インフレーション宇宙における量子揺らぎのエンタングルメント

名古屋大学大学院理学研究科　南部保貞

大阪市立大 石原・中尾研セミナー '08/10/31

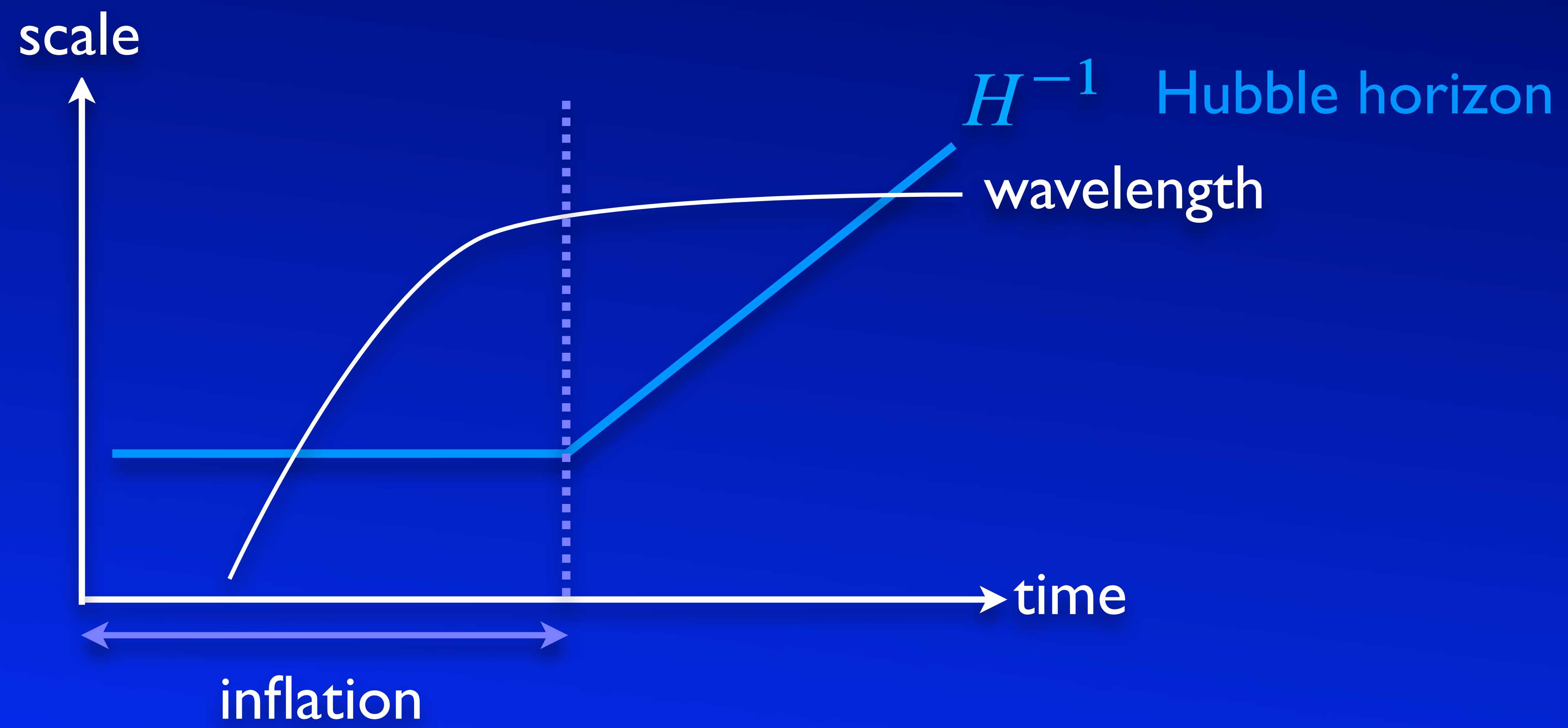
Phys. Rev. D 78 (2008)044023

Introduction

- 宇宙の構造形成のシナリオ

inflation: 量子ゆらぎの生成 —重力不安定性→ 大規模構造

$a \propto e^{Ht}$



- **deSitter時空上での量子場の計算**

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\boldsymbol{x}^2, \quad a \propto e^{Ht}$$

インフラトン場の揺らぎ

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \underbrace{\left(\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\varphi_{\boldsymbol{k}}(t) + \hat{a}^{\dagger}_{-\boldsymbol{k}}\varphi^{*}_{\boldsymbol{k}}(t)\right)}_{\hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$\langle \hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \hat{\varphi}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \rangle \sim \frac{H^2}{2k^3}$$

$$\ddot{\varphi}_{\boldsymbol{k}} + 3H\dot{\varphi}_{\boldsymbol{k}} + \frac{k^2}{a^2}\varphi_{\boldsymbol{k}} = 0$$

曲率揺らぎのpower

$$\langle \hat{\mathcal{R}}^2 \rangle \sim \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)^2 \times \langle \hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}} \hat{\varphi}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}} \rangle \times k^3 \sim \left(\frac{H^2}{\dot{\phi}}\right)^2 k^{n-1}$$

⇒ 構造形成の初期値

$\langle \cdots \rangle$ を統計平均で置換える

$\hat{\mathcal{R}}$ ⇒ c 数のrandom Gaussian variable

量子力学的変数

古典化の仮定

- **古典化の仮定の正当性**

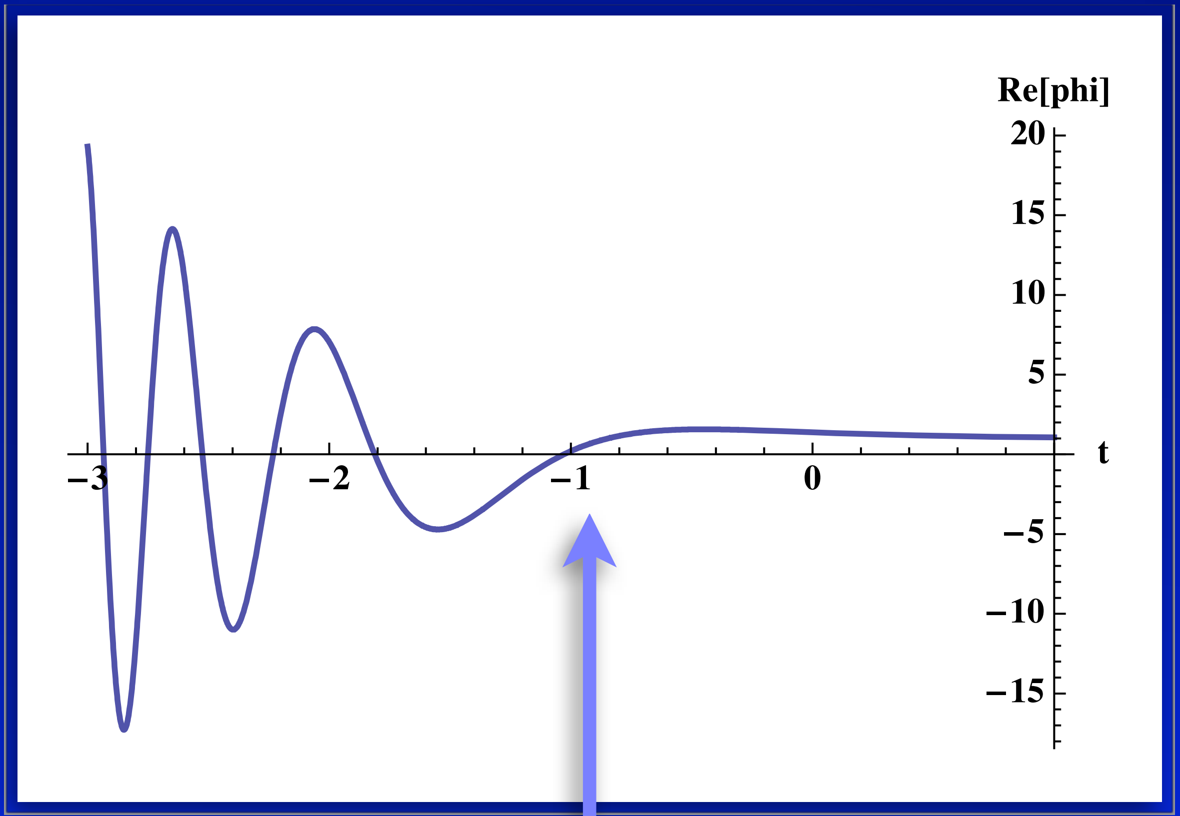
各modeの波長がhorizon scaleより長くなった時点で

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t) \approx \varphi_{\boldsymbol{k}}(t)(\hat{a}_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}})$$
$$\hat{p}_{\boldsymbol{k}}(t) \approx a^3 \dot{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(t)(\hat{a}_{\boldsymbol{k}} - \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}})$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{p}_{\boldsymbol{k}}] \approx 0$$

量子力学的非可換性がなくなり，
古典的揺らぎとして扱える

mode functionの振る舞い



horizon crossing

- 波動性がなくなる
- squeezingが進む
- 粒子生成

- **古典化のmechanism**
  - decoherence ➡ 量子力学的干渉がなくなる
  - classical correlation ➡ 古典力学的運動に従う

    $\hat{q}, \hat{p}$ の非可換性が無視できる

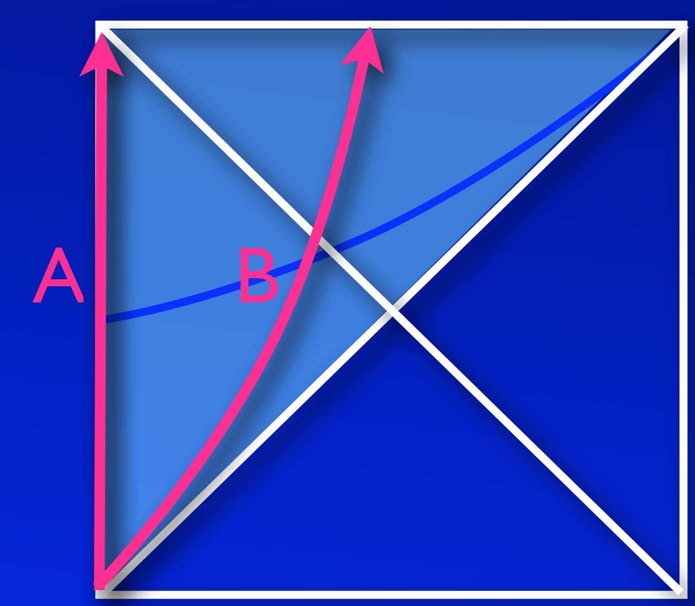
- **inflationにおけるゆらぎの古典化**

  加速膨張による引きのばし: 場のsqueezing

  Super horizon scaleにおいて “場の相関” が切れる

  ➡ 因果関係がなくなる

古典化の意味を場の相関に基づいて考えてみる



古典的相関

量子的相関: entanglement

Entanglement (two party)

2体間entanglement

A (q_A, p_A) B (q_B, p_B)

pure state

- A, Bはseparable

$$|A, B\rangle = |A\rangle|B\rangle$$

- A, Bはentangled

$$|A, B\rangle = |a_1\rangle|b_1\rangle + |a_2\rangle|b_2\rangle + \cdots$$ $\Rightarrow$ 量子力学固有の相関

一般に

- A, Bはseparable

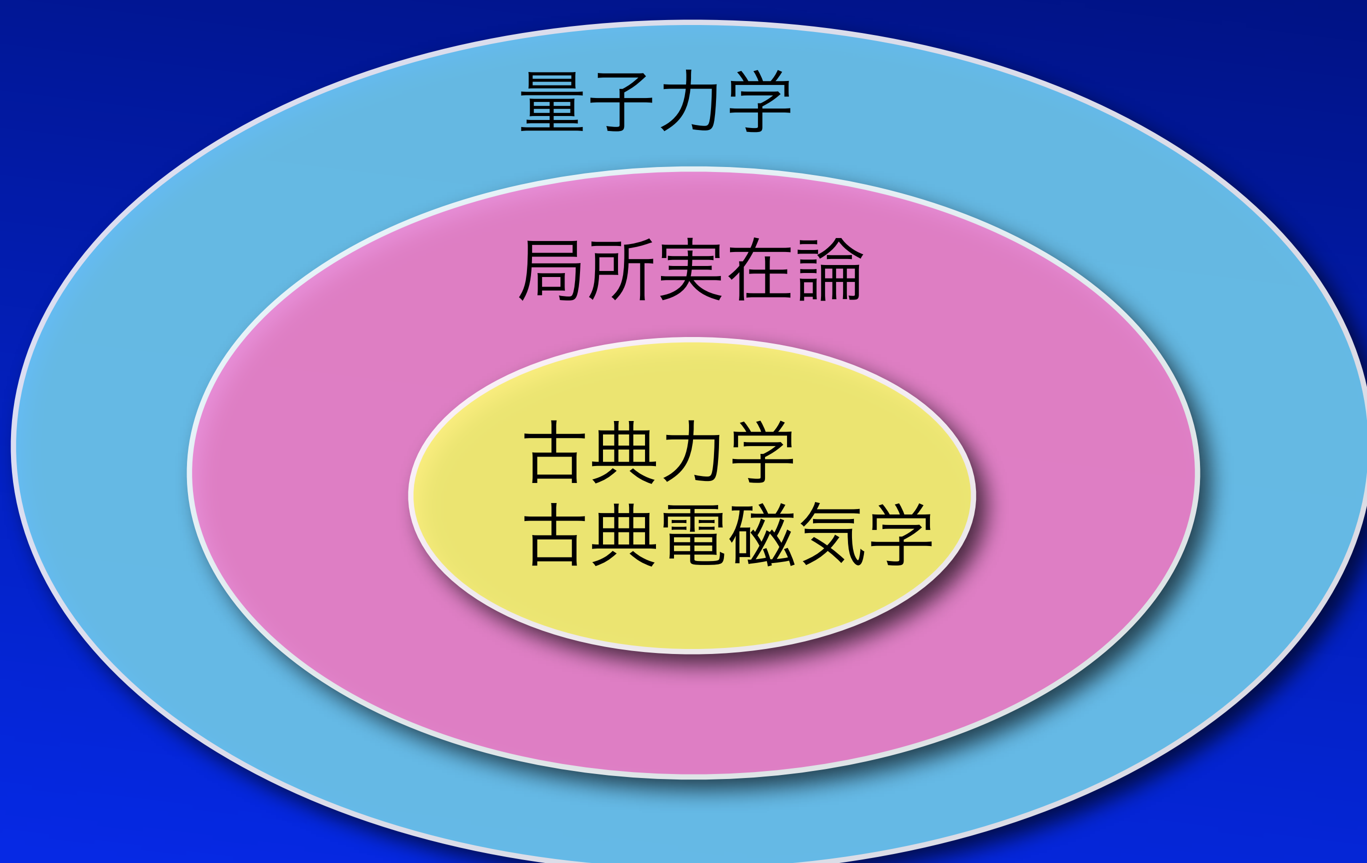
$$\Leftrightarrow \quad \hat{\rho}_{AB} = \sum_j w_j \hat{\rho}_A^j \otimes \hat{\rho}_B^j, \quad \sum_j w_j = 1, \quad w_j \geq 0$$

- このように表せないとき，A, Bはentangled $\Rightarrow$ Bell不等式の破れ

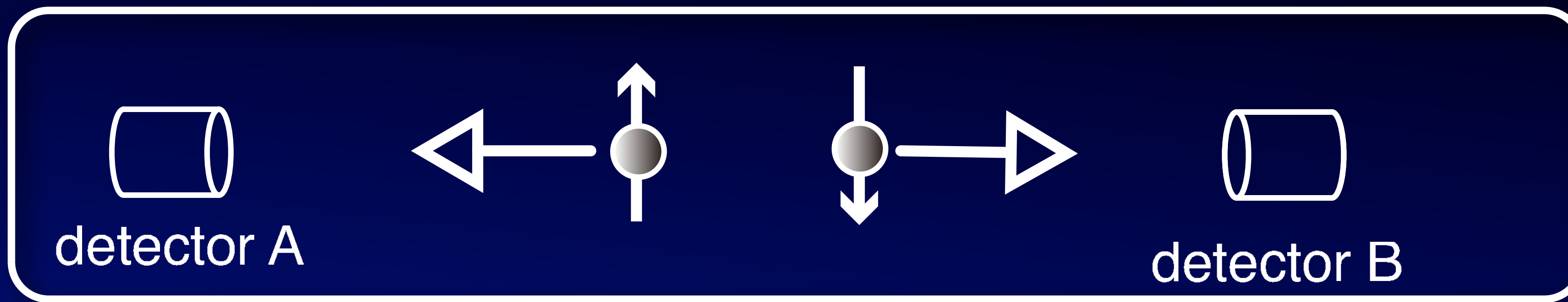
局所実在論

A.Einstein, B.Podolsky and N.Rosen, Phys.Rev.47 (1935)777

- **局所性**：ある地点での現象が，瞬時に遠方の観測に影響を及ぼすことはない
- **実在性**：測定するしないにかかわらず，物理量は各瞬間瞬間で定まった値を持つ.



局所実在論 ⟺ Bell不等式を満たす



$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 方向のspin測定値: A_a, B_b $\quad A_a = \pm 1,\ B_b = \pm 1$

$A_a = A_a(\lambda),\ B_b = B_b(\lambda)$ $\quad \lambda$: hidden variables

$$\langle A_a \rangle = \sum_\lambda P(\lambda) A_a(\lambda)$$

$$\langle B_b \rangle = \sum_\lambda P(\lambda) B_b(\lambda)$$

$$P(\lambda) \geq 0,\ \sum_\lambda P(\lambda) = 1$$

相関関数 $E(a,b) = \langle A_a B_b \rangle = \sum_\lambda P(\lambda) A_a(\lambda) B_b(\lambda)$

このとき

$$|E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b')| \leq 2$$

Bell不等式

Separableである必要十分条件

(R.Simon 2000, L.Duan *et al.* 2000)

１自由度 X １自由度 Gaussian state

A $(\hat{q}_A, \hat{p}_A)$ B $(\hat{q}_B, \hat{p}_B)$

$$\hat{\xi}_i = (\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B) \qquad [\hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k] = i\,\Omega_{jk}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{J} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

covariance matrix $\quad V_{jk} = \frac{1}{2}\langle \hat{\xi}_j \hat{\xi}_k + \hat{\xi}_k \hat{\xi}_j \rangle$

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]$$

- positivity $\quad \boldsymbol{V} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \geq 0$ 任意の$\hat{A}$に対して$\langle \hat{A}\hat{A}^\dagger \rangle \geq 0$

  $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$

- 部分転置 $\quad p_B \longrightarrow -p_B \qquad \boldsymbol{V} \longrightarrow \tilde{\boldsymbol{V}}$

A,Bがseparable $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{V}} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \geq 0$

2X2
2X3
1XN

一般のM X N 自由度に対しては

A,Bがseparable $\Longrightarrow$ $\tilde{\boldsymbol{V}} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\Omega} \geq 0$

Symplectic eigenvalue

$$S V S^T = \mathrm{diag}(\nu_+, \nu_+, \nu_-, \nu_-)$$

$$\nu_+ \geq \nu_- > 0$$

symplectic変換

$$S \in \mathrm{Sp}(4, R)$$

$$\boldsymbol{S \Omega S^T} = \boldsymbol{\Omega}$$

- positivity $\nu_- \geq \dfrac{1}{2}$ (不確定性関係)
- separability $\tilde{\nu}_- \geq \dfrac{1}{2}$

この条件が満たされている場合にはA, Bはentangleしてない

（量子相関なし）

Logarithmic negativity

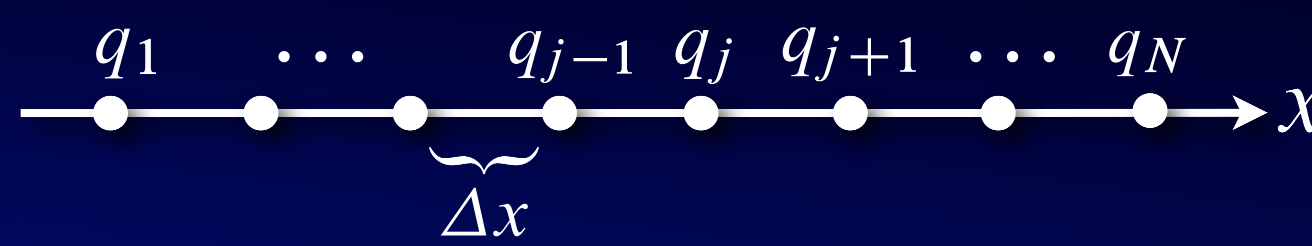
$$E_N = -\min\left[\log_2(2\tilde{\nu}_-), 0\right]$$

$E_N > 0$ entangled

$E_N = 0$ separable

Entanglement of Quantum Field in deSitter Spacetime

- 1-dim lattice model (periodic BC)
- massless scalar



EOM

$$q'' - \frac{a''}{a}q - \nabla^2 q = 0$$

scale factor $a = -1/(H\eta)$

空間を離散化

$$q_j'' - \frac{a''}{a}q_j + 2q_j - \alpha(q_{j+1} + q_{j-1}) = 0 \qquad \alpha = 1 - \frac{1}{2}(m\Delta x)^2$$

- 量子化

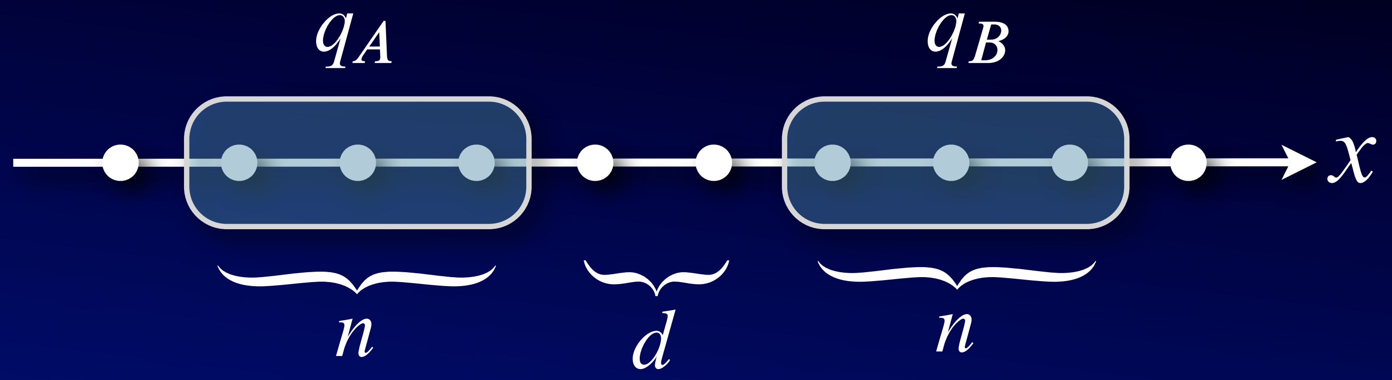
$$\hat{q}_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f_k \hat{a}_k + f_k^* \hat{a}_{N-k}^\dagger\right) e^{i\theta_k j} \qquad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}$$

$$f_k'' + \left(\omega_k^2 - \frac{a''}{a}\right) f_k = 0 \qquad \omega_k^2 = 2(1 - \alpha\cos\theta_k)$$

Bunch-Davis vacuum

comoving lattice

block variables



$$q_A = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j \in A} q_j$$

$$q_B = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j \in B} q_j$$

covariance matrix

$$V = \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix}$$

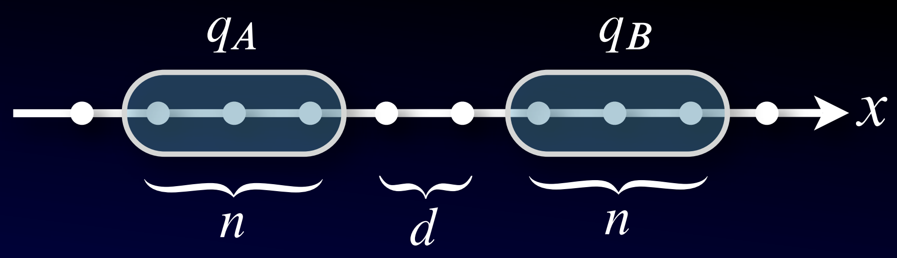
$$a_1 = \langle \hat{q}_A^2 \rangle \qquad a_2 = \langle \hat{p}_A^2 \rangle \qquad a_3 = \frac{1}{2}\langle \hat{q}_A \hat{p}_A + \hat{p}_A \hat{q}_A \rangle$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\langle \hat{q}_A \hat{q}_B + \hat{q}_B \hat{q}_A \rangle \qquad c_2 = \frac{1}{2}\langle \hat{p}_A \hat{p}_B + \hat{p}_B \hat{p}_A \rangle$$

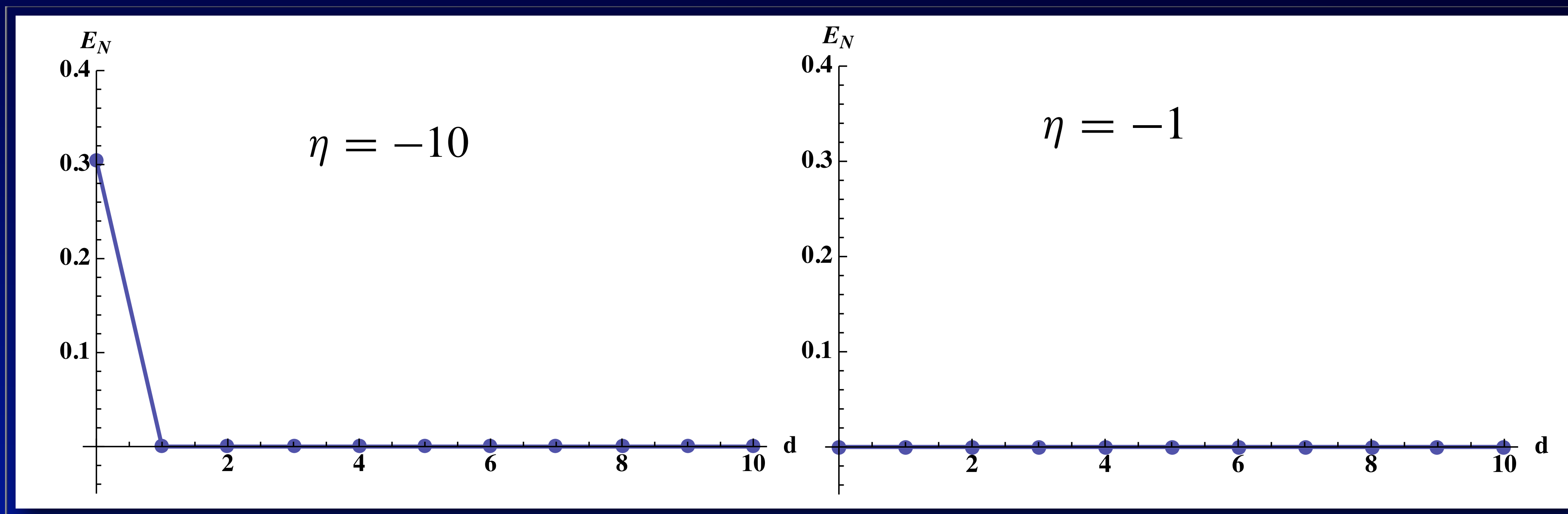
$$c_3 = \frac{1}{2}\langle \hat{q}_A \hat{p}_B + \hat{p}_B \hat{q}_A \rangle$$

- **symplectic eigenvalueを計算**
- **Logarithmic negativityを求める**

Result $N = 100, \quad -10 \leq \eta \leq -0.1$

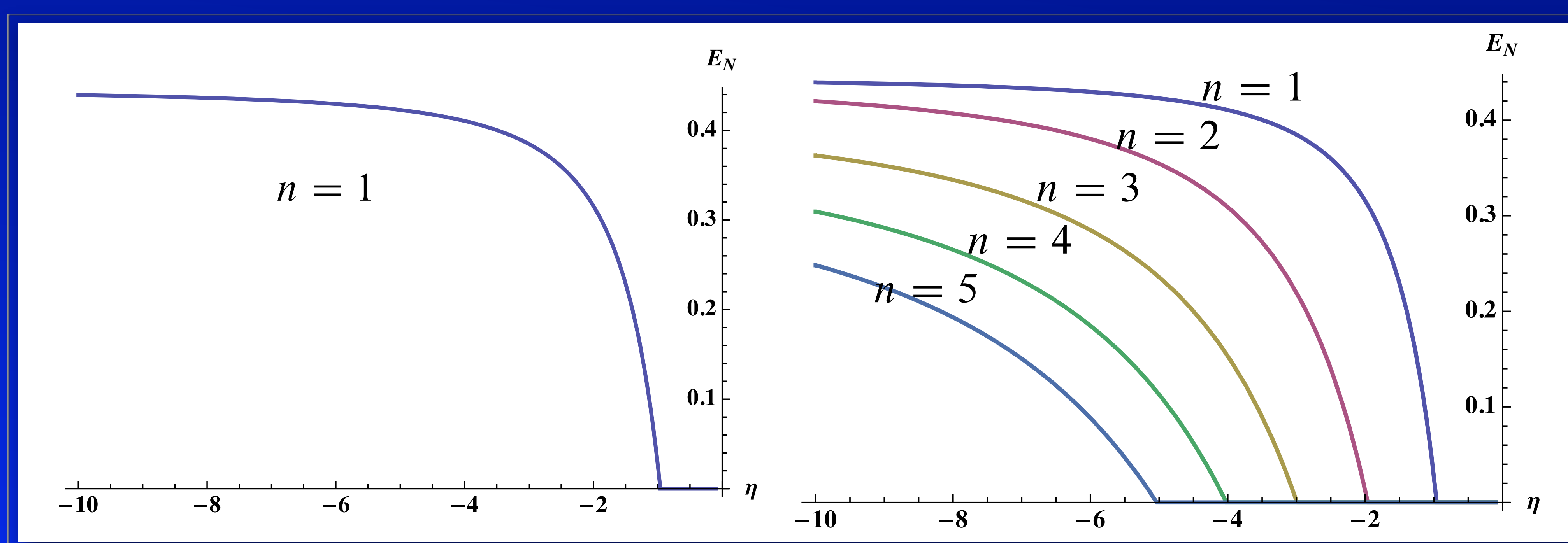


d 依存性$(n = 4)$



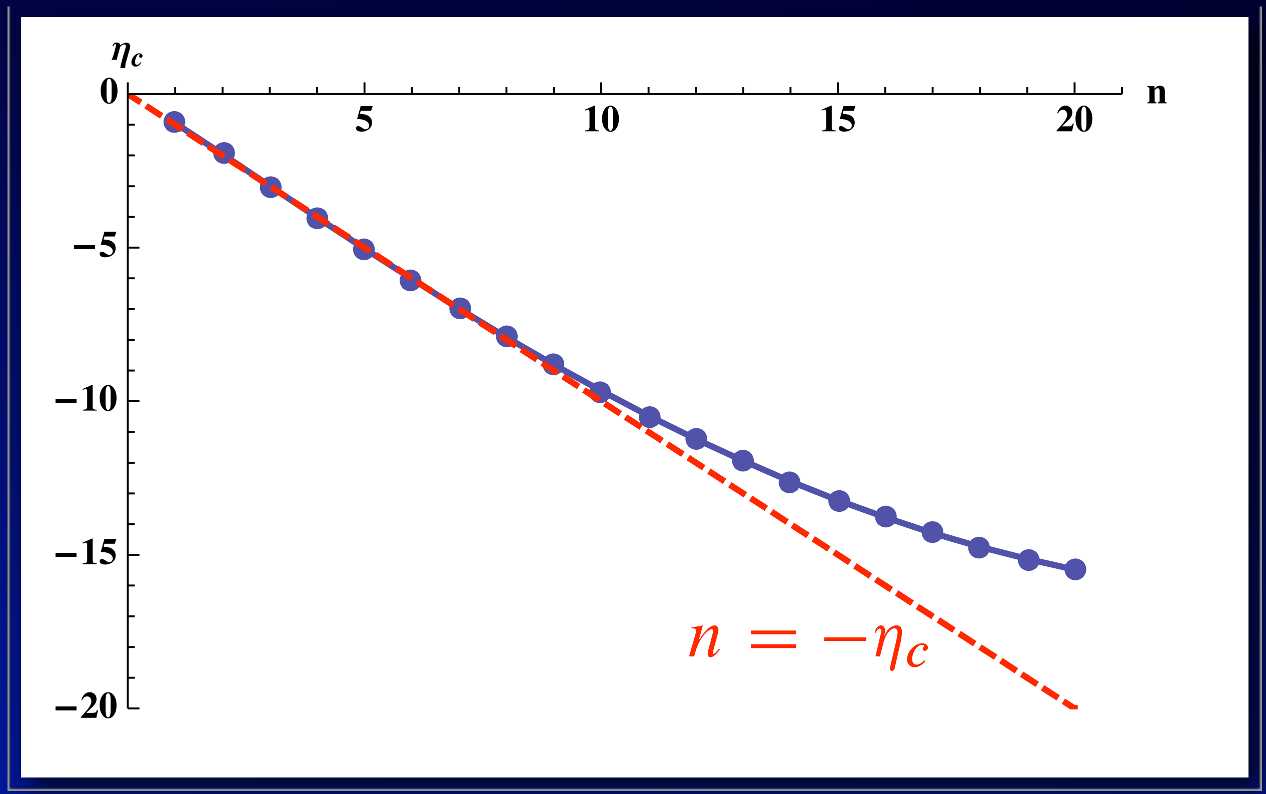
$d \geq 1$
では常に
$E_N = 0$

η 依存性$(d = 0)$



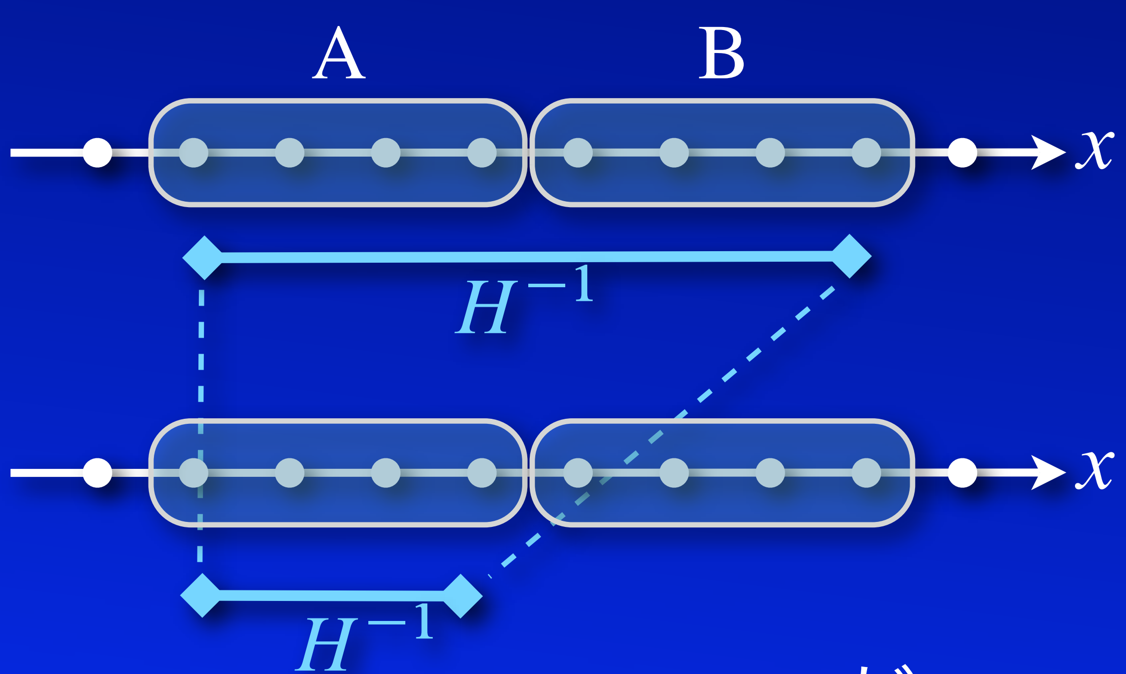
$\eta \geq \eta_c(d)$ で $E_N = 0$

groupのsizeとseparableになる時刻の関係



$$n\,\Delta x = -\eta_c = \frac{1}{a_c H}$$

$$\therefore \quad a_c\,(n\,\Delta x) = H^{-1}$$



entangled

↓

separable

group sizeがHubble horizon scaleと等しくなる
と"量子相関"が切れる

量子的 separate universe

古典化の条件　（量子論の期待値を再現する確率分布の存在条件）

任意の F に対して次の関係を満たす分布関数 $\mathcal{P}$ が存在

$$\langle F(\hat{q}_A, \hat{p}_A, \hat{q}_B, \hat{p}_B)\rangle = \int d^2q d^2p \, \mathcal{P}(q_A, p_A, q_B, p_B) F(q_A, p_A, q_B, p_B)$$

$$\int d^2q d^2p \, \mathcal{P} = 1, \ \mathcal{P} > 0$$

- 1 自由度 X 1 自由度 Gaussian stateに対しては

系がseparable ⟺ $\hat{\rho}_{AB} = \int d^2\alpha d^2\beta \, P(\alpha, \beta) \, |\alpha, \beta\rangle\langle\alpha, \beta|$

(R.Simon 2000, L.Duan *et al.* 2000)

$P \geq 0 \qquad |\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ A, Bに対する coherent state

P-function $\quad \langle : F(\hat{\boldsymbol{q}}, \hat{\boldsymbol{p}}) : \rangle = \int d^2q d^2p \, P(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) F(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$

$$P(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi^2}\sqrt{\det \boldsymbol{P}}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}\right) \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}^T\left(V_{II} - \frac{\boldsymbol{I}}{2}\right)^{-1}\boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{S} \in \mathrm{Sp}(2, R) \otimes \mathrm{Sp}(2, R)$$

standard form

$$V_{II} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{V}\boldsymbol{S}^T = \begin{pmatrix} ar & & cr & \\ & a/r & & c'/r \\ cr & & ar & \\ & c'/r & & a/r \end{pmatrix} \qquad r = \sqrt{\frac{a - |c'|}{a - |c|}}$$

$$V_{II} - \frac{\boldsymbol{I}}{2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\nu}_- \geq \frac{1}{2}$$

P-funcの存在条件 separability

Wigner function

$$W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = [\det V]^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T V^{-1}\boldsymbol{\xi}\right) \qquad \boldsymbol{\xi} = (q_A, p_A, q_B, p_B)^T$$

任意の関数$F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})$ に対して

$$\langle\{F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\}_{\rm sym}\rangle = \int d^2q d^2p\, W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

Wigner func. : $V > 0$なら存在

$$\langle :F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}}):\rangle = \int d^2q d^2p\, P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

P-func. : separableなら存在

separableの条件下で古典化の条件は

$$\langle\{F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\}_{\rm sym}\rangle \approx \langle :F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}}):\rangle \approx \langle F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\rangle \quad \Leftrightarrow \quad P(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \approx W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

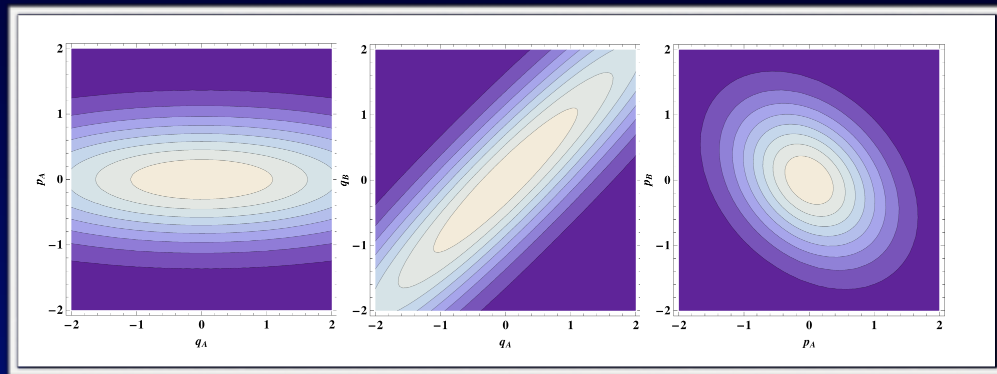
$\hat{q},\hat{p}$ の非可換性が無視できる

$\nu, \tilde{\nu} \gg 1$ (nambu, 2008)

$$\Rightarrow \quad \langle F(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}})\rangle \approx \int d^2q d^2p\, W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$$

lattice model

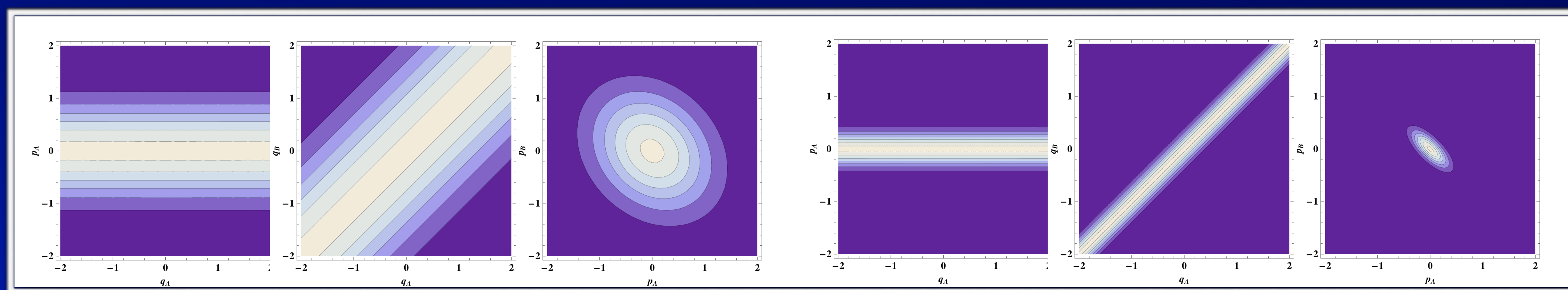
$\eta = -20$



$W(q_A, p_A)$ $W(q_A, q_B)$ $W(p_A, p_B)$

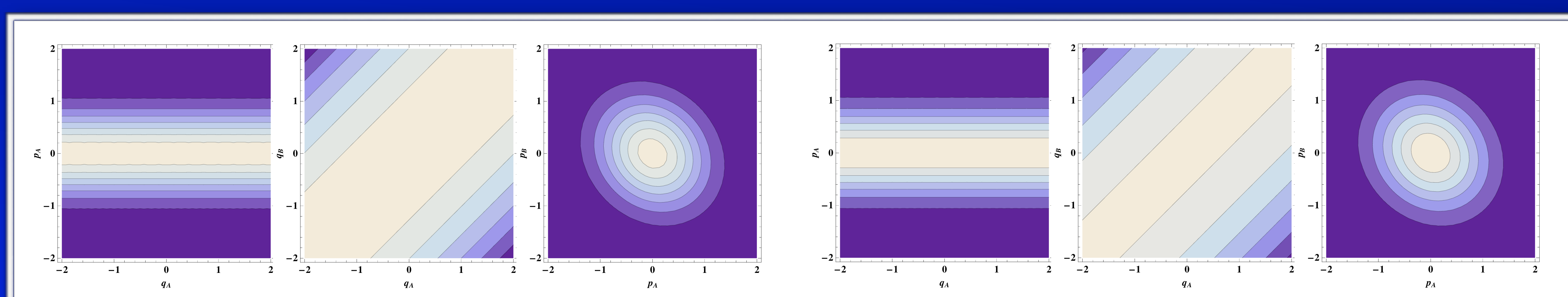
P-functionは存在しない

$\eta = -0.9$



$W(q_A, p_A)$ $W(q_A, q_B)$ $W(p_A, p_B)$ $P(q_A, p_A)$ $P(q_A, q_B)$ $P(p_A, p_B)$

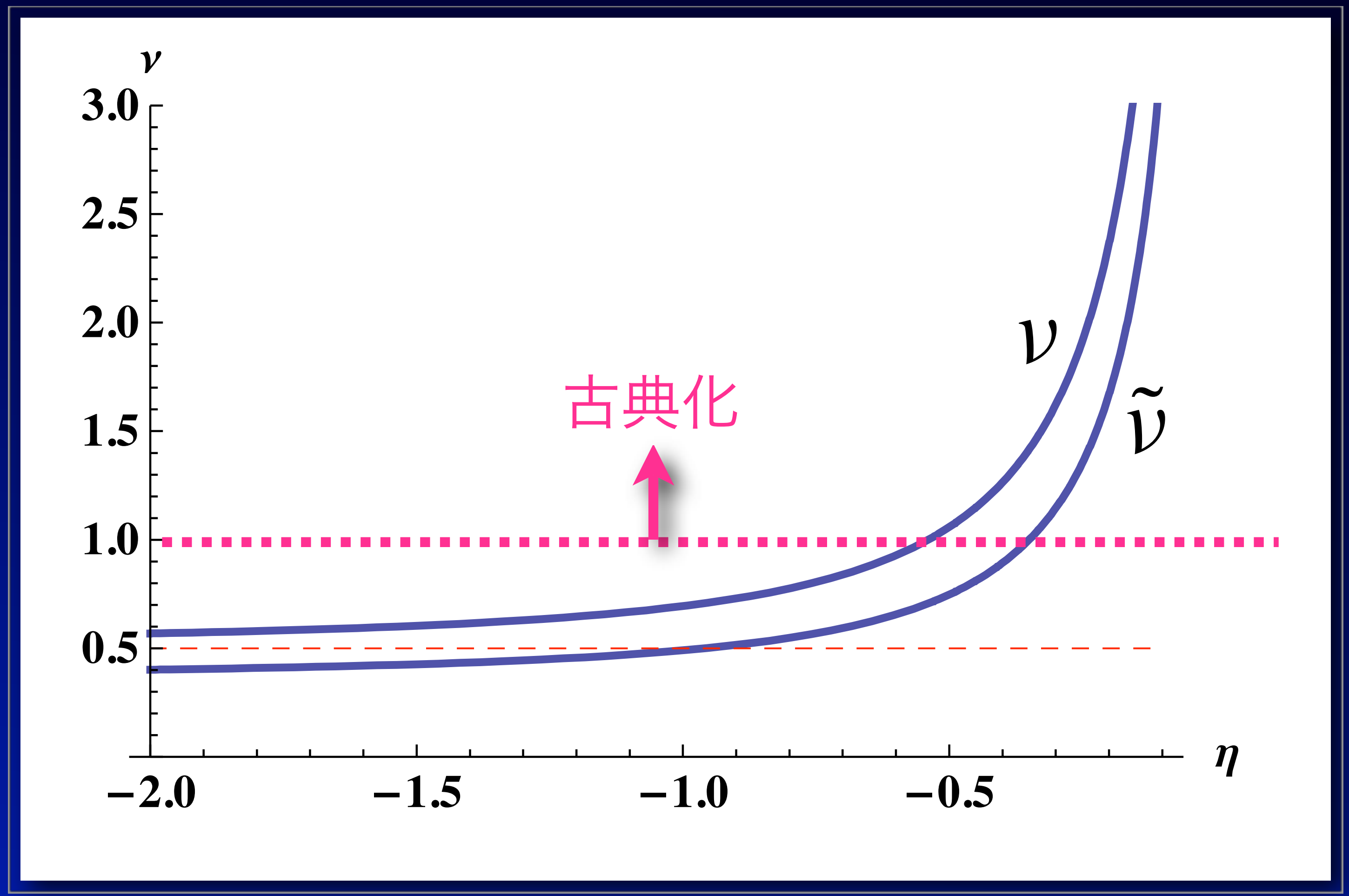
$\eta = -0.05$



$W(q_A, p_A)$ $W(q_A, q_B)$ $W(p_A, p_B)$ $P(q_A, p_A)$ $P(q_A, q_B)$ $P(p_A, p_B)$

$\eta \approx -0.3$で$W \approx P$ ($\eta = -1$からHubble time後)

lattice model

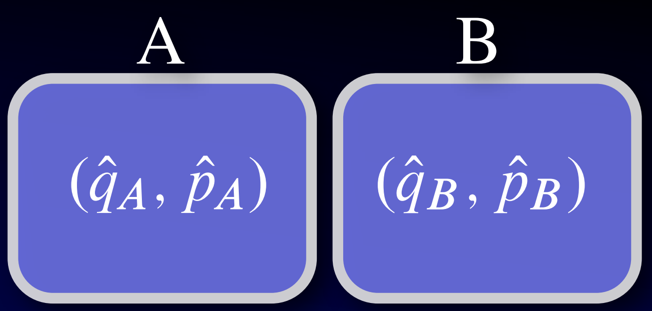


symplectic eigenvalueの時間発展

- 漸近的には古典化条件が成立

$$\nu, \tilde{\nu} \gg 1$$

- **古典分布関数の構造**



$$
\begin{aligned}
W \approx\ & W_1(\varphi_A, p_A) W_1(\varphi_B, p_B) \\
& \times \underbrace{\exp\left[\frac{c}{2a^2}(\varphi_A - \varphi_B)^2\right] \exp\left[-\frac{c'}{2a^2}(p_A + p_B)^2\right]}_{\nu,\, \tilde{\nu} \gg 1\ (c/a,\, c'/a \ll 1)\ \text{でほぼ一定}}
\end{aligned}
$$

量子相関の名残り

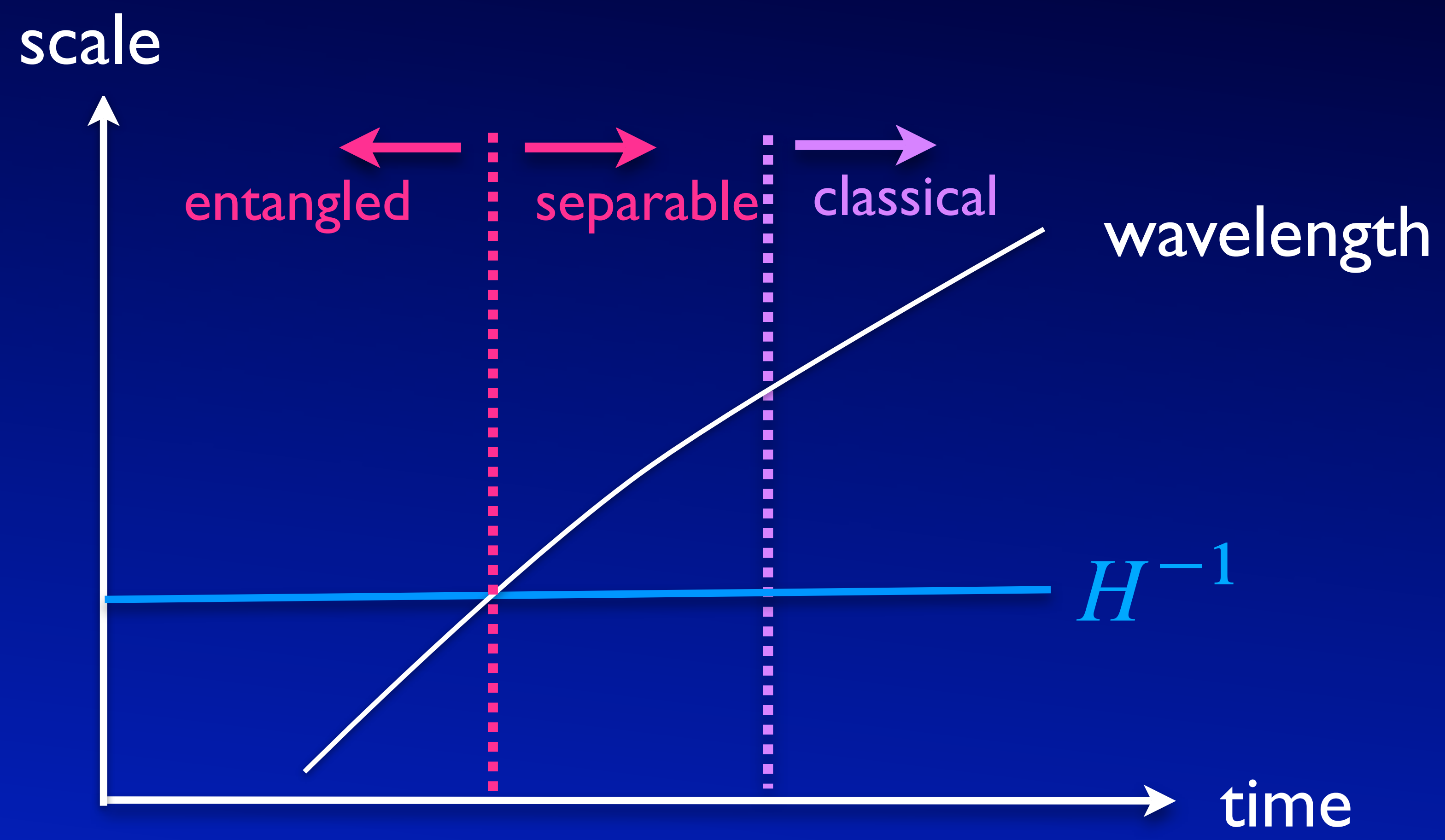
$\nu, \tilde{\nu} \gg 1$ ならば

$$W \approx W_1(\varphi_A, p_A) W_1(\varphi_B, p_B)$$

⇒ A, Bの変数は独立な確率変数として扱える

Lattice modelにおける古典化のまとめ

2体entanglementに基づく古典化に到る流れ



- 領域の大きさがhorizon scaleを超すと領域間はseparable

horizonが量子相関の有無を決定

- separableになってからone Hubble time程度で"古典化"

相関関数を再現する古典分布関数の出現

Stochastic Approach of Inflation

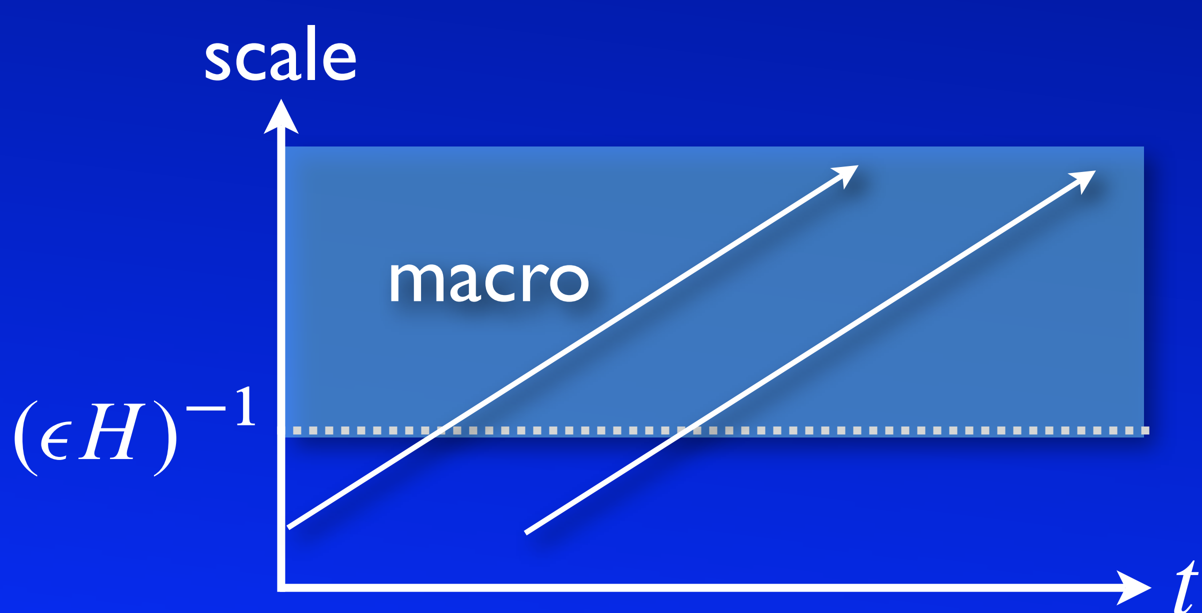
Starobinsky (1986)

インフラトン場のdynamicsを c 数の確率変数を用いて記述する

$$\ddot{\hat{\phi}} + 3H\dot{\hat{\phi}} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\hat{\phi} + V'(\hat{\phi}) = 0 \qquad \text{(Heisenberg eq.)}$$

$$\hat{\phi} = \hat{\varphi} + \hat{\varphi}_S \qquad \hat{\varphi}_S = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\theta(k - \epsilon a H)\hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{\hat{\phi}} = \hat{v} + \hat{v}_S \qquad \hat{v}_S = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}\theta(k - \epsilon a H)\dot{\hat{\varphi}}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$



長波長成分に対するdynamicsを導く

- 長波長成分 $\hat{\varphi}(t,\boldsymbol{x}), \hat{v}(t,\boldsymbol{x})$ に対する方程式

$$\dot{\hat{\varphi}} = \hat{v} + \hat{\sigma}$$
$$\dot{\hat{v}} = -3H\hat{v} + \frac{1}{a^2}\nabla^2\hat{\varphi} - V'(\hat{\varphi}) + \hat{\tau}$$

- "ノイズ"項の性質

粗視化のscaleを $\exp\left(-\frac{3H^2}{m^2}\right) \ll \epsilon^2 \ll \frac{m^2}{3H^2} \ll 1$

$$[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] = 0$$
$$[\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2] = 0$$
$$[\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_2] = O(\epsilon^3)$$

$$\langle\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\rangle = \frac{H^3}{4\pi^2} j_0(\epsilon a H r)\delta(t_1 - t_2)$$
$$\hat{\tau} = -\frac{m^2}{3H^2}\hat{\sigma}$$

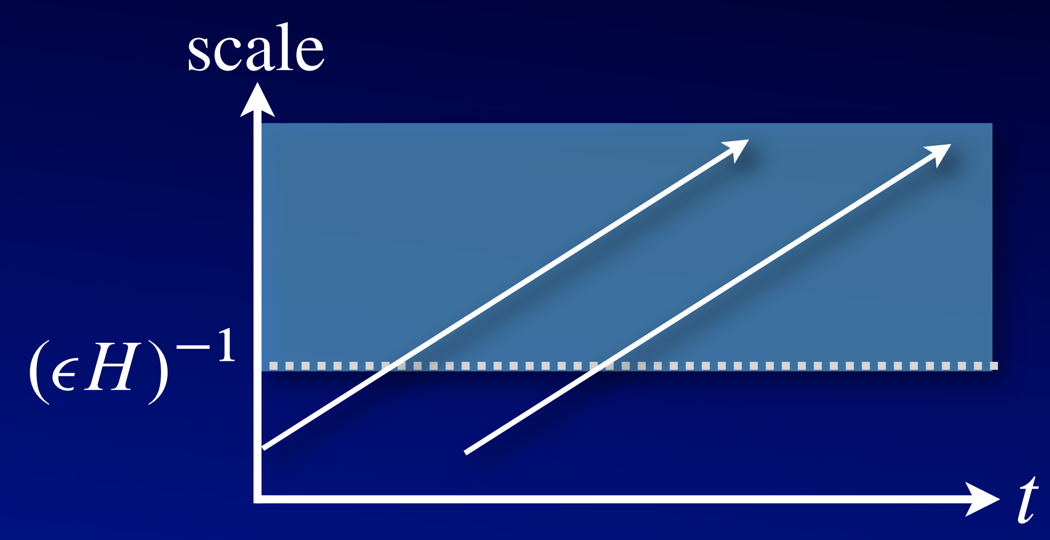
ノイズの非可換性が無視でき "古典的" Langevin方程式とみなせるだろう

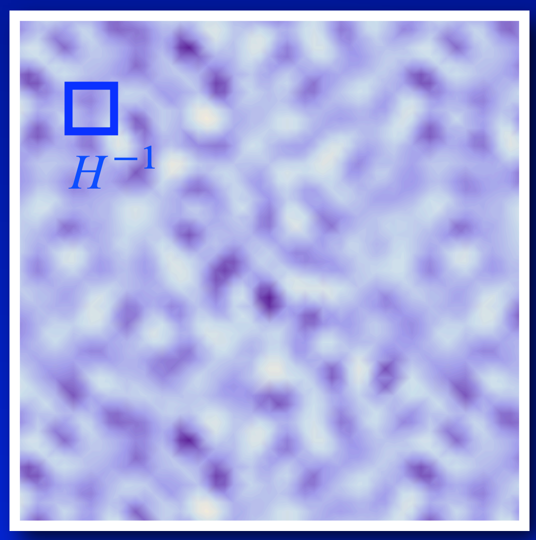
Classicality in Stochastic Approach

長波長成分の2体間entanglementを評価してみる

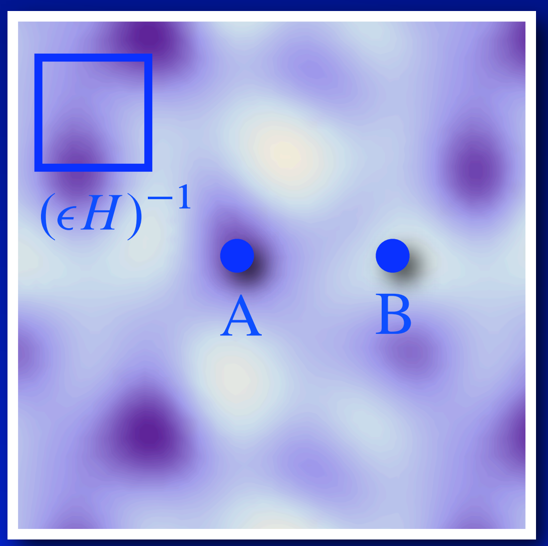
$$\hat{\varphi}(\eta, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} W_0\, \theta(\epsilon a H - k) \hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$\hat{p}(\eta, \boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} W_0\, \theta(\epsilon a H - k) \hat{p}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$$





粗視化



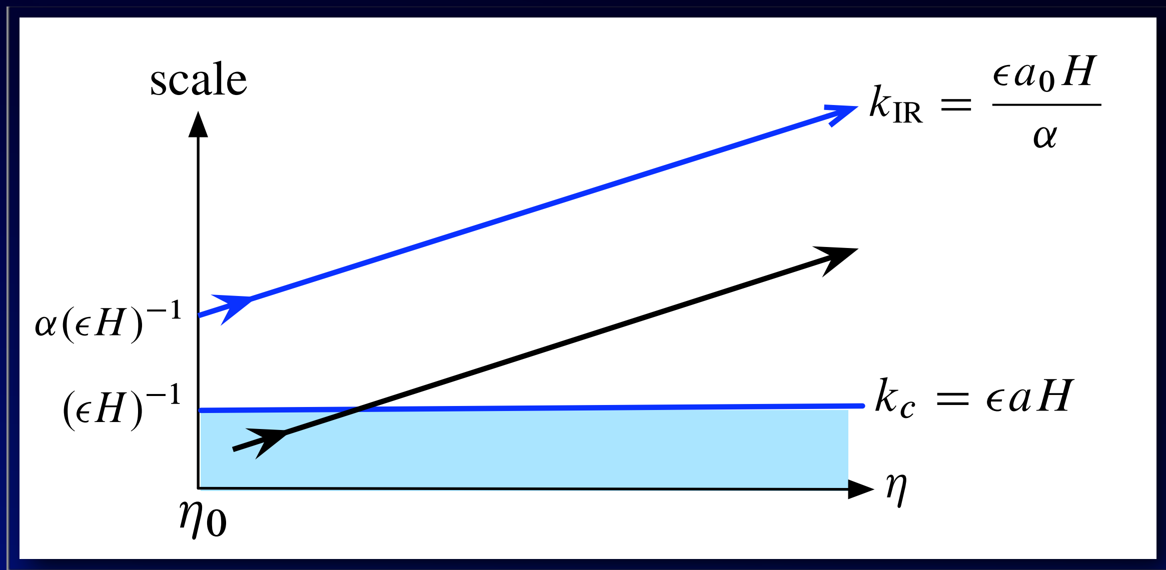
$$[\hat{\varphi}_A, \hat{p}_A] = i$$

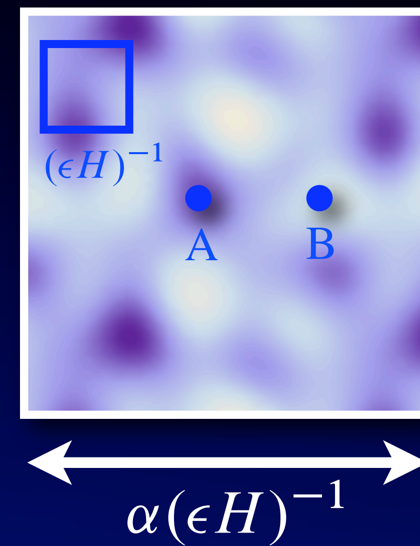
$$[\hat{\varphi}_B, \hat{p}_B] = i$$

$$[\hat{\varphi}_A, \hat{p}_B] = 0$$

$$a r_{AB} = \frac{\text{const.}}{\epsilon H}$$

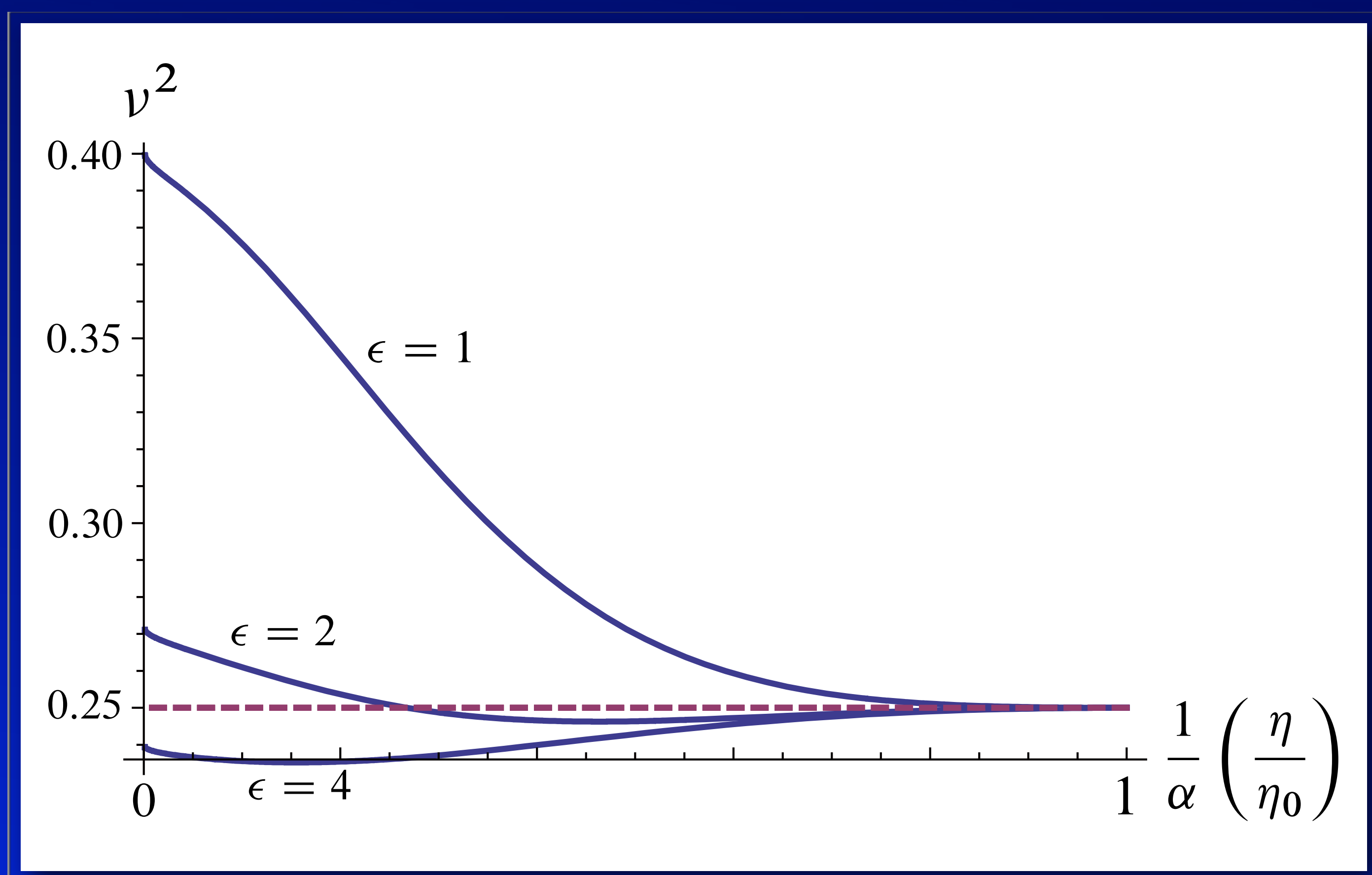
A, B 間のentanglement

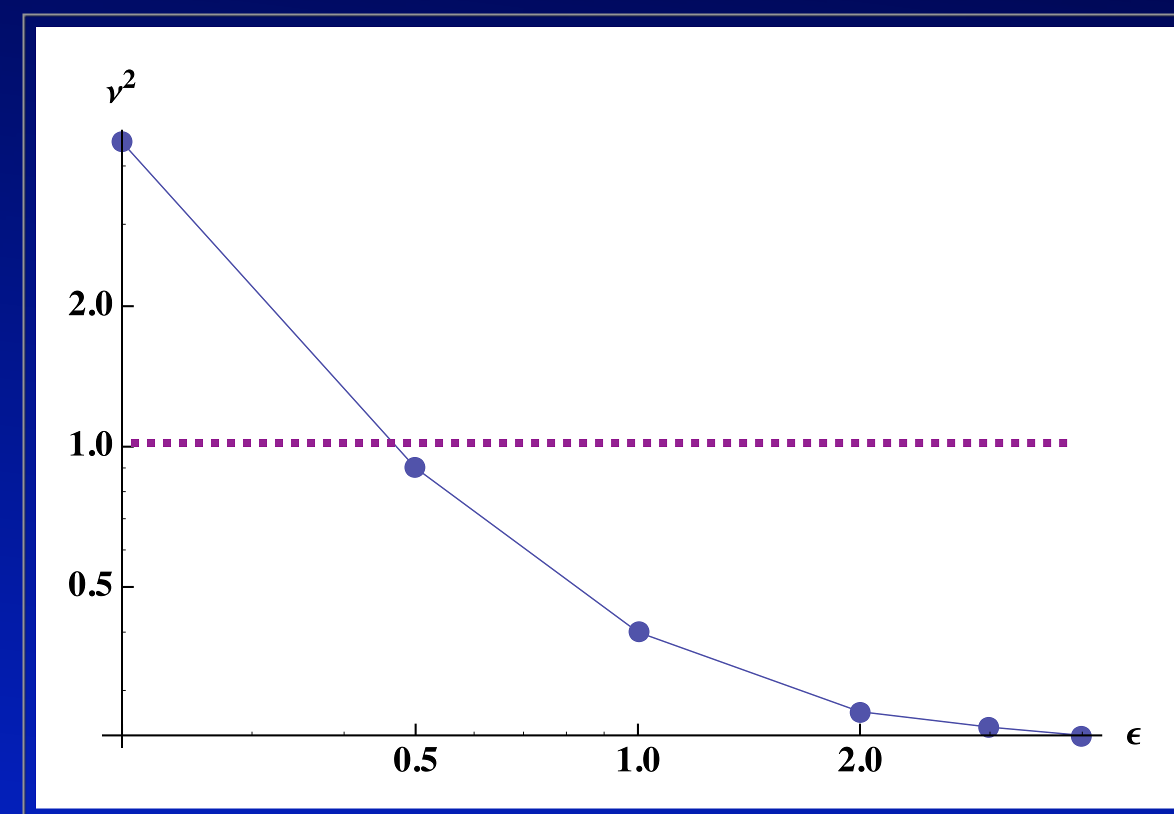




symplectic eigenvalueのparameter依存性

$$\nu = \nu(\epsilon, \alpha\eta_0/\eta)$$





symplectic eigenvalue $\tilde{\nu}$の漸近値

- $\epsilon < 1$ ならA, B間のentangleはない
- $\epsilon < 0.5$ なら古典化条件は漸近的には満たされる
  $\nu, \tilde{\nu} \gg 1$

⇒ 古典場として振舞うような粗視化が存在する

今後の課題

- 確率過程に対する発展方程式の導出
- 古典化に至るdynamics
- 古典化の実験的検証
  - BECでの観測設定の考察
  - 理論モデルを用いたsimulationなど
- N-party entanglement?