高次元Kerrブラックホール時空における

重力摂動の変数分離性について

安井　幸則　(大阪市立大学)

[1] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui,

“Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime”　Class. Quant. Grav. (2009)

[2] T. Oota and Y. Yasui,

“Separability of gravitational perturbation in generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime”　[arXiv:0812.1623]

0. はじめに

2006 年 Chen-Lü-Pope によって Kerr-NUT-de Sitter 時空と呼ばれる高次元ブラックホール解が発見された．この解は Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

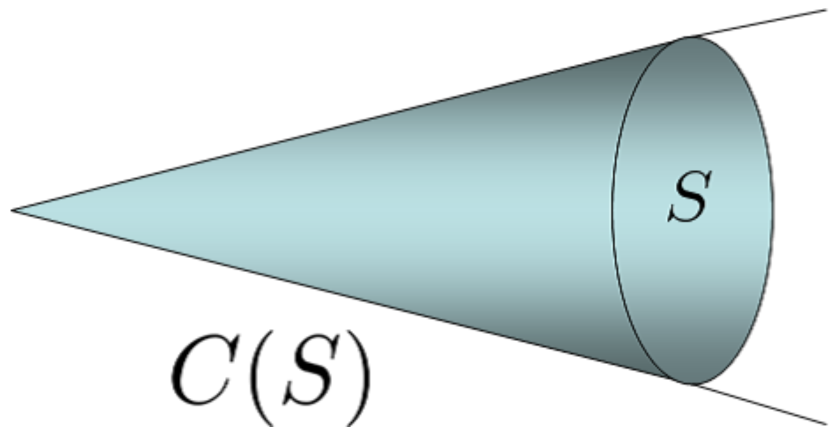
を満足するすべての知られている球形ホライズンのブラックホール解を含む．

Kerr-NUT-de Sitter 時空にはコンフォーマル Killing-矢野テンソル場と呼ばれる特別な反対称テンソル場が存在し，時空の "隠れた対称性" と密接に関係している [Frolov-Krtous-Kubiznak-Page 2006]．Kerr-NUT-de Sitter 時空はこのようなテンソル場を許す唯一の時空である [宝利-大田-安井　2007]．

奇数次元の Kerr-NUT-de Sitter 時空から，佐々木-Einstein 多様体と呼ばれる Riemann 幾何学の対象を，Wick 回転とある種の極限操作 (BPS 極限) を組み合わせて誘導することができる.

佐々木多様体 [佐々木重夫　1960]

定義 1.1 Riemann 多様体 (S, g) が佐々木多様体であるとは計量 $\bar{g} = dr^2 + r^2 g$ を持つ錐多様体 $C(S) \cong R_+ \times S$ が Kähler であるときをいう．例 $C(S^{2n-1}) = C^n$.



佐々木多様体 S 上の計量テンソルが Einstein 方程式に従うとき佐々木-Einstein 多様体という．このことは, 錐多様体 $C(S)$ が Kähler Ricci 平坦 (Calabi-Yau) であることと同値である.

素粒子論の分野でも佐々木-Einstein 多様体が注目されている.

AdS/CFT 対応 [Maldacena 予想　1997]

$$AdS_5 \times (\text{佐々木-Einstein})_5 \Longleftrightarrow 4\text{次元超対称共形場理論}$$

♣ 左辺：AdS_5 は Anti-de Sitter 空間, "5" は空間次元が 5 を意味する.

直積空間は $5+5=10$ 次元で, 超重力理論のブラックホールのホライズン近傍をあらわす.

♣ 右辺：共形場理論 (Conformal Field Theory) は, 今の場合クイバー・ゲージ理論と呼ばれる超対称ゲージ理論です.

1. 高次元ブラックホール解

- Kerr-NUT-de Sitter 時空 (2006)

2. Kerr-NUT-de Sitter 時空の一意性

- コンフォーマル Killing-矢野テンソル $\Longrightarrow$ Kerr-NUT-de Sitter 時空 [1]
- 測地線, Klein-Gordon（ラプラシアン), Dirac 方程式の可積分性　“隠れた対称性”

3. 一般化された Kerr-NUT-de Sitter 時空

- コンフォーマル Killing-矢野テンソルを許す時空の分類 [1]

4. Kerr-NUT-de Sitter 時空における重力摂動の変数分離性について

- テンソルタイプの重力摂動の方程式　$\Longrightarrow$　Fuchs タイプの常微分方程式 [2]
- 具体例:　偶数次元の高次元 Kerr ブラックホールの重力摂動

1. 高次元ブラックホール解

♣ D=4,5

逆散乱, Bäcklund **変換等々のソリトン手法を使って** Einstein **方程式の厳密解について大きな進展があった.**

♣ **一般次元** ($D \geq 4$)

現在知られている最も一般的なブラックホール解は Kerr-NUT-de Sitter **解である. この解は,** **コンフォーマル** Killing-**矢野テンソルによって幾何学的に特徴づけることができる.**

(A) 4次元ブラックホール $Ric(g) = \Lambda g$

	質量	角運動量	NUT	宇宙項Λ	パラメーター
Kerr (1963)	◯	◯	×	0	2
Carter (1968)	◯	◯	×	non-zero	3
Plebanski (1975)	◯	◯	◯	non-zero	4

(B) d (≥ 4) 次元ブラックホール

	質量	角運動量	NUT	宇宙項Λ	パラメーター
Myers-Perry (1986)	◯	◯	×	0	1+[(d-1)/2]
Gibbons-Lü-Page-Pope (2004)	◯	◯	×	non-zero	2+[(d-1)/2]
Chen-Lü-Pope (2006)	◯	◯	◯	non-zero	d

4次元 Kerr de Sitter 計量 [Carter 1968]: NUT=0

$$g=-\frac{\triangle_r}{\rho^2}\left(dt-\frac{a\sin^2\theta}{\Xi}d\psi\right)^2+\frac{\sin^2\theta\triangle_\theta}{\rho^2}\left(adt-\frac{r^2+a^2}{\Xi}d\psi\right)^2+\frac{\rho^2}{\triangle_r}dr^2+\frac{\rho^2}{\triangle_\theta}d\theta^2$$

where

$$\triangle_r=(r^2+a^2)(1-\lambda r^2)-2mr, \qquad \triangle_\theta=1+\lambda a^2\cos^2\theta$$

$$\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta, \qquad \Xi=1+\lambda a^2.$$

m: 質量, a: 角運動量

The metric satisfies the Einstein equation

$$R_{\mu\nu}=3\lambda g_{\mu\nu}.$$

- Kerr de Sitter $\longrightarrow$ Kerr $\longrightarrow$ Schwarzschild

$$\lambda\to 0 \qquad\qquad a\to 0$$

$y = a\cos\theta$: 新しい座標

$$
\begin{aligned}
g = & -\frac{\triangle_r}{r^2+y^2}\left(dt + y^2 d\phi\right)^2 + \frac{\triangle_y}{y^2+r^2}\left(dt - r^2 d\phi\right)^2 \\
& + \frac{r^2+y^2}{\triangle_r} dr^2 + \frac{y^2+r^2}{\triangle_y} dy^2,
\end{aligned}
$$

where

$$
\begin{aligned}
\triangle_r &= (a^2 + r^2)(1 - \lambda r^2) - 2mr, \\
\triangle_y &= (a^2 - y^2)(1 + \lambda y^2).
\end{aligned}
$$

L: Newman-Tamburino-Unti(NUT) 電荷 [Plebanski 1975]:

$$
\triangle_y \to (a^2 - y^2)(1 + \lambda y^2) + 2Ly.
$$

Einstein 方程式をみたす:

$$
R_{\mu\nu} = 3\lambda g_{\mu\nu}.
$$

"Wick 回転"

$$r \to \sqrt{-1}x, \quad m \to \sqrt{-1}M$$

$d = 4$ Kerr-NUT de Sitter 計量:

$$g^{(4)} = \frac{x^2 - y^2}{X(x)}dx^2 + \frac{y^2 - x^2}{Y(y)}dy^2 + \frac{X(x)}{x^2 - y^2}(dt + y^2 d\psi)^2 + \frac{Y(y)}{y^2 - x^2}(dt + x^2 d\psi)^2,$$

where

$$X(x) = (a^2 - x^2)(1 + \lambda x^2) + 2Mx$$

$$Y(y) = (a^2 - y^2)(1 + \lambda y^2) + 2Ly$$

and

$$Ric^{(4)}_{\mu\nu} = 3\lambda g^{(4)}_{\mu\nu}$$

$d = 5$ Kerr-NUT-de Sitter metric

$$
\begin{aligned}
g^{(5)} =& \frac{x^2 - y^2}{X(x)} dx^2 + \frac{y^2 - x^2}{Y(y)} dy^2 \\
&+ \frac{X(x)}{x^2 - y^2} (dt + y^2 d\psi_1)^2 + \frac{Y(y)}{y^2 - x^2} (dt + x^2 d\psi_1)^2 \\
&- \frac{a^2 b^2}{x^2 y^2} \left(dt + (x^2 + y^2) d\psi_1 + x^2 y^2 d\psi_2 \right)^2
\end{aligned}
$$

where

$$
X(x) = -\frac{1}{x^2}(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)(1 + \lambda x^2) - 2M
$$

$$
Y(y) = -\frac{1}{y^2}(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)(1 + \lambda y^2) - 2L
$$

$$
R^{(5)}_{\mu\nu} = 4\lambda g^{(5)}_{\mu\nu}
$$

a, b : **角運動量**,　M : **質量**,　L : **NUT**

$d = 6$ Kerr-NUT-de Sitter metric

$$
\begin{aligned}
g^{(6)} = &\frac{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}{X(x)}dx^2 + \frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{Y(y)}dy^2 + \frac{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}{Z(z)}dz^2 \\
&+ \frac{X(x)}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}(dt + (y^2+z^2)d\psi_1 + y^2z^2 d\psi_2)^2 \\
&+ \frac{Y(y)}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}(dt + (z^2+x^2)d\psi_1 + z^2x^2 d\psi_2)^2 \\
&+ \frac{Z(z)}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}(dt + (x^2+y^2)d\psi_1 + x^2y^2 d\psi_2)^2
\end{aligned}
$$

where

$$X(x) = -(a^2-x^2)(b^2-x^2)(1+\lambda x^2) - 2Mx$$

$$Y(y) = -(a^2-y^2)(b^2-y^2)(1+\lambda y^2) - 2L_1 y$$

$$Z(z) = -(a^2-z^2)(b^2-z^2)(1+\lambda z^2) - 2L_2 z$$

$$R^{(6)}_{\mu\nu} = 5\lambda g^{(6)}_{\mu\nu}$$

a, b : **角運動量**, M : **質量**, L_1, L_2 : **NUT's**

d次元 Kerr-NUT-de Sitter 計量 [Chen-Lü-Pope 2006]

(a) $d = 2n$

$$g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2$$

(b) $d = 2n + 1$

$$g^{(2n+1)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 + \frac{c}{\sigma_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \sigma_k d\psi_k \right)^2$$

関数 Q_μ は

$$Q_\mu(x) = \frac{X_\mu}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{n} (x_\mu^2 - x_\nu^2)$$

と定義され, $X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ は座標 x_μ だけに依存している. さらに, σ_k, $\sigma_k(\hat{x}_\mu)$ は x_μ^2 $(\mu = 1, \cdots, n)$ の対称多項式によって与えられる.

♣ **Kerr-NUT-dS 計量は X_μ を次式に選ぶときだけ Einstein 方程式をみたす:**

$$(1) \quad \boldsymbol{X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu x_\mu \quad (d = 2n)}$$

$$(2) \quad \boldsymbol{X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu + \frac{(-1)^n c}{x_\mu^2} \quad (d = 2n+1)}$$

$$\boldsymbol{R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad \Lambda \equiv -(d-1)c_n}$$

- **$d \leq 15$ [Chen-Lü-Pope 2006]**
- **一般次元 [浜本-宝利-大田-安井 2006]**

d 個の定数 c_k, b_μ, c は, ブラックホールの質量, 角運動量, NUT, 宇宙定数に対応する.

2. Kerr-NUT-de Sitter時空の一意性

♣ d次元Kerr-NUT-de Sitter時空上の測地線方程式は可積分である:

• 測地線のハミルトニアン$H = g^{ab}(x)p_a p_b$ を含む, ポアソン括弧で互いに交換するd個の独立な保存量$f_1, f_2, \cdots, f_d$がみつかった.

• Hamilton-Jacobi方程式

$$g^{ab}\frac{\partial W}{\partial x^a}\frac{\partial W}{\partial x^b} = E$$

は完全積分可能である:

$$W = W_1(x^1, c_i) + W_2(x^2, c_i) + \cdots + W_d(x^d, c_i)$$

Frolov-Krtous-Kubiznak-Page 2006 [4-dim.case, Carter 1968]

♣ **Klein-Gordon 方程式の変数分離:**

Frolov-Krtous-Kubiznak (2006) [4-dim. case, Carter 1968]

♣ **Dirac 方程式の変数分離:**

大田-安井 (2007) [4-dim. case, Chandrasekhar 1976]

このような可積分構造の背後にあるものがコンフォーマルKilling-矢野テンソル(CKY)と呼ばれる反対称テンソル場（微分形式）です.

コンフォーマルKilling-矢野(CKY)テンソル場hは, 1969年立花俊一によって導入された. $h = (h_{ab})$は2次微分形式であり次式で定義される.

$$\nabla_a h_{bc} + \nabla_b h_{ac} = 2\xi_c g_{ab} - \xi_a g_{bc} - \xi_b g_{ac}$$

$$\xi_a = (1/(d-1))\nabla^b h_{ba}$$

定理 2.1. [宝利-大田-安井 2007][Krtous-Frolov-Kubiznak 2008] d次元時空(M, g)に非退化な2階の閉CKYテンソルhが存在することを仮定する. このとき計量gはKerr-NUT-de Sitter計量に一意的に定まる.

(A) 測地線の可積分性 (d=2n)

CKY ∧ CKY=CKY, ＊(CKY)=CKY を使う.

(1) h (2-形式 CKY) $\Longrightarrow h^{(j)} \equiv h \wedge \cdots \wedge h$ (2j-形式 CKY)

$\Longrightarrow f^{(j)} \equiv *h^{(j)}$ (d-2j-形式 CKY) $\Longrightarrow K^{(j)}_{ab} \equiv f^{(j)}_{a\cdots} f_b^{(j)\cdots}$

$\underline{K^{(j)}_{ab}(x) p^a p^b \text{ は } n \text{ 個の保存量}}$.

$K^{(j)} = (K^{(j)}_{ab})$: Killing テンソル（対称テンソル）

$$\nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ac} + \nabla_c K_{ab} = 0$$

(2) $\xi_a \equiv \nabla^b h_{ba}$ (Killing ベクトル) $\Longrightarrow \eta^{(j)}_a \equiv K^{(j)}_{ab} \xi^b$ (Killing ベクトル)

$\underline{\eta^{(j)}_a p^a \text{ は } n \text{ 個の保存量}}$.

(1)(2) 合わせて $d = 2n$ 個の保存量. <u>それらは互いにポアソン括弧で交換することが示される</u>.

3. 一般化された Kerr-NUT-de Sitter 時空

CKY テンソル場 h は正規直交基底 $\{e^\mu, e^{n+\mu}\}$ を使うと

$$h = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e^\mu \wedge e^{n+\mu}$$

ここで x_μ は h の固有値. 定理 2.1. では $\{x_\mu\}$ が独立であることを仮定した. このような h を非退化と呼んだ.

♣ CKY テンソルの非退化条件を取り外し, Kerr-NUT-de Sitter 時空を一般化する.

一般に x_μ 以外に定数固有値 ξ_i (多重度 m_i) を持つ.

$$h = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e^\mu \wedge e^{n+\mu} + \xi_1 \sum_{\alpha=1}^{m_1} E^\alpha \wedge E^{m_1+\alpha} + \xi_2 \sum_{\beta=1}^{m_2} E^\beta \wedge E^{m_2+\beta} + \cdots$$

(ゼロ固有値の多重度は m_0 とする.)

定理3.1.(論文[1])　d次元時空(M,g)に2階の閉CKYテンソルhが存在することを仮定する．このとき時空は，局所的に，底空間をKälher多様体の積空間，ファイバー空間をKerr-NUT-de Sitter時空とするファイバー束となる．ここでKähler多様体の個数および次元はCKYテンソル場の定数固有値の個数Nとm_iである．

計量テンソルgおよびCKYテンソルhは次式の形になる．

$$g=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{dx_\mu^2}{P_\mu(x)}+\sum_{\mu=1}^{n}P_\mu(x)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k(\hat{x}_\mu)\theta_k\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\prod_{\mu=1}^{n}(x_\mu^2-\xi_i^2)g^{(i)}+\sigma_n g^{(0)},$$

$$h=\sum_{\mu=1}^{n}x_\mu dx_\mu\wedge\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k(\hat{x}_\mu)\theta_k\right)+\sum_{i=1}^{N}\xi_i\prod_{\mu=1}^{n}(x_\mu^2-\xi_i^2)\omega^{(i)}.$$

ここで$g^{(i)}$は$2m_i$次元のKähler計量，$\omega^{(i)}$はKähler形式である．

関数 P_μ は

$$P_\mu(x)=\frac{X_\mu}{x_\mu^{m_0}\prod_{i=1}^N(x_\mu^2-\xi_i^2)^{m_i}U_\mu},\quad U_\mu=\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\mu)}}^n(x_\mu^2-x_\nu^2)$$

であり $X_\mu=X_\mu(x_\mu)$ は座標 x_μ だけに依存する. 1 形式 θ_k は次式を満足する：

$$d\theta_k+2\sum_{i=1}^N(-1)^{k+n}\xi_i^{2n-2k-1}\omega^{(i)}=0,\qquad k=0,1,\cdots,n-1.$$

定理 3.2. $g^{(i)}$ $(i=1,\cdots,N)$ を $2m_i$ 次元の Kähler-Einstein 計量とする. 計量 g は関数 X_μ を次式に選ぶときたけ Einstein 方程式をみたす:

$$X_\mu=d_\mu x_\mu+x_\mu\int\chi(x_\mu)x_\mu^{m_0-2}\prod_{i=1}^N(x_\mu^2-\xi_i^2)^{m_i}dx_\mu.$$

$$\chi(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_i x^{2i}$$

$\{\xi_i,\alpha_k,c,d_\mu\}$ は定数.

♣ **例題**

D=2N 次元の Kerr ブラックホールは N-1 個の角運動量を持つ．もしも，角運動量の値が等しくなり n-1 個の異なる角運動量 ξ_i(多重度 m_i+1) を持つとき，ξ_i はコンフォーマル Killing-矢野テンソルの定数固有値（多重度 m_i）になる．このとき

$$\boldsymbol{X_\mu = d_\mu x_\mu - \prod_{i=1}^{n-1}(x_\mu^2 - \xi_i^2)^{m_i+1}}$$

時空構造は

$$(2n\,\text{次元の Kerr-NUT-de Sitter 時空})\,\tilde{\times}\,(CP(m_1)\times CP(m_2)\times\cdots\times CP(m_{n-1}))$$

4. Kerr-NUT-de Sitter時空における重力摂動の変数分離性

Kerr-NUT-de Sitter 計量 $g = (g_{ab})$ の線形摂動

$$g_{ab} \to g_{ab} + h_{ab}$$

を考える. Traceless 条件および Transverse 条件

$$g^{ab} h_{ab} = 0, \quad \nabla^a h_{ab} = 0$$

を使うと

$$\nabla^c \nabla_c h_{ab} + 2 R_{acbd} h^{cd} = 0$$

以下では, 底空間の Kähler Einstein 空間方向の摂動だけに制限するとき方程式が変数分離することを見る.

$$h_{ab}^{(i)} = \left(\prod_{\mu=1}^{n} A_{\mu}^{(i)}(x_\mu) \prod_{k=0}^{n-1} e^{iN_k \psi_k}\right) H_{ab}^{(i)}(y_I^{(i)}) \prod_{j\neq i} K^{(j)}(y_J^{(j)})$$

ここで $\{x_\mu, \psi_k\}$ はファイバー方向の座標である.

- $H_{ab}^{(i)} =$ i 番目の Käler-Einstein 空間上のテンソル成分

Lichnerowicz 演算子の固有関数（固有値 $= E_t^{(i)}$)

- $K^{(j)} =$ j 番目の Käler-Einstein 空間上のスカラー関数

ラプラシアンの固有関数（固有値 $= E_s^{(j)}$)

$$\Psi = A_\mu^{(i)}, \quad f_\mu = X_\mu / \prod_{i=1}^{N} (x_\mu^2 - \xi_i^2)^{m_i}$$

とおくと重力摂動の方程式は Fuchs タイプの２階常微分方程式で与えられる.

$$-\frac{d}{dx_\mu} f_\mu \frac{d}{dx_\mu}\Psi - 2\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j x_\mu f_\mu}{x_\mu^2 - \xi_j^2}\frac{d}{dx_\mu}\Psi + V\Psi = 0,$$

$$V = \frac{1}{f_\mu}\sum_{k,\ell=0}^{n-1}(-1)^{k+\ell}N_k N_\ell x_\mu^{2(2n-k-\ell-2)} + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N}\frac{(-1)^{n+1}E_s^{(j)}}{x_\mu^2 - \xi_j^2} - \sum_{k=0}^{n-2} b_k^{(i)} x_\mu^k$$
$$+\frac{(-1)^{n+1}(E_t^{(i)} - 2\lambda^{(i)})}{x_\mu^2 - \xi_i^2} - \sum_{j=1(j\neq i)}^{N}\frac{4\xi_i\xi_j f_\mu}{(x_\mu^2 - \xi_i^2)(x_\mu^2 - \xi_j^2)} + \frac{4\epsilon\xi_i}{x_\mu^2 - \xi_i^2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x_\mu^{2(n-k-1)} N_k$$

スカラー場の摂動では赤の部分がない.

例1　角運動量がすべて等しい $D = 2m + 3$ 次元の Kerr ブラックホール

- 計量の摂動　$h_{ab} = R(r)e^{-i(\omega t - n\psi)}H_{ab}(y_I)$

  ここで H_{ab} は $CP(m)$ 上の固有関数.

  固有値は $E = \ell(\ell + 2m) + 4(m+1) - n^2 \pm 4n, \quad \ell, m, n \in Z.$

- 動径部分 (ξ は角運動量)

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \left(\frac{F'(r)}{F(r)} - \frac{1}{r}\right)\frac{d}{dr}R(r) + V(r)R(r) = 0$$

$$F = -2Mr^2 + (r^2 + \xi^2)^{m+1}$$

$$V = \frac{(r^2+\xi^2)^{2(m+1)}}{F^2}\left(\omega - \frac{n\xi}{r^2+\xi^2}\right)^2 - \frac{r^2(r^2+\xi^2)^{m-1}}{F}(\ell(\ell+2m)-n^2)$$
$$-\frac{\xi^2(r^2+\xi^2)^m}{F}(\omega - n/\xi)^2$$

- $r \longrightarrow r_H$ (ホライズン)

$$R(r) = (r-r_H)^{\pm i\kappa(\omega-\Omega_H n)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r-r_H)^k$$

- $r \longrightarrow \infty$ (漸近展開)

$$R(r) \sim e^{\pm i\omega r} r^{-(m+1/2)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{-k}$$

例２　角運動量がすべて等しい $D = 2(m+2)$ 次元の Kerr ブラックホール

- 計量の摂動　$h_{ab} = R(r)\cos^m\theta\Theta(\theta)e^{-i(\omega t - n\psi)}H_{ab}(y_I)$

  ここで H_{ab} は $CP(m)$ 上の固有関数.

- 角度部分は spheroidal harmonics（$x = \cos\theta$）

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}\Theta(x) + (\lambda + \xi^2\omega^2(x^2-1) + (\ell+m)^2/(x^2-1))\Theta(x) = 0$$

  $\ell, m \in Z$,　ω: 角振動数,　ξ: 角運動量

- 動径部分

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{F'(r)}{F(r)}\frac{d}{dr}R(r) + V(r)R(r) = 0$$

$$F = -2Mr + (r^2 + \xi^2)^{m+1}$$

$$V = \frac{(r^2+\xi^2)^{2(m+1)}}{F^2}\left(\omega - \frac{n\xi}{r^2+\xi^2}\right)^2 + \frac{\xi^2(r^2+\xi^2)^{m-1}}{F}(\ell(\ell+2m)-n^2)$$
$$+\frac{(r^2+\xi^2)^m}{F}(m(m+1)+2n\xi\omega-\lambda)$$

- $r \to r_H$ (ホライズン)

$$R(r) = (r-r_H)^{\pm i\kappa(\omega-\Omega_H n)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r-r_H)^k$$

- $r \to \infty$ (漸近展開)

$$R(r) \sim e^{\pm i\omega r} r^{-(m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^{-k}$$

5. まとめと今後の展望

♣ 高次元Kerr-NUT-de Sitterブラックホール解の“いろいろな性質”が明らかになってきた.

- コンフォーマルKilling-矢野テンソルから導かれる導かれる可積分性そして一意性定理
- 重力摂動（テンソルタイプ）の変数分離性

♣ 課題

- 重力摂動の一般化
- 高次元ブラックホールのQuasi-Normal-Mode
- 高次元ブラックホール解の安定性解析
- ゲージ重力対応への応用

4. Kerr-NUT-de Sitter 計量からSasaki-Einstein 計量

佐々木多様体 (S, g_S): 錐多様体 $C(S)$ 上の計量 $\bar{g} = dr^2 + r^2 g_S$ が Kähler である.

S にはノルムが１の Reeb ベクトルと呼ばれる Killing ベクトル場 ξ が住む.

$$\xi = J\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

J は $C(S)$ 上の複素構造.

(a) ξ の軌道が閉じた S^1 になっている (quasi-regular)

$\Longrightarrow$ 軌道で割った商空間は Kähler 多様体（オービフォルド).

(b) ξ の軌道が閉じていない (irregular).

$\Longrightarrow$ 局所的にだけ Kähler 構造が入る.

2n+2 次元 Kähler

$\Uparrow$

2n+1 次元佐々木多様体

$\Downarrow$

2n 次元 Kähler

♣ BPS 極限: $x_\mu = 1 + \epsilon y_\mu, \quad \epsilon \to 0.$

$2n+1$ 次元の Kerr-NUT-de Sitter 計量 $\Longrightarrow$ 佐々木-Einstein 計量

$$g^{(2n+1)} = (d\tau + A)^2 + g^{(2n)}$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} : \text{Reeb ベクトル}, \quad dA = \text{2n 次元空間の Kähler 形式}$$

計量 $g^{(2n)}$ を持つ ”底空間 ”には, orthotoric Kähler Einstein と呼ばれる特別な Kähler 構造が入る.

定理 4.1.[Apostolov-Calderbank-Gauduchon 2004] $2n$ 次元の orthotoric Kähler 多様体の計量は, 局所座標 $\{y_\mu, \phi_r\}$ を使って次のように書ける:

$$g = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dy_\mu^2}{R_\mu(y)} + \sum_{\mu=1}^{n} R_\mu(y) \left(\sum_{r=1}^{n} \sigma_{r-1}(\hat{y}_\mu) d\phi_r \right)^2$$

$$R_\mu(y) = \frac{Y_\mu(y_\mu)}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu\neq\mu}^{n} (y_\mu - y_\nu)$$

ここで Y_μ は y_μ だけに依存する任意関数. $\sigma_r(\hat{y}_\mu)$ は y_ν $(\nu \neq \mu)$ の基本対称多項式.

Kähler 形式は

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{n} dy_\mu \wedge \left(\sum_{r=1}^{n} \sigma_{r-1}(\hat{y}_\mu) d\phi_r \right) = \sum_{r=1}^{n} d\sigma_r \wedge d\phi_r$$

Einstein 条件を課すと

$$Y_\mu = \sum_{k=1}^{n+1} c_k y_\mu^k + d_\mu.$$

佐々木-Einstein の底空間の計量と一致.

♣ コンパクトな orthotoric Kähler 多様体は複素射影空間 CP^n だけである.

$\Longrightarrow$ regular 佐々木-Einstein 多様体は $S^{2n+1} \cong CP^n$ 上の S^1 束.

♣ irregular な場合の佐々木-Einstein を考える.

- 最初の例 [Gauntlett-Martelli-Sparks-Waldram 2004]:

2 つの正整数 p, q でラベルされた可算無限個の 5 次元佐々木-Einstein Y^{pq}.

- Kerr-(NUT)-de Sitter ブラックホールから Y^{pq} を再導出 [橋本-阪口-安井 2004].

定理 4.2.[Cvetic-Lü-Page-Pope 2005] $S^2 \times S^3$ **上に** 5 **次元** Kerr-NUT-de Sitter **計量から誘導される** 3 **つの正整数** $\{a, b, c\}$ **でラベルされた可算無限個の佐々木**-Einstein **計量** L^{abc} **が存在する.**

- $a = b = p,\ c = p - q$ **のとき**, L^{abc} **は** Gauntlett et.al **の** Y^{pq} **に帰着する.**
- L^{abc} **はトポロジー** $S^2 \times S^3$ **を持つ多様体上の最も一般的なトーリック佐々木**-Einstein **計量である.**

定理 4.3. [**二木-小野**-Wang(2006)] **任意の自然数** k **に対し**, k **個の連結和** $\sharp k(S^2 \times S^3)$ **に可算無限個のトーリック佐々木**-Einstein **計量が存在する.**

5. Kerr-NUT-de Sitter時空からCalabi-Yau多様体

♣ Page極限: ブラックホールの2つのホライズンに囲まれた領域をホライズンの温度を等しくしながら ”くっつけて ”拡大する $\Longrightarrow$ S^2が生まれる.

● Page(1978): 4次元Kerr-de SitterブラックホールからS^2上のS^2束にEinstein計量(非等質なEinstein計量のはじめての例).

● 橋本-阪口-安井(2004), Gibbons-Lü-Page-Pope(2004):

d次元Kerr-de Sitterブラックホール

(a) 奇数次元 S^2上のS^{d-2}束に無限個のEinstein計量

(b) 偶数次元 S^2上のS^{d-2}束に一つのEinstein計量

♣ 偶数次元のKerr-NUT-de SitterにPage極限とBPS極限を両方行う

$\Longrightarrow$ S^2 上のorthotoric Kähler束(ハミルトニアン2-形式の幾何学).

$\Longrightarrow$ パラメターを調整してCalabi-Yau計量.

- 4次元: Eguchi-Hanson

- 6次元：Calabi-Yau

$$
\begin{aligned}
g = & \frac{(1-x)(1-y)}{3}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\
& + \frac{(1-x)(x-y)}{f(x)}dx^2 + \frac{(1-y)(y-x)}{h(y)}dy^2 \\
& + \frac{f(x)}{9(1-x)(x-y)}(d\psi - \cos\theta d\phi + y(d\beta + \cos\theta d\phi))^2 \\
& + \frac{h(y)}{9(1-y)(y-x)}(d\psi - \cos\theta d\phi + x(d\beta + \cos\theta d\phi))^2,
\end{aligned}
$$

where

$$
f(x) = 2x^3 - 3x^2 + a, \qquad h(y) = 2y^3 - 3y^2 + b \quad (a, b\ \text{定数})
$$

S^2 座標 θ, ϕ を固定する．ファイバー計量は４次元 orthotoric Kähler である:

$$
\begin{aligned}
g^{(4)} = & \frac{3(1-x)(x-y)}{f(x)} dx^2 + \frac{3(1-y)(y-x)}{h(y)} dy^2 \\
& + \frac{f(x)}{3(1-x)(x-y)} (d\psi + y d\beta)^2 + \frac{h(y)}{3(1-y)(y-x)} (d\psi + x d\beta)^2,
\end{aligned}
$$

- Kähler 形式　$\omega = d(x+y) \wedge d\psi + d(xy) \wedge d\beta$.
- 対称多項式 $x+y$ および xy のハミルトンベクトル場は Killing ベクトル場.
- grad$x$ と grad$y$ は直交する.

定理 5.1. [大田-安井　2006] パラメター a, b を

$$
a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{32}, \quad b = \frac{1}{4}(137 + 37\sqrt{13})
$$

に選ぶ．このとき計量 g は，$CP(2)\sharp\overline{CP(2)}$ を底空間とする複素線束上の完備な Calabi-Yau 計量を与える.

$\surd$ 1. ブラックホール解の歴史

$\surd$ 2. Kerr-NUT-de Sitter 時空の一意性

$\surd$ 2. 一般化された Kerr-NUT-de Sitter 時空

$\surd$ 4. 奇数次元 Kerr-NUT-de Sitter から佐々木-Einstein 多様体

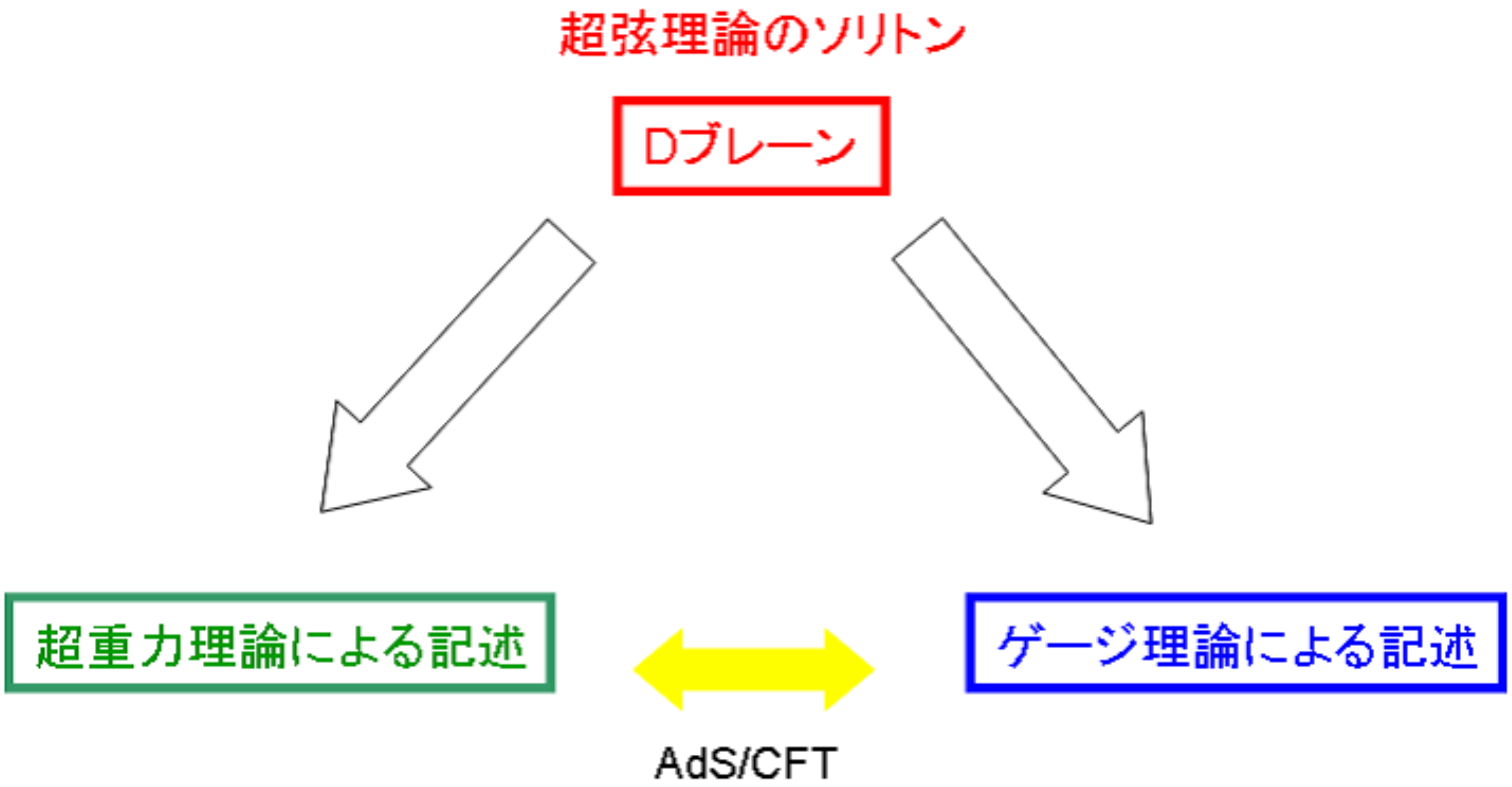
$\surd$ 5. 偶数次元 Kerr-NUT-de Sitter から Calabi-Yau 多様体

6. AdS/CFT 対応

- 超重力理論のソリトン解 (D ブレーン)

- ラプラシアンのスペクトラム

3．佐々木-Einstein 多様体とAdS/CFT対応



D3 ブレーンと呼ばれる 3 次元的に拡がった 10 次元超重力理論のソリトン解を考える．運動方程式は

$$R^{(10)}_{\mu\nu} = \kappa F_{\mu\alpha\beta\gamma\delta} F_{\nu}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad d * F = 0$$

ここで，$R^{(10)}_{\mu\nu}$ は 10 次元計量 $g^{(10)}$ の Ricci 曲率を，$F = dA$ は 5 形式の場の強さを表し拘束条件から自己双対となることが要求される.

$\{x, y, z\}$ をブレーンの拡がりをあらわす座標とする.

$$g^{(10)} = f^{-1/2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + f^{1/2} g_X$$

$$F = (1 + *)(vol(\mathrm{R}^{1,3}) \wedge df^{-1})$$

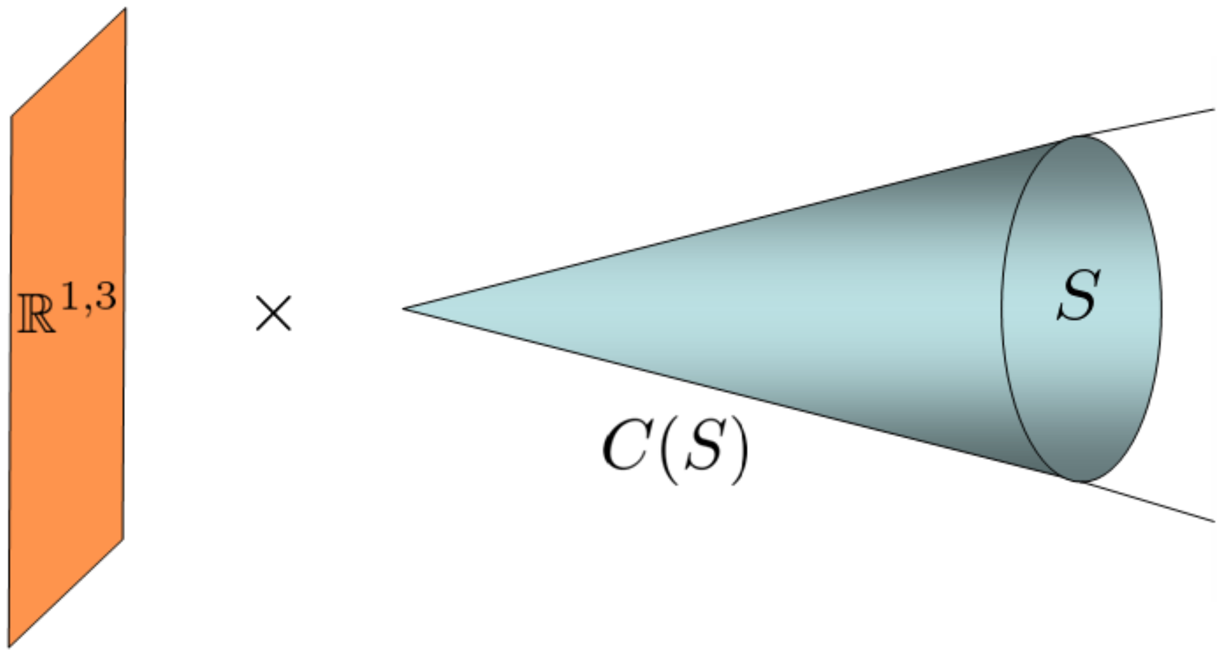
g_X は D3 ブレーンに垂直な 6 次元 Riemann 多様体 X の計量，f は X 上の関数である.

Einstein-Maxwell 方程式：

$$Ric(g_X) = 0, \quad \triangle_X f = 0$$

解が超対称性であることから $X = C(S)$ はCalabi-Yau錐 $(g_X = dr^2 + r^2 g_S)$

調和関数は $f(r) = 1 + (a/r)^4$



$C(S)$ の頂点 $r = 0$ は特異点である．10 次元 Lorentzian 空間の中では, 特異点は解消されブラックホールのホライズンになる．実際, ホライズン近傍では $f \sim (a/r)^4$ と近似でき, 10 次元計量 $g^{(10)}$ は次式のように書かれる:

$$g^{(10)} \to g_{AdS} + a^2 g_S$$

$$g_{AdS} = (r/a)^2(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + (a/r)^2 dr^2$$

AdS/CFT 対応 (Maldacena 予想)：$AdS_5 \times S$ を背景とする超弦理論は共形不変性を持つ 4 次元超対称ゲージ理論と等価である.

$AdS_5 \times S$	超対称ゲージ理論
AdS_5 の等長変換 SO(2,4)	共形対称性
S の等長変換（Reeb ベクトル）	R 対称性
解の超対称性 (Killing スピノール）	超対称性

5 次元佐々木-Einstein 多様体上のラプラシアンのスペクトラムを解析し AdS/CFT 対応の１つの検証を行う.

10 次元超重力理論のコンパクト化:

$$\text{Kaluza-Klein スペクトラム } E \Longleftrightarrow \text{スケール次元 } \Delta \text{ のゲージ不変な演算子}$$

AdS/CFT

超対称な共形代数から

$$\Delta \geq \frac{3}{2} Q_R, \qquad = \text{は BPS 演算子}$$

ここで Q_R は R 電荷.

5 次元トーリック佐々木-Einstein 多様体

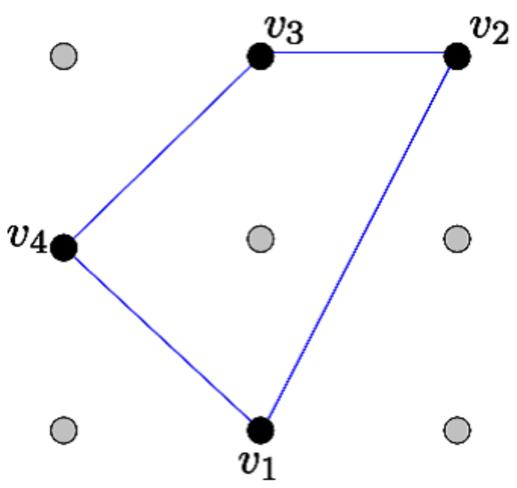
(A) BPS 演算子の $\Delta = (3/2)Q_R$: クイバー・ゲージ理論

(B) ラプラシアンのスペクトラム E: 計量テンソル, 可積分性

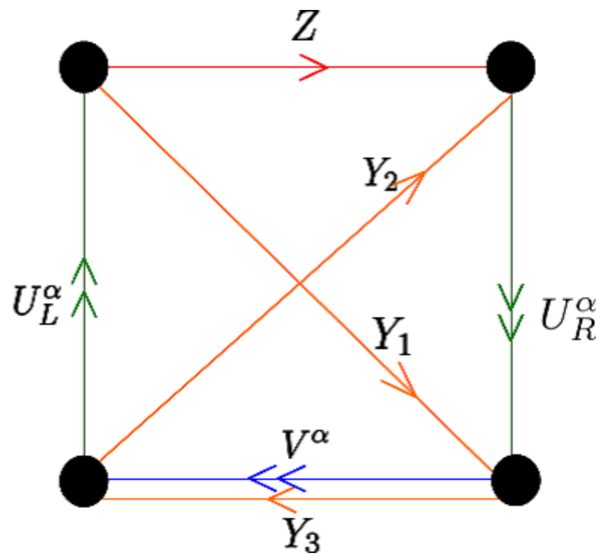
AdS/CFT: $\boldsymbol{\Delta = -2 + \sqrt{4+E}}$

クイバー図形	超対称ゲージ理論
頂点 (V)	ゲージ群
矢印（A）	カイラル超場

トーリック図形 $\Longrightarrow$ **クイバー図形** (Hanany-Vegh **のアルゴリズム**)



$\Rightarrow$



(A) Y^{pq} クイバー・ゲージ理論 [Benvenuti-Kruczenski 2006]

BPS(Meson) 演算子:

Meson	J	Q_R	$U(1)$
$\mathcal{S}$	$+1$	$+2$	0
$\mathcal{L}_+$	$(p+q)/2$	$p+q-\ell/3$	$+p$
$\mathcal{L}_-$	$(p-q)/2$	$p-q+\ell/3$	$-p$

Example $\quad Y^{2,1}$

- $\mathcal{S}$: $\quad \mathcal{S}_1 = U_L^1 Z U_R^1 Y_3,\ \mathcal{S}_2 = U_L^2 Z U_R^1 Y_3,\ \mathcal{S}_3 = U_L^2 Z U_R^2 Y_3$
- $\mathcal{L}_+$: $\quad \mathcal{L}_+^1 = V^1 U_L^1 Z U_R^1,\ \mathcal{L}_+^2 = V^2 U_L^1 Z U_R^1, \mathcal{L}_+^3 = V^2 U_L^2 Z U_R^1,\ \mathcal{L}_+^4 = V^2 U_L^2 Z U_R^2.$
- $\mathcal{L}_-$: $\quad \mathcal{L}_-^1 = Y_3 Y_2 U_R^1,\ \mathcal{L}_-^2 = Y_3 Y_2 U_R^2.$

(B) **ラプラシアン** [**木原-阪口-安井**]

4つの確定特異点を持つ 2 **階のフックス型常微分方程式** (Heun **方程式**):

$$\frac{d^2h(x)}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\epsilon}{x-a}\right)\frac{dh(x)}{dx} + \frac{\alpha\beta x - k}{x(x-1)(x-a)}h(x) = 0$$

	α	β	γ	δ	ϵ
$\mathcal{S}$	$-n$	$2+3N+n$	$1+N$	$1+N$	$1+N$
$\mathcal{L}_+$	$-n$	$2+n+Np(3/2+\omega)$	1	$1+Np$	$1+Np(1/2+\omega)$
$\mathcal{L}_-$	$-n$	$2+n+Np(3/2-\omega)$	$1+Np$	1	$1+Np(1/2-\omega)$

- **アクセサリーパラメター** $k = \eta\alpha\beta$

$$\eta = \frac{2p+3q+\sqrt{4p^2-3q^2}}{6q}, \quad \omega = \frac{2p-\sqrt{4p^2-3q^2}}{2q}$$

♣ $\Delta = -2 + \sqrt{4+E}$, $\Delta = (3/2)Q_R$ に従う固有値 E が存在する.

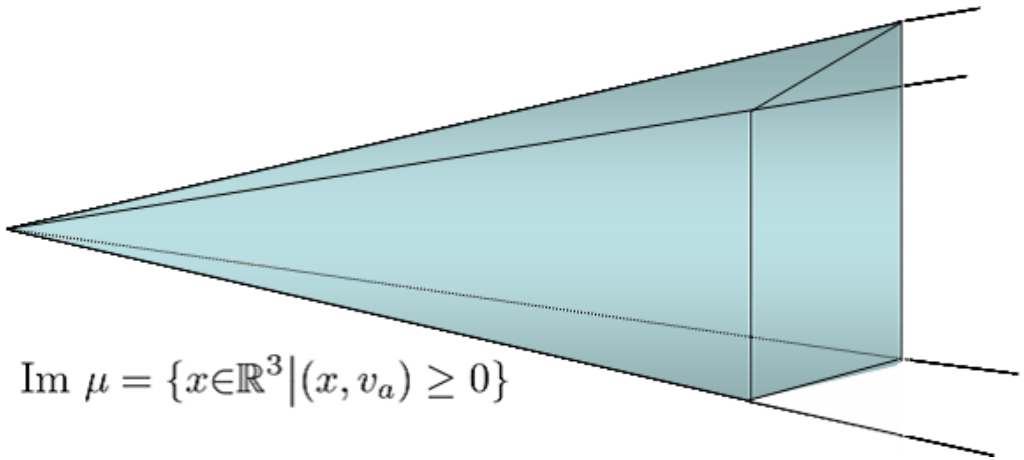
♣ 対応する固有関数 Ψ_0 は Calabi-Yau 錐上の正則関数に持ち上がる:

$$\hat{\Psi} = r^{\Delta}\Psi_0$$

♣ $\Delta = (N, \xi)$

ξ =Reeb ベクトル, N は凸多面錐の中にある整数点:

μ : Calabi-Yau 錐 $\to R^3 = \mathrm{Lie}(T^3)$



Y^{pq} 佐々木-Einstein 計量:

$$g = \frac{(1-x)}{6}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{1}{\omega(x)q(x)}dx^2$$
$$+ \frac{q(x)}{9}(d\psi - \cos\theta d\phi)^2 + \omega(x)(d\alpha + f(x)(d\psi - \cos\theta d\phi))^2$$

where

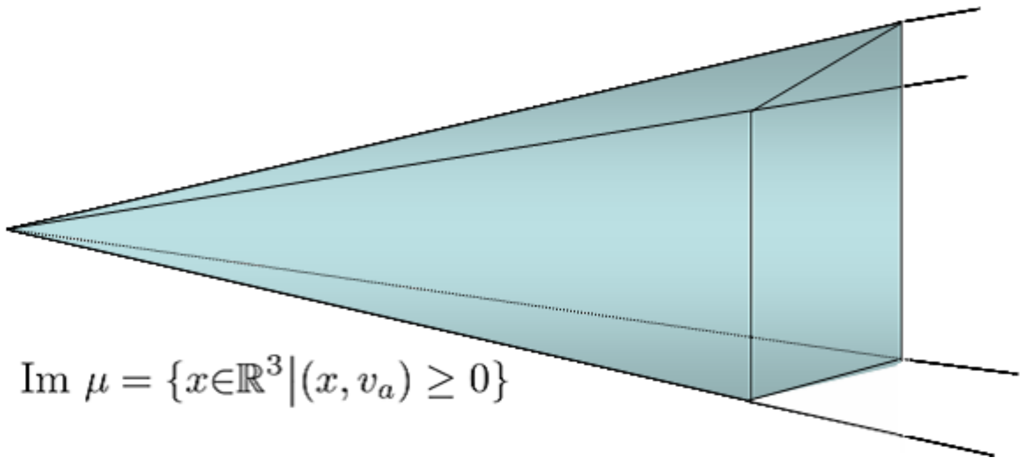
$$\omega(x) = \frac{2(a-x^2)}{1-x}, \quad q(x) = \frac{a - 3x^2 + 2x^3}{a - x^2}, \quad f(x) = \frac{a - 2x + x^2}{6(a-x^2)}$$

$$a = \frac{1}{2} - \frac{(p^2 - 3q^2)\sqrt{4p^2 - 3q^2}}{4p^3}$$

Calabi-Yau $C(Y^{pq})$

トーラスT^3作用に対応する運動量写像$\mu : C(Y^{pq}) \to R^3 = \mathrm{Lie}(T^3)$ により

Im μ=凸多面錐：



トーリック図形: $v_a = (1, w_a)$, $w_a \in Z^2$

$$w_1 = (-1, -p), \quad w_2 = (0,0), \quad w_3 = (-1, 0), \quad w_4 = (-2, -p+q)$$

$\boldsymbol{Y^{pq}}$ **クイバー・ゲージ理論のカイラル超場** $\boldsymbol{\{Y, Z, U^{\alpha}, V^{\alpha}\}}$ **の量子数.**

[Benvenuti-Franco-Hanany-Martelli-Sparks]

Field	J	Q_R	$U(1)$
Y	0	$(-4p^2+3q^2+2pq+(2p-q)\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	-1
Z	0	$(-4p^2+3q^2-2pq+(2p+q)\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	$+1$
U^{α}	$1/2$	$(4p^2-2p\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	0
V^{α}	$1/2$	$(3q^2-2pq+q\sqrt{4p^2-3q^2})/3q^2$	$+1$

Data of Gauge Theory

$$F = 2Area(\text{Toric}) = \sharp\{\text{Gauge Group}\}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,j} |\det(\omega_i, \omega_j)| = \sharp\{\text{Bifundamental Field}\}$$

$$F = 2p \Longleftrightarrow SU(N) \times \cdots \times SU(N)$$

$$E = 4p + 2q$$

Gauge Theory	Quiver	Brane Tiling
Gauge Group (F)	Vertex	Face
Bifundamental Field (E)	Arrow	Edge
Superpotential (V)	Loop	Vertex

$$\chi = F - E + V = 0$$

Example $Y^{2,1}$

- F=4 $\leftrightarrow SU(N)^4$
- E=10 $\leftrightarrow \{Y_1, Y_2, Y_3, U_R^1, U_R^2, U_L^1, U_L^2, V^1, V^2, Z\}$
- V=6 $\leftrightarrow$

$$W = V^2 U_L^1 Y_1 - V^1 U_L^2 Y_1 + U_L^2 Z U_R^1 Y_3$$

$$-U_L^1 Z U_R^2 Y_3 + U_R^2 V^1 Y_2 - U_R^1 V^2 Y_2$$

Classification of Lorentzian Space Time   Petrov (1954)

- **Null orthonormal frame $\{k, \ell, e_\alpha\}$:**

$$< k, k > = < \ell, \ell > = 0, \quad < k, \ell > = 1$$

$$< k, e_\alpha > = < \ell, e_\alpha > = 0, \quad < e_\alpha, e_\beta > = \delta_{\alpha,\beta}$$

- **Weight of Weyl curvature:**

$$k \Rightarrow 1, \quad \ell \Rightarrow -1, \quad e_\alpha \Rightarrow 0$$

$2 : W(k, e_\alpha, k, e_\beta)$

$1 : W(k, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma), \quad W(k, \ell, k, e_\alpha)$

$0 : W(e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\gamma), \quad W(k, \ell, e_\alpha, e_\beta), \quad W(k, e_\alpha, \ell, e_\beta), \quad W(k, \ell, k, \ell)$

$-1 : W(\ell, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma), \quad W(k, \ell, \ell, e_\alpha)$

[DEFINITION] D-type

Existence of null orthonormal frame with zero-weight Weyl curvature

Ker NUT de Sitter black holes are of type D for all dimensions:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{Q}_{\mu}^{-1/2}(\boldsymbol{e}_{\mu} + \sqrt{-1})\boldsymbol{e}_{n+\mu}, \quad \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{Q}_{\mu}^{1/2}(\boldsymbol{e}_{\mu} - \sqrt{-1}\boldsymbol{e}_{n+\mu})$$

Theorem[HSY] *Let $\nu_1,\ \nu_2$ be real numbers in the region $\nu_1^2,\ \nu_2^2 > 1$ together with the integral conditions:*

$$k_1 = \frac{\nu_1(1-\nu_2^2)(2-\nu_2^2-\nu_1^2\nu_2^2)}{1+\nu_1^4\nu_2^2+\nu_1^2\nu_2^4-3\nu_1^2\nu_2^2}$$

$$k_2 = \frac{\nu_2(1-\nu_1^2)(2-\nu_1^2-\nu_1^2\nu_2^2)}{1+\nu_1^4\nu_2^2+\nu_1^2\nu_2^4-3\nu_1^2\nu_2^2}$$

where $(k_1, k_2) \in \mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z}$. Then, there exists an infinite series of inhomogeneous Einstein metrics $\{g_{\nu_1,\nu_2}\}$ with positive scalar curvature on S^3-bundle over S^2. If the integer $k_1 + k_2$ is even (odd), then the bundle is trivial (non-trivial).

5. Cone, Holonomy and Sasaki-Einstein Geometry

Berger's Riemannian Holonomy Groups

Hol^0 (g)	dim(M)	Geometry of M	Property
SO(n)	n	orientable Riemannian	generic Riemannian
U(n)	$2n$	Kähler	generic Kähler
SU(n)	$2n$	Calabi-Yau	Ricci-flat Kähler
Sp(n) · Sp(1)	$4n$	quaternionic Kähler	Einstein
Sp(n)	$4n$	hyperkähler	Ricci-flat
G_2	7	G_2-manifold	Ricci-flat
Spin(7)	8	Spin(7)-manifold	Ricci-flat

ORTHONORMAL ONE-FORM

$$e^{\mu} = \frac{dx_{\mu}}{\sqrt{Q_{\mu}}} \, , \qquad e^{n+\mu} = \sqrt{Q_{\mu}} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_{\mu}) d\psi_k$$

LEVI-CIVITA CONNECTION

$$\omega^{\mu}{}_{\nu} = -\frac{x_{\nu}\sqrt{Q_{\nu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{\mu} - \frac{x_{\mu}\sqrt{Q_{\mu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{\nu}$$

$$\omega^{\mu}{}_{n+\mu} = -(\partial_{\mu}\sqrt{Q_{\mu}}) \; e^{n+\mu} - \sum_{\rho \neq \mu} \frac{x_{\mu}\sqrt{Q_{\rho}}}{x_{\rho}^2 - x_{\mu}^2} \; e^{n+\rho}$$

$$\omega^{\mu}{}_{n+\nu} = \frac{x_{\mu}\sqrt{Q_{\nu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{n+\mu} - \frac{x_{\mu}\sqrt{Q_{\mu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{n+\nu}$$

$$\omega^{n+\mu}{}_{n+\nu} = -\frac{x_{\mu}\sqrt{Q_{\nu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{\mu} - \frac{x_{\nu}\sqrt{Q_{\mu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \; e^{\nu}$$

CURVATURE TWO-FORM $\left(Q_T = \sum_{\mu=1}^n Q_\mu\right)$

$$R^\mu{}_\nu = -\frac{x_\mu(\partial_\mu Q_T) - x_\nu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^\mu \wedge e^\nu - \frac{x_\nu(\partial_\mu Q_T) - x_\mu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^{n+\mu} \wedge e^{n+\nu}$$

$$R^\mu{}_{n+\mu} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu^2 Q_T)\ e^\mu \wedge e^{n+\mu} - \sum_{\rho\neq\mu} \frac{x_\rho(\partial_\mu Q_T) - x_\mu(\partial_\rho Q_T)}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\ e^\rho \wedge e^{n+\rho}$$

$$R^\mu{}_{n+\nu} = -\frac{x_\mu(\partial_\mu Q_T) - x_\nu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^\mu \wedge e^{n+\nu} - \frac{x_\nu(\partial_\mu Q_T) - x_\mu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^\nu \wedge e^{n+\mu}$$

$$R^{n+\mu}{}_{n+\nu} = -\frac{x_\nu(\partial_\mu Q_T) - x_\mu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^\mu \wedge e^\nu - \frac{x_\mu(\partial_\mu Q_T) - x_\nu(\partial_\nu Q_T)}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)}\ e^{n+\mu} \wedge e^{n+\nu}$$

RICCI CURVATURE

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{n+\mu,n+\nu} = -\delta_{\mu\nu} I_\mu(Q_T)$$

where $I_\mu(Q_T) = \frac{1}{2}\frac{X_\mu''}{U_\mu} - \sum_{\rho\neq\mu} \frac{1}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\left(x_\mu \frac{X_\mu'}{U_\mu} + x_\rho \frac{X_\rho'}{U_\rho}\right) + \sum_{\rho\neq\mu} \frac{1}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\left(\frac{X_\mu}{U_\mu} + \frac{X_\rho}{U_\rho}\right)$

SCALAR CURVATURE

$$\mathcal{R} = -\sum_{\mu=1}^n \frac{X_\mu''}{U_\mu}$$

Theorem [Benenti-Francaviglia 1979]

The geodesic Hamilton-Jacobi equation on d-dim. spacetime (M, g) has a separable coodinate system if and only if

(1) There exist r independent commuting Killing vectors η_i:

$$[\eta_i,\ \eta_j] = 0$$

(2) There exist $d - r$ independent rank-2 Killing tensors K_a which satisfy

$$[K_a, K_b]_S = 0, \quad [K_a, \eta_i]_S = 0.$$

(3) The Killing tensors K_a have in common $d - r$ eigenvectors X_a such that

$$[\eta_i, X_a] = 0, \quad g(\eta_i, X_a) = 0, \quad [X_a, X_b] = 0,$$

$$g(X_a, X_b) = 0 \quad (a \neq b).$$

Step 2. 計量テンソルの構成

$(y^\alpha) = (x^\mu, \psi^i)$: 変数分離座標で

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{\mu\mu} & 0 \\ 0 & g^{ij} \end{pmatrix}.$$

を満足するものとする.

この座標で Hamilton-Jacobi 方程式の変数分離条件を書き下すと [Levi-Civita 1904]

$$g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g^{\lambda\lambda} - g^{\mu\mu} \partial_\mu g^{\nu\nu} \partial_\nu g^{\lambda\lambda} - g^{\nu\nu} \partial_\nu g^{\mu\mu} \partial_\mu g^{\lambda\lambda} = 0,$$

$$g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} \partial_\mu \partial_\nu g^{ij} - g^{\mu\mu} \partial_\mu g^{\nu\nu} \partial_\nu g^{ij} - g^{\nu\nu} \partial_\nu g^{\mu\mu} \partial_\mu g^{ij} = 0.$$

$(\mu \neq \nu; \mu, \nu$ and λ not summed$)$

これらの方程式は Killing テンソル $K = (K^{\alpha\beta})$ の可積分条件になっている:

$$\partial_\mu K^{\nu\nu} = (g^{\mu\mu})^{-1} K_{\mu\mu} \partial_\mu g^{\nu\nu}, \quad \partial_\mu K^{ij} = (g^{\mu\mu})^{-1} K_{\mu\mu} \partial_\mu g^{ij}.$$

計量の一般解は [Stäckel (1893)]

$$\boldsymbol{g^{\mu\mu} = \bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x), \quad g^{ij} = \sum_{\mu=1}^{n} \zeta_{\mu}^{ij}(x^{\mu})\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x).}$$

Killing **テンソルは** n **個の解を持ち** [Benenti (1997)]

$$\boldsymbol{K^{(i)\mu\mu} = \bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu}(x), \quad K^{(i)jk} = \sum_{\mu=1}^{n} \zeta_{\mu}^{jk}(x^{\mu})\bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu}(x).}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$ **となる．ここで** $\bar{\phi}_{(i)}{}^{\mu}(x)$ **は** $n \times n$ Stäckel **行列** $\phi_{\mu}{}^{(i)}$ **の逆行列である．**

Stäckel **行列の** μ **行は１変数** x_{μ} **だけに依存する成分を持つ．**

Killing テンソルは行列として次の漸化式に従う [宝利-大田-安井]:

$$\boldsymbol{K}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)}(\boldsymbol{x}_\mu^2)\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{K}^{(i-1)}$$

ここで $Q^a{}_b = -h^a{}_c h^c{}_b$ (コンフォーマル Killing テンソル), $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ は行列 Q の固有値 x_μ^2 の次数 i の対称多項式である.

未知関数は $\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(x)$ および $\zeta_\mu^{ij}(x^\mu)$ であり, CKY 方程式から

$$\bar{\phi}_{(1)}{}^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{X}_\mu(\boldsymbol{x}_\mu)}{\boldsymbol{U}_\mu}, \quad \boldsymbol{U}_\mu = \prod_{\nu=1,\nu\neq\mu}^{n}(\boldsymbol{x}_\mu^2 - \boldsymbol{x}_\nu^2)$$

$$\zeta_\mu^{ij}(\boldsymbol{x}^\mu) = \frac{(-1)^{i+j}\boldsymbol{x}_\mu^{2(2n-2-2-2\epsilon-i-j)}}{\boldsymbol{X}_\mu^2}$$

を得る.

Finally we obtain Kerr-NUT-dS !

(A) 測地線の可積分性 (d=2n)

CKY $\wedge$ CKY=CKY, $*$(CKY)=CKY を使う.

(1) h (2-形式 CKY) $\Longrightarrow h^{(j)} \equiv h \wedge \cdots \wedge h$ (2j-形式 CKY)

$\Longrightarrow f^{(j)} \equiv *h^{(j)}$ (d-2j-形式 CKY) $\Longrightarrow K^{(j)}_{ab} \equiv f^{(j)}_{a\cdots} f^{(j)\cdots}_{b}$

$\underline{K^{(j)}_{ab}(x) p^a p^b \text{ は } n \text{ 個の保存量}}$.

$K^{(j)} = (K^{(j)}_{ab})$: Killing テンソル（対称テンソル)

$$\nabla_a K_{bc} + \nabla_b K_{ac} + \nabla_c K_{ab} = 0$$

(2) $\xi_a \equiv \nabla^b h_{ba}$ (Killing ベクトル) $\Longrightarrow \eta^{(j)}_a \equiv K^{(j)}_{ab} \xi^b$ (Killing ベクトル)

$\underline{\eta^{(j)}_a p^a \text{ は } n \text{ 個の保存量}}$.

(1)(2) 合わせて $d = 2n$ 個の保存量. <u>それらは互いにポアソン括弧で交換することが示される</u>.

♣ Klein-Gordon 方程式の可積分性

$$(\triangle_g - m^2)\Phi = 0$$

(A) で議論したポアソン括弧の交換関係が微分演算子の交換関係に拡張される [Sergyeyev-Krtous 2007]:

$$\hat{\eta}^{(j)} = \eta^{(j)a}\frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \hat{K}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^a}\sqrt{g}K^{(j)ab}\frac{\partial}{\partial x^b}$$

♣ Dirac 方程式の可積分性

Riemann 多様体 (M, g) 上で運動する "超粒子" の古典論を考える:

$$L = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b + i g_{ab}\psi^a \dot{D}\psi^b$$

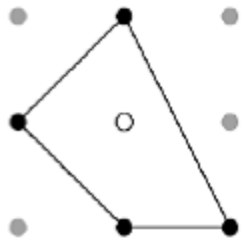
この模型は Dirac 演算子の指数定理の物理的な証明に使われた [Alvarez-Gaume 1983].

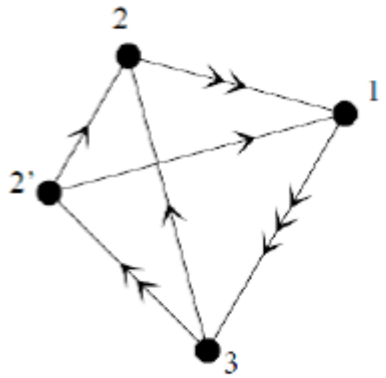
超対称性：$\delta x^a = -i\epsilon\psi^a, \quad \delta\psi^a = \epsilon\dot{x}^a - \delta x^a \omega^a_{bc}\psi^b$

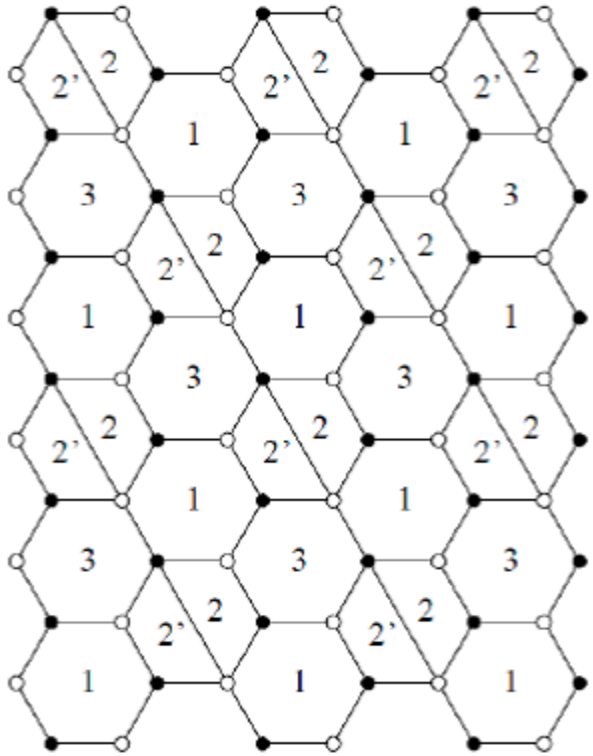
CKY が存在すると $h^{(j)}$ から n 個の超対称性の生成子 $Q^{(j)}$ を作ることができる [Gibbons-Rietdijk-van Holten 1993]. n 個の $f^{(j)} = *h^{(j)}$ を使って超電荷は

$$Q^{(j)} = \Pi^{a_1} f^{(j)}_{a_1\cdots a_{d-2j}}\psi^{a_2}\cdots\psi^{a_{d-2j}} - \frac{i}{d-2j+1}\nabla_{a_1} f^{(j)}_{a_2\cdots d-2j+1}\psi^{a_1}\cdots\psi^{a_{d-2j+1}}$$

$Q^{(j)}$ を量子化して Dirac 作用素と交換する微分演算子を得る.




2
1
2'
3


2'
2
1
3

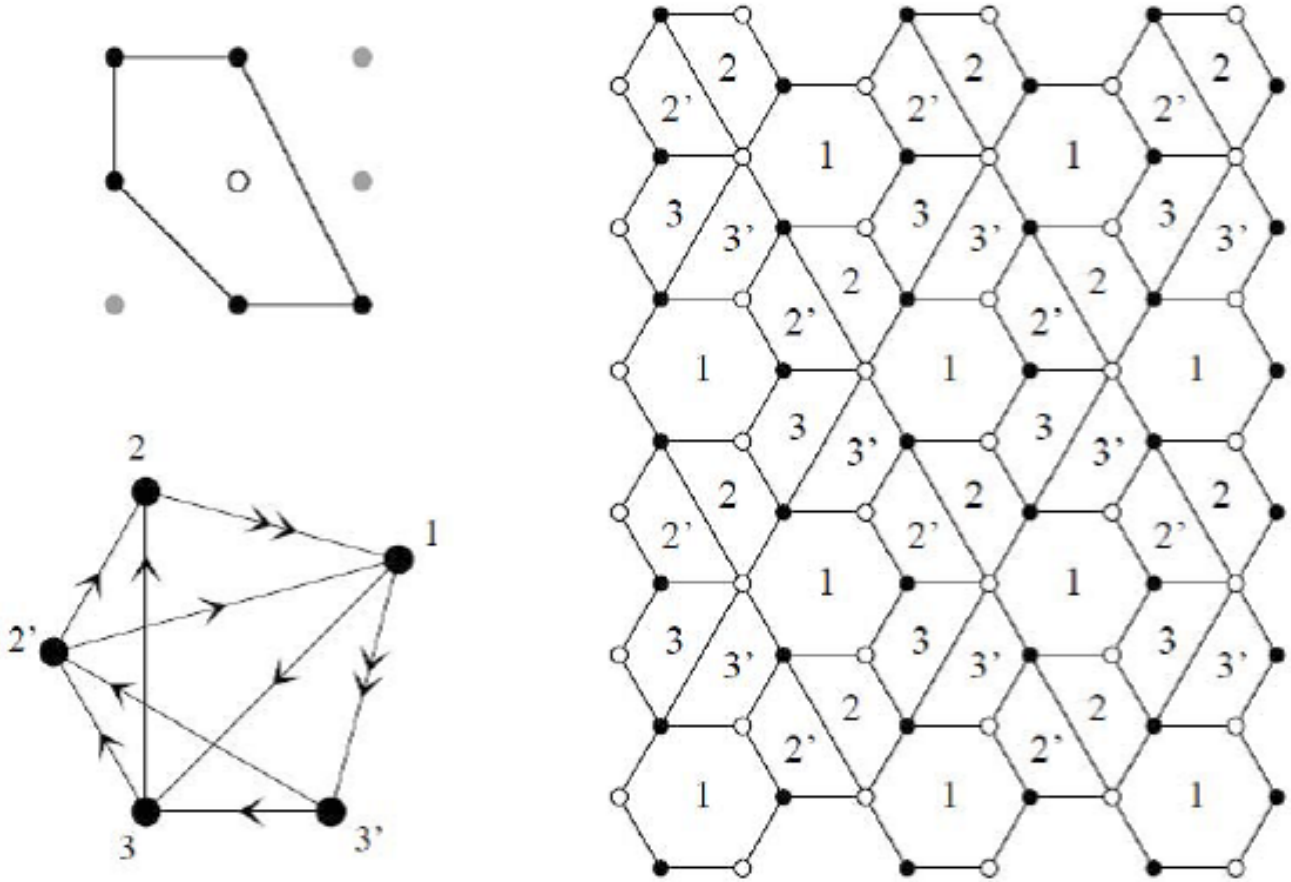

2
1
2'
3
3'

図1