

# ブラックレンズについて

井田 大輔

学習院大学理学部

## §§ 導入

### § 動機

3+1 次元時空: ブラックホール (b.h.) 表面  $\simeq S^2$

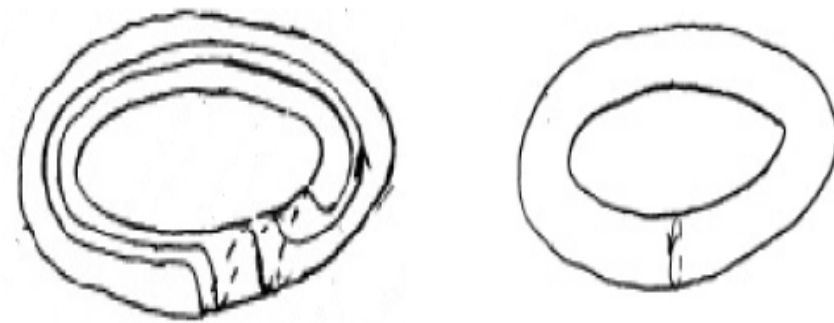
4+1 次元時空:  $\simeq S^3/\Gamma, S^2 \times S^1, \dots$

$S^3/\Gamma$ : レンズ空間 の b.h. はどのように形成されるか?

## § レンズ空間とは

$SO(4)$  の有限部分群  $\Gamma$  が  $S^3$  に固定点をもたない作用をするときの群の軌道の空間。

2つのドーナツ ( $D^2 \times S^1$ ) の表面を同相写像で張り合わせてできる3次元多様体。



トーラスの自己同相写像  $f$  は互いに素な整数の組  $(p, q)$  で決まる。

$$f : m \mapsto pl' + qm'$$

( $l$ : longitude  $m$ : meridian)

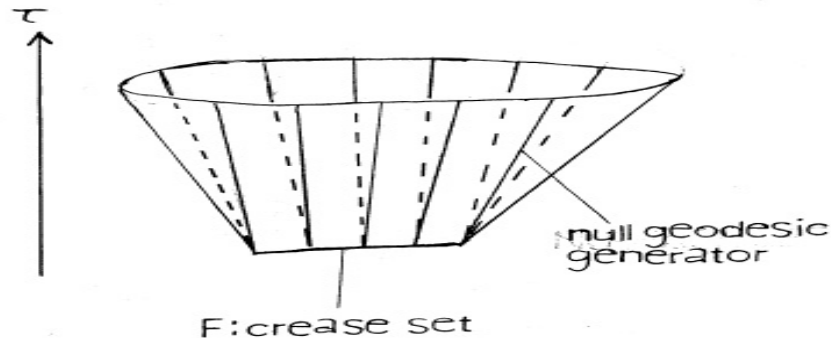
こうしてできるレンズ空間:  $L(p, q)$

$$L(1, 0) = S^3, \quad L(0, 1) = S^2 \times S^1, \quad L(p, 1) = S^3 / \mathbf{Z}_p, \dots$$

## §§ 事象の地平線 (e.h.)

e.h.:  $H = j^-(\mathcal{I}^+)$  — future end pointをもたない null geodesic で生成される null 超曲面。

past end pointの集合  $F$  を **crease set** とよぶ。



重力崩壊で作られるような、有界な過去しかもたない e.h. を考える。

## § crease set

crease setはachronal setで連結。crease setが“e.h.のトポロジーを決めている。”(椎野 1998)

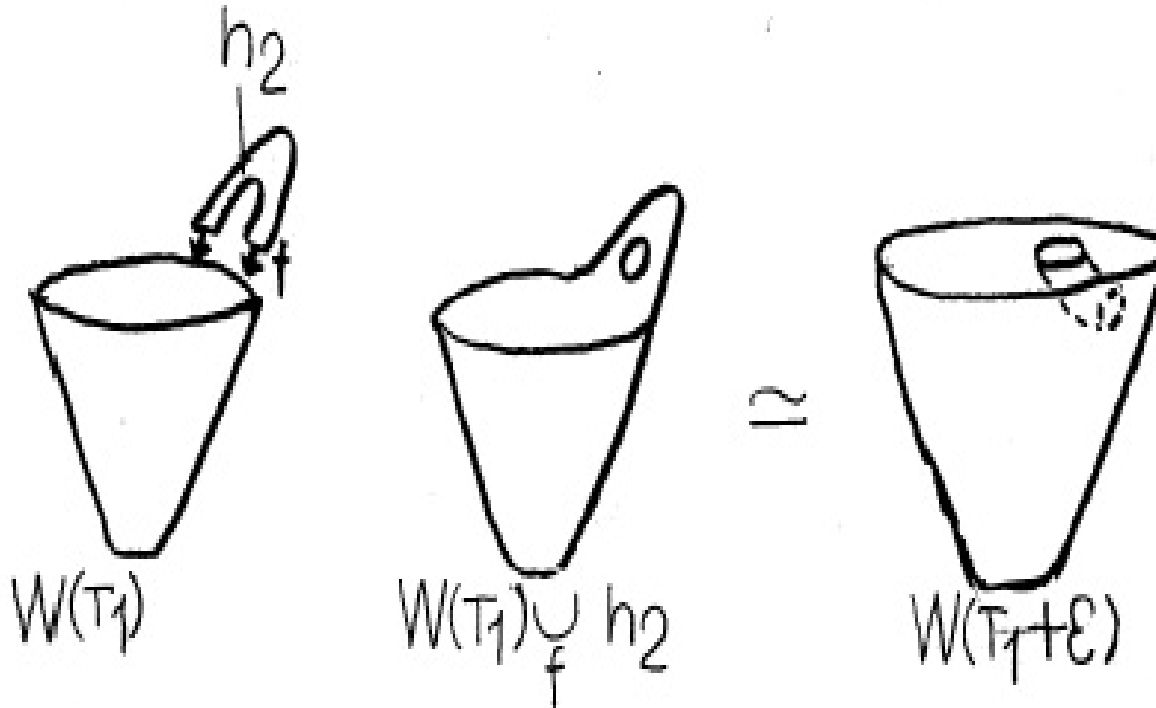
crease setとe.h.は同じホモトピー型をもつ。(井田 2009)

連続写像  $f : F \rightarrow H$ ,  $g : H \rightarrow F$  が存在して,  $f \circ g \simeq id_H$ ,  $g \circ f \simeq id_F$   
(ホモトープ)

○ この結果は, 高次元時空を考えない限りあまり意味がない。

e.h. は  $F$  の  $\epsilon$ -近傍。

e.h. のトポロジーの変化をハンドルの取り付けで記述する。— いくつかの禁止過程がある。(井田+椎野 2007)



$$h_2 = D^2 \times D^2: 2\text{-ハンドル}$$

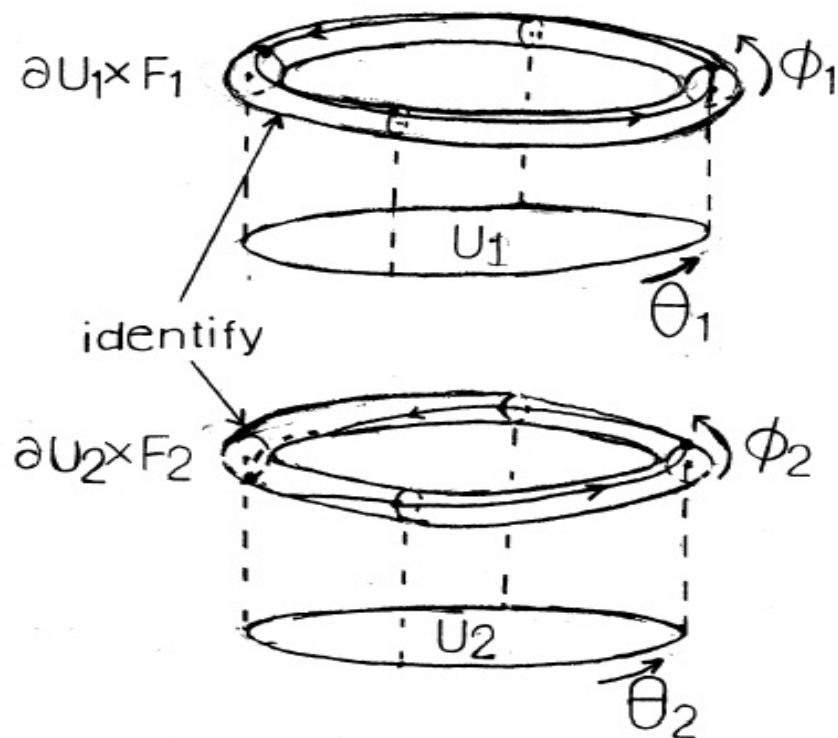
## §§ レンズ空間のホライズンをもつ e.h.

十分未来でレンズ空間になる e.h. のモデル — レンズ空間を境界として  
もつ 4 次元多様体。

### § $L(p, 1)$ ブラックレンズ

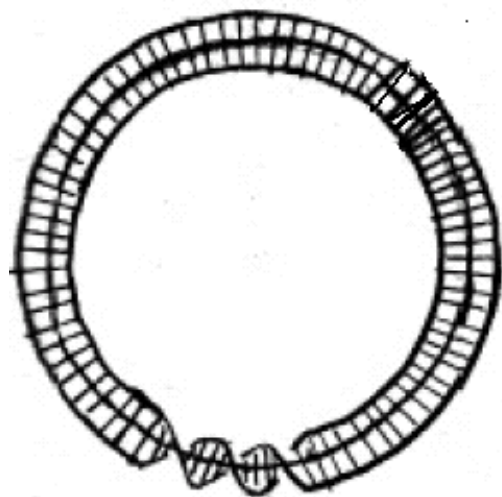


$S^2$  上の  $D^2$  束  $M_p$ :  $\partial M_p = L(p, 1)$ 。



$U_i \times F_i \simeq D^2 \times D^2$  ( $i = 1, 2$ ) を張り合わせる。

$S^2$  上の  $D^2$  束  $M_p$  のかわりに,  $S^1$  上の  $D^1$  束を表したもの。

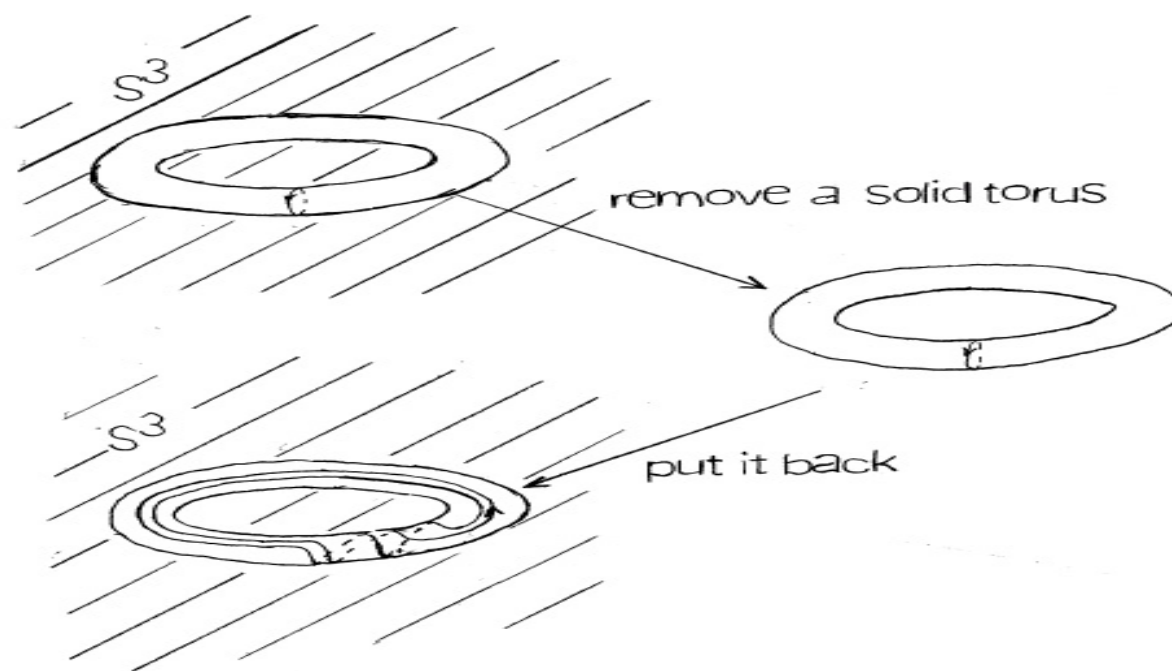


$M_p$

- $M_p$  のゼロ切断は  $S^2$  で,  $M_p$  は  $S^2$  の  $\epsilon$ -近傍になっている。
- $M_p$  が e.h., ゼロ切断の  $S^2$  が crease set に対応するモデルが考えられる。

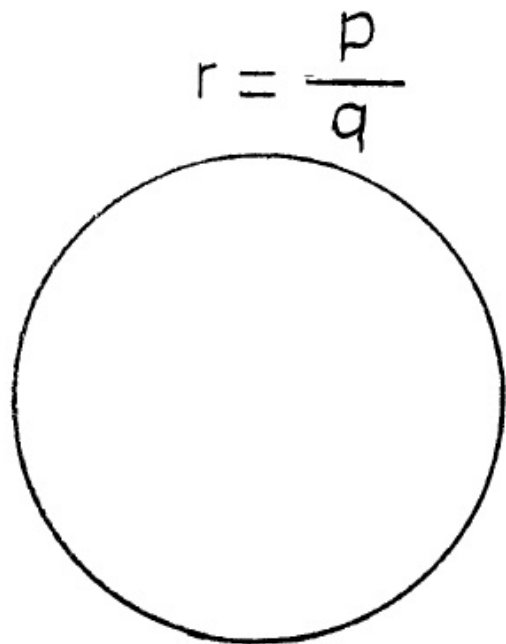
## § $L(p, q)$ ブラックレンズ

$$S^3 \xrightarrow{\text{Dehn 手術}} L(p, q)$$



- $D^4$  に2-ハンドルをつけると, 境界の変化は  $S^3$  の Dehn 手術になる。

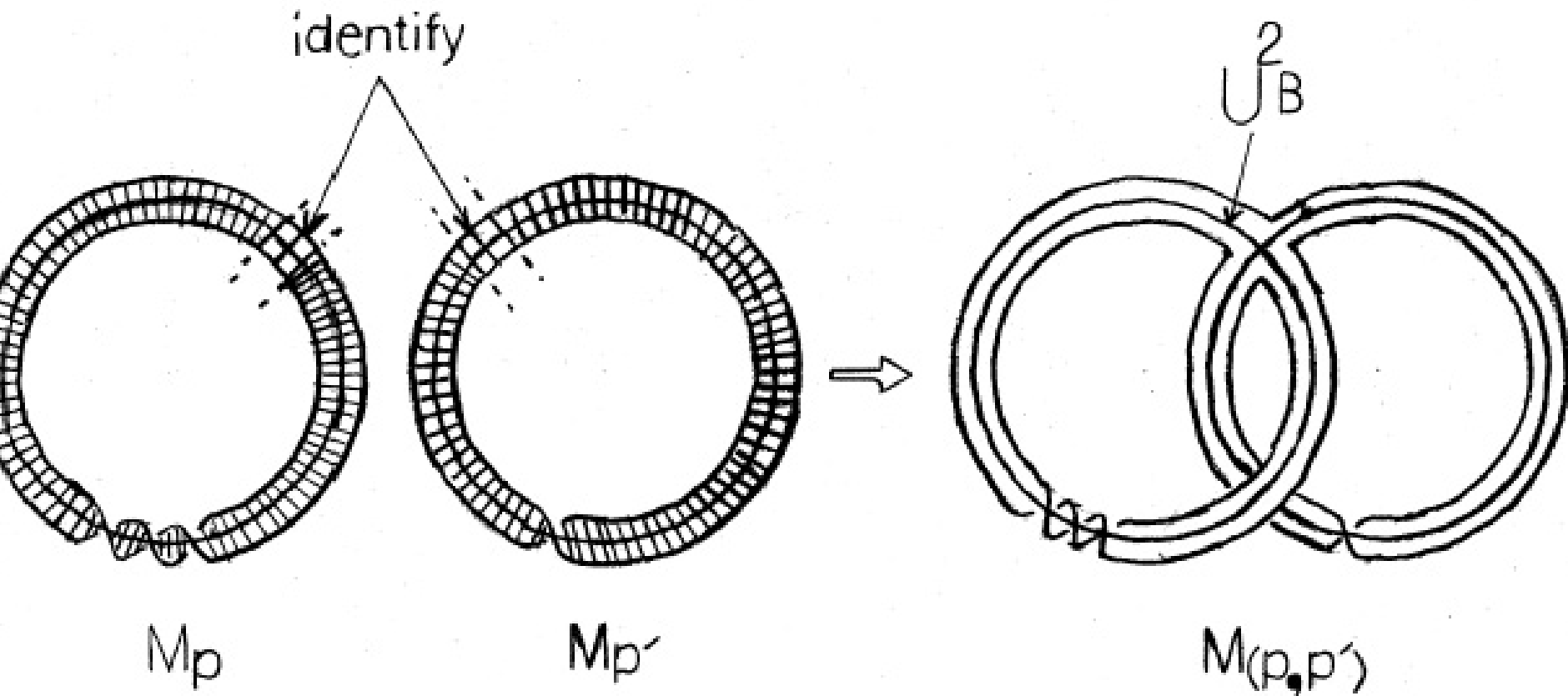
Dehn 手術は  $S^3$  の中に描かれた, 有理係数の円周で表される。



次の図は、一般のレンズ空間  $L(p, q)$  を表している。

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} n_1 \quad n_2 \qquad \qquad \qquad n_{k-1} \quad n_k \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdot \cdot \cdot \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array} \\
 = & \begin{array}{c} n_1 \quad n_2 \qquad \qquad \qquad n_{k-1} \quad n_k \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \cdot \cdot \cdot \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array} n_{k-1} - \frac{1}{n_k} \\
 & \vdots \\
 = & \begin{array}{c} n_1 \quad n_2 \qquad \qquad \qquad n_{k-1} \quad n_k \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array} n_2 - \frac{1}{\dots n_{k-1} - \frac{1}{n_k}} \\
 = & \begin{array}{c} n_1 \quad n_2 \qquad \qquad \qquad n_{k-1} \quad n_k \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} n_1 - \frac{1}{n_2 - \frac{1}{\dots n_{k-1} - \frac{1}{n_k}}}
 \end{aligned}$$

$L(p, q)$  を境界とする 4次元多様体 —  $M_p$  の鉛管工事



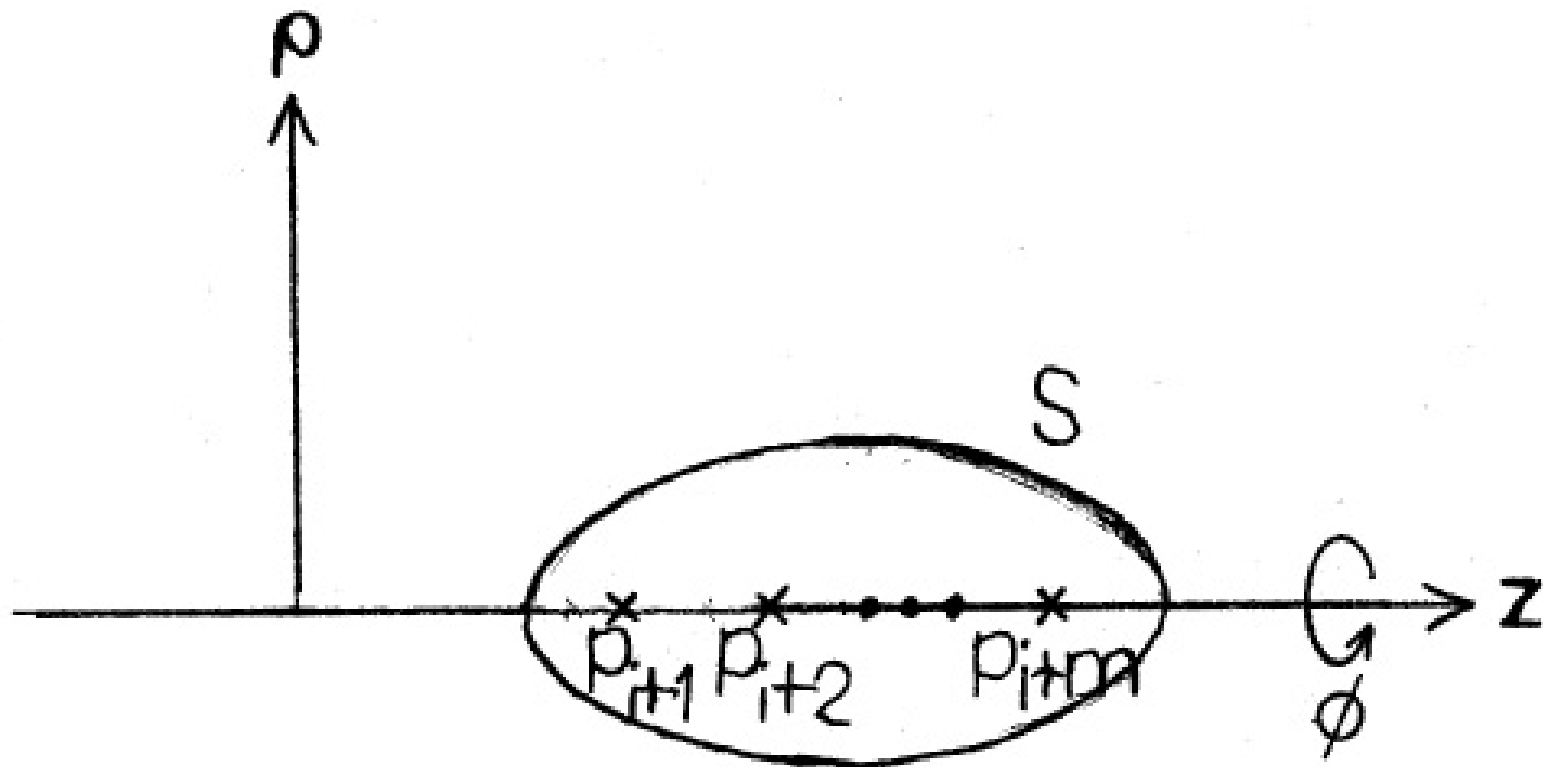
○ ブラックレンズのモデル。crease set =  $S^2$  のブーケ。

## §§ 厳密解によるモデルの実現

Gibbons-Hawking 空間上の Kastor-Traschen 時空

$$\begin{aligned} ds^2 &= -U^{-2}d\tau^2 + U g_{GH} \\ g_{GH} &= V^{-1}(dt + w)^2 + V(d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2) \\ V &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_i)^2}} \\ w &= \sum_{i=1}^k \frac{z - z_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_i)^2}} \\ U &= -\sqrt{\frac{2\Lambda}{3}}\tau + \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_i)^2}} \end{aligned}$$

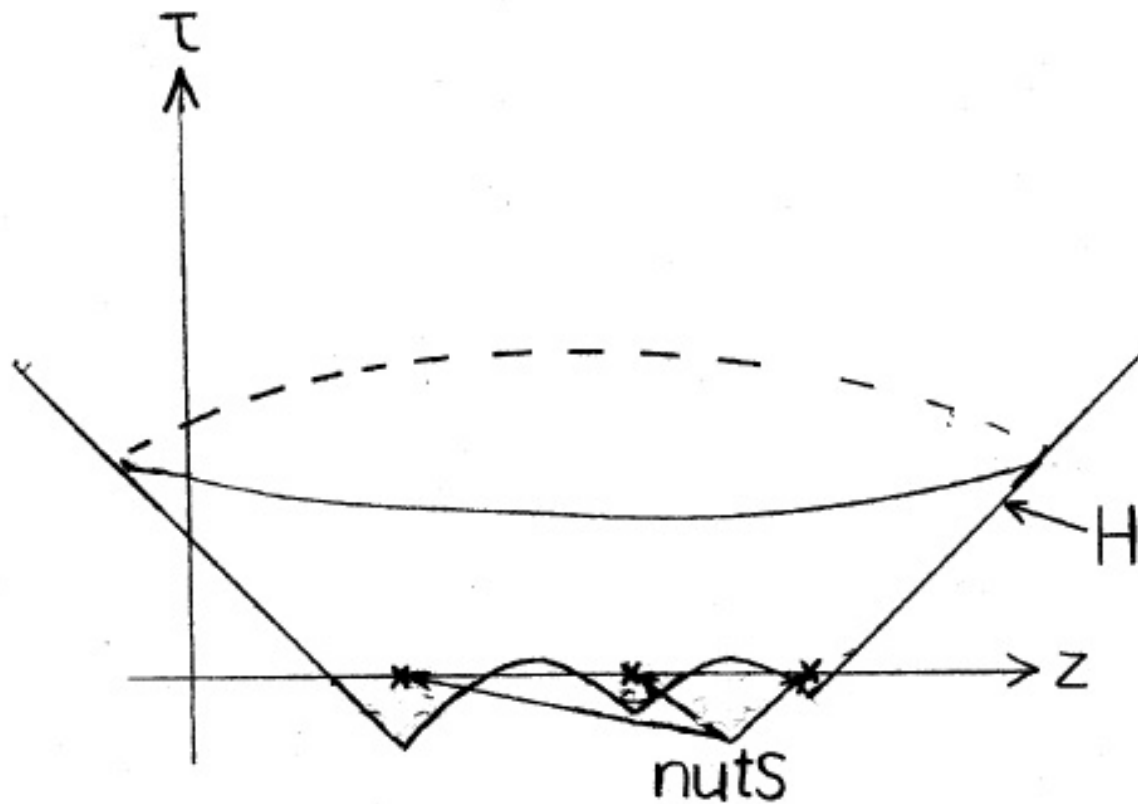
o Gibbons-Hawking 空間: 任意個の **nut** を記述する 4 次元リーマン多様体。



nut を抜いた空間は,  $\mathbb{R}^3 - \{nuts\}$  上の  $S^1$  束



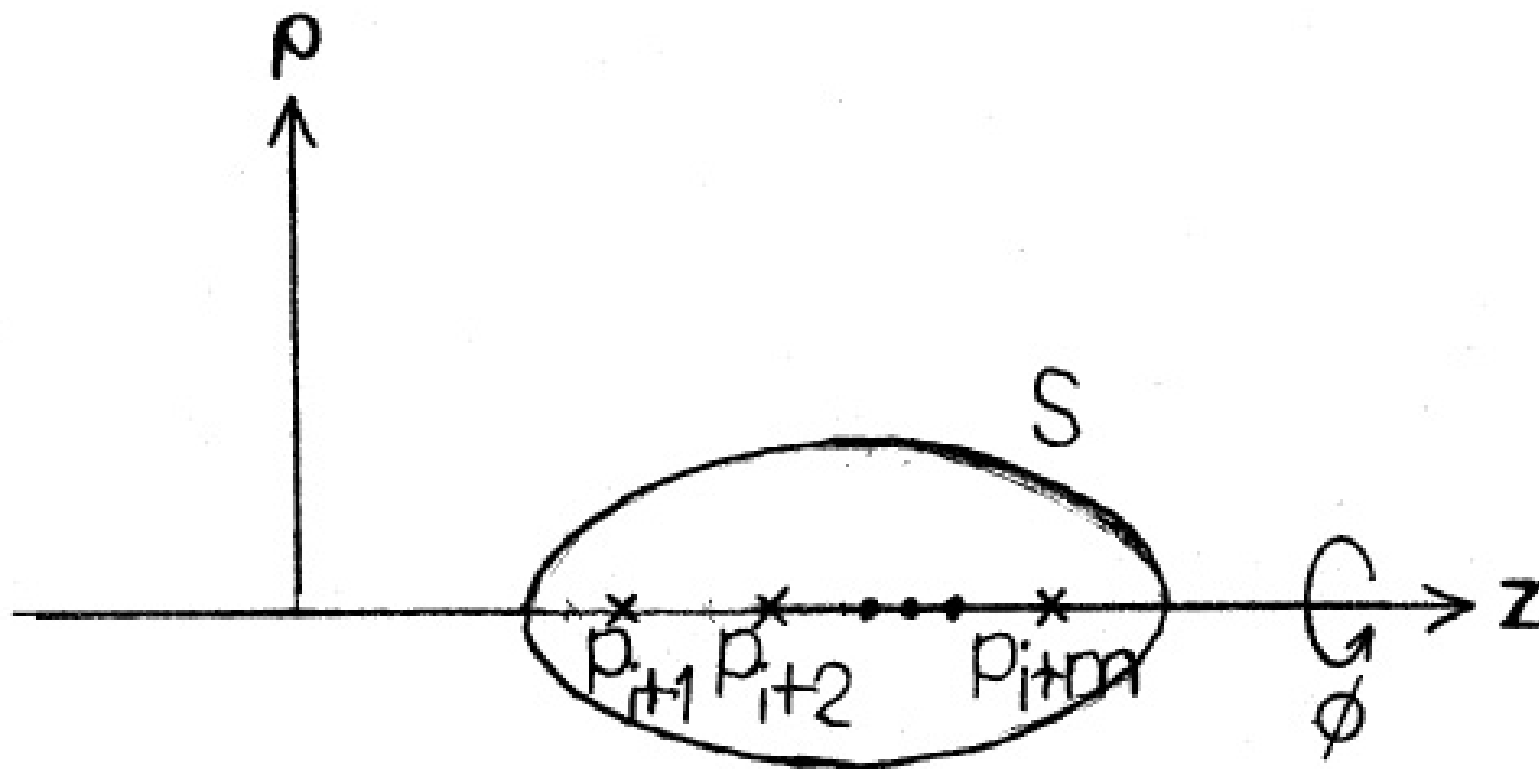
nuts を囲むブラックホールが合体する解になっている。  
(石原+木村+富澤 2006, 柳+石原+木村+松野+富澤 2008)



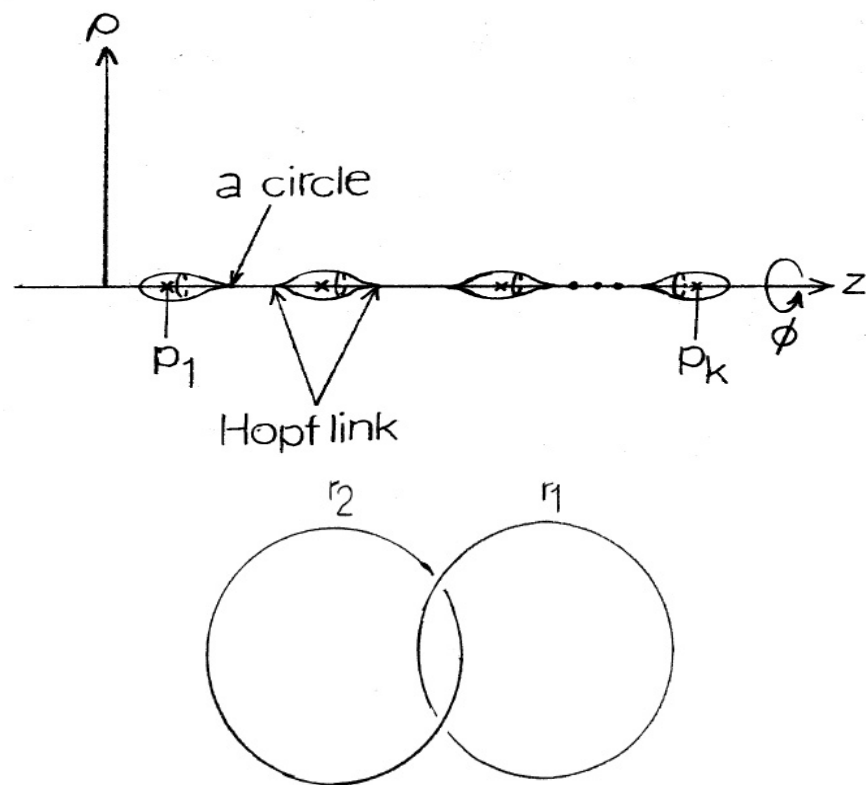
o e.h. は上のようになっていると考えられる。

## § G-H空間の位相構造

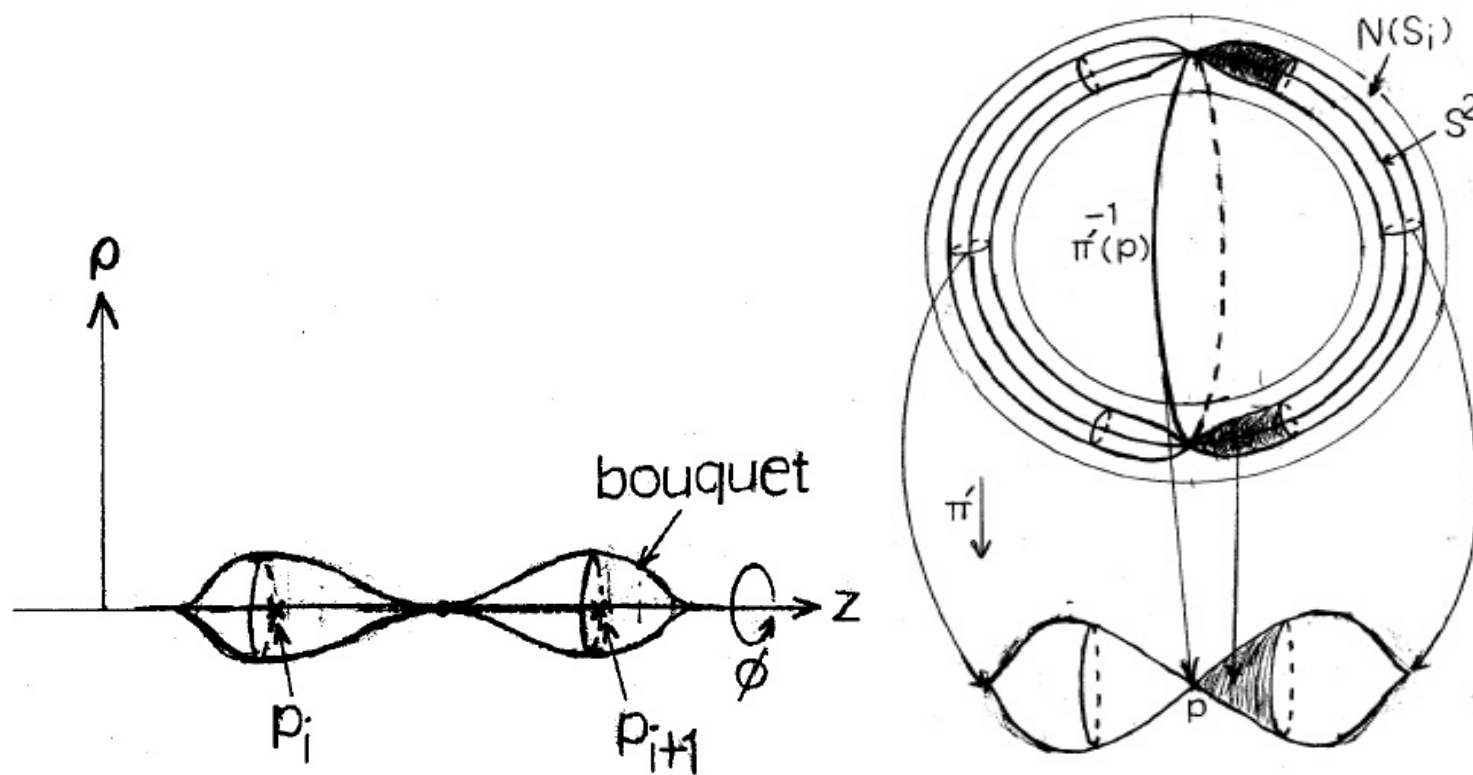
$S$  上の  $S^1$  束は  $M_m$  になっている。



## § ブラックホールの合体

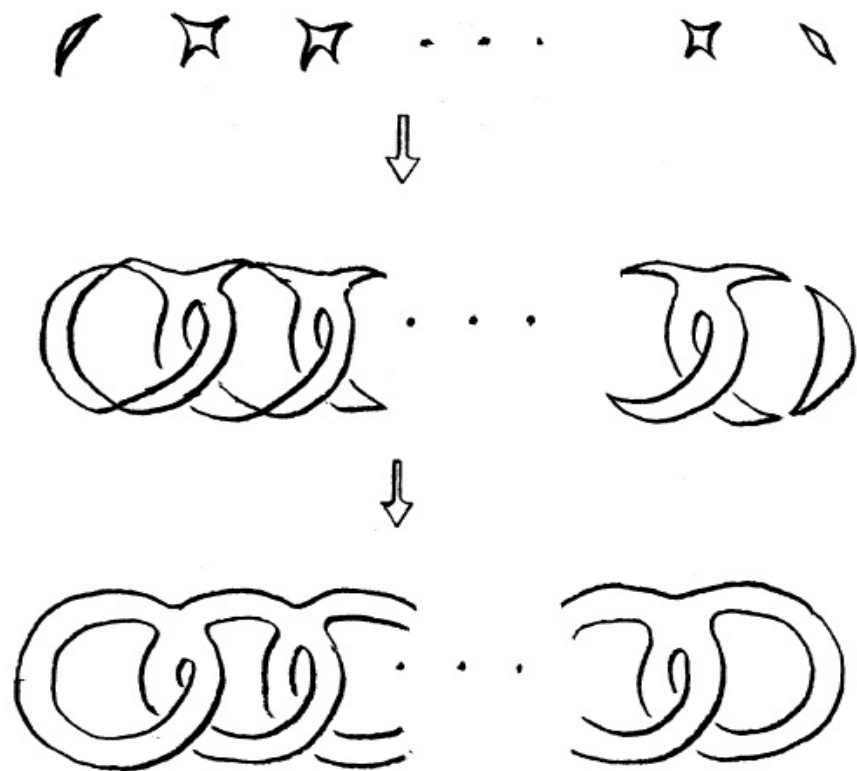


# 合体の瞬間



o 右はブーケ上の  $S^1$  束が e.h. にどのように埋めこめられているのかを表す。

合体の様子



## §§ まとめ

- crease set と e.h. のトポロジーの間の精密な結果がえられた。
- レンズ空間のホライズンをもつ e.h. は  $M_p$  とその鉛管工事からえられる。
- このとき, crease set は  $S^2$  の鉛管工事からえられる。
- この e.h. のモデルは厳密解で実現されている。
- G-H空間上のK-T解において,  $L(m, 1) + L(m', 1) \rightarrow L(m + m', 1)$  が合体の反応式となっている。