

# 拡張された重力理論における ファントムクロッシング

参考文献:

Phys. Rev. D 79, 083014 (2009) [arXiv:0810.4296 [hep-th]]

大阪市立大学宇宙物理・重力研究室コロキウム  
平成21年7月15日

発表者: **馬場 一晴** (*National Tsing Hua University*)

共同研究者: **Chao-Qiang Geng** (*National Tsing Hua University*)

**野尻 伸一** (名古屋大学)

**Sergei D. Odintsov** (*ICREA and IEEC-CSIC*)

# < 発表内容 >

- I. 序
  - ・ 現在の宇宙の加速膨張
  - ・  $F(R)$  重力理論
  - ・ ファントムクロッシング
- II. ファントムクロッシングを実現する  $F(R)$  重力理論の構築
  - II A. 構築法
  - II B. 理論模型
  - II C. 構築された  $F(R)$  重力理論に対応するスカラー場理論での特異点の性質
- III. 結語

\* 通常の Metric formalism (接続が計量の微分に依存する) を用いる。

# I. 序

- ・近年のIa型超新星(SN)の観測から、現在の宇宙が加速膨張していることが明らかにされている(暗黒エネルギー問題)。

[Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999)]

[Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009 (1998)]

[Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006)]

- ・この問題の主な研究方法は、大きく二つに分類される。

[Copeland, Sami and Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006)]

## < 重力場の方程式 >

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}$$

重力

物質

$G_{\mu\nu}$  : Einstein テンソル

$T_{\mu\nu}$  : エネルギー運動量テンソル

$$\kappa^2 \equiv 8\pi / M_{\text{Pl}}^2$$

$M_{\text{Pl}}$  : Planck 質量

- (1) 一般相対論の枠内でのアプローチ → 暗黒エネルギー
- (2) 重力理論の拡張

# (1) 一般相対論の枠内でのアプローチ

## ・ 宇宙項

正準スカラー場

## ・ スカラー場: X マター、クインテッセンス ←

[Chiba, Sugiyama and Nakamura, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 289, L5 (1997)]

[Caldwell, Dave and Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 80, 1582 (1998)]

Cf. 先駆的研究: [Fujii, Phys. Rev. D 26, 2580 (1982)]

## ファントム ←—— 運動項の符号が逆

[Caldwell, Phys. Lett. B 545, 23 (2002)]

## K-エッセンス ←—— 非正準的な運動項

[Chiba, Okabe and Yamaguchi, Phys. Rev. D 62, 023511 (2000)]

[Armendariz-Picon, Mukhanov and Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 85, 4438 (2000)]

## タキオン ←—— 弦理論

[Padmanabhan, Phys. Rev. D 66, 021301 (2002)]

$A > 0$  : 定数

$\rho$  : エネルギー密度

## ・ チャプリジンガス ←—— $p = -A/\rho$

$p$  : 圧力

[Kamenshchik, Moschella and Pasquier, Phys. Lett. B 511, 265 (2001)]

## (2) 重力理論の拡張

Cf. インフレーションへの適用:  
[Starobinsky, Phys. Lett. B 91, 99 (1980)]

### ▪ $F(R)$ 重力

←  $F(R)$  : スカラー曲率  $R$  の任意関数

[Capozziello, Cardone, Carloni and Troisi, Int. J. Mod. Phys. D 12, 1969 (2003)]

[Carroll, Duvvuri, Trodden and Turner, Phys. Rev. D 70, 043528 (2004)]

[Nojiri and Odintsov, Phys. Rev. D 68, 123512 (2003)]

### ▪ スカラー・テンソル理論

←  $f_i(\phi)R$  ( $i = 1, 2$ ) : スカラー場  $\phi$  の任意関数

[Boisseau, Esposito-Farese, Polarski and Starobinsky, Phys. Rev. Lett. 85, 2236 (2000)]

[Gannouji, Polarski, Ranquet and Starobinsky, JCAP 0609, 016 (2006)]

### ▪ ゴースト凝縮模型

[Arkani-Hamed, Cheng, Luty and Mukohyama, JHEP 0405, 074 (2004)]

### ▪ 曲率の高次補正項 ← $\phi$ と結合した Gauss-Bonnet 項: $f_2(\phi)G$

$$G \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$$

[Nojiri, Odintsov and Sasaki, Phys. Rev. D 71, 123509 (2005)]  $R_{\mu\nu}$  : Ricci テンソル

[KB, Guo and Ohta, Prog. Theor. Phys. 118, 879 (2007)]

### ▪ DGP ブレーンワールドシナリオ

$R_{\mu\nu\rho\sigma}$  : Riemann テンソル

[Dvali, Gabadadze and Porrati, Phys. Lett B 485, 208 (2000)]

[Deffayet, Dvali and Gabadadze, Phys. Rev. D 65, 044023 (2002)]

# < 平坦な Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 時空 >

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2 \quad a(t) : \text{スケールファクター}$$

## < 完全流体が存在する場合の $a(t)$ の発展方程式 > $\dot{\phantom{x}} = \partial/\partial t$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho + 3p)$$

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$$

$\rho$  : エネルギー密度,  $p$  : 圧力

・  $\rho + 3p < 0$  の場合  $\longrightarrow \ddot{a} > 0$  : 加速膨張

## < 状態方程式 $w$ >

$$w \equiv \frac{p}{\rho}$$

加速膨張の  
ための条件

$$w < -\frac{1}{3}$$

Cf. 宇宙項  $\implies w = -1$

・ エネルギー保存則

$$\dot{\rho} + 3H(1+w)\rho = 0$$

$H = \dot{a}/a$  : Hubble パラメタ

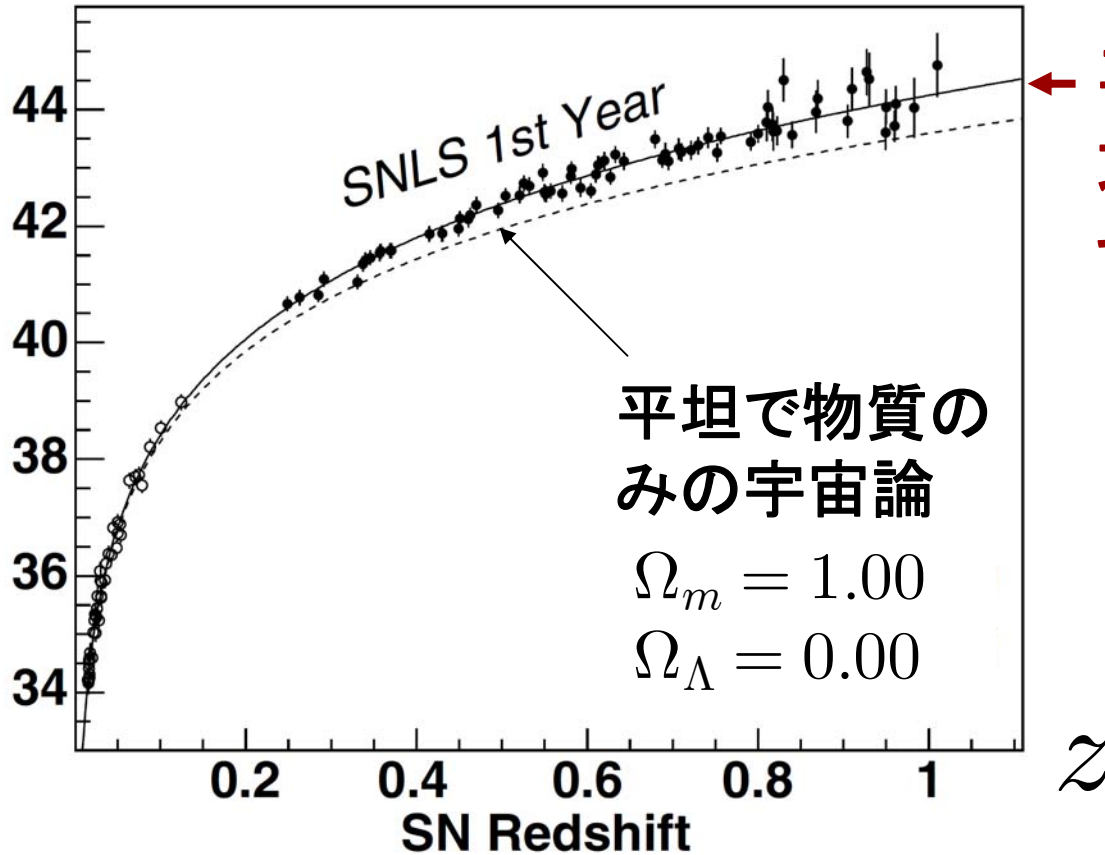
$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

# < SNLS データ >

 $m - M$ 

: 距離指標

 $\mu_B$ 


← 平坦で宇宙項  $\Lambda$  が存在する宇宙論

$$\Omega_m = 0.26$$

$$\Omega_\Lambda = 0.74$$

平坦で物質のみの宇宙論

$$\Omega_m = 1.00$$

$$\Omega_\Lambda = 0.00$$

 $z$ 

SN Redshift

[Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006)]より転写。

$$\frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\Omega_m}{2} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda$$

$$1+z = \frac{a_0}{a}$$

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho(t_0)}{3H_0^2} \quad \text{: 物質の密度パラメタ}$$

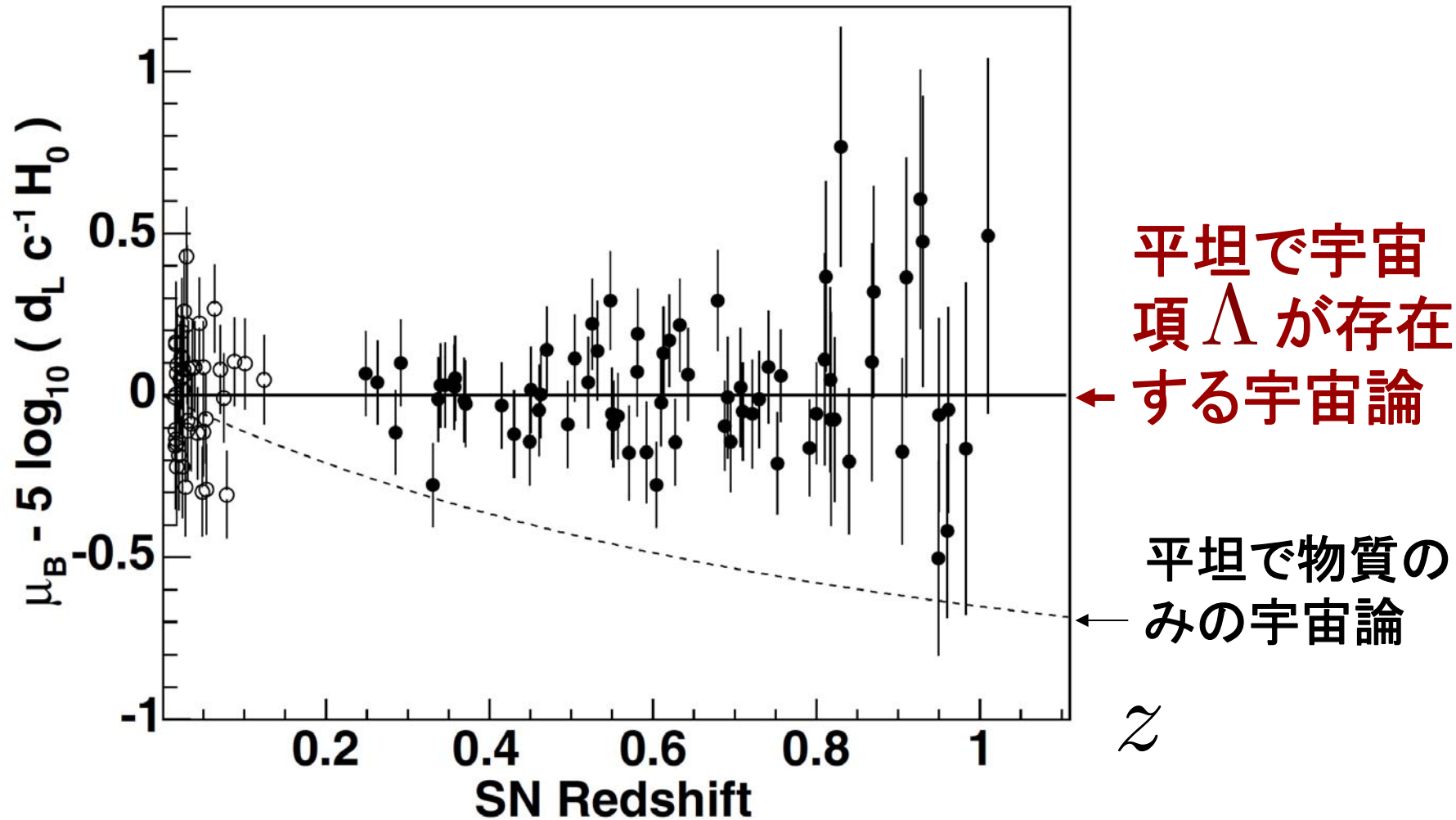
 $z$  : 赤方偏移

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad \text{: } \Lambda \text{ の密度パラメタ}$$

“0”: 現在  $t_0$  での量を表す。

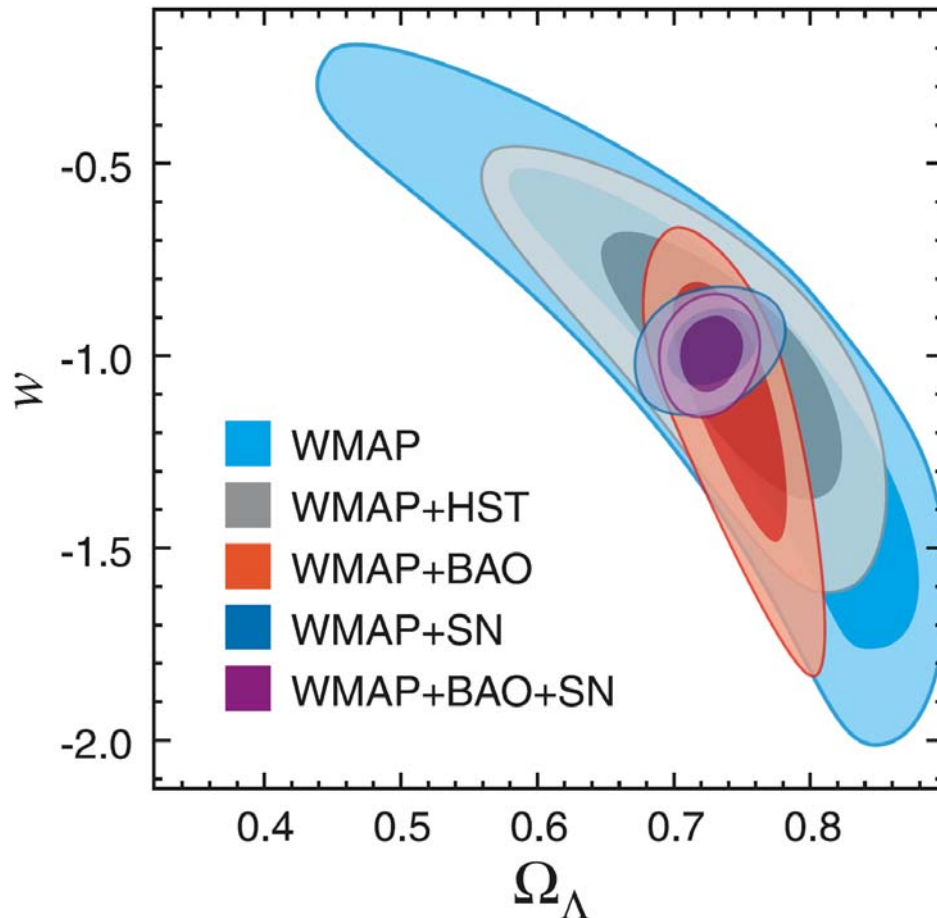
# < 平坦で宇宙項 $\Lambda$ が存在する宇宙論との残差 >

$$\Delta(m - M)$$



[Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006)]より転写。





[Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009), arXiv:0803.0547 [astro-ph]]より転写。

HST : Hubble Space Telescope  
Key Project

バリオン音響振動 (BAO)  
: Sloan Digital Sky Survey (SDSS) 銀河の空間分布に存在する特徴的なパターン

- 平坦な宇宙、 $w$  が定数の場合 : (WMAP+BAO+SN より。)

$$-0.14 < 1 + w < 0.12 \quad (95\% \text{ CL})$$

cf.  $\Omega_\Lambda = 0.726 \pm 0.015$  (68% CL)

[Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009), arXiv:0803.0547 [astro-ph]]より転写。

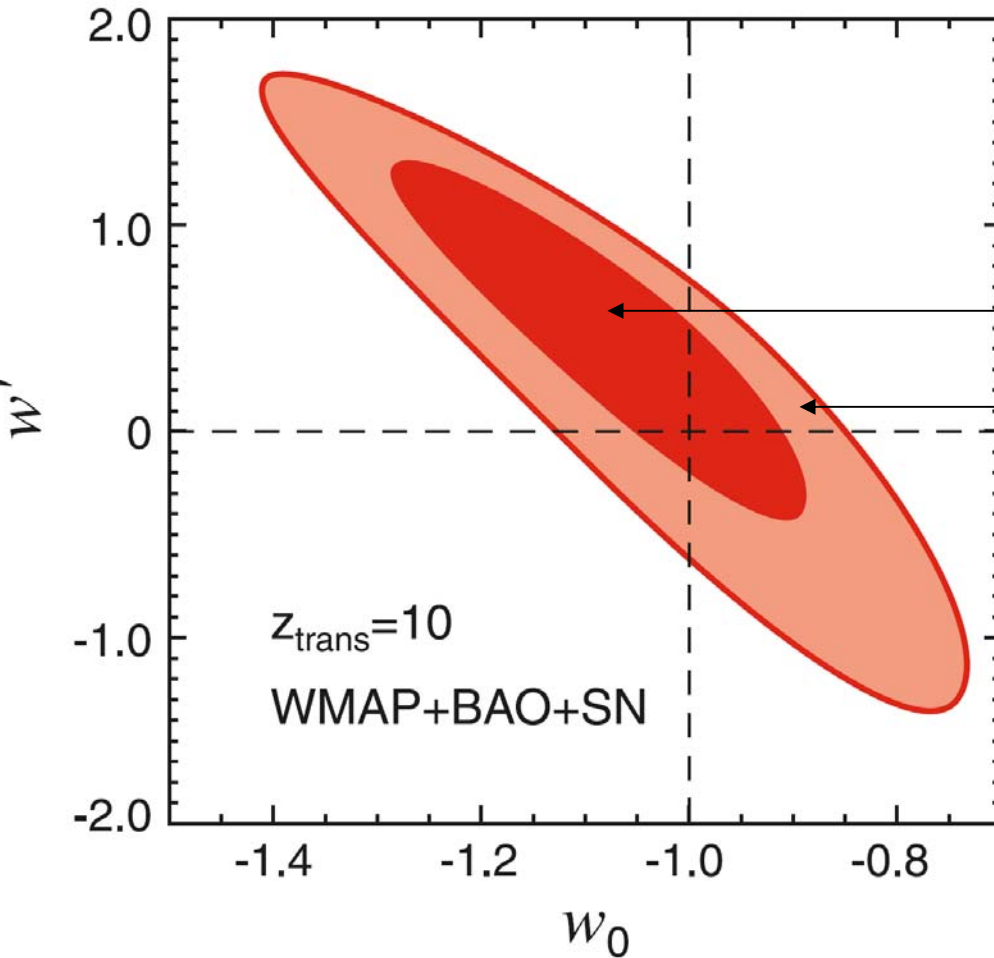
(68.3% CL)

(95.4% CL)

$$w' \equiv dw/dz|_{z=0}$$

$$w(a) = \frac{a\tilde{w}(a)}{a + a_{\text{trans}}} - \frac{a_{\text{trans}}}{a + a_{\text{trans}}}$$

$$\tilde{w}(a) = \tilde{w}_0 + (1 - a)\tilde{w}_a$$



・ 平坦な宇宙、 $w$  が時間変化する場合： $w_0 = w(a = 1)$

$$-0.33 < 1 + w_0 < 0.21$$

(95% CL)

$z > z_{\text{trans}}$  :

$w(z)$  は-1に接近する。

# <正準スカラー場>

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]$$

$$g = \det(g_{\mu\nu})$$

$\phi$  : スカラー場

$V(\phi)$  :  $\phi$  のポテンシャル

・ 一様スカラー場  $\phi = \phi(t)$  の場合:

$$\longrightarrow \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$\Longrightarrow w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}$$

If  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ ,  $w_\phi \approx -1$ .

→ 加速膨張が実現される。

## < $F(R)$ 重力 >

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{F(R)}{2\kappa^2} \quad \boxed{F(R) \text{ 重力}}$$

$F(R) = R$  : 一般相対論

[Nojiri and Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 115 (2007)]

[Capozziello and Francaviglia, Gen. Rel. Grav. **40**, 357 (2008)]

[Sotiriou and Faraoni, arXiv:0805.1726 [gr-qc]]

## < 重力場の方程式 >

$$F'(R) = dF(R)/dR$$

$$F'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F'(R) + g_{\mu\nu}\square F'(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu F'(R) = 0$$

$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  : 共変 d'Alembertian

$\nabla_\mu$  : 共変微分

・ 平坦な FRW 時空での重力場の運動方程式:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{\text{eff}}, \quad \dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} (\rho_{\text{eff}} + p_{\text{eff}})$$

$\rho_{\text{eff}}, p_{\text{eff}}$  :  $F(R) - R$  の項からの有効エネルギー密度と圧力

$$\rho_{\text{eff}} = \frac{1}{\kappa^2 F'(R)} \left[ \frac{1}{2} (-F(R) + RF'(R)) - 3H\dot{R}F''(R) \right]$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{1}{\kappa^2 F'(R)} \left[ \frac{1}{2} (F(R) - RF'(R)) + (2H\dot{R} + \ddot{R}) F''(R) + \dot{R}^2 F'''(R) \right]$$

$$\rightarrow w_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = \frac{(F(R) - RF'(R)) / 2 + (2H\dot{R} + \ddot{R}) F''(R) + \dot{R}^2 F'''(R)}{(-F(R) + RF'(R)) / 2 - 3H\dot{R}F''(R)}$$

・ 例:  $F(R) \propto R^n$  ( $n \neq 1$ )

$$\longrightarrow a \propto t^q, \quad q = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2}$$

$$w_{\text{eff}} = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3}$$

[Capozziello, Carloni and Troisi, Recent Res. Dev. Astron. Astrophys. **1**, 625 (2003)]

$q > 1$  の場合、加速膨張が実現される。

( $n = 3/2$  あるいは  $n = -1$  の場合、 $q = 2$ 、 $w_{\text{eff}} = -2/3$  となる。)

# < 現実的な $F(R)$ 重力の満たすべき条件 >

(1)  $F'(R) > 0$

- ・有効重力結合が正の値であること。

$$G_{\text{eff}} = G_0 / F'(R) > 0 \quad G_0 : \text{重力定数}$$

(グラビトンがゴーストでないこと。)

(2)  $F''(R) > 0$  [Dolgov and Kawasaki, Phys. Lett. B 573, 1 (2003)]

- ・安定性条件:  $M^2 \approx 1 / (3F''(R)) > 0$

$M$  : 弱い重力場におけるスカラー自由度 (“スカロロン”) の質量

(スカロロンがタキオンでないこと。)

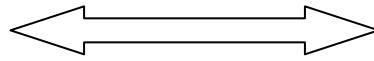
(3)  $R \gg R_0$  の領域で、 $F(R) \rightarrow R - 2\Lambda$  。  $R_0$  : 現在の曲率

$\Lambda$  : 宇宙項

- ・大きな曲率の領域における、標準宇宙論モデル ( $\Lambda$ CDM: 宇宙項 + 冷たい暗黒物質 (CDM)) での宇宙膨張を再現。

## (4) 太陽系スケールでの制限

$F(R)$  重力



等価

Brans-Dicke 理論

( $\omega_{\text{BD}} = 0$ )

[Bertotti, Iess and Tortora,  
Nature 425, 374 (2003).]

$\omega_{\text{BD}}$  : Brans-Dicke パラメタ

観測的制限:  $|\omega_{\text{BD}}| > 40000$

[Chiba, Phys. Lett. B 575, 1 (2003)]

[Erickcek, Smith and Kamionkowski, Phys. Rev. D 74, 121501 (2006)]

[Chiba, Smith and Erickcek, Phys. Rev. D 75, 124014 (2007)]

- しかし、スカラー自由度の質量  $M$  が充分大きく、スカラー力の到達範囲が太陽系の大きさより小さくなる場合には、太陽系スケールでの影響は存在しない。
- $M = M(R)$  ← 質量の曲率依存性: “カメレオン機構”

Cf. [Khoury and Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026 (2004)]

→ 地球・太陽系スケールでは、スカラー自由度は大きな質量を獲得し、そこでの実験では、対応する力は検出されない。

## (5) 物質優勢期と現在での加速膨張期の存在

- ・ 局所重力の制限と組み合わせた場合、

$m \equiv RF''(R)/F'(R)$  は1より数桁小さくなければならない。

↑  $\Lambda$  CDM モデルからのずれを定量化する。

[Amendola, Gannouji, Polarski and Tsujikawa, Phys. Rev. D 75, 083504 (2007)]

[Amendola and Tsujikawa, Phys. Lett. B 660, 125 (2008)]

## (6) de Sitter 空間の安定性

$$\frac{(F'_d)^2 - 2F_d F''_d}{F'_d F''_d} > 0$$

$$F_d = F(R_d)$$

$R_d$  : de Sitter 空間での  
定数曲率

- ・ de Sitter 空間における非一様な摂動の線型安定性

[Faraoni and Nadeau, Phys. Rev. D 75, 023501 (2007)]

Cf.  $R_d = 2F_d/F'_d \implies m < 1$



## (7) 曲率の特異点が存在しない点

[Frolov, Phys. Rev. Lett. 101, 061103 (2008)]

- 相対論的天体(中性子星)の存在

[Kobayashi and Maeda, Phys. Rev. D 78, 064019 (2008)]

[Kobayashi and Maeda, Phys. Rev. D 79, 024009 (2009)]

# < $F(R)$ 重力の模型 >

**(a) Hu-Sawicki 模型** [Hu and Sawicki, Phys. Rev. D **76**, 064004 (2007)]

$$F_{\text{HS}}(R) = R - \frac{\bar{M}^2 c_2 (R/\bar{M}^2)^p}{c_3 (R/\bar{M}^2)^p + 1}$$

$c_2, c_3, p > 0$  : 定数  
 $\bar{M}$  : 質量スケール

**(b) Starobinsky 模型** [Starobinsky, JETP Lett. **86**, 157 (2007)]

$$F_{\text{S}}(R) = R + \lambda \Lambda_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{\Lambda_0^2} \right)^{-n} - 1 \right]$$

$\lambda > 0, n > 0$  : 定数  
 $\Lambda_0$  : 現在での宇宙項

**(c) Appleby-Battye 模型** [Appleby and Battye, Phys. Lett. B **654**, 7 (2007)]

$$F_{\text{AB}}(R) = \frac{R}{2} + \frac{1}{2a} \log [\cosh(aR) - \tanh(b) \sinh(aR)]$$

$a > 0, b$  : 定数

・条件(7): 議論中。 [Babichev and Langlois, arXiv:0904.1382 [gr-qc]]

[Upadhye and Hu, arXiv:0905.4055 [astro-ph.CO]]

< 条件(7)を満たす模型 >

$$F_{\text{MJWQ}}(R) = R - \alpha R_* \ln \left( 1 + \frac{R}{R_*} \right)$$

$$\alpha > 0, \quad R_* > 0 : \text{定数}$$

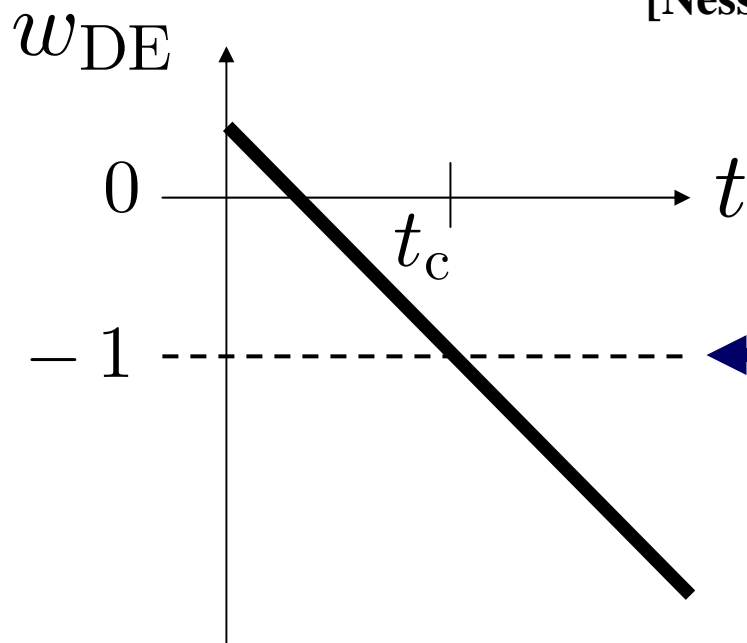
[Miranda, Joras, Waga and Quartin, arXiv:0905.1941 [astro-ph.CO],  
Phys. Rev. Lett. に掲載決定。]

# < ファントムクロッシング >

- ・様々な観測データ(超新星(SN)、宇宙背景輻射(CMB)、バリオン音響振動(BAO))より、暗黒エネルギーの状態方程式の値が、 $-1$ より大きな値から、 $-1$ を経て、 $-1$ より小さな値へ変化した可能性が示唆されている。

[Alam, Sahni and Starobinsky, JCAP 0406, 008 (2004)]

[Nesseris and Perivolaropoulos, JCAP 0701, 018 (2007)]



(i)  $w_{\text{DE}} > -1$

非ファントム相

(ii)  $w_{\text{DE}} = -1$

ファントムクロッシング

(iii)  $w_{\text{DE}} < -1$

ファントム相

$t_c$ : ファントムクロッシング時刻

## <ファントムクロッシングを実現する模型>

- ・2つのスカラー場が存在する模型(例:クイントム模型)

正準スカラー場+ファントム場

[Feng, Wang and Zhang, Phys. Lett. B 607, 35 (2005)]

- ・スカラー・テンソル理論

[Perivolaropoulos, JCAP 0510, 001 (2005)]

- ・高次の運動項を持つスカラー場の模型

[Vikman, Phys. Rev. D 71, 023515 (2005)]

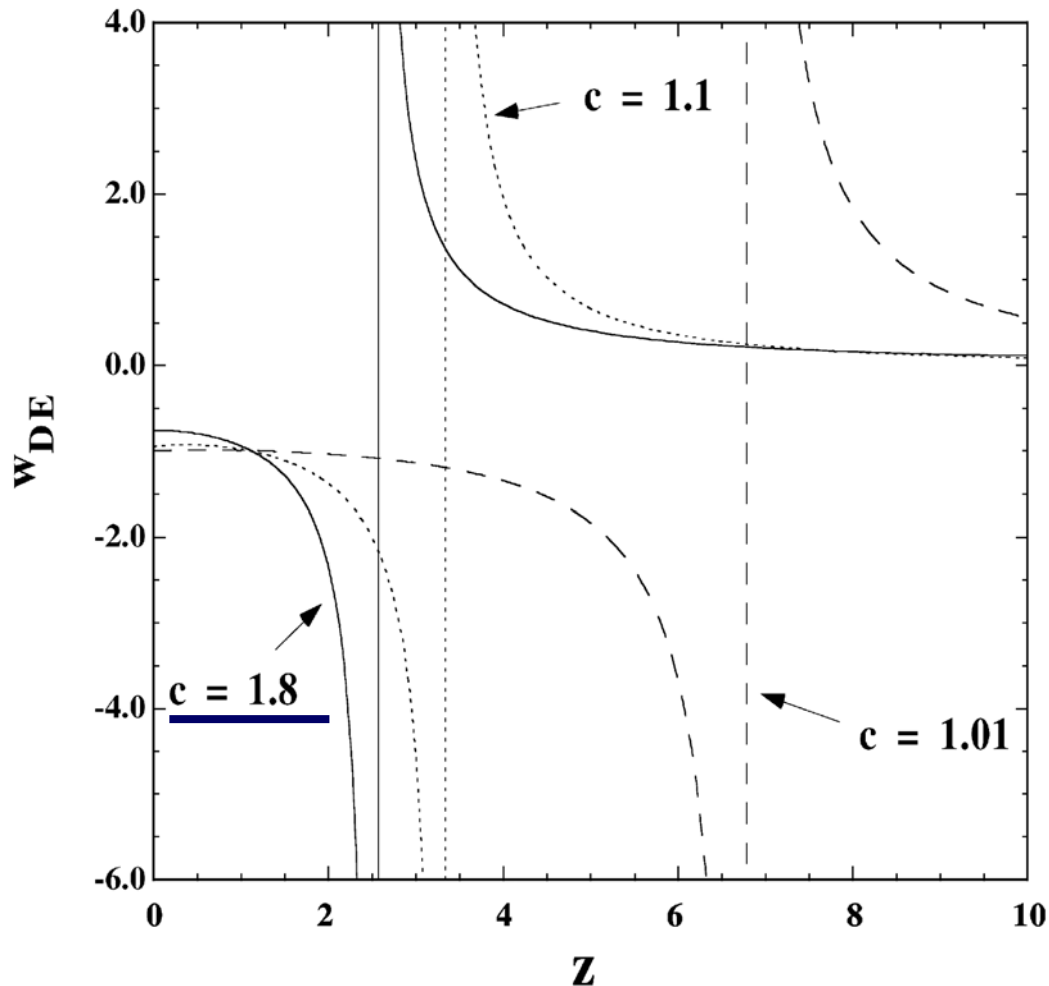
- ・弦理論に動機付けられた模型

[McInnes, Nucl. Phys. B 718, 55 (2005)]

[Cai, Zhang and Wang, Commun. Theor. Phys. 44, 948 (2005)]

# ファントムクロッシングを実現する $F(R)$ 重力理論 を構築する。

< 先行研究 > [Amendola and Tsujikawa, Phys. Lett. B **660**, 125 (2008)]より転写。



$$F(R) = (R^{1/c} - \Lambda)^c$$

$c, \Lambda$  : 定数

ファントム相



非ファントム相

\* 最近の研究により、Hu-Sawicky モデルでも同様の移行が起こることが示された。

[Martinelli, Melchiorri and Amendola, arXiv:0906.2350 [astro-ph.CO]]

# II. ファントムクロッシングを実現する $F(R)$ 重力理論

## の構築

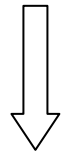
### < II A. 構築法 >

[Nojiri and Odintsov, Phys. Rev. D 74, 086005 (2006)]

#### < 作用 >

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{F(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right]$$

$\mathcal{L}_{\text{matter}}$  :  
物質のラグランジアン



スカラー場  $\phi$  の関数  $P(\phi)$  と  $Q(\phi)$  を導入。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} [P(\phi)R + Q(\phi)] + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right\}$$

・  $\phi$  の運動方程式:  $0 = \frac{dP(\phi)}{d\phi} R + \frac{dQ(\phi)}{d\phi} \longrightarrow \phi = \phi(R)$

$\implies \underline{F(R) = P(\phi(R))R + Q(\phi(R))}$

### < 重力場の運動方程式 >

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu} [P(\phi)R + Q(\phi)] - R_{\mu\nu}P(\phi) - g_{\mu\nu}\square P(\phi) + \nabla_\mu \nabla_\nu P(\phi) + \kappa^2 T_{\mu\nu}^{(\text{matter})} = 0$$

$T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}$  : 物質のエネルギー・運動量テンソル

→ 平坦な FRW 時空における重力場の運動方程式:

▪  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  成分:

$$-6H^2 P(\phi(t)) - Q(\phi(t)) - 6H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + 2\kappa^2 \rho = 0$$

▪  $(\mu, \nu) = (i, j)$  ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) 成分のトレース部分:

$$2 \frac{d^2 P(\phi(t))}{dt^2} + 4H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + (4\dot{H} + 6H^2) P(\phi(t)) + Q(\phi(t)) + 2\kappa^2 p = 0$$

$\rho, p$ : 一定の状態方程式パラメタ  $w_i$  を持つ物質のエネルギー密度と圧力の和。“ $i$ ”は、物質の成分を表す。

$$\longrightarrow \frac{d^2 P(\phi(t))}{dt^2} - H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + 2\dot{H} P(\phi(t)) + \kappa^2 (\rho + p) = 0$$

▪  $\phi$  は  $\phi = t$  ととり得る。 $(\phi$  は適切に再定義され得るため。)

< スケールファクター >

$$a(t) = \bar{a} \exp(\tilde{g}(t)) \quad \bar{a} : \text{定数}, \quad \tilde{g}(t) : \text{時間 } t \text{ の関数}$$



$$\begin{aligned} \longrightarrow & \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} - \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi} \frac{dP(\phi)}{d\phi} + 2 \frac{d^2 \tilde{g}(\phi)}{d\phi^2} P(\phi) \\ & + \kappa^2 \sum_i (1 + w_i) \bar{\rho}_i \bar{a}^{-3(1+w_i)} \exp[-3(1 + w_i) \tilde{g}(\phi)] = 0 \end{aligned}$$

$\bar{\rho}_i$  : 定数

$$H = d\tilde{g}(\phi) / (d\phi)$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow Q(\phi) = & -6 \left[ \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi} \right]^2 P(\phi) - 6 \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi} \frac{dP(\phi)}{d\phi} \\ & + 2\kappa^2 \sum_i \bar{\rho}_i \bar{a}^{-3(1+w_i)} \exp[-3(1 + w_i) \tilde{g}(\phi)] \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(\phi)$  と  $Q(\phi)$  の解を求める。

## < II B. 理論模型 >

### < 物質が存在しない場合の解 >

$$P(\phi) = e^{\tilde{g}(\phi)/2} \tilde{p}(\phi), \quad \tilde{g}(\phi) = -10 \ln \left[ \left( \frac{\phi}{t_0} \right)^{-\gamma} - C \left( \frac{\phi}{t_0} \right)^{\gamma+1} \right]$$

$$\tilde{p}(\phi) = \tilde{p}_+ \phi^{\beta_+} + \tilde{p}_- \phi^{\beta_-}$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 100\gamma(\gamma + 1)}}{2}$$

$\gamma > 0, C > 0$  : 定数

$t_0$  : 現在

$\tilde{p}_{\pm}$  : 任意定数

・  $\phi = t_s \equiv t_0 C^{-1/(2\gamma+1)}$  において、 $\tilde{g}(t)$  は発散する。

$\Rightarrow \underline{a(t) = \bar{a} \exp(\tilde{g}(t)) \rightarrow \infty}$  : **ビッグリップ特異点**

・ 以降、 $\phi$  を  $\phi = t$  と取る。また、 $0 < t < t_s$  の範囲のみを考える。

## < 有効状態方程式 >

$$\rho_{\text{eff}} = 3H^2/\kappa^2, \quad p_{\text{eff}} = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right)/\kappa^2$$

Cf.

$$w_{\text{DE}} \simeq \frac{w_{\text{eff}}}{1 - (F'(R)/F'(R_0))\Omega_m} \simeq w_{\text{eff}}$$

$$\rightarrow w_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} \equiv -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}$$

$$(i) \quad \dot{H} < 0 \quad \Longrightarrow \quad w_{\text{eff}} > -1$$

非ファントム相

$$(ii) \quad \dot{H} = 0 \quad \Longrightarrow \quad w_{\text{eff}} = -1$$

ファントムクロッシング

$$(iii) \quad \dot{H} > 0 \quad \Longrightarrow \quad w_{\text{eff}} < -1$$

ファントム相

## < Hubble パラメタ >

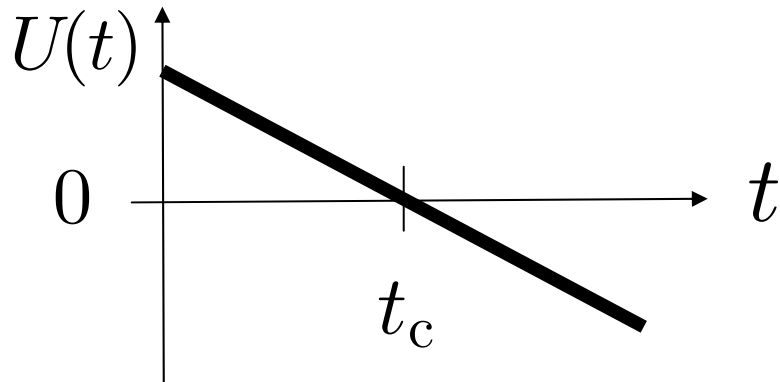
$$H = \left(\frac{10}{t}\right) \left[ \frac{\gamma + (\gamma + 1) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1}}{1 - \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1}} \right]$$

$$\langle w_{\text{eff}} \text{ の発展} \rangle \rightarrow w_{\text{eff}} = -1 + \underline{U(t)}$$

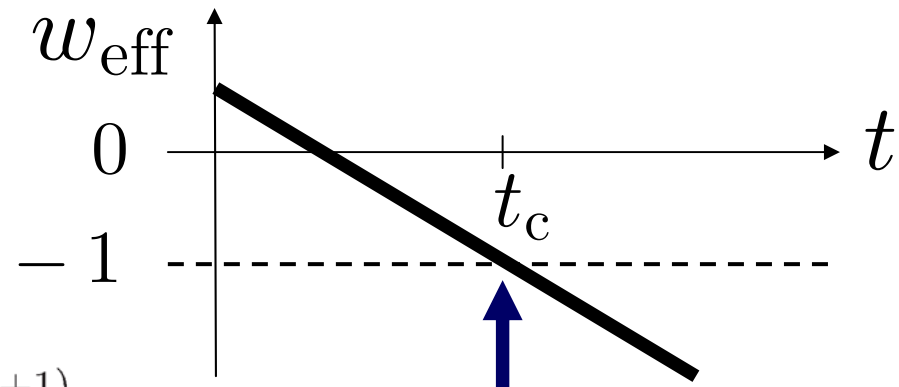
$$\underline{U(t)} \equiv -\frac{2\dot{H}}{3H^2} = -\frac{-\gamma + 4\gamma(\gamma + 1) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1} + (\gamma + 1) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2(2\gamma+1)}}{15 \left[ \gamma + (\gamma + 1) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1} \right]^2}$$

- $t < t_c : U(t) > 0$       $U(t)$  は単調減少する。
- $\frac{dU(t)}{dt} < 0$       $\rightarrow$  その値は正から負へと発展する。

$t_c$  : ファントムクロッシング時刻



$$t_c = t_s \left( -2\gamma + \sqrt{4\gamma^2 + \frac{\gamma}{\gamma + 1}} \right)^{1/(2\gamma+1)}$$



$w_{\text{eff}}$  は-1を横切る。

## < $P$ と $Q$ の表式 >

$$P(t) = \left[ \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma}{1 - \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1}} \right]^5 \sum_{j=\pm} \tilde{p}_j t^{\beta_j}$$

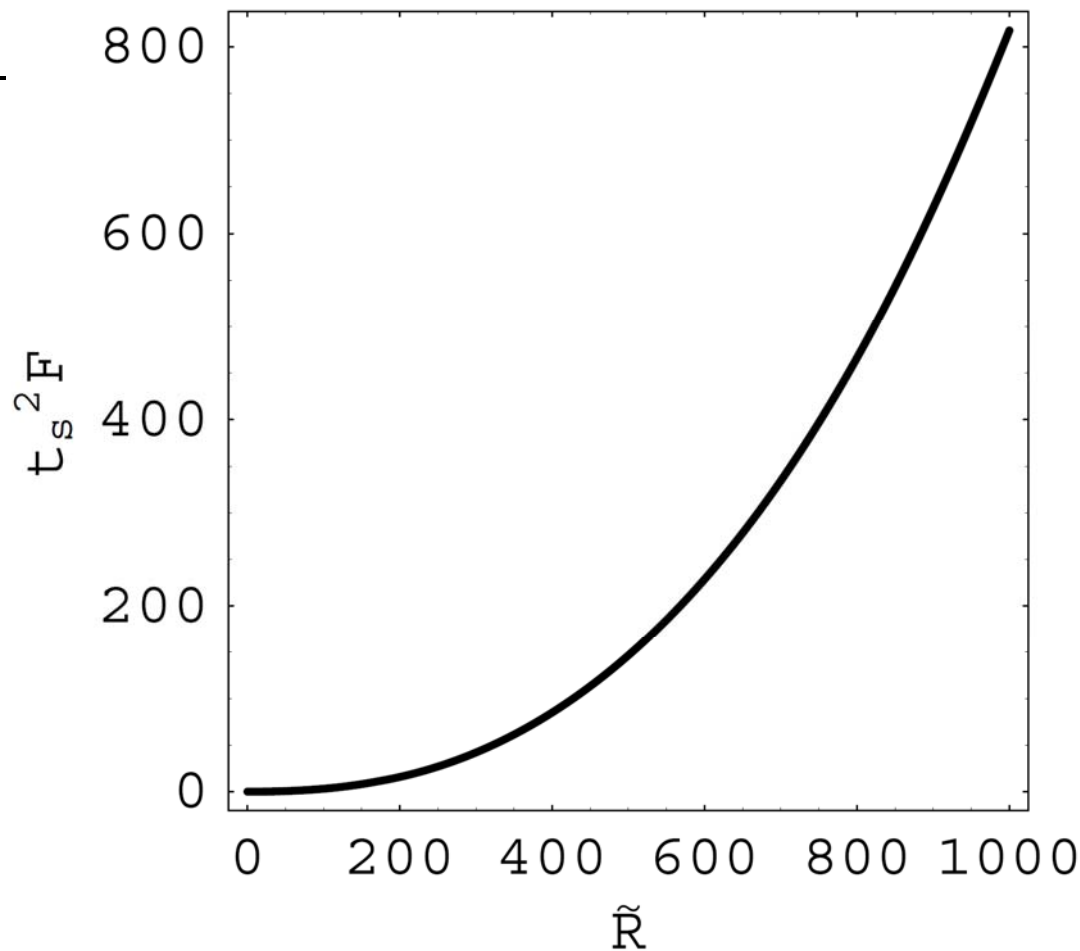
$$Q(t) = -6H \left[ \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^\gamma}{1 - \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1}} \right]^5 \sum_{j=\pm} \left( \frac{3}{2}H + \frac{\beta_j}{t} \right) \tilde{p}_j t^{\beta_j}$$

・ スカラー曲率:  $R = 6 \left( \dot{H} + 2H^2 \right)$

$$R = \frac{60 \left[ \gamma(20\gamma - 1) + 44\gamma(\gamma + 1) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1} + (\gamma + 1)(20\gamma + 21) \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2(2\gamma+1)} \right]}{t^2 \left[ 1 - \left(\frac{t}{t_s}\right)^{2\gamma+1} \right]^2}$$

→ 時間  $t$  の  $R$  に関する解  $t = t(R)$  が得られれば、  
 $F(R) = P(t(R))R + Q(t(R))$  が求められる。

&lt; 図1 &gt;



→  $\tilde{R} \equiv t_s^2 R$  の関数としての  $t_s^2 F(\tilde{R})$  の振る舞い。

$$\gamma = 1/2, \tilde{p}_+ = -1/t_s^{\beta_+}, \tilde{p}_- = 0, \beta_+ = (1 + 2\sqrt{19})/2,$$

$t_s = 2t_0$  の場合 [  $C = (t_0/t_s)^{2\gamma+1} = 1/4$  ]。  $R_0$  : 現在の曲率

・  $\tilde{R} = t_s^2 R = 4R/R_0$ ,  $t_0 \approx H_0^{-1}$   $H_0$  : 現在の Hubble パラメタ

# < $F(R)$ の解析的表式 >

(1)  $t \rightarrow 0$  ( $t/t_s \ll 1$ ) :  $t \sim \sqrt{\frac{60\gamma(20\gamma-1)}{R}}$

$$F(R) \approx A_1 R^{-5\gamma/2+1} \sum_{j=\pm} C_j R^{-\beta_j/2}$$

$$A_1 = \left[ \frac{1}{t_0} \sqrt{60\gamma(20\gamma-1)} \right]^{5\gamma}, \quad \beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 100\gamma(\gamma+1)}}{2}$$

$$C_{\pm} = \left( \frac{5\gamma - \beta_{\pm} - 1}{20\gamma - 1} \right) \tilde{p}_{\pm} [60\gamma(20\gamma-1)]^{\beta_{\pm}/2}$$

[KB and Geng,  
arXiv:0901.1509 [hep-th]]

(2)  $t \rightarrow t_s$  :  $t \sim t_s - 3\sqrt{\frac{140}{R}}$

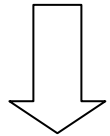
$$F(R) \approx A_2 R^{7/2}$$

$$A_2 = \frac{2}{7} \left[ \frac{1}{3\sqrt{140}(2\gamma+1)} \left( \frac{t_s}{t_0} \right)^{\gamma} \right]^5 \left( \sum_{j=\pm} \tilde{p}_j t_s^{\beta_j} \right) t_s^5$$

# < II C. 構築された $F(R)$ 重力理論に対応する スカラー場理論での特異点の性質 >

## $F(R)$ 重力の作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{F(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right]$$

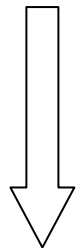


← 2つのスカラー場  $\zeta$  と  $\xi$  を導入する。

## Jordan 系での作用

←  $\xi$  と  $R$  の非最小結合項が存在する。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} [\xi (R - \zeta) + F(\zeta)] + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right\}$$



▪  $\xi$  の運動方程式:  $\zeta = R$

← ▪  $\zeta$  の運動方程式:  $\xi = F'(\zeta) \quad F'(\zeta) = dF(\zeta)/d\zeta$

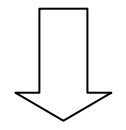
$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} (F'(\zeta)R + F(\zeta) - F'(\zeta)\zeta) + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right]$$



・ 共形変換:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = e^\sigma g_{\mu\nu}, \quad e^\sigma = F'(\zeta)$$

$\sigma$  : スカラー場



Einstein 系での作用

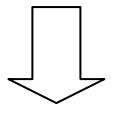
←  $\hat{R}$  に関する非最小結合項が存在しない。

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \left( \hat{R} - \frac{3}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right) + e^{-2\sigma} \mathcal{L}_{\text{matter}} \right]$$

$$V(\sigma) = e^{-\sigma} \zeta(\sigma) - e^{-2\sigma} F(\zeta(\sigma)) = \frac{\zeta}{F'(\zeta)} - \frac{F(\zeta)}{(F'(\zeta))^2}$$

ハットはEinstein系での量を表す。

・  $\varphi$  を  $\varphi \equiv \sqrt{3/2} \sigma / \kappa$  と再定義する。



正準スカラー場理論

$$S_{\text{ST}} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) + e^{-2\sqrt{2/3}\kappa\varphi} \mathcal{L}_{\text{matter}} \right]$$

$$\bullet F(R) = c_1 M^2 \left( \frac{R}{M^2} \right)^{-n} \quad c_1, n : \text{定数}$$

$M : \text{質量スケール}$

→ 構築された  $F(R)$  重力理論は、ビッグリップ特異点付近では、 $n = -7/2$  の場合に相当する。

$$\Rightarrow a(t) = \bar{a} (t_s - t)^{(n+1)(2n+1)/(n+2)}$$

$$\downarrow R = \frac{6n(n+1)(2n+1)(4n+5)}{(n+2)^2} \frac{1}{(t_s - t)^2}$$

<  $dt$  と  $d\hat{t}$  の関係 >

$$d\hat{t} = \pm e^{\sigma/2} dt$$

$$e^{\sigma/2} = \sqrt{-nc_1} \left[ \frac{(n+2)^2}{6n(n+1)(2n+1)(4n+5)} \right]^{(n+1)/2} M^{n+1} (t_s - t)^{n+1}$$

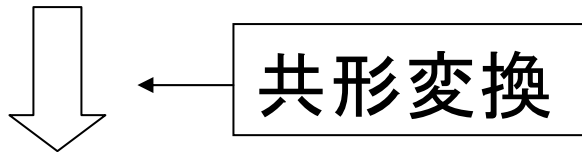
## < $t$ と $\hat{t}$ の関係 >

$$\hat{t} = \mp \frac{\sqrt{-nc_1}}{n+2} \left[ \frac{(n+2)^2}{6n(n+1)(2n+1)(4n+5)} \right]^{(n+1)/2} M^{n+1} \underline{(t_s - t)^{n+2}}$$

・  $n < -2$  の場合、 $t \rightarrow t_s$  の極限は、 $\hat{t} \rightarrow \mp \infty$  に相当する。

・ ビッグリップ特異点付近:  $n = -7/2$

→  $F(R)$  重力理論 (Jordan 系) における「有限時間内に現れる」ビッグリップ特異点



スカラー場理論 (Einstein 系) では、「無限時間」特異点になる。

# < Einstein 系でのスケールファクター $\hat{a}(\hat{t})$ >

$$d\hat{s}^2 = e^\sigma ds^2 = -d\hat{t}^2 + \hat{a}(\hat{t}) d\mathbf{x}^2$$

$$\rightarrow \hat{a}(\hat{t}) = \underline{\hat{a}\hat{t}^{3[(n+1)/(n+2)]^2}}$$

$$\hat{a} = \bar{a} \left( \mp \frac{1}{n+2} \right)^{-3[(n+1)/(n+2)]^2}$$

$$\times \left\{ \sqrt{-nc_1} \left[ \frac{(n+2)^2}{6n(n+1)(2n+1)(4n+5)} \right]^{(n+1)/2} M^{n+1} \right\}^{-\frac{(2n^2+2n-1)}{(n+2)^2}}$$

# III. 結語

- ・ 現在の宇宙の加速膨張を解明する研究の一つとして、長いスケールで重力理論を拡張する方法がある。その一つとして、 $F(R)$  重力がある。
- ・ 様々な観測データより、暗黒エネルギーの状態方程式の値が、 $-1$ より大きな値から、 $-1$ を経て、 $-1$ より小さな値へ変化した可能性が示唆されている。この現象はファントムクロッシングと呼ばれている。
- ・ ファントムクロッシングを実現する  $F(R)$  重力理論を構築した。
  - ビッグリップ特異点が現れる。
  - ビッグリップ特異点の付近:  $F(R) \propto R^{7/2}$

- 構築された  $F(R)$  重力理論を共形変換することによって得られるスカラー場理論では、ビッグリップ特異点は無限時間特異点になることが示された。

バックアップスライド

<  $F(R)$  重力 >

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{F(R)}{2\kappa^2} \quad \boxed{F(R) \text{ gravity}}$$

[Nojiri and Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115 (2007)]

[Capozziello and Francaviglia, Gen. Rel. Grav. 40, 357 (2008)]

[Sotiriou and Faraoni, arXiv:0805.1726 [gr-qc]]

$$\bullet \quad F(R) = R - \frac{\mu^{2(n+1)}}{R^n} \quad \left[ \text{Carroll, Duvvuri, Trodden and Turner, Phys. Rev. D 70, 043528 (2004)} \right]$$

$\mu$  : 質量スケール,  $n$  : 定数

$R$  が減少するにつれて、  
右辺の第2項が重要になる。

$$\Rightarrow a \propto t^q, \quad q = \frac{(2n+1)(n+1)}{n+2}$$

$$w_{\text{eff}} = -1 + \frac{2(n+2)}{3(2n+1)(n+1)}$$

→  $q > 1$  の場合、加速膨張が実現される。

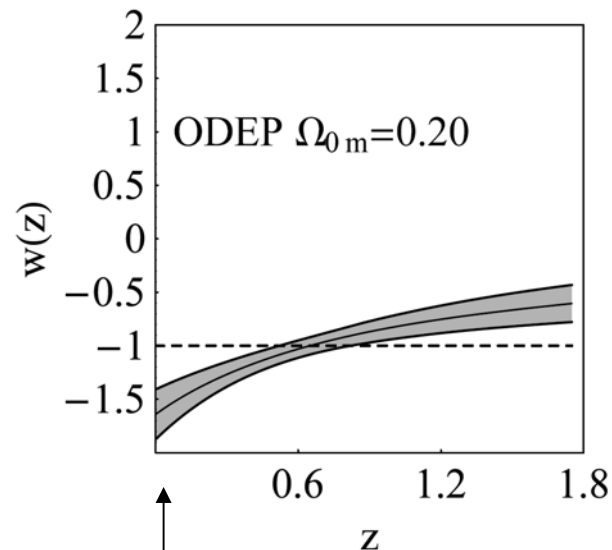
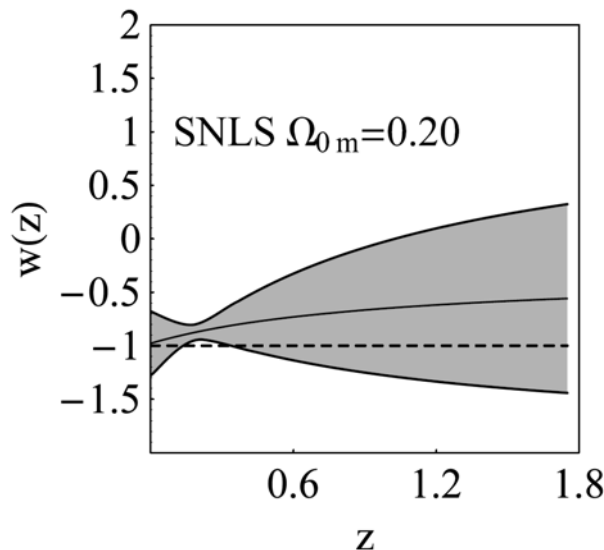
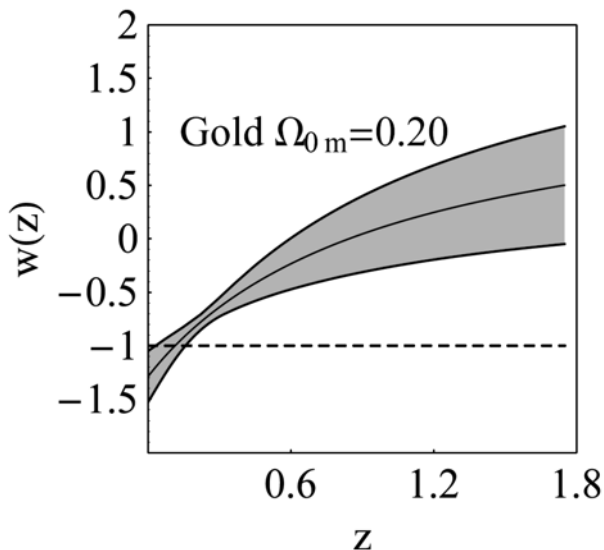
( $n = 1$  の場合、 $q = 2$ 、 $w_{\text{eff}} = -2/3$  となる。)



# < $w(z)$ のデータフィッティング >

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}$$

[Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP **0701**, 018 (2007)]より転写。



**SN ゴールドデータセット**

[Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration],  
Astrophys. J. **607**, 665 (2004)]

**SNLS データセット**

[Astier *et al.* [The SNLS Collaboration], Astron.  
Astrophys. **447**, 31 (2006)]

陰の領域:  $1\sigma$   
エラーを表す。

**宇宙背景輻射 (CMB) データ**

[Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], Astrophys. J. Suppl. **170**, 377 (2007)]

+ **SDSS バリオン音響振動 (BAO) データ**

[Eisenstein *et al.* [SDSS Collaboration], Astrophys. J. **633**, 560 (2005)]

→ (SNLS データを除いて)ほとんどの観測は、現在の物質の密度パラメタ  $\Omega_{0m}$  の値が  $0.2 < \Omega_{0m} < 0.25$  の場合、ファントムクロッシングの可能性を示唆する。

[Nesseris and L. Perivolaropoulos, JCAP 0701, 018 (2007)]

⇒ ファントムクロッシングを実現する  $F(R)$  重力理論 を構築する。

< 先行研究 > [Amendola and Tsujikawa, Phys. Lett. B 660, 125 (2008)]

$$F(R) = (R^{1/c} - \Lambda)^c$$

$c, \Lambda$  : 定数

例:  $c = 1.8$

ファントム相



非ファントム相

< 最近の研究 >

Hu-Sawicky モデルでも、同様にファントム相から非ファントム相への移行が示された。

[Martinelli, Melchiorri and Amendola, arXiv:0906.2350 [astro-ph.CO]]

# < $H(t)$ の振る舞い >

(i)  $t \rightarrow 0$

**非ファントム相**

$$H(t) \sim \frac{10\gamma}{t}, \quad w_{\text{eff}} = -1 + \frac{1}{15\gamma} > -1$$

(ii)  $t_c = t_s \left( -2\gamma + \sqrt{4\gamma^2 + \frac{\gamma}{\gamma+1}} \right)^{1/(2\gamma+1)}$

$$\dot{H} = 0, \quad w_{\text{eff}} = -1$$

**ファントムクロッシング**

(iii)  $t \rightarrow t_s$

**ファントム相**

$$H(t) \sim \frac{10}{t_s - t}, \quad w_{\text{eff}} = -1 - \frac{1}{15} = -\frac{16}{15} < -1$$

< スカラー曲率 >

$$R = \frac{60 \left[ \gamma (20\gamma - 1) + 44\gamma (\gamma + 1) \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1} + (\gamma + 1) (20\gamma + 21) \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2(2\gamma+1)} \right]}{t^2 \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]^2}$$

<  $dU(t)/(dt)$  の振る舞い >

$$\frac{dU(t)}{dt} = - \frac{2\gamma (\gamma + 1) (2\gamma + 1)^2}{15 \left[ \gamma + (\gamma + 1) \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]^3} \left( \frac{1}{t_s} \right) \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]$$

→  $0 < t < t_s$  において、 $\frac{dU(t)}{dt} < 0$  。

# < $F(R)$ の解析的表式 >

$$(1) \quad t \rightarrow 0 : \quad t \sim \sqrt{\frac{60\gamma(20\gamma-1)}{R}}$$

$$F(R) \sim \left\{ \frac{\left[ \frac{1}{t_0} \sqrt{60\gamma(20\gamma-1)} R^{-1/2} \right]^\gamma}{1 - \left[ \frac{1}{t_s} \sqrt{60\gamma(20\gamma-1)} R^{-1/2} \right]^{2\gamma+1}} \right\}^5 R$$

$$\times \sum_{j=\pm} \left\{ \left( \frac{5\gamma-1-\beta_j}{20\gamma-1} \right) \tilde{p}_j [60\gamma(20\gamma-1)]^{\beta_j/2} R^{-\beta_j/2} \right\}$$

▪  $t/t_s \ll 1$  の極限: [KB and Geng, arXiv:0901.1509 [hep-th]]

$$F(R) \approx A_1 R^{-5\gamma/2+1} \sum_{j=\pm} C_j R^{-\beta_j/2}$$

$$A_1 = \left[ \frac{1}{t_0} \sqrt{60\gamma(20\gamma-1)} \right]^{5\gamma}, \quad \beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 100\gamma(\gamma+1)}}{2}$$

$$C_{\pm} = \left( \frac{5\gamma - \beta_{\pm} - 1}{20\gamma - 1} \right) \tilde{p}_{\pm} [60\gamma(20\gamma-1)]^{\beta_{\pm}/2}$$

$$(2) t \rightarrow t_s : t \sim t_s - 3\sqrt{\frac{140}{R}}$$

$$F(R) \sim \left( \frac{\left\{ \frac{1}{t_0} [t_s - 3\sqrt{140}R^{-1/2}] \right\}^\gamma}{1 - \left[ 1 - \frac{3\sqrt{140}}{t_s} R^{-1/2} \right]^{2\gamma+1}} \right)^5 R \sum_{j=\pm} \tilde{p}_j [t_s - 3\sqrt{140}R^{-1/2}]^{\beta_j} \\ \times \left\{ 1 - \sqrt{\frac{20}{7}} \left[ \sqrt{\frac{15}{84}} t_s + (\beta_j - 15) R^{-1/2} \right] \frac{1}{t_s - 3\sqrt{140}R^{-1/2}} \right\}$$

・ 大きな曲率の極限  $t_s^2 R \gg 1$  :

$$F(R) \approx \underline{A_2 R^{7/2}}$$

$$A_2 = \frac{2}{7} \left[ \frac{1}{3\sqrt{140} (2\gamma + 1)} \left( \frac{t_s}{t_0} \right)^\gamma \right]^5 \left( \sum_{j=\pm} \tilde{p}_j t_s^{\beta_j} \right) t_s^5$$

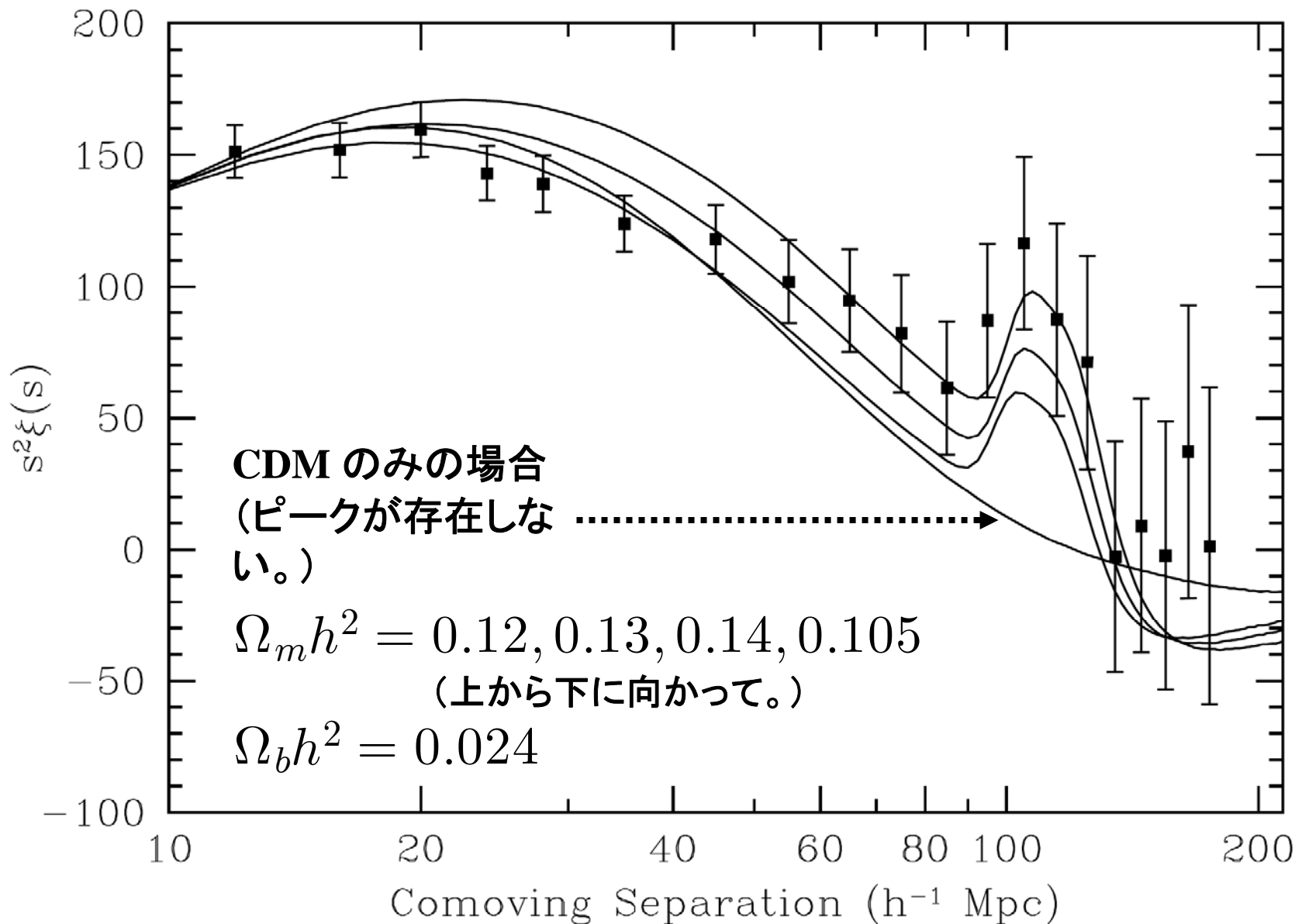
## < その他の結果 >

- (1) 構築された  $F(R)$  重力理論では、(有限時間内に現れる) ビッグリップ特異点が存在する。一方、この  $F(R)$  重力理論を共形変換することによって得られるスカラー場理論では、ビッグリップ特異点は無限時間特異点になる。
- (2) 非ファントム相を記述する正準スカラー場理論は、実共形変換によって、実  $F(R)$  重力に変換される。他方、ファントム相を記述するファントム場理論は、複素共形変換により、一般には複素  $F(R)$  重力に変換される。



- (3) 共形異常と呼ばれる量子補正(質量を持たない共形不変な場の量子補正)の効果は、ファントムクロッシングの際は小さく、得られた解が安定である。(但し、ビッグリップ特異点付近では、この量子補正が重要となる。)
- (4) de Sitter 宇宙からファントム相へ進化する  $F(R)$  重力理論を構築した。

# < バリオン音響振動 (BAO) >



< 5-year WMAP データ >

[Komatsu *et al.* [WMAP Collaboration], *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (2009),  
arXiv:0803.0547 [astro-ph]]

暗黒エネルギー:  $\Omega_{\Lambda} = 0.726 \pm 0.015$

暗黒物質:  $\Omega_c = 0.228 \pm 0.013$

バリオン:  $\Omega_b = 0.0456 \pm 0.0015$  (68% CL)

$$\Omega_i \equiv \frac{\kappa^2 \rho_i^{(0)}}{3H_0^2} = \frac{\rho_i^{(0)}}{\rho_c^{(0)}} : \text{密度パラメタ}$$

$$i = \Lambda, c, b$$

$\rho_c^{(0)}$  : 臨界密度

## (5) 物質優勢期と現在での加速膨張期の存在

- $(r, m)$  平面上での  $m(r)$  曲線の解析

$$m \equiv RF''(R)/F'(R), \quad r \equiv -RF'(R)/F(R)$$

↑  $\Lambda$  CDM モデルからのずれを定量化する。

- 局所重力の制限と組み合わせた場合:

$$r \rightarrow -1; \quad m(r) = C(-r-1)^p, \quad p > 1$$

$$C > 0, \quad p : \text{定数}$$

→  $m$  は1より数桁小さくなければならない。

[Amendola, Gannouji, Polarski and Tsujikawa, Phys. Rev. D 75, 083504 (2007)]

[Amendola and Tsujikawa, Phys. Lett. B 660, 125 (2008)]

⇒  $\Lambda$  CDM モデルからのずれは非常に小さい。

## (5) 物質優勢期と現在での加速膨張期の存在

$$m \equiv RF''(R)/F'(R), \quad r \equiv -RF'(R)/F(R)$$

### ・物質優勢期の存在:

$$r \approx -1 \text{ において、} m(r) \approx +0 \text{ かつ } \frac{dm}{dr} > -1。$$

### ・現在での加速膨張期の存在:

$$(i) \quad m(r) = -r - 1, \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2} < m \leq 1 \text{ かつ } \frac{dm}{dr} < -1。$$

$$(ii) \quad r = -2 \text{ において、} 0 < m \leq 1。$$

[Amendola, Gannouji, Polarski and Tsujikawa, Phys. Rev. D 75, 083504 (2007)]

・ファントムクロッシングの際の  $z$  の値  $z_c$  の一例

$\gamma = 1/2$  ,  $t_s = 2t_0$  の場合、  $z_c = 0.24$  。

## < 構築法に関する付加説明 >

- $\phi = \Phi(\varphi)$  と再定義し、 $\tilde{P}(\varphi) \equiv P(\Phi(\varphi))$  と定義する。  
 $\tilde{Q}(\varphi) \equiv Q(\Phi(\varphi))$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{\tilde{F}(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right] \quad \Phi : \text{適切な関数}$$

$$\tilde{F}(R) \equiv \tilde{P}(\varphi)R + \tilde{Q}(\varphi) \quad \longleftarrow \text{これは元の作用と同等である。}$$

$$\varphi = \varphi(R) = \Phi^{-1}(\phi(R))$$

$$\uparrow$$

$$\phi = \phi(R)$$

$$\tilde{F}(R) = F(R)$$

- ゲージ対称性のような  $\phi$  に関する選択肢が存在する。  
 そこで、 $\phi$  を  $t$  と同一視できる ( $\phi = t$ )。
- $\longrightarrow$  これは、 $\phi = \phi(\varphi)$  という再パラメタ化に相当するゲージ条件と解釈できる。

## < 理論模型の解の導出 >

- 物質が存在しない場合の  $P(\phi)$  の方程式:

$$0 = \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} - \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi} \frac{dP(\phi)}{d\phi} + 2 \frac{d^2 \tilde{g}(\phi)}{d\phi^2} P(\phi)$$

↓  $P(\phi)$  を  $P(\phi) = e^{\tilde{g}(\phi)/2} \tilde{p}(\phi)$  と再定義する。

$$\frac{1}{\tilde{p}(\phi)} \frac{d^2 \tilde{p}(\phi)}{d\phi^2} = 25 e^{\tilde{g}(\phi)/10} \frac{d^2 (e^{-\tilde{g}(\phi)/10})}{d\phi^2}$$

↓ モデル:  $\tilde{g}(\phi) = -10 \ln \left[ \left( \frac{\phi}{t_0} \right)^{-\gamma} - C \left( \frac{\phi}{t_0} \right)^{\gamma+1} \right]$

$$\frac{1}{\tilde{p}(\phi)} \frac{d^2 \tilde{p}(\phi)}{d\phi^2} = \frac{25\gamma(\gamma+1)}{\phi^2}$$

< 解 >

$$\tilde{p}(\phi) = \tilde{p}_+ \phi^{\beta_+} + \tilde{p}_- \phi^{\beta_-}, \quad \beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 100\gamma(\gamma+1)}}{2}$$



# 付録 A

スカラー場理論と  $F(R)$  重力理論との対応関係

# < スカラー場理論と $F(R)$ 重力との対応関係 >

## スカラー場理論の作用 (Einstein 系)

$\chi$  : 実スカラー場

- : 正準場の場合

+ : ファントムの場合

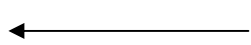
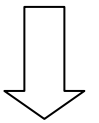
$\tilde{W}(\chi)$  :  $\chi$  のポテンシャル

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{\hat{R}}{2\kappa^2} \mp \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \tilde{W}(\chi) \right]$$

## (1) 正準 (非ファントム) 場

[Capozziello, Nojiri and Odintsov, Phys. Lett. B 634, 93 (2006)]

$S_\chi$



実共形変換:

$$\hat{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = e^{\pm\sqrt{2/3}\kappa\chi} \hat{g}_{\mu\nu}$$

## $F(R)$ 重力理論の作用 (Jordan 系)

$$S_{\text{NP}} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{F_{\text{NP}}(R)}{2\kappa^2}$$

実  $F(R)$  重力

$$F_{\text{NP}}(R) \equiv e^{\pm\sqrt{2/3}\kappa\chi(R)} R - 2\kappa^2 e^{\pm 2\sqrt{2/3}\kappa\chi(R)} \tilde{W}(\chi(R))$$

・  $\chi$  の運動方程式: 
$$R = e^{\pm\sqrt{2/3}\kappa\chi} \left( 4\kappa^2 \tilde{W}(\chi) \pm \sqrt{6}\kappa \frac{d\tilde{W}(\chi)}{d\chi} \right)$$

→ これを解くことにより、 $\chi$  は  $\chi = \chi(R)$  と表され得る。

(2)ファントム場

$S_\chi$  [Briscese, Elizalde, Nojiri and Odintsov, Phys. Lett. B 646, 105 (2007)]

↓ ← **複素共形変換:**  $\hat{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = e^{\pm i\sqrt{2/3}\kappa\chi} \hat{g}_{\mu\nu}$

 $F(R)$  重力理論の作用 (Jordan 系)

$S_P = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{F_P(R)}{2\kappa^2}$  ← **複素  $F(R)$  重力**

$$F_P(R) \equiv e^{\pm i\sqrt{2/3}\kappa\chi(R)} R - 2\kappa^2 e^{\pm i2\sqrt{2/3}\kappa\chi(R)} \tilde{W}(\chi(R))$$

・  $\chi$  の運動方程式:  $R = e^{\pm i\sqrt{2/3}\kappa\chi} \left( 4\kappa^2 \tilde{W}(\chi) \mp i\sqrt{6}\kappa \frac{d\tilde{W}(\chi)}{d\chi} \right)$

→ これを解くことにより、 $\chi$  は  $\chi = \chi(R)$  と表され得る。

・  $R$  が実数であるための条件:

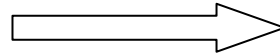
$$e^{i\sqrt{2/3}\kappa\chi} \left( 4\kappa^2 \tilde{W}(\chi) - i\sqrt{6}\kappa \frac{d\tilde{W}(\chi)}{d\chi} \right) = e^{-i\sqrt{2/3}\kappa\chi} \left( 4\kappa^2 \tilde{W}(\chi) + i\sqrt{6}\kappa \frac{d\tilde{W}(\chi)}{d\chi} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\tilde{W}(\chi)} \frac{d\tilde{W}(\chi)}{d\chi} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\kappa \tan \sqrt{\frac{2}{3}}\kappa\chi$$

$\tilde{W}(\chi)$  がこの関係式を満たす場合を除いて、 $R$  は複素数となる。

### < 小まとめ >

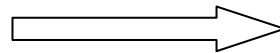
正準 (非ファントム)  
場理論



実  $F(R)$  重力

実共形変換

ファントム場理論



複素  $F(R)$  重力

複素共形変換

(特別な場合を除く。)

## < 結語 >

- ・ 非ファントム相を記述する正準スカラー場理論は、実共形変換によって、実  $F(R)$  重力に変換される。他方、ファントム相を記述するファントム場理論は、複素共形変換により、一般には複素  $F(R)$  重力に変換されるが示された。

# 付録 B

- I. 量子補正の下での解の安定性
- II. de Sitter 宇宙からファントム相へ進化する  $F(R)$  重力理論の構築
- III. 結語

# < I. 量子補正の下での解の安定性 >

- 量子効果は共形異常を生み出す。

$$T_A = b \left( F + \frac{2}{3} \square R \right) + b' G + b'' \square R$$

$$F = \frac{1}{3} R^2 - 2R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \quad : 4次元 Weyl テンソルの自乗$$

$$G = R^2 - 4R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \quad : \text{Gauss-Bonnet 不変量}$$

- 平坦な FRW 時空では、 $F = 0$  ,  $G = 24 \left( \dot{H}H^2 + H^4 \right)$  となる。

$$b = \frac{N + 6N_{1/2} + 12N_1 + 611N_2 - 8N_{\text{HD}}}{120(4\pi)^2}$$

$N$  : 実スカラー場

$$b' = -\frac{N + 11N_{1/2} + 62N_1 + 1411N_2 - 28N_{\text{HD}}}{360(4\pi)^2}$$

$N_{1/2}$  : Dirac スピノール

$N_1$  : ベクトル場

$b''$  は任意である。例えば、次のように選ぶ。

$N_2 (= 0 \text{ あるいは } 1)$

: グラビトン

$$b'' = -2b/3 \text{ あるいは } b'' = 0。$$

$N_{\text{HD}}$  : 高次微分の共形スカラー場

・ **関係式:**  $T_A = -\rho_A + 3p_A$ 、

**エネルギー保存則:**  $\dot{\rho}_A + 3H(\rho_A + p_A) = 0$  を仮定する。

$\rho_A$  ,  $p_A$  : 共形異常のエネルギー密度と圧力

$$\rho_A = -\frac{1}{a^4} \int dt a^4 H T_A, \quad p_A = -\frac{1}{3a^4} \int dt a^4 H T_A + \frac{T_A}{3}$$

・  $f(R) = F(R) - R$  からの有効エネルギー密度  $\rho_F$  と圧力  $p_F$  :

$$\kappa^2 \rho_F = -\frac{1}{2} (F(R) - R) + 3 (H^2 + \dot{H}) (F'(R) - 1) - 18 (4H^2 \dot{H} + H \ddot{H}) F''(R)$$

$$\begin{aligned} \kappa^2 p_F = & \frac{1}{2} (F(R) - R) - (3H^2 + \dot{H}) (F'(R) - 1) \\ & + 6 (8H^2 \dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H \ddot{H} + \ddot{H}) F''(R) + 36 (4H \dot{H} + \ddot{H})^2 F'''(R) \end{aligned}$$

・ **ファントムクロッシング時の  $H$  の値が現在のHubble パラメタで与えられると仮定する。**

$$H \sim H_0 \sim 10^{-33} \text{ eV}$$



- $\rho_A \sim p_A \sim T_A$

$$\rightarrow \rho_A \sim p_A \sim C H_0^4, \quad C \sim 10^{2\sim 3} : \text{無次元定数}$$

- $\rho_F \sim p_F \sim f(R)/\kappa^2$  (数値定数:  $b, b', b''$  に由来する。)

$$f(R) \sim H_0^2 \longleftarrow f(R) \text{ 項は、現在の有効宇宙項の役割を果たす。}$$

$$\Longrightarrow \rho_F \sim p_F \sim \frac{H_0^2}{\kappa^2}, \quad 1/\kappa \sim 10^{28} \text{ eV}$$

$$\rightarrow |\rho_F| \gg |\rho_A|, \quad |p_F| \gg |p_A|$$

- **ファントムクロッシング時の量子補正の効果は小さく、得られた解は量子補正の下で安定である。(但し、ビッグリップ特異点の付近では、曲率が非常に大きくなるため、量子効果が重要となる。)**

# < II. de Sitter 宇宙からファントム相へ進化する

## $F(R)$ 重力理論の構築 >

▪ Hubble パラメタ:  $H = g_0 + \frac{g_1}{t_s - t}$   $g_0 > 0, g_1 > 0, t_s > 0$   
: 定数

(1)  $t \rightarrow -\infty$  :  $H \rightarrow g_0$  : 定数

de Sitter 宇宙  
に漸近する。

(2)  $t \rightarrow t_s$  :  $H \sim g_1 / (t_s - t)$

$$\dot{H} \sim g_1 / (t_s - t)^2 > 0$$

$$\longrightarrow w_{\text{eff}} < -1$$

ファントム相

$t = t_s$  : **ビッグリップ特異点**

▪  $R = 6 \left[ 2g_0^2 + \frac{4g_0g_1}{t_s - t} + \frac{g_1(2g_1 + 1)}{(t_s - t)^2} \right]$

## (1) 物質を無視した場合

$$\cdot \frac{d\tilde{g}(\phi)}{d\phi} = g_0 + \frac{g_1}{t_s - \phi}$$

$$\rightarrow 0 = \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} - \left( g_0 + \frac{g_1}{t_s - \phi} \right) \frac{dP(\phi)}{d\phi} + \frac{2g_1}{(t_s - \phi)^2} P(\phi)$$

< 解 >

$$P(z) = C_+ z^\alpha F_K(\alpha, \tilde{\gamma}; z) + C_- z^{1-\tilde{\gamma}} F_K(\alpha - \tilde{\gamma} + 1, 2 - \tilde{\gamma}; z)$$

$$z \equiv g_0 (\phi - t_s), \quad \alpha \equiv \frac{1 - g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 10g_1 + 1}}{4} \quad C_\pm : \text{無次元定数}$$

$$\tilde{\gamma} \equiv 1 \pm \frac{\sqrt{g_1^2 - 10g_1 + 1}}{2}$$

$$F_K(\alpha, \tilde{\gamma}; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) z^n}{\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}+1)\cdots(\tilde{\gamma}+n-1) n!}$$

$F_K$  : Kummer の合流型超幾何関数

$$Q(z) = -6g_0^2 \left(1 - \frac{g_1}{z}\right) \left\{ C_+ z^{\alpha-1} \left[ (\alpha - g_1 + z) F_K(\alpha, \tilde{\gamma}; z) + \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}} z F_K(\alpha + 1, \tilde{\gamma} + 1; z) \right] \right. \\ \left. + C_- z^{-\tilde{\gamma}} \left[ (1 - \tilde{\gamma} - g_1 + z) F_K(\alpha - \tilde{\gamma} + 1, 2 - \tilde{\gamma}; z) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha - \tilde{\gamma} + 1}{2 - \tilde{\gamma}} z F_K(\alpha - \tilde{\gamma} + 2, 3 - \tilde{\gamma}; z) \right] \right\}$$

・  $\phi$  を  $\phi = t$  ととる。従って、 $z = g_0 (t - t_s)$  となる。

(1)  $t \rightarrow -\infty$  :  $R \sim 12g_0^2$  : 定数 ← de Sitter 相

(2)  $t \rightarrow t_s$  :  $R \sim 6g_1 (2g_1 + 1) / (t_s - t)^2$

$$\longrightarrow z \sim -g_0 \sqrt{\frac{6g_1 (2g_1 + 1)}{R}}$$

・ この極限では、 $|z| \ll 1$  となる。(  $R$  が発散するため。)

→ Kummer の合流型超幾何関数を展開し、 $z$  に関する1次の項をとる。

$$F(R) \approx \underline{A_+ R^{1-\alpha/2} + A_- R^{1+\tilde{\gamma}/2}}$$

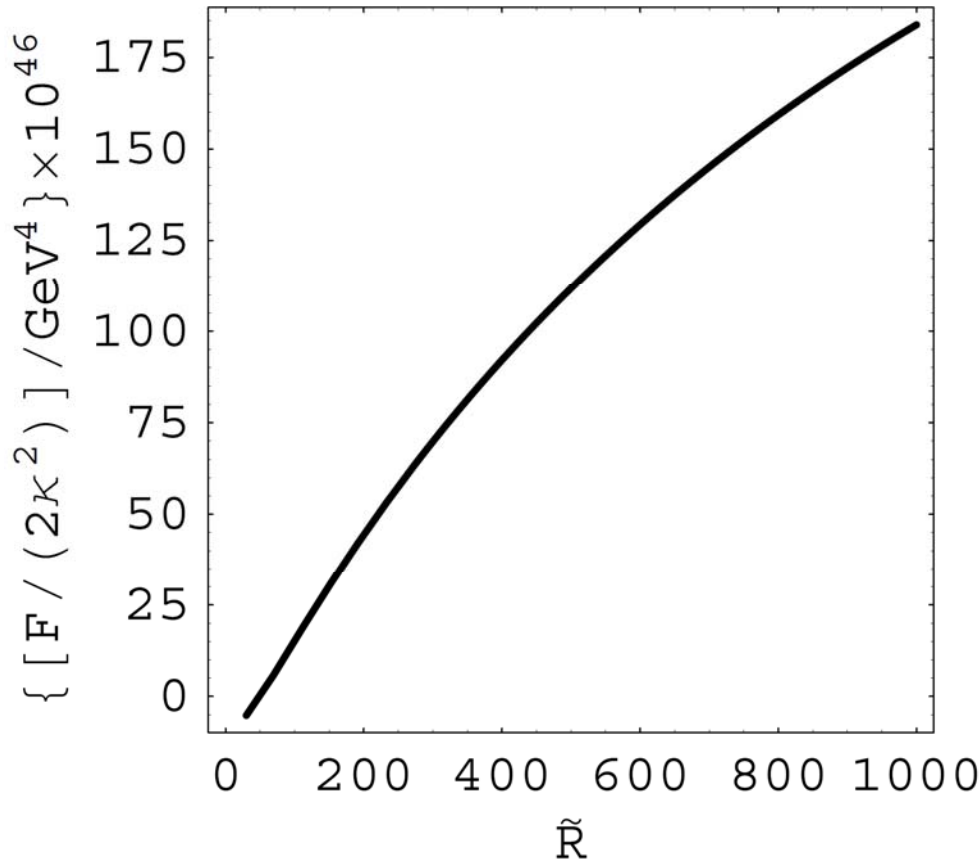
$$A_+ = \frac{C_+ (\alpha - 1) (\alpha + g_1 + 1) \left[ -g_0 \sqrt{6g_1 (2g_1 + 1)} \right]^\alpha}{(\tilde{\gamma} - 1) (2g_1 + 1)}$$

$$A_- = -\frac{C_- (\alpha - \tilde{\gamma}) (2 - \tilde{\gamma} + g_1) \left[ -g_0 \sqrt{6g_1 (2g_1 + 1)} \right]^{1-\tilde{\gamma}}}{(\tilde{\gamma} - 1) (2g_1 + 1)}$$

$$\alpha = \frac{1 - g_1 \pm \sqrt{g_1^2 - 10g_1 + 1}}{4}, \quad \tilde{\gamma} = 1 \pm \frac{\sqrt{g_1^2 - 10g_1 + 1}}{2}$$

## (2) 冷たい暗黒物質 (CDM) の存在を考慮した場合

- CDM (状態方程式:  $w = 0$ ) の存在を取り入れる。
- $P(\phi)$  に関する方程式を数値的に解く。



$\bar{\rho}$  : CDM の現在の  
エネルギー密度

$$\rho_c = 3H_0^2 / (8\pi G)$$

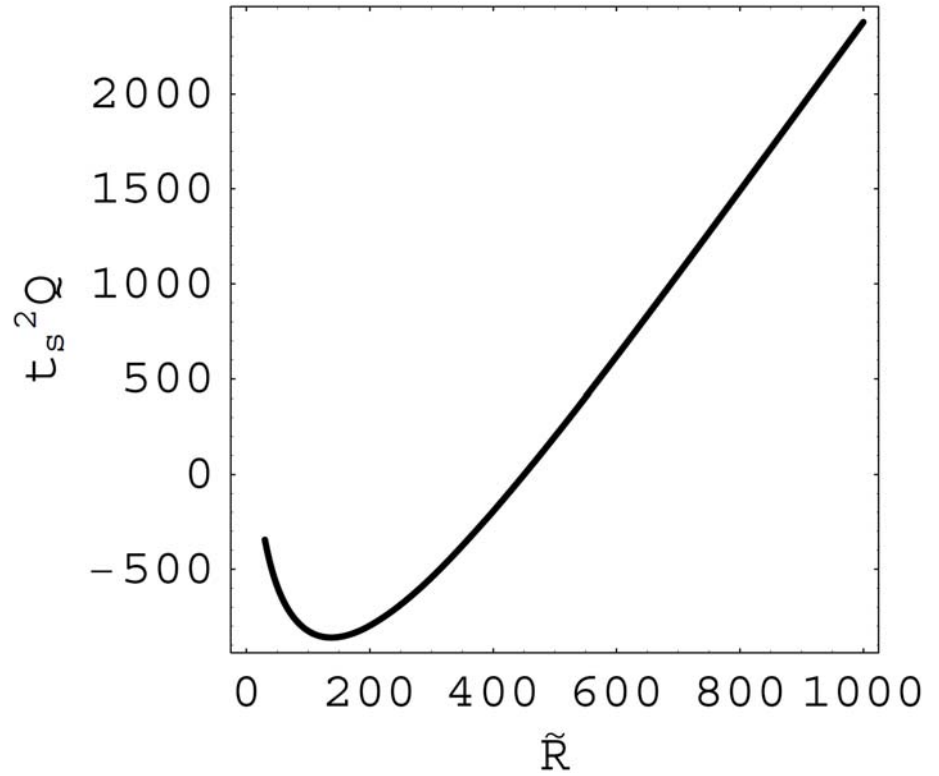
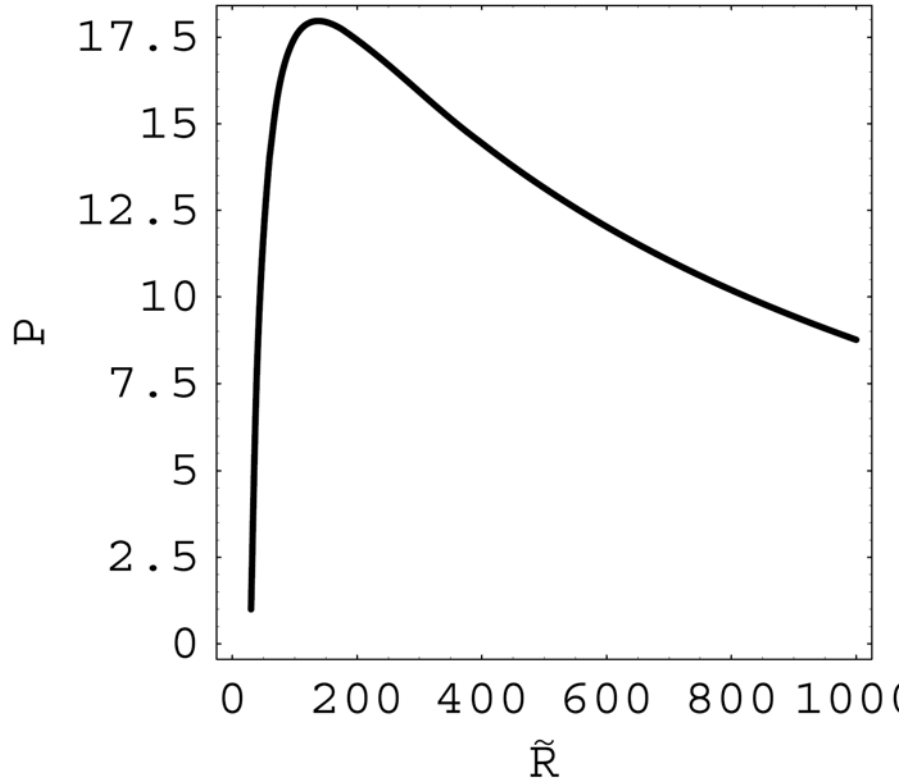
$$= 3.97 \times 10^{-47} \text{GeV}^4$$

: 臨界密度

$\tilde{R} \equiv t_s^2 R$  の関数としての  $F(\tilde{R}) / (2\kappa^2)$  の振る舞い。

$t_s g_0 = g_1$ ,  $t_s = 2t_0$ ,  $\bar{\rho} = 0.233\rho_c$  の場合。

## (2) CDM の存在を考慮した場合



$\tilde{R}$  の関数としての  $P(\tilde{R})$  と  $t_s^2 Q(\tilde{R})$  の振る舞い。

$t_s g_0 = g_1$ ,  $t_s = 2t_0$ ,  $\bar{\rho} = 0.233\rho_c$  の場合。

# III. 結語

- (1) 共形異常と呼ばれる量子補正（質量を持たない共形不変な場の量子補正）の効果は、ファントムクロッシングの際は小さく、得られた解は安定であることが示された。（但し、ビッグリップ特異点付近では、この量子補正が重要となる。）
- (2) de Sitter 宇宙からファントム相へ進化する  $F(R)$  重力理論を構築した。



# 付録 C

本研究で考察した  $H(t)$  を実現するスカラー場理論

# < 本研究での $H(t)$ を実現するスカラー場理論 >

$$S_{\Phi} = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{\hat{R}}{2\kappa^2} - \frac{1}{2}\omega(\Phi) \hat{g}^{\mu\nu} \partial_{\mu}\Phi \partial_{\nu}\Phi - W(\Phi) \right]$$

$\Phi$  : スカラー場,  $\omega(\Phi)$  :  $\Phi$  の関数,  $W(\Phi)$  :  $\Phi$  のポテンシャル

- 平坦な FRW 時空での重力場の方程式:

$$\frac{3}{\kappa^2} H^2 = \rho_{\Phi}, \quad -\frac{2}{\kappa^2} \dot{H} = p_{\Phi} + \rho_{\Phi}$$

$$\rho_{\Phi} = \frac{1}{2}\omega(\Phi) \dot{\Phi}^2 + W(\Phi), \quad p_{\Phi} = \frac{1}{2}\omega(\Phi) \dot{\Phi}^2 - W(\Phi)$$

$$\longrightarrow \omega(\Phi) \dot{\Phi}^2 = -\frac{2}{\kappa^2} \dot{H}, \quad W(\Phi) = \frac{1}{\kappa^2} (3H^2 + \dot{H})$$

- $\omega(\Phi)$  と  $W(\Phi)$  を一つの関数  $I(\Phi)$  に関して定義する。

$$\omega(\Phi) = -\frac{2}{\kappa^2} \frac{dI(\Phi)}{d\Phi}, \quad W(\Phi) = \frac{1}{\kappa^2} \left( 3I^2(\Phi) + \frac{dI(\Phi)}{d\Phi} \right)$$

解:  $\Phi = t, \quad H = I(t)$

- ・  $\chi$  を  $\chi \equiv \int d\Phi \sqrt{|\omega(\Phi)|}$  と定義する。

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{\hat{R}}{2\kappa^2} \mp \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \tilde{W}(\chi) \right]$$

$$\omega(\Phi) > 0 \longrightarrow - \text{符号}$$

$$\omega(\Phi) < 0 \longrightarrow + \text{符号}$$

$$\tilde{W}(\chi) = W(\Phi(\chi)) \longleftarrow \Phi = \Phi(\chi)$$

- ・ ファントムクロッシングを実現する  $F(R)$  重力理論での  $H(t)$  :

$$H = \left( \frac{10}{t} \right) \left[ \frac{\gamma + (\gamma + 1) \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1}}{1 - \left( \frac{t}{t_s} \right)^{2\gamma+1}} \right]$$

$$\longrightarrow I(\Phi) = \left( \frac{10}{\Phi} \right) \left[ \frac{\gamma + (\gamma + 1) \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1}}{1 - \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1}} \right]$$

$$\omega(\Phi) = \frac{20 \left[ \gamma - 4\gamma(\gamma + 1) \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1} - (\gamma + 1) \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2(2\gamma+1)} \right]}{\kappa^2 \Phi^2 \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]^2}$$

$$\rightarrow \chi = \frac{\sqrt{20}}{\kappa} \int d\Phi \frac{\sqrt{\left| \gamma - 4\gamma(\gamma + 1) \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1} - (\gamma + 1) \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2(2\gamma+1)} \right|}}{\Phi \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]}$$

$$\begin{aligned} \tilde{W}(\chi) &= \frac{10}{\kappa^2 \Phi^2(\chi) \left[ 1 - \left( \frac{\Phi(\chi)}{t_s} \right)^{2\gamma+1} \right]^2} \\ &\times \left[ \gamma(30\gamma - 1) + 64\gamma(\gamma + 1) \left( \frac{\Phi(\chi)}{t_s} \right)^{2\gamma+1} + (\gamma + 1)(30\gamma + 31) \left( \frac{\Phi(\chi)}{t_s} \right)^{2(2\gamma+1)} \right] \end{aligned}$$

(i)  $t < t_c : \dot{H} < 0 \implies \omega(\Phi) > 0 \longrightarrow -$  符号

非ファントム相

(ii)  $t = t_c : \dot{H} = 0 \implies \omega(\Phi) = 0$

ファントムクロッシング

(iii)  $t > t_c : \dot{H} > 0 \implies \omega(\Phi) < 0 \longrightarrow +$  符号

ファントム相

Cf. [Sanyal, arXiv:0710.3486 [astro-ph]]

- 冷たい暗黒物質の存在下でのこのようなスカラー場理論において、ファントムクロッシングが実現することが調べられている。

## < 結語 >

- ・ 構築された  $H(t)$  を実現するスカラー場理論を考察した。