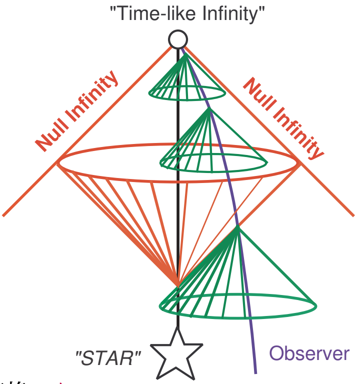
$\Longrightarrow$　　**光にとっての“ 十分な遠方 ”**

一般相対性理論での“ 十分遠方 ”

“ 孤立系 ”= 漸近平坦性 + 光的無限遠方



⟹ 計量の共形変換 ⟹



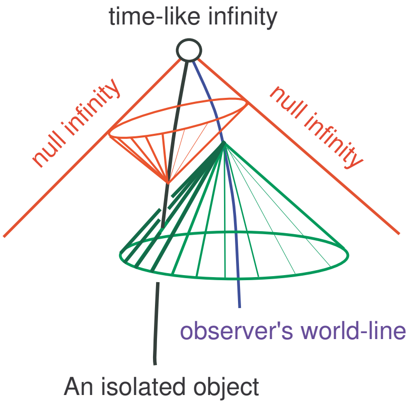
因果構造を保ったまま、“ 無限遠 ”を有限なページ上に (Penrose 図)

一般相対性理論での“ 十分遠方 ”(弱い重力源のとき)

“ 孤立系 ”= 漸近平坦性 ＋ 光的無限遠方

観測者の因果的過去は時間とともに大きくなり、“ 時間的無限遠 ”では**時空全体**となる

⇒ **“ 全てが見渡せる ”**



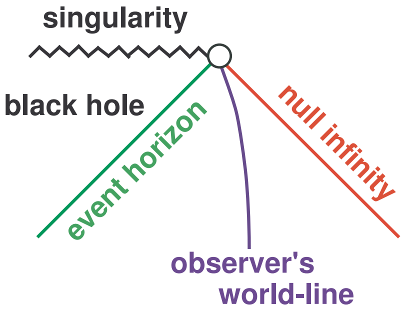
通常の“ 星 ”からの光は全て null infinity へ逃れる

“ null infinity ”は“ 十分遠方の観測者 ”の理想化

一般相対性理論の“ 孤立系 ”(強い重力源のとき)

“ 十分遠方の観測者 ”の理想化

= 漸近平坦性 + 光的無限遠方 ($\mathcal{I}^+$: null infinity)



“ 十分遠方の観測者 $\mathcal{I}^+$ ”からも **見渡せない領域** = **Black Hole**

一般相対性理論のブラックホール

定義: **Black Hole $=$ （時空全体）$-$ $\mathcal{I}^+$ の因果的過去**

Event Horizon $\mathcal{H}$ = Black Hole 領域の境界

Remarks:

- 定義より $\mathcal{H}$ は **光的超曲面**： “ 外界 ”と因果的に切り離される
- $\mathcal{H}$ **は 大局的な概念　局所的に特別な場所というわけではない**

面積則: (Hawking 71)

物理的に妥当な条件の下で、Black Hole を考える

事象地平面の断面 Σ の面積 A は減少しない: $\delta A \geqslant 0$

Remark: **熱力学第 2 法則との類似:**

エントロピー S は減少しない: $\delta S \geqslant 0$ (Bekenstein 73)

Question: “ **平衡** ”熱力学系との対応は？(熱力学第０、第１法則は？)

$\Rightarrow$ “ **定常** ”ブラックホール: (ダイナミクスの終状態)

時空対称性（を生成する Killing vector）と結びついた
ホライズンの概念（局所的な記述）必要

定常時空:

少なくとも無限遠方で 時間的 Killing vector 場 t^a があり

$$\nabla_a t_b + \nabla_b t_a = 0$$

その軌道が完備（i.e., t^a が時空等長変換群を生成している）

Black Hole の局所的な特徴付けへ向けて

- **例:** 静的（定常性の特別の場合）計量

$$\mathrm{d}s^2 = -(1 - r_H/r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - r_H/r} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \;:\quad r_H = const$$

静的観測者 $t^a = (\partial/\partial t)^a$ は、加速運動: $t^c\nabla_c t^a = \kappa(r)(\partial/\partial r)^a$

加速度: $\kappa(r)$

- **特別な光的超曲面 $\mathcal{N}$**： $r \to r_H$

$$t^c\nabla_c t^a = \kappa(r_H)t^a \quad \text{on} \quad \mathcal{N}$$

  - Killing vector t^a は $\mathcal{N}$ に対して、**接** かつ **垂直**
  - $\kappa = \kappa(r_H)$: $\mathcal{N}$ の **表面重力** ＝ （加速度）× （赤方偏移）

Killing Horizons

定義:

- **光的超局面 $\mathcal{N}$ がキリング地平 (ホライズン)** $:\Leftrightarrow$ 時空に軌道が完備な Killing vector K^a が存在し、K^a **が $\mathcal{N}$ に対して 垂直**

- **$\mathcal{N}$ の表面重力 κ** $:\Leftrightarrow$ 以下の式に従う $\mathcal{N}$ 上の関数

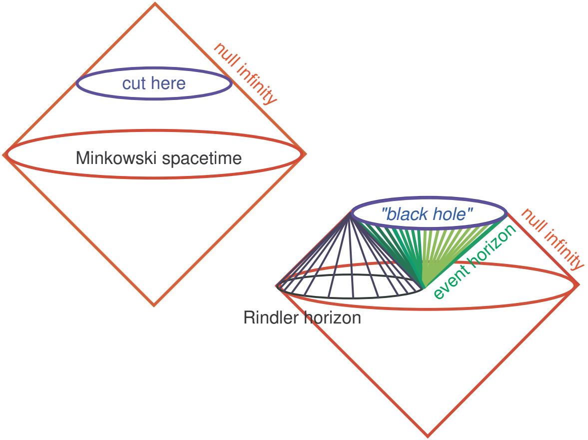
$$\nabla^a(K^bK_b) = -2\kappa K^a \quad \cdots\cdots (*)$$

Remarks:

- Eq. $(*)$ $\Leftrightarrow$ $K^b\nabla_bK^a = \kappa K^a$

- キリング地平 $\mathcal{N}$ は事象地平面 $\mathcal{H}$ とは独立な概念

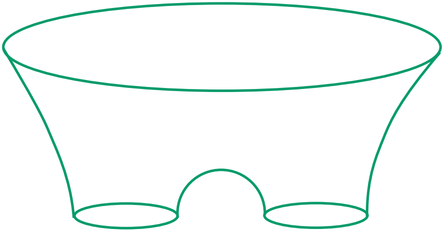
Minkowski spacetime with its “top” removed:



The Rindler horizon is a Killing horizon, but the ”event horizon” is not

Multi extreme charged black holes in de Sitter space (Kastor-Traschen 93)

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{U^2}\mathrm{d}t^2 + e^{2Ht}U^2\mathrm{d}\mathbf{x}^2\,, \quad U := \sum_i \left(1 + \frac{M_i}{e^{-Ht}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}\right)$$

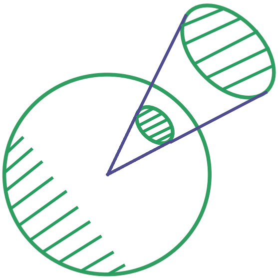


The event horizon of two extremal black holes in de Sitter space is not a Killing horizon

その他の局所的な特徴付け

Apparent Horizon

大雑把には、その面に垂直で**外向き**の光的測地線束の**膨張率がゼロ**となる様な、向き付け可能な２次元**閉局面**



外向きの光的測地線に沿って、閉曲面の面積が変わらない

C.F., 平坦な時空では、球面の面積は外向きに大きくなる

妥当な条件の下、一般に Event Horizon の内側に隠される

Stationary Black Holes in $D = 4$ General Relativity

Black Hole 熱力学

- 知られている定常 BH 厳密解の事象地平面は Killing ホライズン
- 定常 Blak Hole 力学　(Bardeen, Carter & Hawking 73)

Killing ホライズンに対して

$$\kappa = const.\,, \quad \delta M = \frac{1}{8\pi}\kappa\delta A + \Omega_H \delta J$$

M: 質量，κ: 表面重力，Ω_H: ホライズン角速度，J: 角運動量

$\Longrightarrow$ 平衡熱力学第 0、第 1 法則 と対応

$$T = const.\,, \quad \delta E = T\delta S + \text{work term}$$

量子効果 $\Longrightarrow$ 温度の決定 $T = \kappa/2\pi$ (Hawking 75)

Black Hole 熱力学と定常 Black Hole の一意性定理

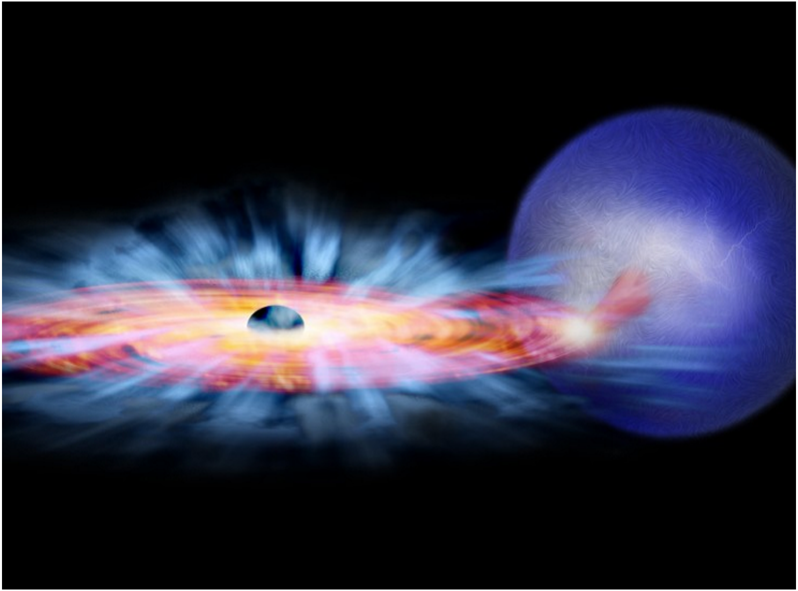
定常ブラックホールが平衡熱力学系と対応するなら、いくつかの少数のパラメーターで完全に特徴付けることが可能なはず...

一意性（No Hair ）定理: (Israel-Carter-Robinson-Mazur-Bunting-Chrusciel)

真空または高々電磁場を含む、正則で定常な Black Hole 解は、その質量 M、電荷 Q、角運動量 J で一意に定められる

真空で回転している Black Hole $\Longrightarrow$ **Kerr 解**

我々の宇宙の Black Hole は（その材料や形成過程の詳細はともかく）
その最終（定常）状態は Kerr 計量でよく記述される



定常 Black Hole 一意性定理

一意性定理: （Uniquness /No Hair Theorem ）

真空または高々電磁場を含む、正則で定常な Black Hole 解は、その質量 M、電荷 Q、角運動量 J で一意に定められる

真空回転 Black Hole $\Longrightarrow$ Kerr 解

我々の宇宙の Black Hole 終状態は Kerr 計量でよく記述される

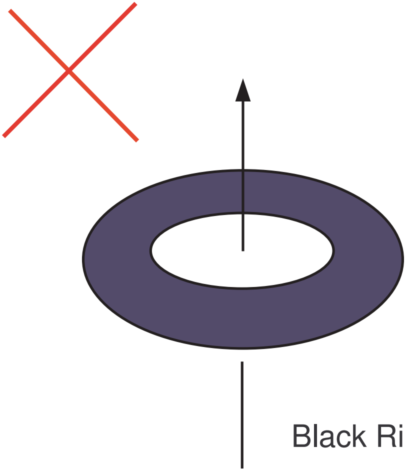
事象地平面について、断面の“ 形 ”に関する**トポロジー定理** と
“ 対称性 ”に関する**剛性 (Rigidity) 定理** の結果をつかって証明

No hair 定理とトポロジー定理

トポロジー定理: (Hawking 73 Chrusciel & Wald 94)

物理的に妥当な条件の下で

事象地平面（連結成分）の空間的断面 Σ は 2 次元球面と同相



Black Ring ?

No hair 定理と Black Hole 剛性定理

対称性・剛性定理: (Hawking 73)

定常 Black Hole の事象地平面 $\mathcal{H}$ は Killing ホライズン $\mathcal{N}$ となる
もし、その Black Hole が回転していれば、時空は 軸対称性 も持つ

Remarks:

- 定常性を保つ事への**特別ボーナス**として軸対称性もいただく

  $\Longrightarrow$ 対称性の数だけ Einstein 方程式を予め積分可

- “ **剛性** ”$\Longrightarrow$ Black Hole 温度一定 $\Longrightarrow$ **Black Hole 熱力学の基盤**

- トポロジー定理の結果を使って証明

Summary: Black holes in $4D$ general relativity

Asymptotically flat stationary BHs in 4-dimensions

- Exact solutions $\cdots\cdots\cdots\cdot$ e.g., Kerr metric
- Stability $\cdots\cdots\cdots\cdot$ Stable $\Rightarrow$ final state of dynamics
- Topology $\cdots\cdots\cdots\cdot$ Cross-sections $\approx$ 2-sphere
- Symmetry $\cdots\cdots\cdots\cdot$ Rigid $\Rightarrow$ static or axisymmetric
- Uniqueness $\cdots\cdots\cdots\cdot$ Vacuum $\Rightarrow$ Kerr-metric
- BH Thermodynamics $\cdots\cdots\cdots\cdot$ quantum aspects

Which properties of $4D$ BHs are extended to $D > 4$?

Black Holes in $D > 4$ General Relativity

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- Exact Solutions $\cdots\cdots\cdots\cdot$ much larger variety

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- **Exact Solutions** $\cdots\cdots\cdots\cdot$ much larger variety
- **Stability** $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not fully studied yet

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- Exact Solutions $\cdots\cdots\cdots\cdot$ much larger variety
- Stability $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not fully studied yet
- Topology $\cdots\cdots\cdots\cdot$ more varieties

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- Exact Solutions ·········· much larger variety
- Stability ·········· not fully studied yet
- Topology ·········· more varieties
- Uniqueness ·········· not unique!

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- Exact Solutions $\cdots\cdots\cdots\cdot$ much larger variety
- Stability $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not fully studied yet
- Topology $\cdots\cdots\cdots\cdot$ more varieties

- Uniqueness $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not unique!
- BH Thermodynamics $\cdots\cdots\cdots\cdot$ generalize to $D > 4$

Asymptotically flat stationary $D > 4$ BHs

- Exact Solutions $\cdots\cdots\cdots\cdot$ much larger variety
- Stability $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not fully studied yet
- Topology $\cdots\cdots\cdots\cdot$ more varieties
- Symmetry $\cdots\cdots\cdots\cdot$ **This talk**
- Uniqueness $\cdots\cdots\cdots\cdot$ not unique!
- BH Thermodynamics $\cdots\cdots\cdots\cdot$ generalize to $D > 4$

Exact solutions in $D > 4$

- Static spherical holes in $\forall D > 4$ (Tangherlini 63)
- Stationary rotating black holes in $\forall D > 4$ (Myers-Perry 82)
  - Topology $\approx S^{D-2}$
  - $[(D-1)/2]$ independent spins
  - $D \geqslant 6$, No upper-bound on J $\Rightarrow$ *"ultra-spinning"*

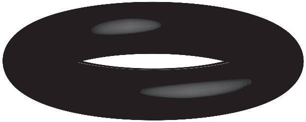
$$\exists \text{ horizon } \Leftrightarrow 0 = g^{rr} = \Pi_i \left(1 + \frac{(J_i/M)^2}{r^2}\right) - \frac{GM}{r^{D-3}}$$

Exact solutions in $D > 4$

Surprise in $D > 4$!

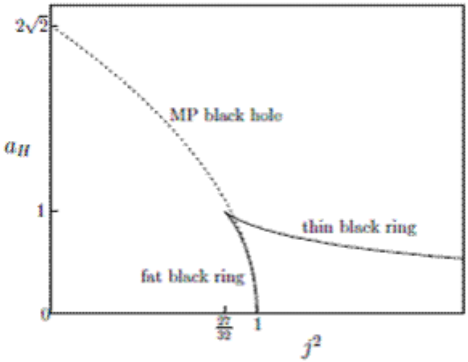
Rotating black-rings in $D = 5$ (Emparan-Reall 02)

- – Topology of the horizon $\approx S^1 \times S^2$



- – 3-commuting Killing fields Isom: $\mathbb{R} \times SO(2) \times SO(2)$
- – not uniquely specified by global charges $(M,\ J_1,\ J_2)$

Phase diagram of 5D Black-Hole and -Rings



1 black-hole and 2 black-rings with the *same* $(M,\ J_1,\ J_2 = 0)$

Uniqueness theorem no longer holds as it stands

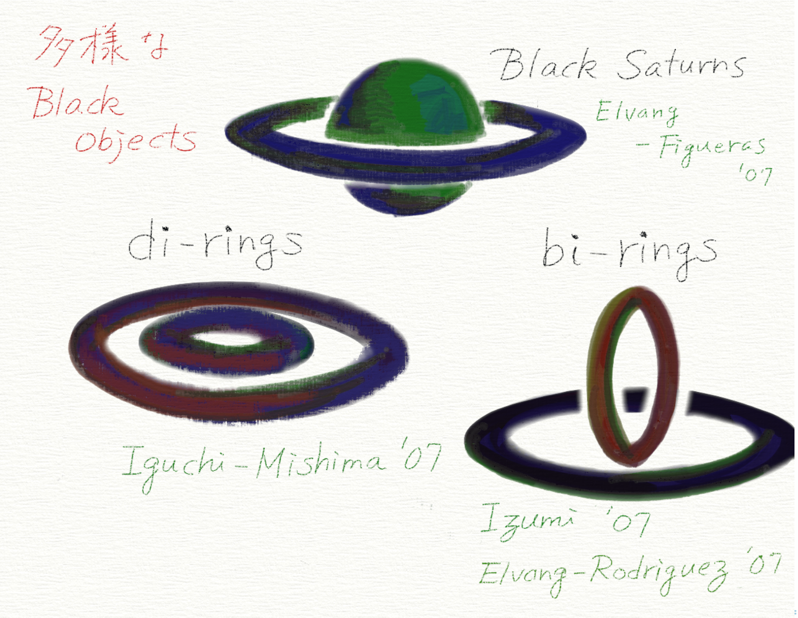
Exact solutions in $D > 4$

- – Solutions akin to Emparan-Reall's ring $(M, J_1 \neq 0, J_2 = 0)$
  - Black-ring w/ *two* angular momenta $(M,\ J_1 \neq 0,\ J_2 \neq 0)$

    (Pomeransky & Sen'kov 06)

    (Hollands & Yazadjiev 07, Morisawa-Tomizawa & Yasui 07)

- – Concentric multi-black solutions:
  - Black di-rings ("ring" $+$ "ring") (Iguchi & Mishima 07)
  - Black-Saturn ("hole" $+$ "ring") (Elvang & Figueras 07)
  - Orthogonal-di-/Bicycling-Rings ("ring" $+$ "ring")
    (Izumi 07 Elvang & Rodriguez 07)


多様な
Black objects
Black Saturns
Elvang - Figueras '07
di-rings
bi-rings
Iguchi-Mishima '07
Izumi '07
Elvang-Rodriguez '07

Black holes and rings on various manifolds

- MP in AdS or dS e.g., (Gibbons, Lu, Page, Pope 04)
- – on Gibbons-Hawking e.g. (BMPV 97, Gauntlett-Gutowski-Hull-Pakis-Reall 03)
  – on 4-Euclid space e.g. (Elvang-Emparan-Mateos-Reall 04)
- – on Kaluza-Klein

  – on Eguchi-Hanson

  – on Taub-NUT

  – on Göedel

  e.g., (Ishihara, Kimura, Matsuno, Nakagawa, Tomizawa 06-08)
- Black-branes

高次元 Black Hole の課題

- 高次元では“一意性定理”が成り立たず、多様なブラックホール厳密解が存在する（今後も見つかっていくだろう）

課題： 厳密解の分類、解の持つべき一般的性質、系統的理解

- ▷ どんな“形”（トポロジー）が可能か？
- ▷ 高次元ブラックホールは、はたして安定か？
- ▶ **対称性の観点から解の多様性を制限できないか？**
- ▶ **高次元での Black Hole 熱力学対応は？**

◀ **高次元では Black Hole 剛性は成り立つのか？**

Rigidity of $D \geqslant 4$ black holes

Symmetry properties of black holes

Assertion:

(1) The event horizon of a stationary, electro-vacuum BH is a Killing horizon

(2) If rotating, the BH spacetime must be axisymmetric

The event horizon is *rigidly* rotating with respect to null infinity

$\cdots$ *Black Hole Rigidity*

剛性定理の高次元への拡張の問題点

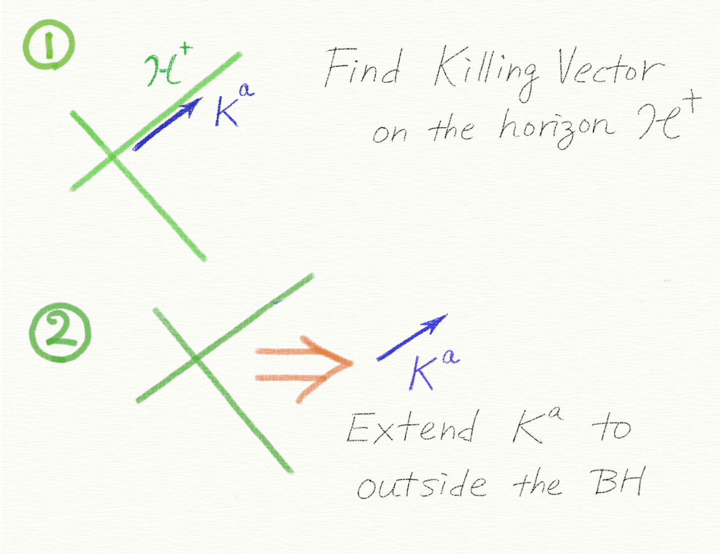
4 次元の場合 での Hawking の証明は
Event Horizon の断面 Σ が 2 次元球面である事が本質的

$\Rightarrow$ 定理の高次元 $D > 4$ への拡張は、まったく非自明

目標: BH Rigidity Theorem in $D \geqslant 4$

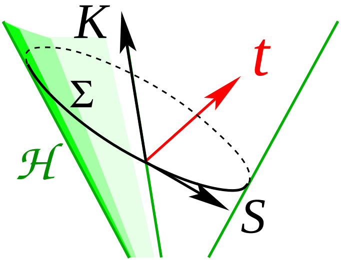
次元や、Event Horizon のトポロジーに依らない証明

Brief sketch of proof of Theorem 1



Sketch of Proof of Step 1

先ずホライズン上で "候補" となる Killing field K^a を見つけよう



候補としての資格

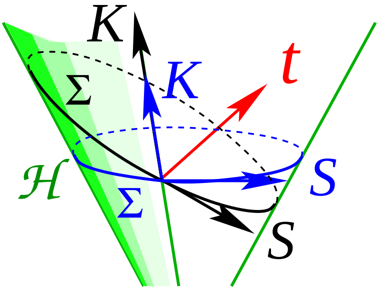
- $K^a K_a = 0$ and $\pounds_t K^a = 0$ on $\mathcal{H}$
- $\pounds_K g_{ab} = 0$ (Killing eqn.) on $\mathcal{H}$
- $\alpha = const.$ $(K^c \nabla_c K^a = \alpha K^a)$ on $\mathcal{H}$

勝手に選んだ 断面 Σ と候補となる K^a

Try this one ! $K^a = t^a - S^a$

問題： 断面 Σ を勝手に選んできたのでは、α **は定数にならない**

$\tilde{\alpha} = const. =: \kappa$ **となる様な "正しい"** $\tilde{K}^a$ **を見つけたい**



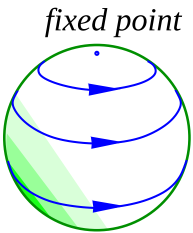
$$K^a + S^a = t^a = \tilde{K}^a + \tilde{S}^a$$

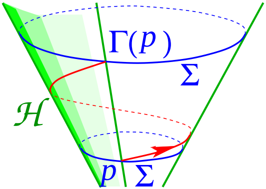
課題: 任意の断面 Σ から "正しい" 断面 $\tilde{\Sigma}$ への変換をみつける

$$-S^a D_a f(x) + \alpha(x) f(x) = \kappa$$
$$\tilde{K}^a = f(x) K^a$$

変換のための方程式を解くときに時空次元、トポロジーが重要な役割を果たす

4 次元の場合の証明の要　Hawking 73





4 次元では, ホライズンの断面 Σ は必ず 2-球面的なため、S^a の軌道は Σ 上で必ず閉じる

解きたい微分方程式を S^a の閉じた軌道に沿って積分することで有界な解を求めることが出来る

例えば、表面重力（温度）κ 　は

$$\kappa(x) = \frac{1}{P}\int_0^P \alpha[\phi_s(x)]ds$$

P: 周期　 $\kappa = const$ も示せる

高次元 $D > 4$ での問題点

一般に S^a の軌道は Σ 上で閉じない $\Longrightarrow$ 方程式の解（すなわち、S^a の軌道に沿った積分）の存在は保障されない

例, $5D$ Myers-Perry BH w/ 2-rotations $\Omega_{(1)}, \Omega_{(2)}$:

$$\Sigma \approx S^3\,, \quad t^a = K^a + S^a$$

$$S^a = \Omega_{(1)}\varphi^a_{(1)} + \Omega_{(2)}\varphi^a_{(2)}$$

それぞれの回転 Killing vector φ^a は閉じた軌道をもつ

しかし、$\Omega_{(1)}/\Omega_{(2)}$ **が無理数**なら、**線形結合** S^a **の軌道は閉じない**

高次元 $D > 4$ での証明: (Hollands, AI & Wald 07)

S^a の軌道が閉じない場合 $\Rightarrow$ **エルゴード定理を利用しよう！**

- – Ergodic theorem guarantees the limit "$\kappa(x)$" exists

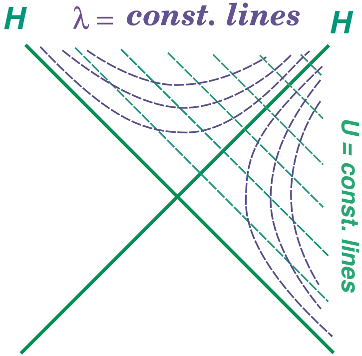
$$\kappa^*(x) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \alpha[\phi_s(x)]\mathrm{d}s \qquad (1)$$

- – Einstein's equations yields $\kappa^*(x)$ is a constant, κ so that

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \alpha[\phi_s(x)]\mathrm{d}s \quad = \kappa = \quad \frac{1}{\mathrm{Area}(\Sigma)}\int_\Sigma \alpha(x)\mathrm{d}\Sigma$$

"time-average" "space-average"

もう少し具体的に



ホライズン $\mathcal{H}$ の近傍 $\mathcal{O}$ で便利な座標系
Gaussian-Null-Coordinates (GNCs)
$x^\mu = (U, \lambda, \theta^A)$ を導入する

λ: null geodesics affine parameter

Event horizon $\mathcal{H}$: $\lambda = 0$

Gaussian-Null-Coordinates (GNCs)

In GNCs $x^\mu = (U, \lambda, \theta^A)$ the metric takes the form

$$\mathrm{d}s^2 = 2\mathrm{d}U\mathrm{d}\lambda - 2\lambda\alpha\mathrm{d}U^2 - 2\lambda\beta_A\mathrm{d}\theta^A\mathrm{d}U + \gamma_{AB}\mathrm{d}\theta^A\mathrm{d}\theta^B$$

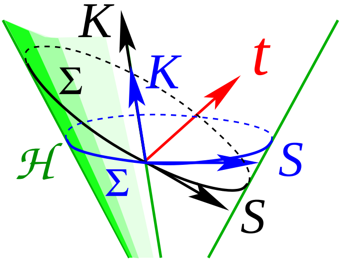
co

- The event horizon $\mathcal{H}$ is at $\lambda = 0$
- $K^a := (\partial/\partial U)^a$ satisfies

$$K_a K^a = O(\lambda)\,, \quad K^c\nabla_c K^a = \alpha(x)K^a + O(\lambda)$$

So, if K^a is a Killing field and $\alpha(x)$ is constant,
$\Rightarrow$ α will be the "*surface gravity*"

断面 Σ を勝手に選んできたのでは、α は定数にならない



任意の断面 Σ から “正しい” 断面 $\tilde{\Sigma}$ への変換をみつけたい

GNCs (U, λ, θ^A) を使うと、断面 Σ は $U = const.$-surface と指定される

課題: 任意に選んだ GNCs (U, λ, θ^A) から、$\tilde{\alpha} = const. = \kappa$ となる様な “正しい GNCs $(\tilde{U}, \tilde{\lambda}, \tilde{\theta}^A)$” への変換を見つける

解くべき方程式は $\tilde{K}^a = F(x) \cdot K^a, \quad \tilde{K}^c \nabla_c \tilde{K}^a = \kappa \tilde{K}^a, \kappa \neq 0$ として

$$(1) \quad \cdots \qquad \pounds_S F(x) = \alpha(x) F(x) + \kappa \quad \cdots \text{“ 正しい ”} \tilde{K}^a$$

$$(2) \quad \cdots \qquad \pounds_S \tilde{U} = 1 - \frac{F_*}{F(x)} \quad \cdots \text{“ 正しい ”断面 } \tilde{\Sigma} \text{ と座標系 } \{\tilde{x}^\mu\}$$

Eq. (1) は、Ergodic theorem と Einstein's equation

$$(3) \quad \cdots D_A \alpha = -\frac{1}{2} \pounds_S \beta_A \quad \text{on } \mathcal{H}$$

を使って解ける。 以下の形式解が well-defined

$$F(x) = \kappa \int_0^\infty P(x,T) \mathrm{d}T \,, \quad P(x,T) = \exp\left(- \int^T \alpha[\phi_s(x)] \mathrm{d}s \right)$$

十分に大きな T に対して $\forall \epsilon > 0$, $P(x,T) < e^{(\epsilon - \kappa)T} < \infty$

Solution to Eq. (2):

Eq. (2) は、Eq. (1) と合わせて、

$\pounds_S \Psi = \alpha(x) - \kappa$ ここで $\Psi \equiv \log F(x) - \kappa \tilde{U}$ **これは解ける!**

Einsten equation $D_A \alpha = -\frac{1}{2} \pounds_S \beta_A$ on $\mathcal{H}$ を使って

$$\pounds_S \left(D^A D_A \Psi + \frac{1}{2} D^A \beta_A \right) = 0$$

従って Σ 上で $D^A D_A \Psi = -\frac{1}{2} D^A \beta_A$ の解をもとめればよい。

よって $\tilde{U}$、即ち、新しい GNCs $\tilde{x}^\mu = (\tilde{\lambda}, \tilde{U}, \tilde{x}^A)$ が求められた。

臨界 ($\kappa = 0$) ブラックホールの場合の問題点

$$(1) \quad \cdots \qquad \pounds_S \log F(x) + \frac{\kappa}{F(x)} = \alpha(x)$$

$$(2) \quad \cdots \qquad \pounds_S \tilde{U} = 1 - \frac{F_*}{F(x)}$$

臨界 $\kappa = 0$ のとき、Eq. (1)、(2) は同じ構造:

$$\pounds_S \Psi = J(x)$$

Eq. (1) は Einstein's equation $\quad D_A \alpha = -\frac{1}{2} \pounds_S \beta_A \quad$ on $\mathcal{H}$ を使って解ける

しかし Eq. (2) は、右辺に $\alpha(x)$ を含まないので、Einstein's equation をうまく利用して解くことが出来ない

C.f., for $\kappa \neq 0$, $\qquad \Psi := \log F(x) - \kappa \tilde{U}\,, \qquad J := \alpha(x) - \kappa$

Must a $D > 4$ Extremal BH be Rigid?

Facts:

- S^a—projection of t^a on a cross-section Σ—generates Abelian Lie-group, $\mathcal{G}$, of isometries, ϕ_S on a compact space Σ
- Closure of $\mathcal{G}$ must be in the isometry group of (Σ, γ_{AB}) and isomorphic to a N-torus $\approx U(1)^N$ with $N = \dim(\bar{\mathcal{G}})$
- Hence there exist Killing vector fields $\psi_1^a, \ldots, \psi_N^a$ on (Σ, γ_{ab})

$$S^a = \Omega_{(1)}\psi_{(1)}^a + \cdots + \Omega_{(j)}\psi_{(j)}^a$$

for some numbers $\underline{\Omega} := (\Omega_1, \ldots, \Omega_N) \in \mathbb{R}^N$

- When the orbits of S^a are not closed, $N \geqslant 2$ and $\Omega_i/\Omega_j \neq \mathbb{Q}$ for all $i \neq j$

Lemma

Let J be a real analytic function on Σ with the property that

$$0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T J \circ \phi_\tau(x)\, d\tau\,.$$

Let $\underline{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N) \in \mathbb{R}^N$ satisfy the following condition:
There exists a $q > 0$ such that

$$|\underline{\Omega} \cdot \underline{m}| > |\underline{\Omega}| \cdot |\underline{m}|^{-q}$$

holds for all but finitely many $\underline{m} \in \mathbb{Z}^N$. Then

$$\pounds_S \Psi = J$$

has a real analytic solution Ψ on Σ.

Key point of the proof

Let $J(x, \underline{m})$ be the Fourier coefficients of J:

$$\pounds_S J(x, \underline{m}) = -i\underline{m} \cdot \underline{\Omega} J(x, \underline{m})$$

Then,

$$\Psi(x) = i \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^N \setminus \underline{0}} \frac{J(x, \underline{m})}{\underline{m} \cdot \underline{\Omega}}$$

formally solves

$$\pounds_S \Psi = J(x)$$

The condition $|\underline{\Omega} \cdot \underline{m}| > |\underline{\Omega}| \cdot |\underline{m}|^{-q}$ gurantees uniform bound

$$|\Psi(x)| \leqslant \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^N \setminus \underline{0}} \frac{\mathrm{const.e}^{-c|\underline{m}|}}{\underline{m} \cdot \underline{\Omega}} \leqslant \frac{\mathrm{const.}}{|\underline{\Omega}|} \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^N \setminus \underline{0}} |\underline{m}|^q \, \mathrm{e}^{-c|\underline{m}|} < \infty$$

Therefore the formal solution Ψ constructed above makes sense

Rigidity of $D > 4$ Extremal BHs: (Hollands & AI in progress)

Theorem:

Consider an analytic solution to the vacuum Einstein equations containing a stationary black hole of with extremal horizon $\kappa = 0$.

Let $\underline{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$ be the angular velocities associated with projection S^a of t^a onto Σ.

If these satisfy the condition, called *Diophantine condition*

$$|\underline{\Omega} \cdot \underline{m}| > |\underline{\Omega}| \cdot |\underline{m}|^{-q}$$

for some $q > 0$ and for all but finitely many $\underline{m} \in \mathbb{Z}^N$, then there exists a Killing field K^a whose orbits are tangent to the null-generators of $\mathcal{H}$.

Thus, $\mathcal{H}$ is a Killing horizon

Using this result, we can also obtain Axi-symmetry Killing fields, ϕ_i^a

Remarks:

We need to impose *two* technical assumptions:

- Analyticity
- Diophantine condition: $\exists q > 0$ such that $|\underline{m} \cdot \underline{\Omega}| > |\underline{\Omega}| \cdot |\underline{m}|^{-q}$

$$\text{e.g.,} \quad \exists q > 0 \quad \text{s.t.,} \quad \left| \frac{\Omega_i}{\Omega_j} - \frac{m_j}{m_i} \right| > \frac{1}{m_i^q}$$

In mathematics, it is well-known that

The diophantine condition holds for all $\underline{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_N)$,

except for a set of Lebesgue measure *zero*

(i.e., when Ω_i/Ω_j for $i \neq j$ are *Liouville numbers*)

ブラックホール剛性定理：まとめ

Staticity Theorems と組み合わせると

高々電磁場を含む　$D \geqslant 4$　定常、非臨界（有限温度）ブラックホールは静的 であるか、又は 軸対称 である

“ 臨界 ”(温度ゼロ $\kappa = 0$) ブラックホールの剛性：

“ ほぼ間違いなく ”成立

定理が証明できない場合が存在するが、その様な特別な状況は
“ 回転ブラックホール解のパラメータ空間の中で測度ゼロ ”

Summary

Summary: Stationary BHs in $D > 4$ General Relativity

- **Exact Solutions** $\cdots$ much larger variety

  Rotating Holes (Myers & Perry 86) Rotating Rings (Emparan & Reall 02) & many

- **Stability** $\cdots$ not fully studied yet

  Static vacuum $\Rightarrow$ stable (AI & Kodama 03)

  Rotating holes $\Rightarrow$ only partial results:

  Special case (e.g., Kunduri-Lucietti-Reall 06, Murata-Soda 08)

- **Topology** $\cdots$ more varieties Some restrictions, (Galloway & Schoen 05)

- **Symmetry** $\cdots$ rigid (Hollands, AI & Wald 07 Hollands & AI)

- **Uniqueness** $\cdots$ non-unique Hole and Rings w/ the same (J, M)

  Static holes: e.g., (Gibbons, Ida & Shiromizu 02)

  Uniqueness in $5D$ rotating holes/rings (Morisawa-Ida 04, Hollands & Yazadjiev 07)

  (Morisawa, Tomizawa & Yasui 07)

- **BH Thermodynamics** $\cdots$ generalize to $D > 4$ e.g. (Rogatko 07)