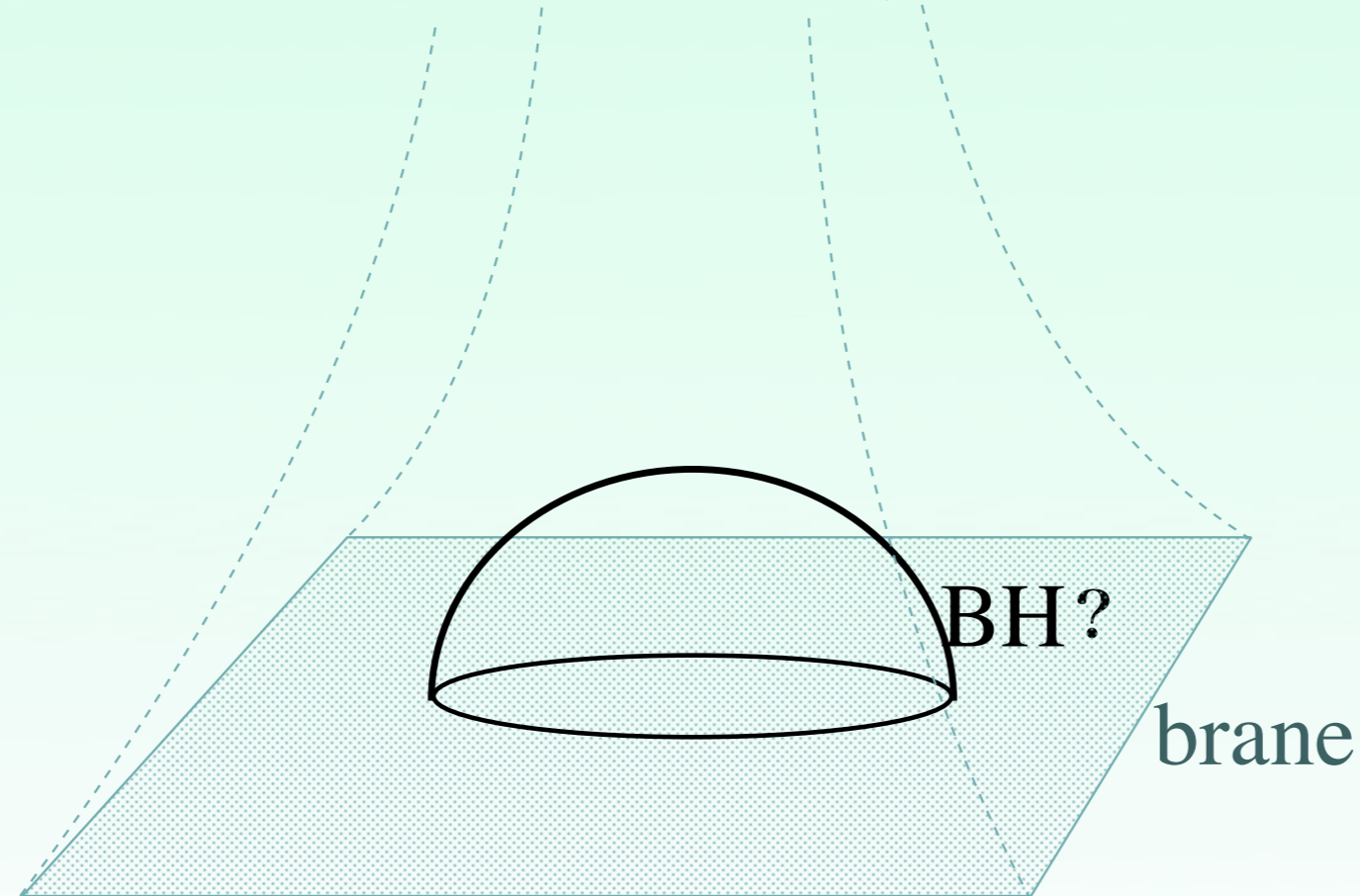


Randall-Sundrum シナリオの ブラックホール解について

JHEP 0901, 268 (2009) [arXiv:0812.0465]

吉野裕高

アルバータ大学



大阪市立大学セミナー：2009年4月8日

目次

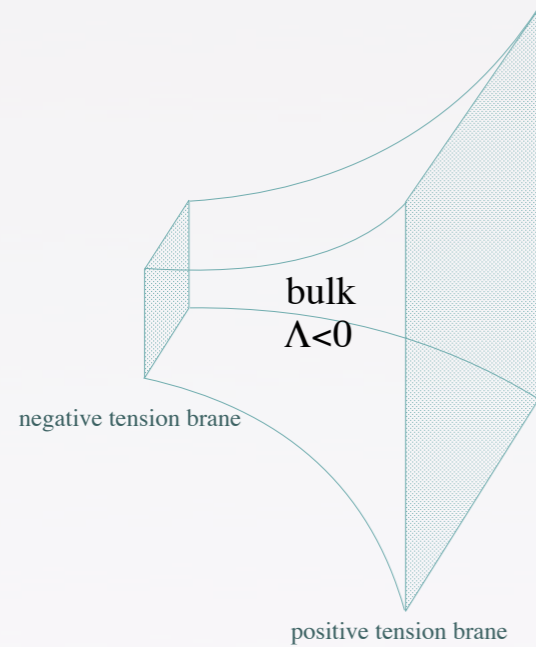
- 導入
- 問題設定
- コード
- 結果
- まとめと議論

目次

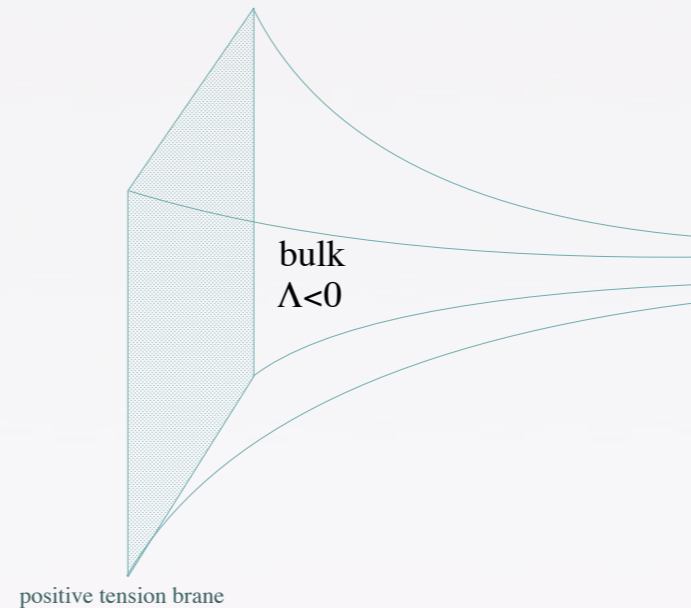
- 導入
- 問題設定
- コード
- 結果
- まとめと議論

Randall-Sundrum シナリオ

● RS I シナリオ



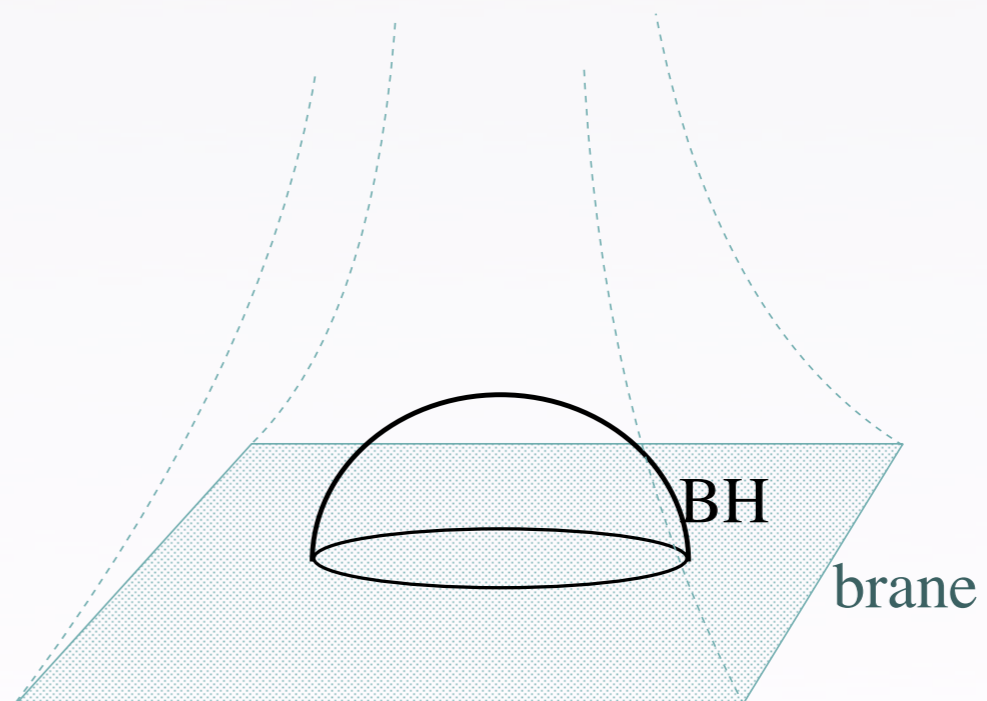
● RS II シナリオ



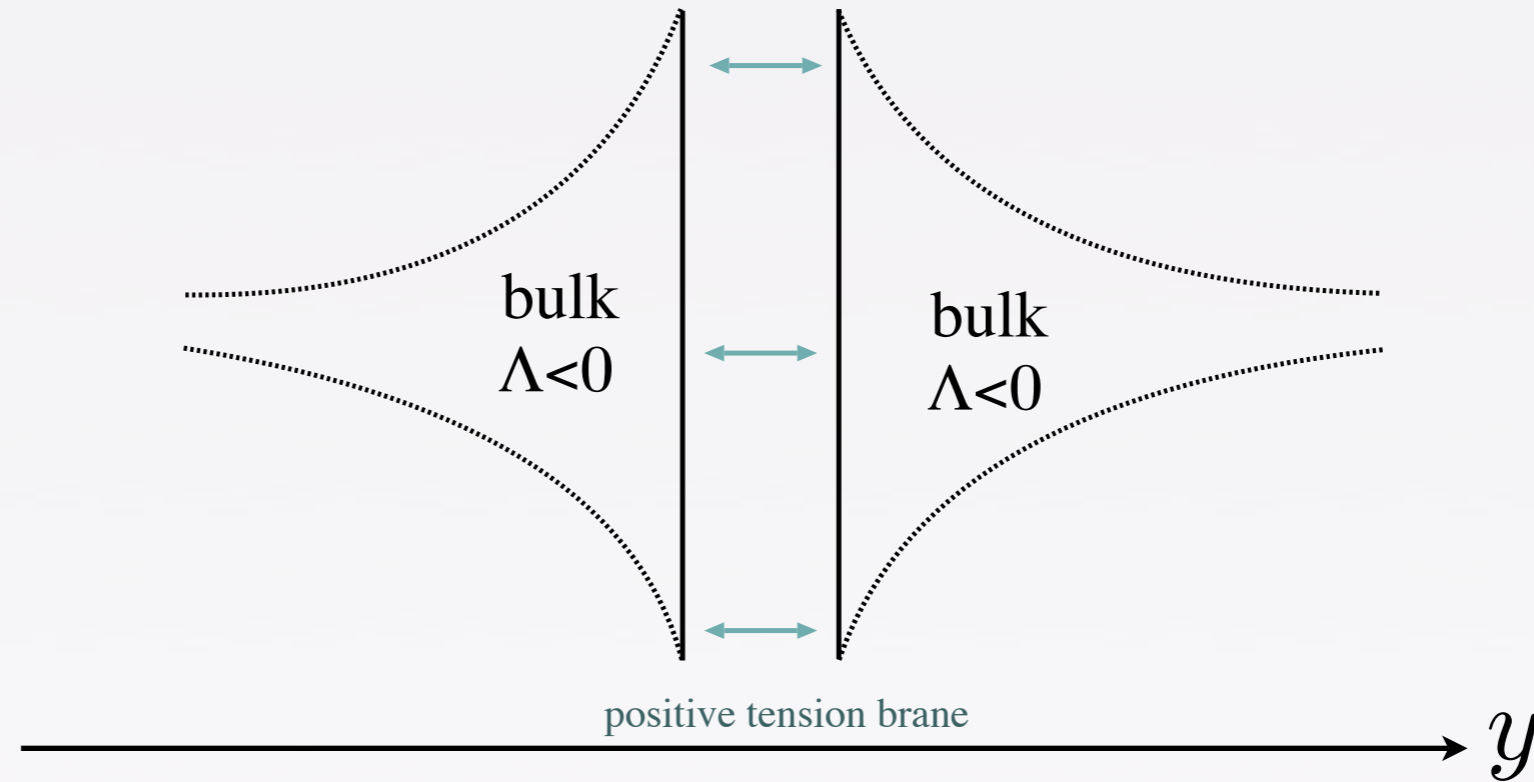
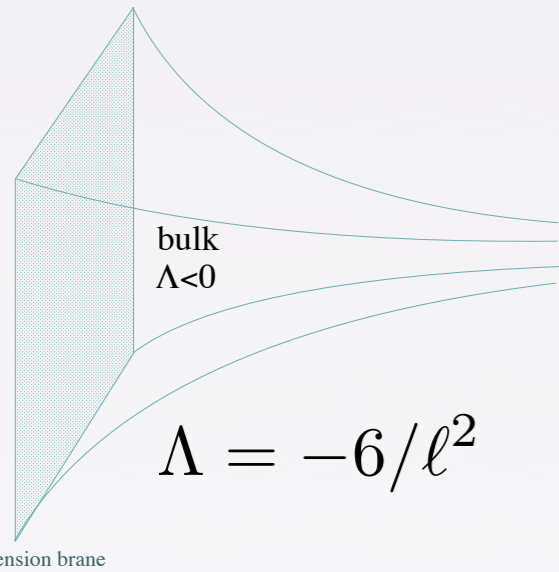
(宇宙の新しい描像)

● RS II シナリオでのBH?

- 重力崩壊の最終状態?
- LHC での BH 形成?
- AdS/CFT 対応



Randall-Sundrum II シナリオ



$$ds^2 = dy^2 + e^{-2|y|/\ell} (-dt^2 + d\mathbf{x}^2)$$

● 物質場がないとき、AdS 時空を 2 つ用意して張り合わせたもの。

● 物質場はブレーン上に束縛。

$${}^{(5)}G_{ab} = -\Lambda g_{ab} + 8\pi G_5 S_{ab} \delta(y)$$

● ブレーンは張力 $\sigma = \frac{3}{4\pi G_5 \ell}$ を持つ。

$$S_{ab} = -\sigma \gamma_{ab} + T_{ab}$$

● Z_2 対称性を課す。ブレーン上の接続条件は $K_{\mu\nu} = -4\pi G_5 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu\nu} S \right)$

Randall-Sundrum II シナリオ

- ブレーン上では、4次元重力が再現される。

Garriga and Tanaka, PRL84, 2778 (2000).

$$ds^2 = dy^2 + a^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

$$+ h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

- 摂動の方程式

$$\left[a^{-2}(-\partial_t^2 + \nabla^2) + \partial_y^2 - 4\ell^{-2} + 4\ell^{-1}\delta(y) \right] h_{\mu\nu} = -16\pi G_5 \Sigma_{\mu\nu} \delta(y)$$

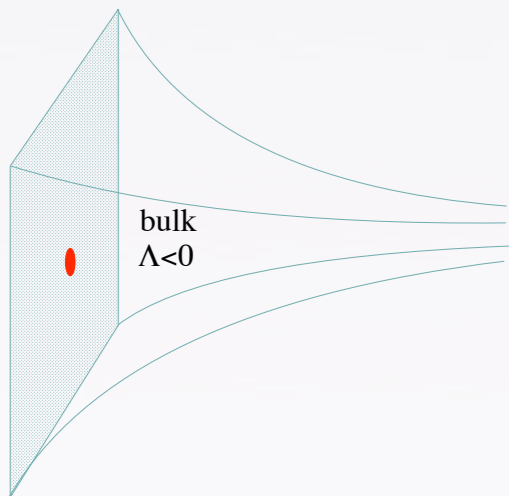
- グリーン関数

$$G_R(x, x') = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \left[\frac{a(y)^2 a(y')^2 \ell^{-1}}{\mathbf{k}^2 - (\omega + i\epsilon)^2} + \int_0^\infty dm \frac{u_m(y) u_m(y')}{m^2 + \mathbf{k}^2 - (\omega + i\epsilon)^2} \right].$$

- ブレーン上の点粒子のつくる重力ポテンシャル

$$h_{00} \simeq \frac{2G_4 M}{r} \left(1 + \frac{2\ell^2}{3r^2} \right); \quad h_{ij} \simeq \frac{2G_4 M}{r} \left(1 + \frac{\ell^2}{3r^2} \right) \delta_{ij}$$

- 非線形でどうなるかはまだ完全にはわかっていない。



positive tension brane

ブレーン世界での BH: これまでの経緯

- ブラックストリング解は厳密解がある。

Chamblin, Hawking, Reall, PRD61, 065007 (2000).

- 4次元時空（2次元ブレーン）ではブレーン上の BH 解がある。

Emparan, Horowitz and Myers, JHEP01, 007 (2000).

- AdS/CFT対応から、大きいブラックホール解はないだろうという予想がある。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).

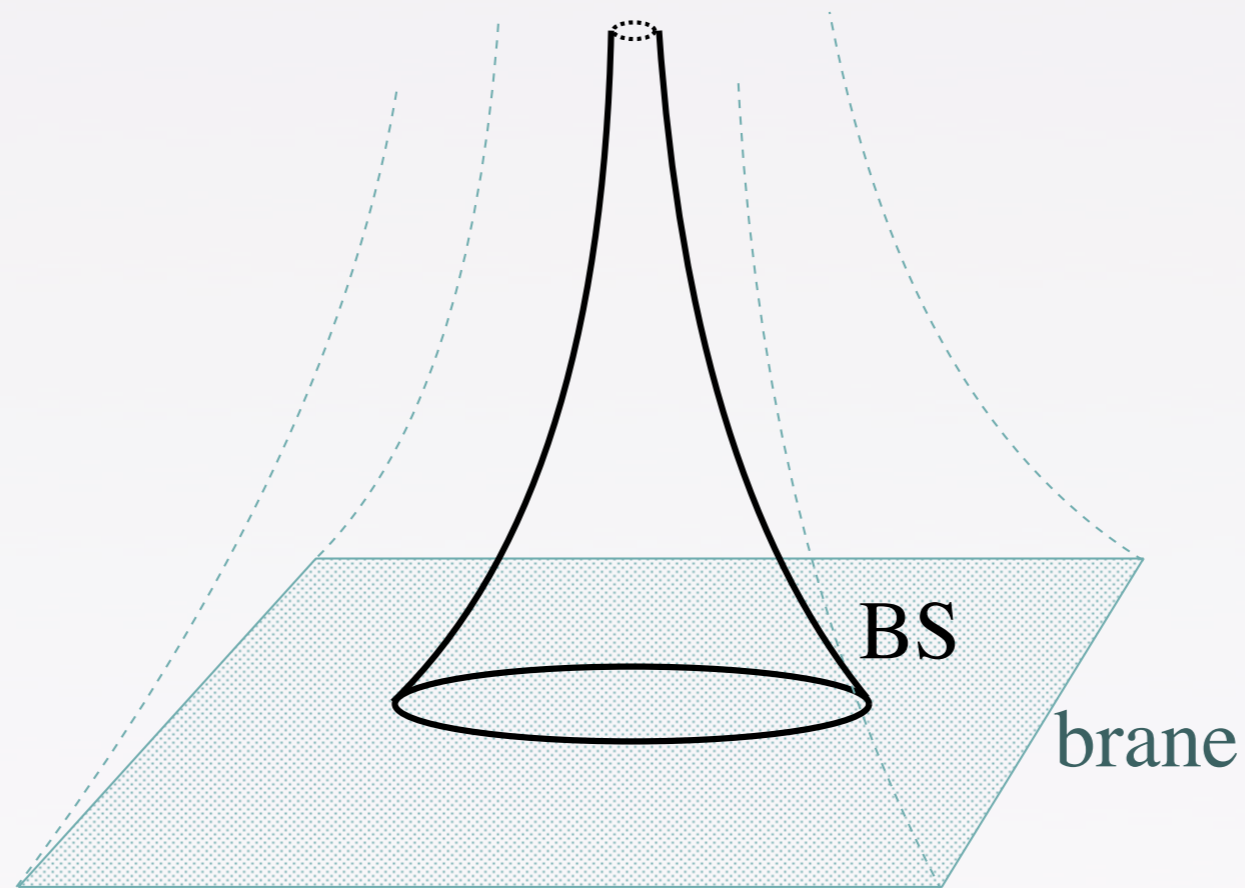
- 工藤氏らによって数値計算がおこなわれた。

Kudoh, Tanaka and Nakamura, PRD68, 024035 (2003)

- Karasik たちによって摂動解がつけられた。

Karasik, Sahabandu, Suranyi and Wijewardhana, PRD70, 064007 (2004).

ブラックストリング解



$$ds^2 = \frac{\ell^2}{(|z| + \ell)^2} \left[dz^2 - \left(1 - \frac{2G_4 M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_4 M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \right]$$

- 無限遠で曲率が発散。 $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \sim z^4 / r^6$
- Gregory-Laflamme 不安定性が起こる。

ブレーン世界での BH: これまでの経緯

- ブラックストリング解は厳密解がある。

Chamblin, Hawking, Reall, PRD61, 065007 (2000).

- 4次元時空（2次元ブレーン）ではブレーン上の BH 解がある。

Emparan, Horowitz and Myers, JHEP01, 007 (2000).

- AdS/CFT対応から、大きいブラックホール解はないだろうという予想がある。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).

- 工藤氏らによって数値計算がおこなわれた。

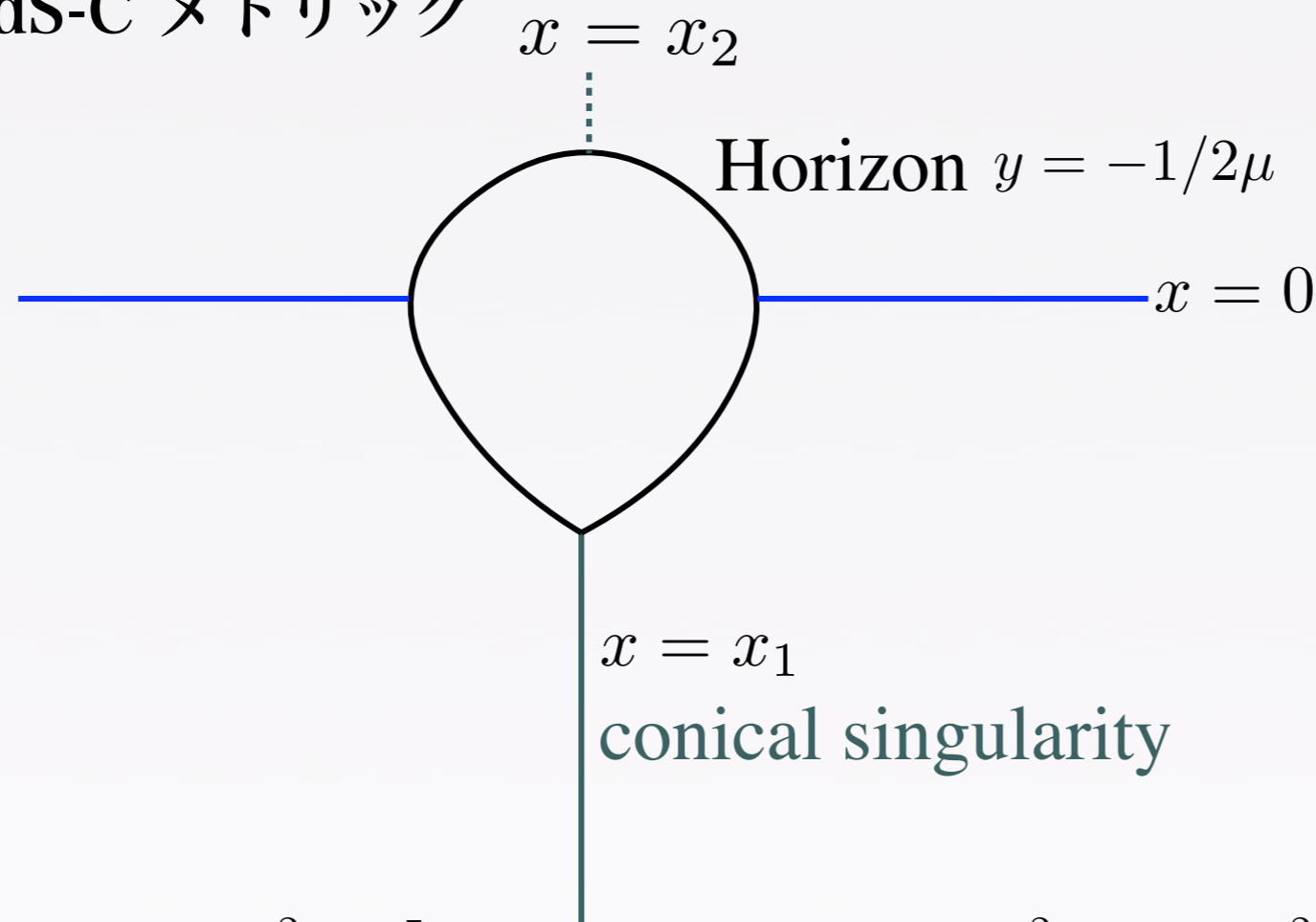
Kudoh, Tanaka and Nakamura, PRD68, 024035 (2003)

- Karasik たちによって摂動解がつけられた。

Karasik, Sahabandu, Suranyi and Wijewardhana, PRD70, 064007 (2004).

4次元時空（2次元ブレーン）での厳密解

- AdS-C メトリック



無限遠： $x = y$

質量に上限:

$$0 < \mu < \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{(x-y)^2} \left[-(y^2 + 2\mu y^3) dt^2 + \frac{dy^2}{y^2 + 2\mu y^3} + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x) d\phi^2 \right]$$

$$G(x) = 1 - x^2 - 2\mu x^3 = -(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- 赤道面で切ると、ブレーンの接続条件を満たす。

ブレーン世界での BH: これまでの経緯

- ブラックストリング解は厳密解がある。

Chamblin, Hawking, Reall, PRD61, 065007 (2000).

- 4次元時空（2次元ブレーン）ではブレーン上の BH 解がある。

Emparan, Horowitz and Myers, JHEP01, 007 (2000).

- AdS/CFT対応から、大きいブラックホール解はないだろうという予想がある。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).

- 工藤氏らによって数値計算がおこなわれた。

Kudoh, Tanaka and Nakamura, PRD68, 024035 (2003)

- Karasik たちによって摂動解がつけられた。

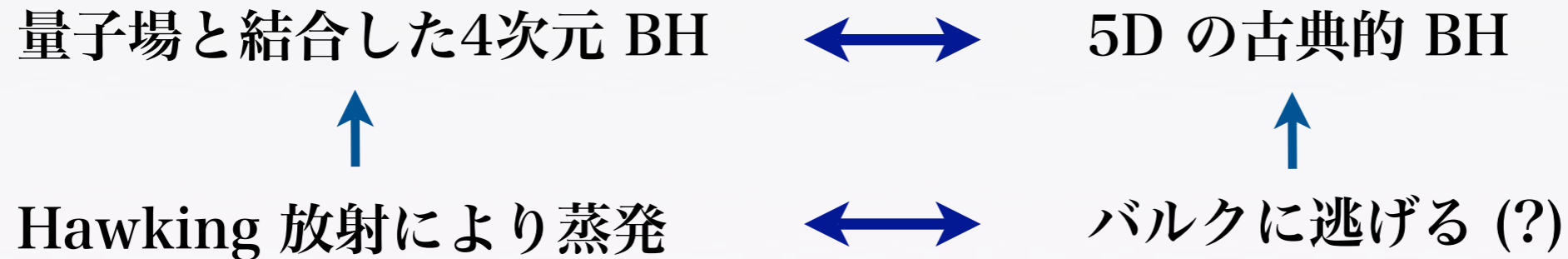
Karasik, Sahabandu, Suranyi and Wijewardhana, PRD70, 064007 (2004).

AdS/CFT 対応による議論

- AdS/CFT 対応が成立するならば、大きな BH は存在しないかもしれない。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).



- 反論もある。

例えば Fitzpatrick, Randall, Wiseman, JHEP11, 033 (2006).

ブレーン世界での BH: これまでの経緯

- ブラックストリング解は厳密解がある。

Chamblin, Hawking, Reall, PRD61, 065007 (2000).

- 4次元時空（2次元ブレーン）ではブレーン上の BH 解がある。

Emparan, Horowitz and Myers, JHEP01, 007 (2000).

- AdS/CFT対応から、大きいブラックホール解はないだろうという予想がある。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).

- 工藤氏らによって数値計算がおこなわれた。

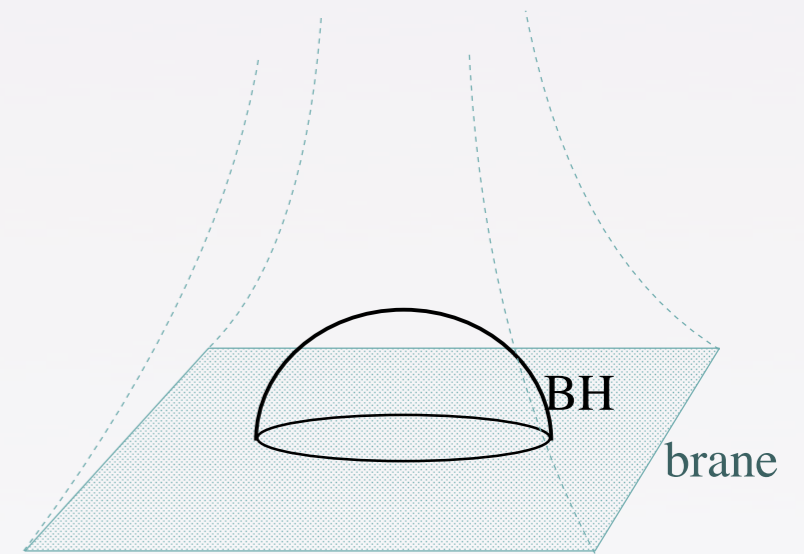
Kudoh, Tanaka and Nakamura, PRD68, 024035 (2003)

- Karasik たちによって摂動解がつけられた。

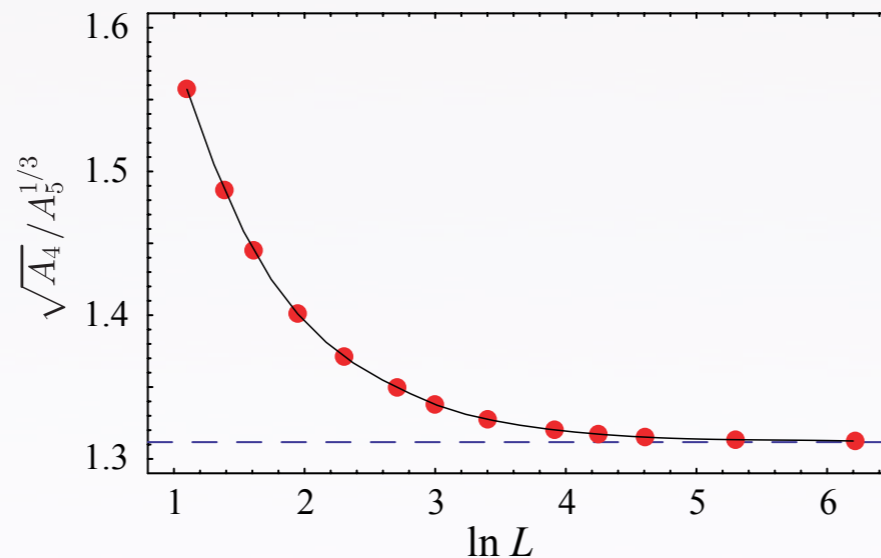
Karasik, Sahabandu, Suranyi and Wijewardhana, PRD70, 064007 (2004).

工藤氏らによる数値計算

- 小さいBHは解けたと主張。
- BHが大きくなるにつれて、収束が悪くなり、誤差が大きくなる。
- このため、彼らは $3 \leq L \leq 500$ の解のみ示した。



$$L := \ell / \rho_H$$



- その後5年間、大きなBHを解けたという話は出てこなかった。

ブレーン世界での BH: これまでの経緯

- ブラックストリング解は厳密解がある。

Chamblin, Hawking, Reall, PRD61, 065007 (2000).

- 4次元時空（2次元ブレーン）ではブレーン上の BH 解がある。

Emparan, Horowitz and Myers, JHEP01, 007 (2000).

- AdS/CFT対応から、大きいブラックホール解はないだろうという予想がある。

Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 148, 307-316 (2002).

Emparan, Fabbri and Kaloper, JHEP08, 043 (2002).

- 工藤氏らによって数値計算がおこなわれた。

Kudoh, Tanaka and Nakamura, PRD68, 024035 (2003)


- Karasik たちによって摂動解がつけられた。

Karasik, Sahabandu, Suranyi and Wijewardhana, PRD70, 064007 (2004).

Karasik らによる摂動計算

- 小さい BH $\rho_H \ll \ell$ を考えて、マッチングで解く。

(地平面近傍) Schwarzschild BH の摂動

(マッチング領域)  一致

(遠方) AdS時空の摂動

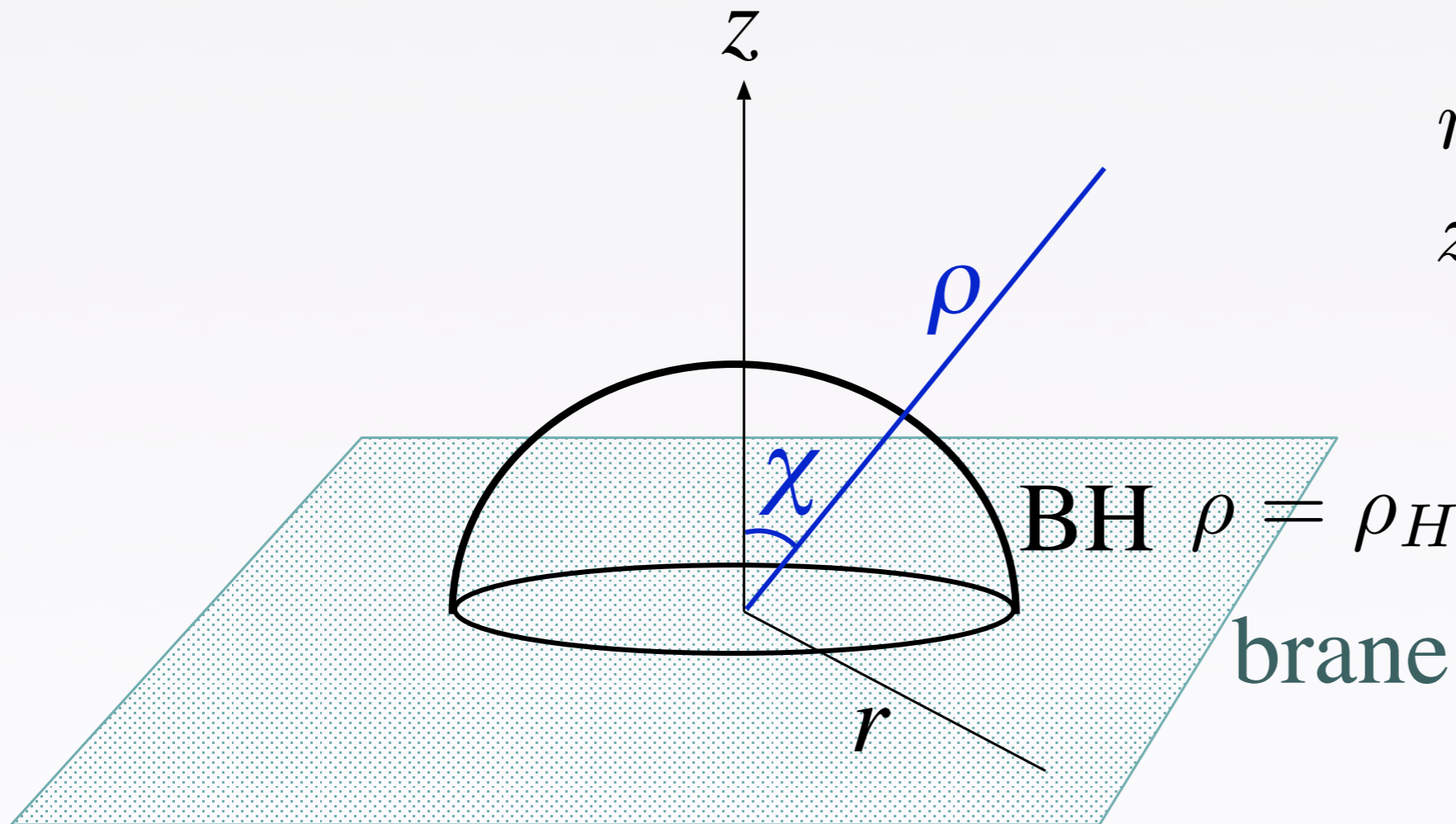
- 彼らは摂動解を構成することに成功した。
メトリックは地平面上は C1 であることが保証されている。
- しかし、メトリックの2回微分が地平面で発散する可能性が残されている。高次の摂動で特異になる可能性もある。
- もし発散すれば、「地平面」は実際は特異点かもしれない。

目次

- 📍 導入
- 📍 **問題設定**
- 📍 コード
- 📍 結果
- 📍 まとめと議論

設定

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2} \left[-T^2 dt^2 + e^{2R} (dr^2 + dz^2) + e^{2C} r^2 d\Omega_2^2 \right]$$



$$r = \rho \sin \chi;$$
$$z = \ell + \rho \cos \chi.$$

- 解を指定するパラメーター $L := \ell / \rho_H$

アインシュタイン方程式

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - (2/3)\Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

$$\nabla^2 T + 2 \left(C_{,\rho} + \frac{2\ell}{z\rho} - \frac{1}{\rho} \right) T_{,\rho} + \frac{2}{\rho^2} \left(\cot \chi + C_{,\chi} + \frac{2\rho}{z} \sin \chi \right) T_{,\chi} + \frac{2}{\rho z} (\sin \chi C_{,\chi} - \cos \chi \rho C_{,\rho}) T + \frac{4}{z^2} \left(1 + \frac{\Lambda \ell^2}{6} e^{2R} \right) T = 0;$$

$$\nabla^2 R - \frac{1 - e^{2(R-C)}}{\rho^2 \sin^2 \chi} - \frac{2}{z^2} \left(1 + \frac{\Lambda \ell^2}{6} e^{2R} \right) - \frac{2T_{,\rho}}{T} \left(C_{,\rho} + \frac{\ell}{z\rho} \right) - \frac{2T_{,\chi}}{\rho^2 T} \left(\cot \chi + C_{,\chi} + \frac{\rho}{z} \sin \chi \right) - C_{,\rho} \left(C_{,\rho} + \frac{4\ell}{z\rho} - \frac{2}{\rho} \right) - \frac{C_{,\chi}}{\rho^2} \left(C_{,\chi} + 2 \cot \chi + \frac{4\rho}{z} \sin \chi \right) = 0;$$

$$\nabla^2 C + \frac{1 - e^{2(R-C)}}{\rho^2 \sin^2 \chi} + \frac{4}{z^2} \left(1 + \frac{\Lambda \ell^2}{6} e^{2R} \right) + \frac{T_{,\rho}}{T} \left(C_{,\rho} + \frac{\ell}{z\rho} \right) + \frac{T_{,\chi}}{\rho^2 T} \left(\cot \chi + C_{,\chi} + \frac{\rho}{z} \sin \chi \right) + C_{,\rho} \left(2C_{,\rho} + \frac{5\ell}{z\rho} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{C_{,\chi}}{\rho^2} \left(2C_{,\chi} + 4 \cot \chi + \frac{5\rho}{z} \sin \chi \right) = 0;$$

$$\frac{1}{2T} \left[T_{,\rho\chi} - R_{,\chi} T_{,\rho} - T_{,\chi} \left(R_{,\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \right] + C_{,\rho\chi} + C_{,\rho} (\cot \chi + C_{,\chi}) + \frac{R_{,\chi}}{2} \left(\frac{1}{\rho} - 2C_{,\rho} - \frac{3\ell}{z\rho} \right) - R_{,\rho} \left(C_{,\chi} + \cot \chi + \frac{3\rho}{2z} \sin \chi \right) = 0.$$

$$\frac{1}{T} \left[T_{,\chi\chi} + T_{,\chi} \left(2 \cot \chi + 2C_{,\chi} - R_{,\chi} + \frac{3\rho}{z} \sin \chi \right) + \rho T_{,\rho} \left(2\rho C_{,\rho} + \rho R_{,\rho} + \frac{3\ell}{z} \right) \right] + 2C_{,\chi\chi} + C_{,\chi} \left(6 \cot \chi + 3C_{,\chi} + \frac{6\rho}{z} \sin \chi \right) + \rho C_{,\rho} \left(2\rho R_{,\rho} + \rho C_{,\rho} - 2 + \frac{6\ell}{z} \right) - R_{,\chi} \left(2 \cot \chi + \frac{3\rho}{z} \sin \chi + 2C_{,\chi} \right) + R_{,\rho} \left(\frac{3\ell}{z} - 1 \right) + \frac{1 - e^{2(R-C)}}{\sin^2 \chi} + \frac{6\rho^2}{z^2} \left(1 + \frac{\Lambda \ell^2}{6} e^{2R} \right) = 0.$$

境界条件

● 無限遠

$$T = 1;$$

$$R = C = 0$$

数値計算の都合上,
有限の ρ で課す

● 軸上

$$R = C$$

$$T_{,\chi} = R_{,\chi} = C_{,\chi} = 0$$

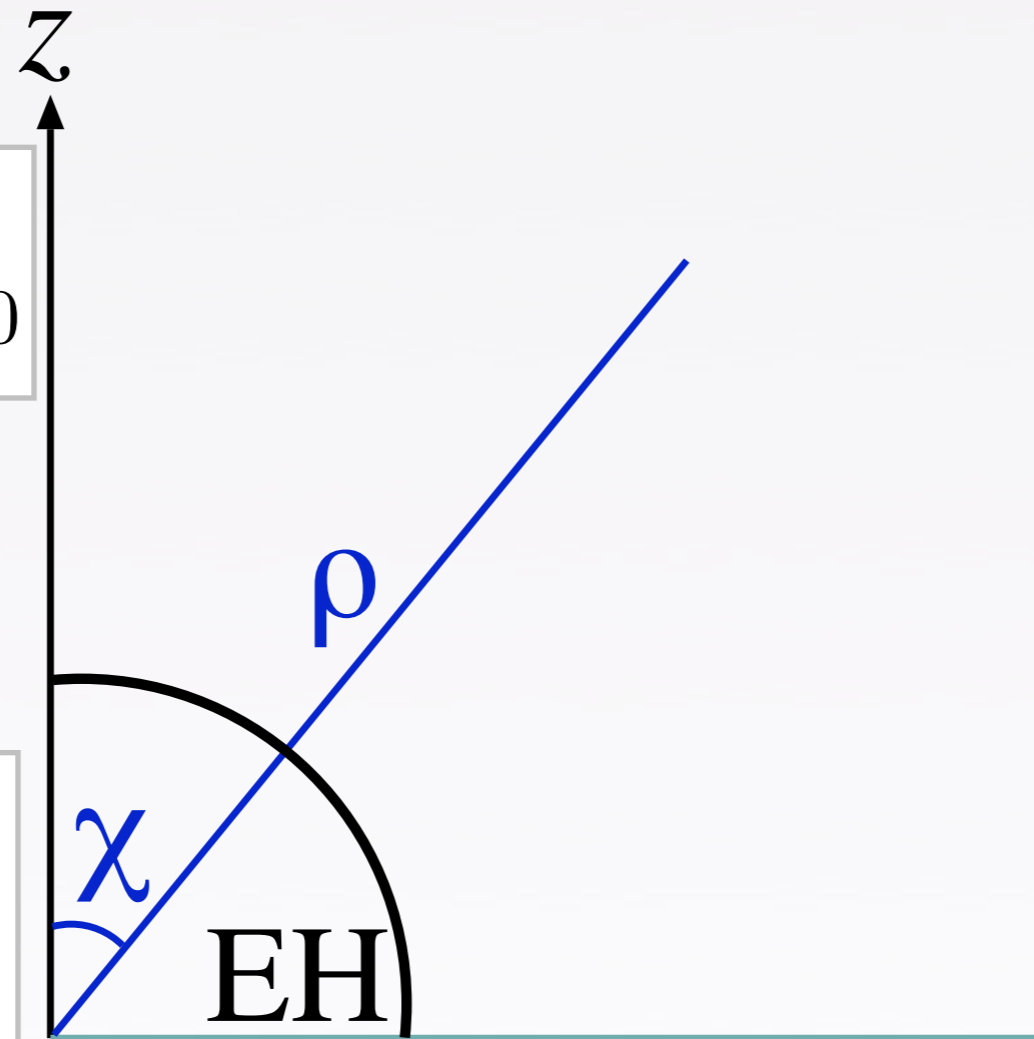
● 地平面

$$T = 0$$

$$C_{,\rho} + \frac{\ell}{z\rho} = 0;$$

$$2C_{,\rho} + R_{,\rho} + \frac{3\ell}{z\rho} = 0$$

$$\frac{T_{,\rho\chi}}{T_{,\rho}} = R_{,\chi}$$



r ● brane $K_{\mu\nu} = -\frac{1}{\ell}h_{\mu\nu}$

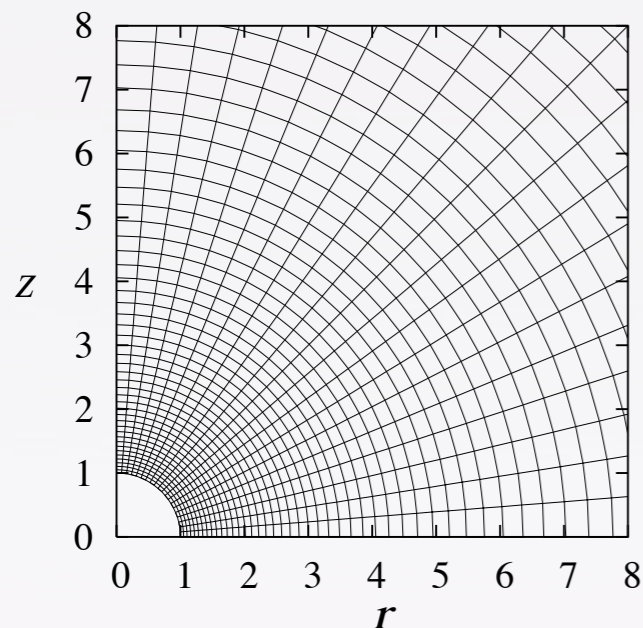
$$\frac{T_{,\chi}}{T} = R_{,\chi} = C_{,\chi} = \frac{\rho}{\ell}(e^R - 1)$$

目次

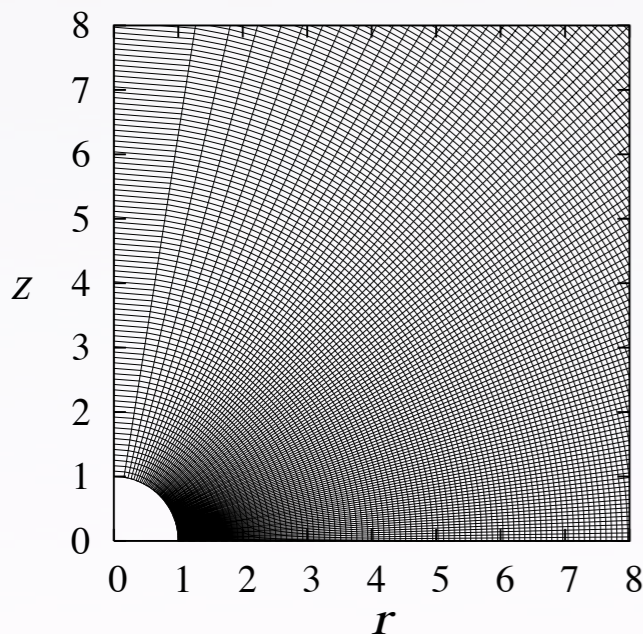
- 📍 導入
- 📍 問題設定
- 📍 コード
- 📍 結果
- 📍 まとめと議論

2つの数値計算手法の違い

今回使ったグリッド



工藤氏のグリッド



	今回のコード	工藤氏のコード
動径座標	$x := \log \rho$	ρ
角度座標	χ	$\xi := \chi^2$
グリッド数 (誤差)	100x20 (0.001%) 200x40 (0.00001%)	1000x100 (1%)
外側の境界	$x_{\text{out}} = 4, 5, 6$	$\rho_{\text{out}} = 85$
変数	T, X, Y	T, R, C
スキーム	(ほとんど) 4次精度	2次精度

$$X := R + C$$

$$Y := R - C$$

数値計算の方法

- SOR (successive-over-relaxation) 法を若干変更したもの
- 差分方程式からのズレを計算。

$$\Delta T_{(I,J)}, \Delta X_{(I,J)}, \Delta Y_{(I,J)}$$

- 次のステップの値を次のように決める。

$$T_{(I,J)}^{(\text{next})} = T_{(I,J)} + w_T \Delta T_{(I,J)};$$

$$X_{(I,J)}^{(\text{next})} = X_{(I,J)} + w_X \Delta X_{(I,J)};$$

$$Y_{(I,J)}^{(\text{next})} = Y_{(I,J)} + w_Y \Delta Y_{(I,J)}.$$

ここで

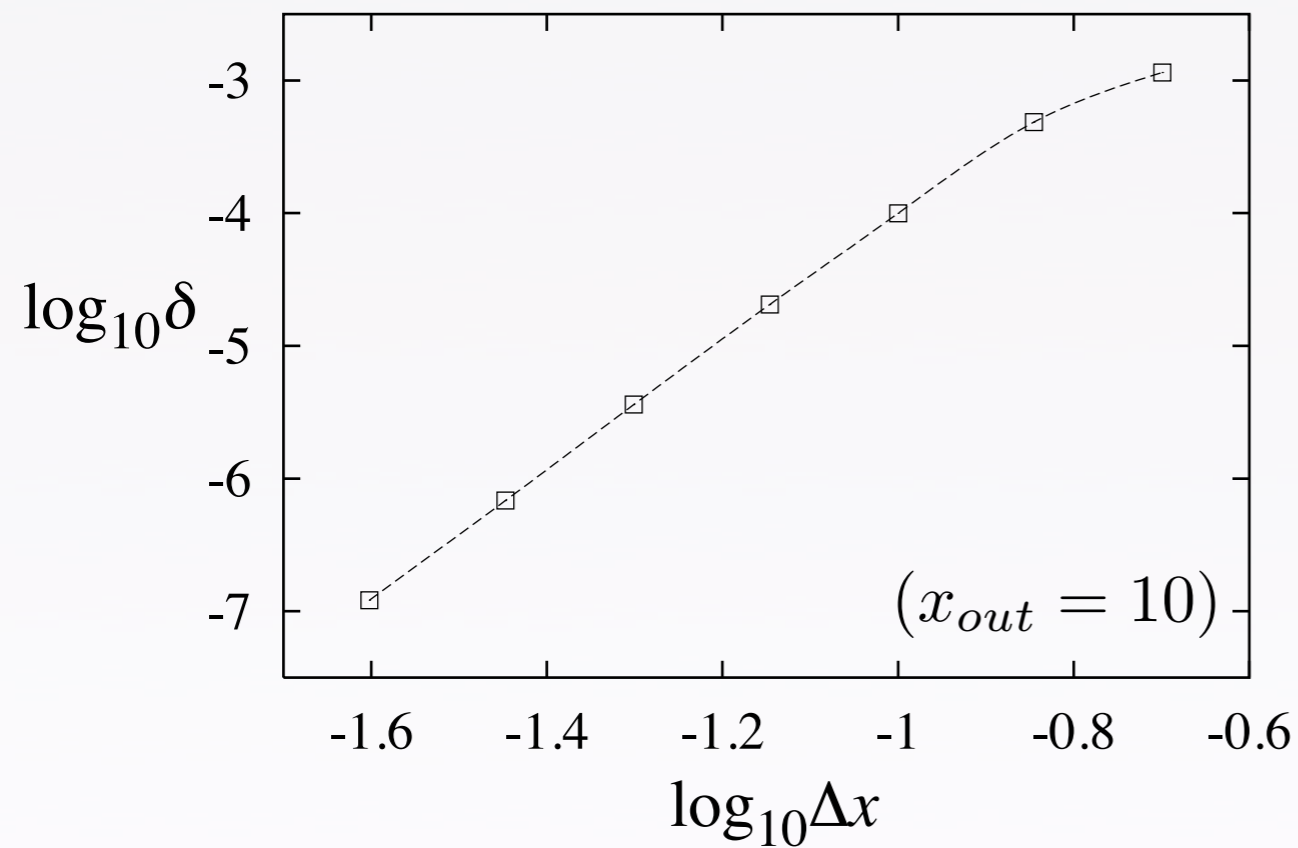
$$w_T = w_X = 0.8;$$

$$w_Y = 0.08 \times \cos^n [(x - x_{\text{out}})\pi/2] \sin \chi.$$

BHが小さい極限 (シュバルツシルトBH)

$$\rho/\ell \rightarrow 0$$

$$T_0 = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}; \quad R_0 = C_0 = \log \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right)$$



● グリッド誤差

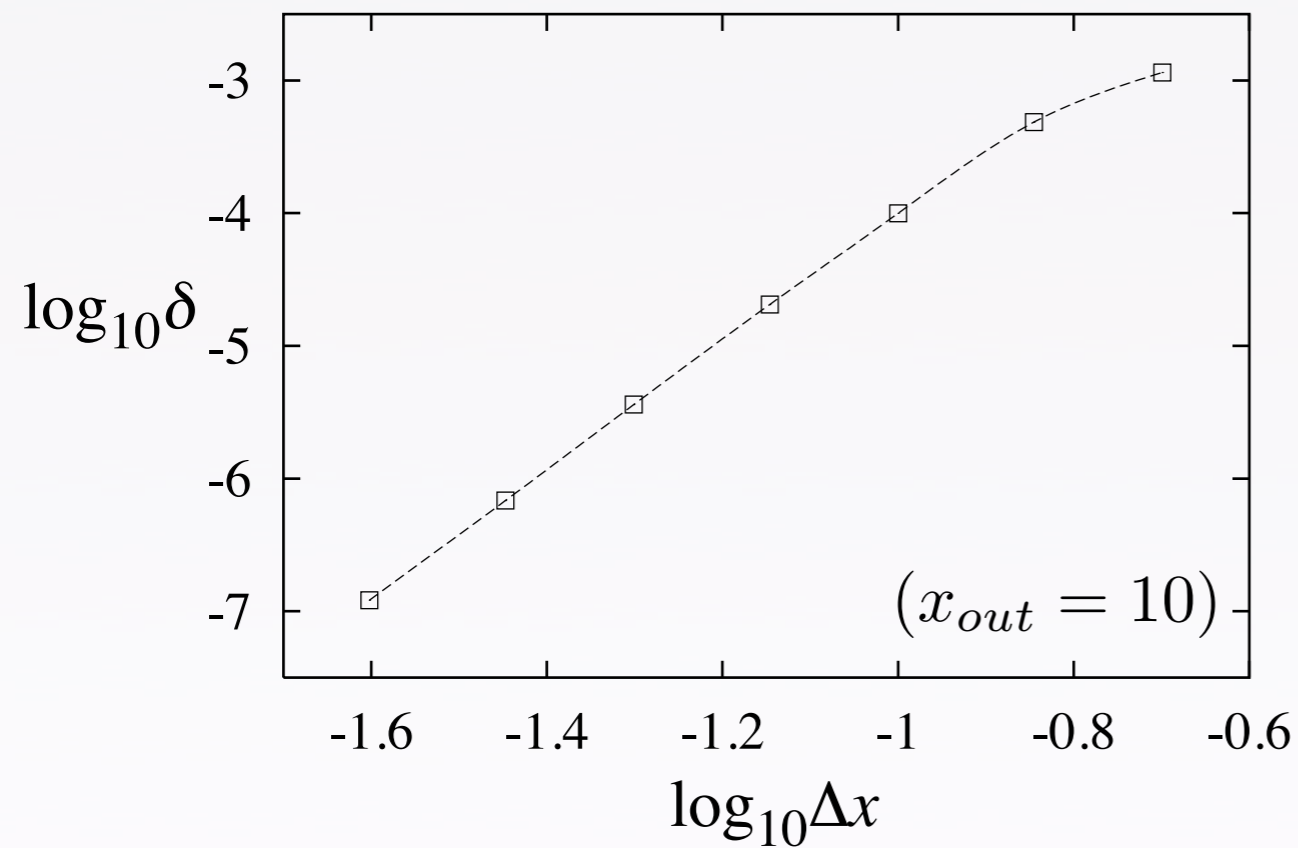
$$\lesssim 10^{-5} \quad \text{for } \Delta x = 0.05$$

$$\sim 10^{-7} \quad \text{for } \Delta x = 0.025$$

BHが小さい極限 (シュバルツシルトBH)

$$\rho/\ell \rightarrow 0$$

$$T_0 = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}; \quad R_0 = C_0 = \log \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right)$$



● グリッド誤差

$$\lesssim 10^{-5} \text{ for } \Delta x = 0.05$$

$$\sim 10^{-7} \text{ for } \Delta x = 0.025$$

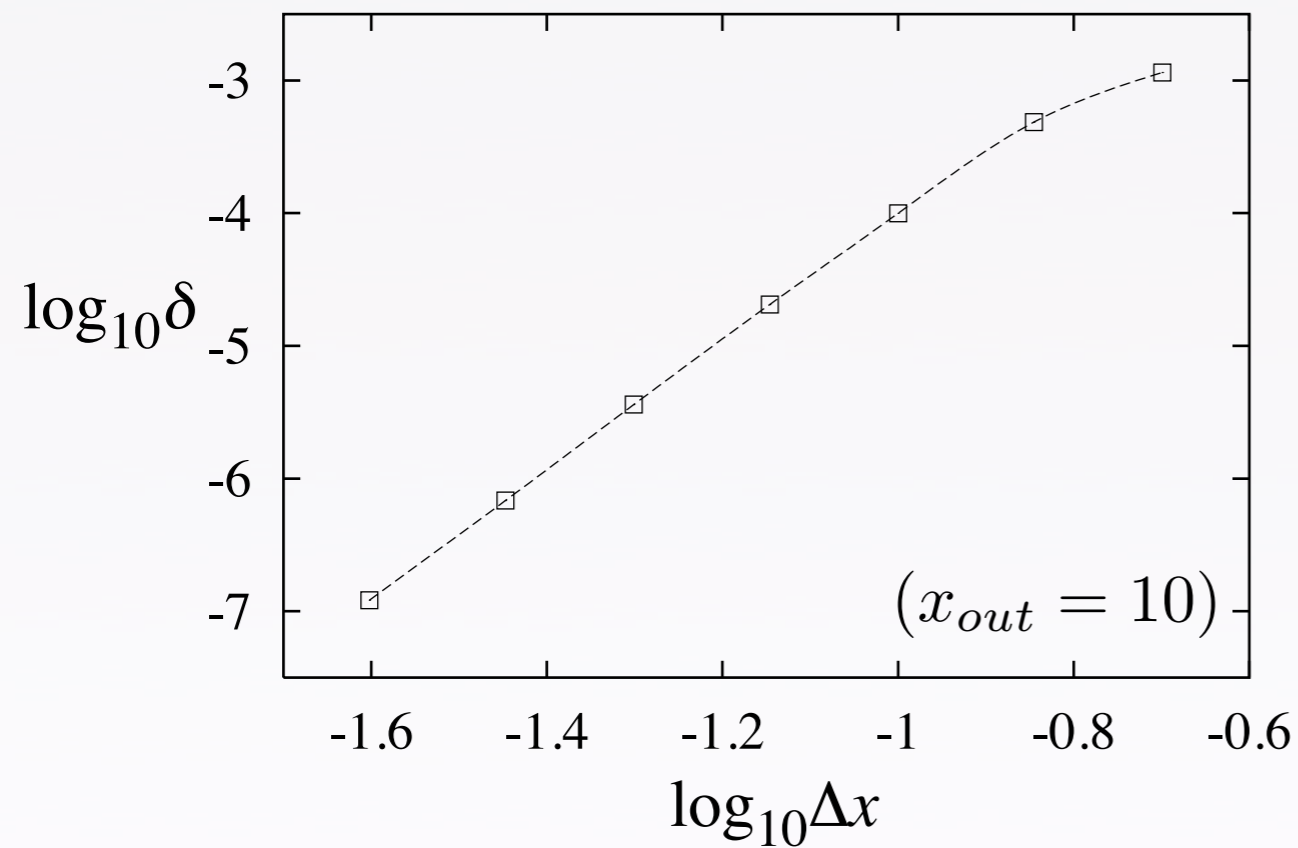
● 収束誤差 $\sim 10^{-6}$

● 境界誤差

BHが小さい極限 (シュバルツシルトBH)

$$\rho/\ell \rightarrow 0$$

$$T_0 = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}; \quad R_0 = C_0 = \log \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right)$$



● 体系的な誤差

● グリッド誤差

$$\lesssim 10^{-5} \text{ for } \Delta x = 0.05$$

$$\sim 10^{-7} \text{ for } \Delta x = 0.025$$

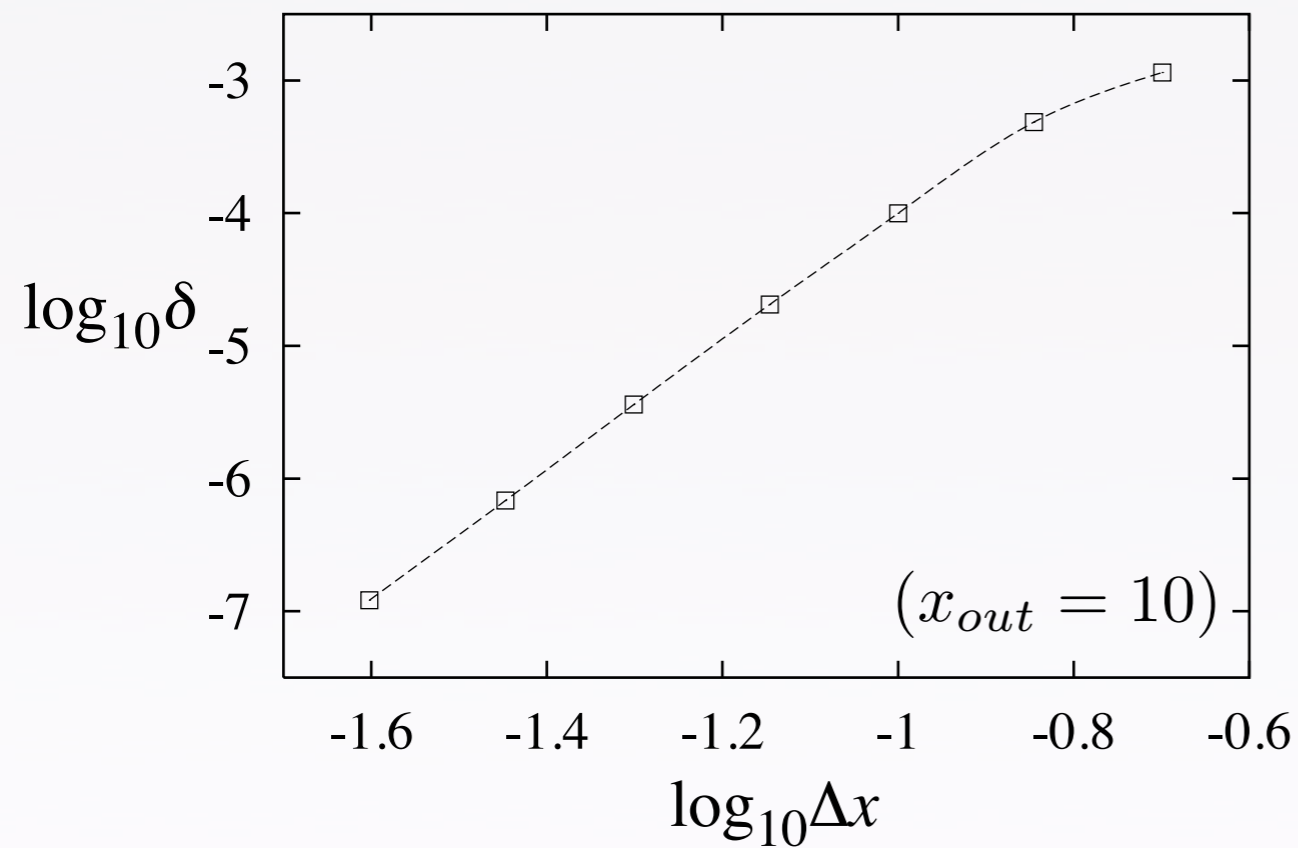
● 収束誤差 $\sim 10^{-6}$

● 境界誤差

BHが小さい極限 (シュバルツシルトBH)

$$\rho/\ell \rightarrow 0$$

$$T_0 = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1}; \quad R_0 = C_0 = \log \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right)$$



● 体系的な誤差

● グリッド誤差

$$\lesssim 10^{-5} \text{ for } \Delta x = 0.05$$

$$\sim 10^{-7} \text{ for } \Delta x = 0.025$$

● 収束誤差 $\sim 10^{-6}$

● 境界誤差

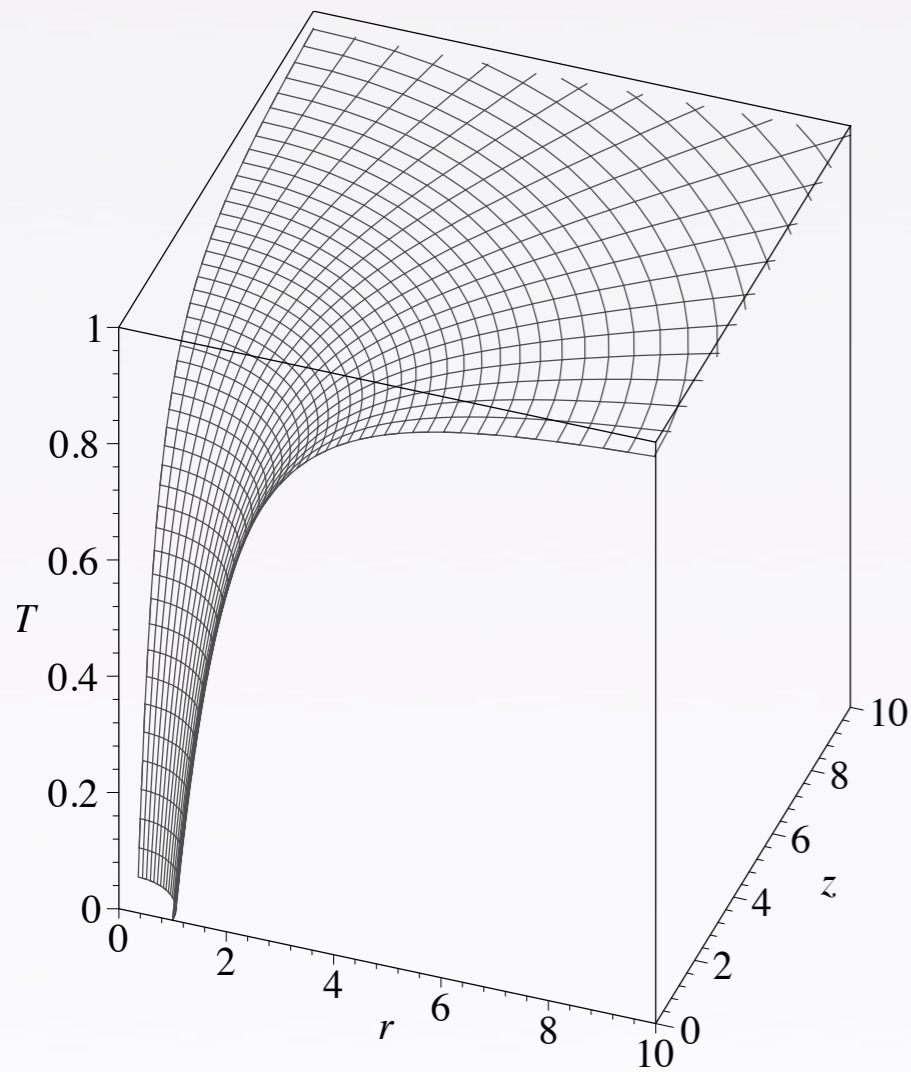
● 体系的でない誤差

目次

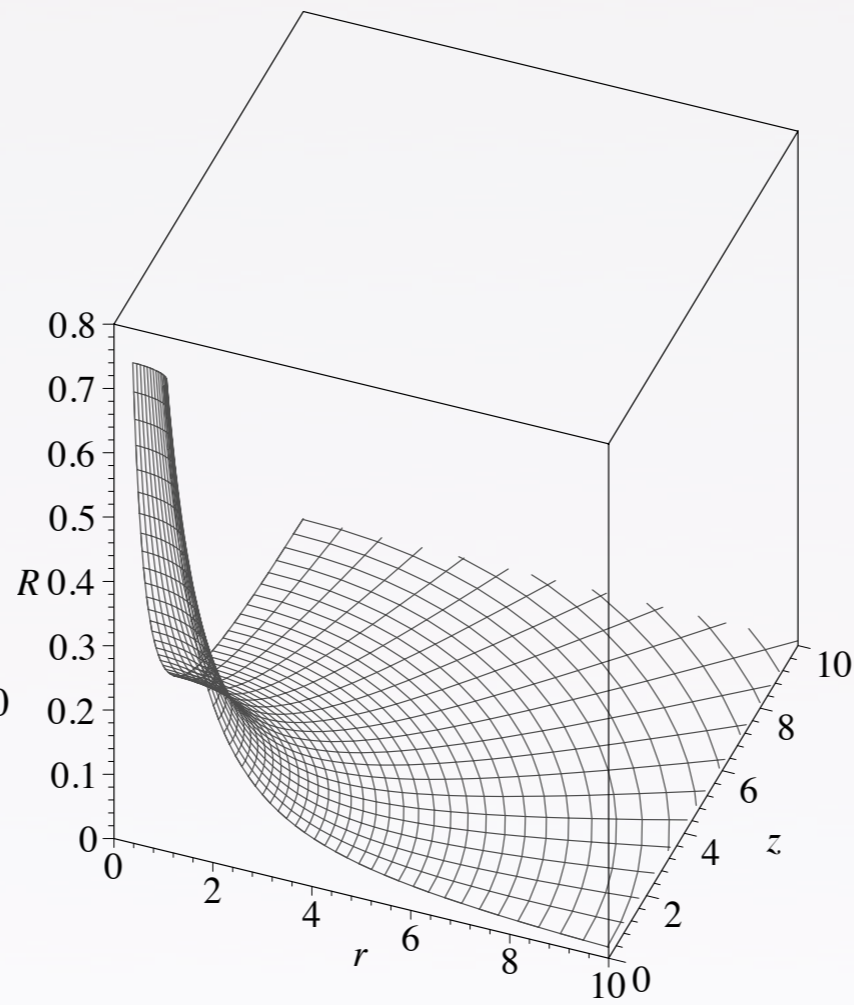
- 📍 導入
- 📍 問題設定
- 📍 コード
- 📍 **結果**
- 📍 まとめと議論

例 (L=50.0)

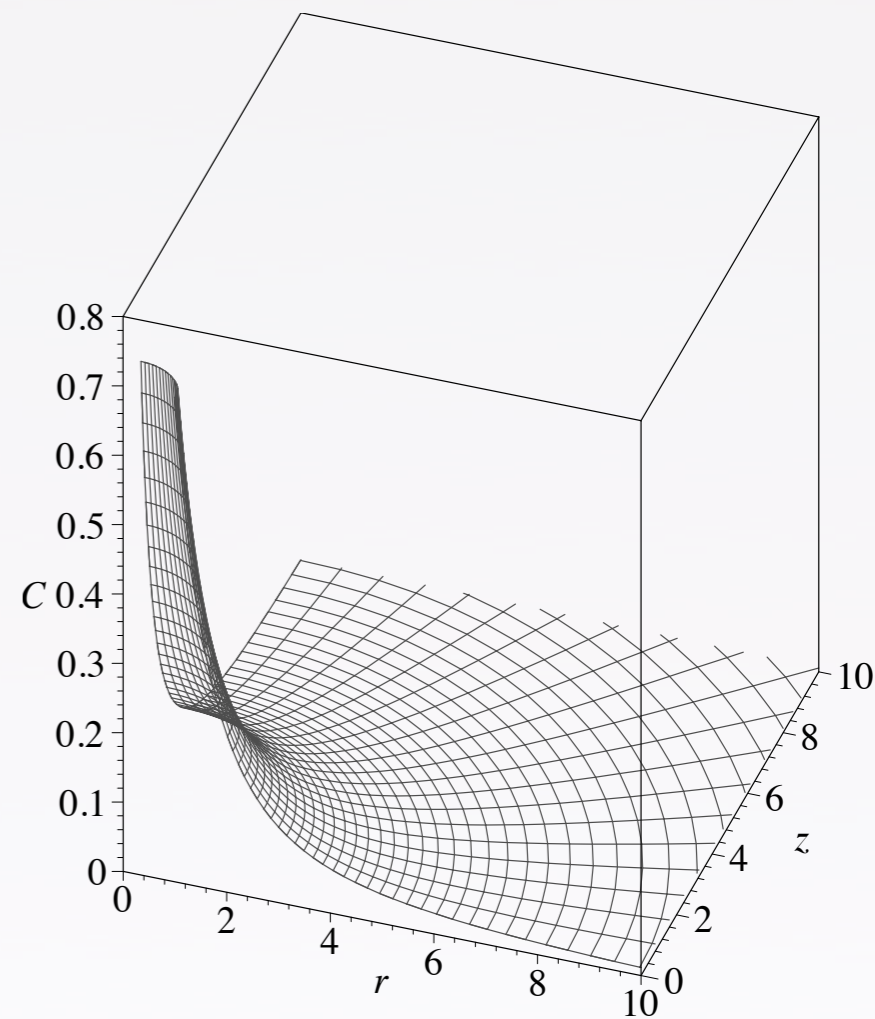
 T



 R

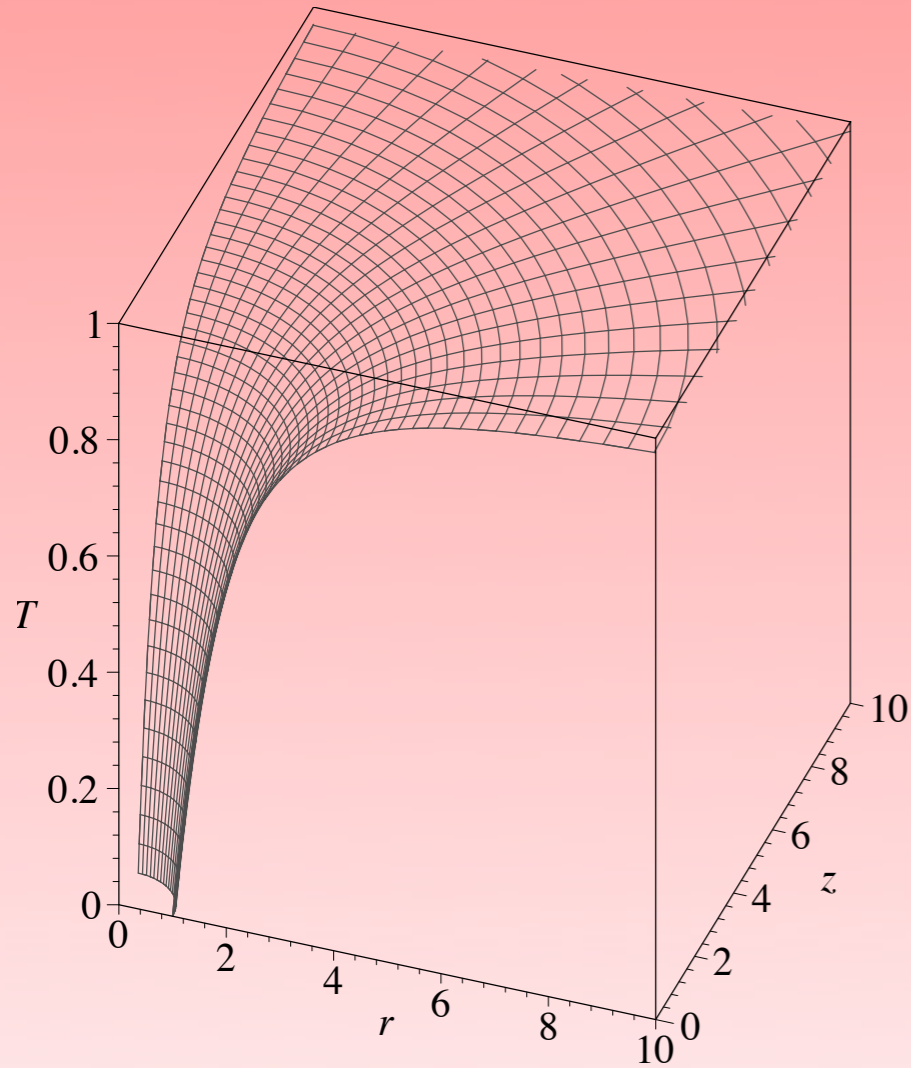


 C

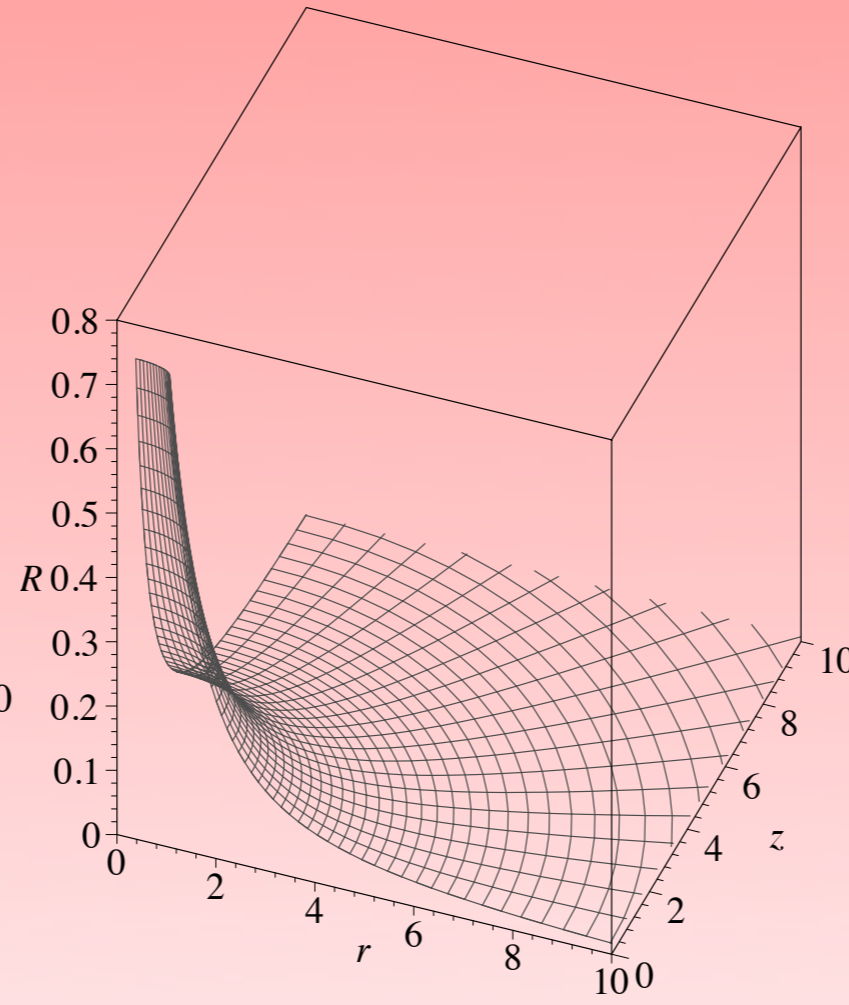


例 (L=50.0)

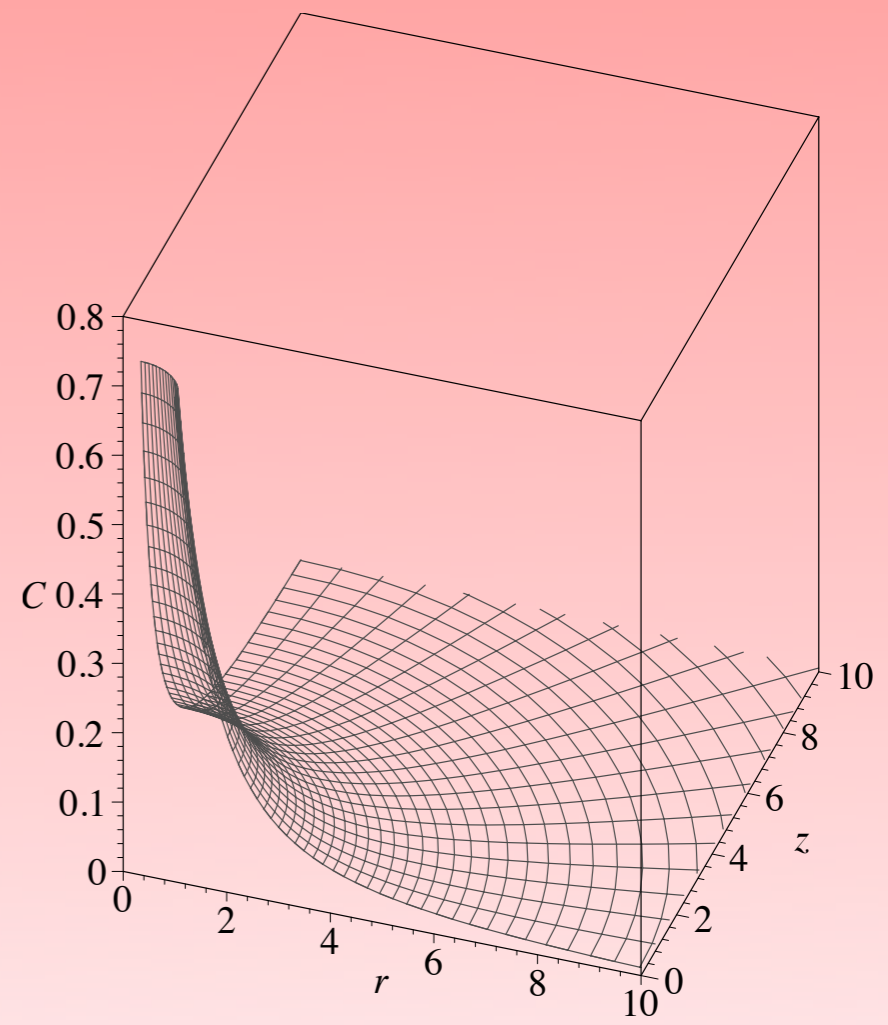
 T



 R

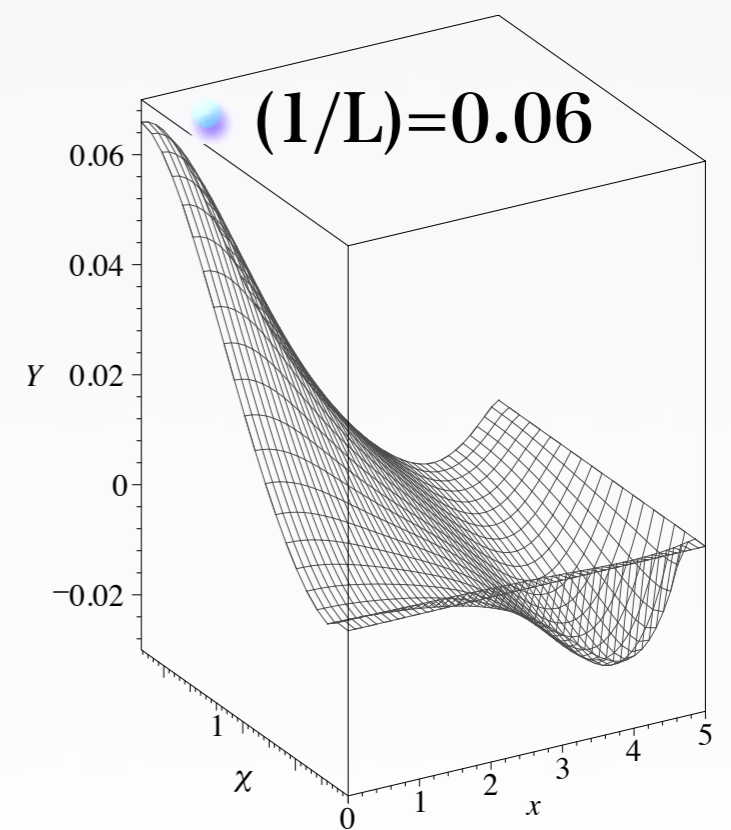
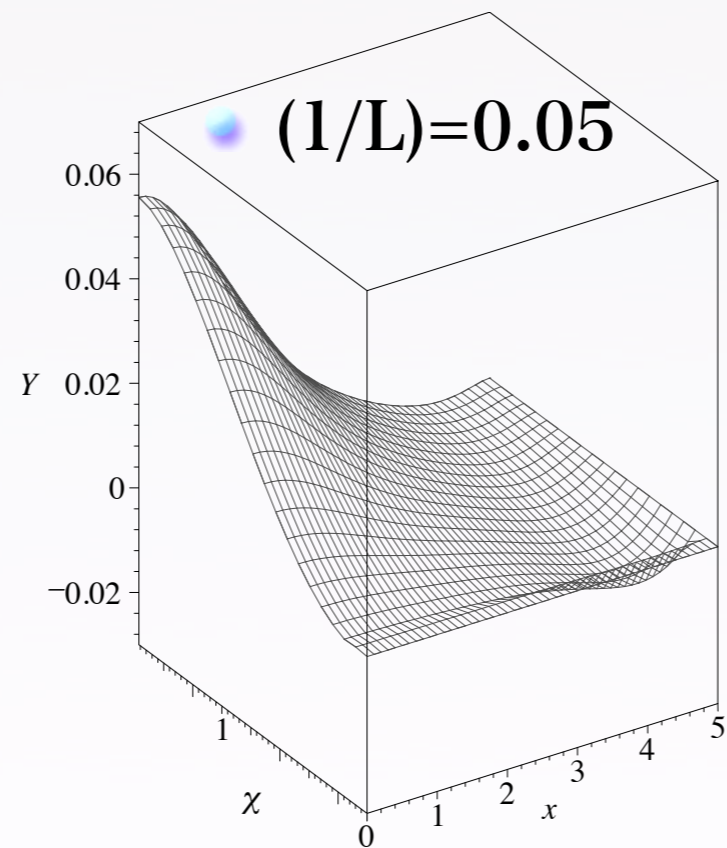
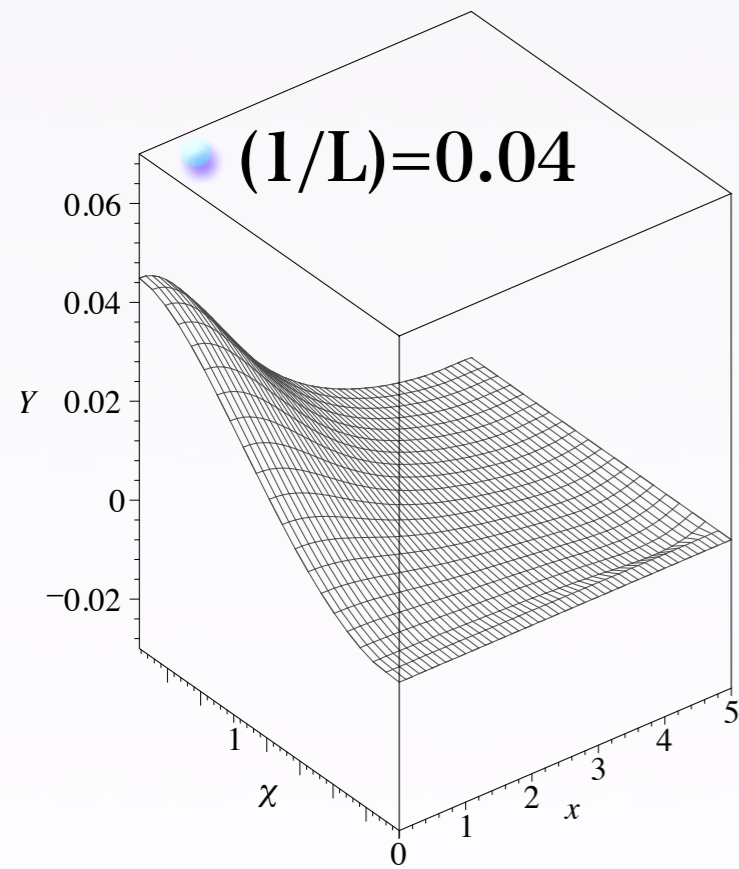
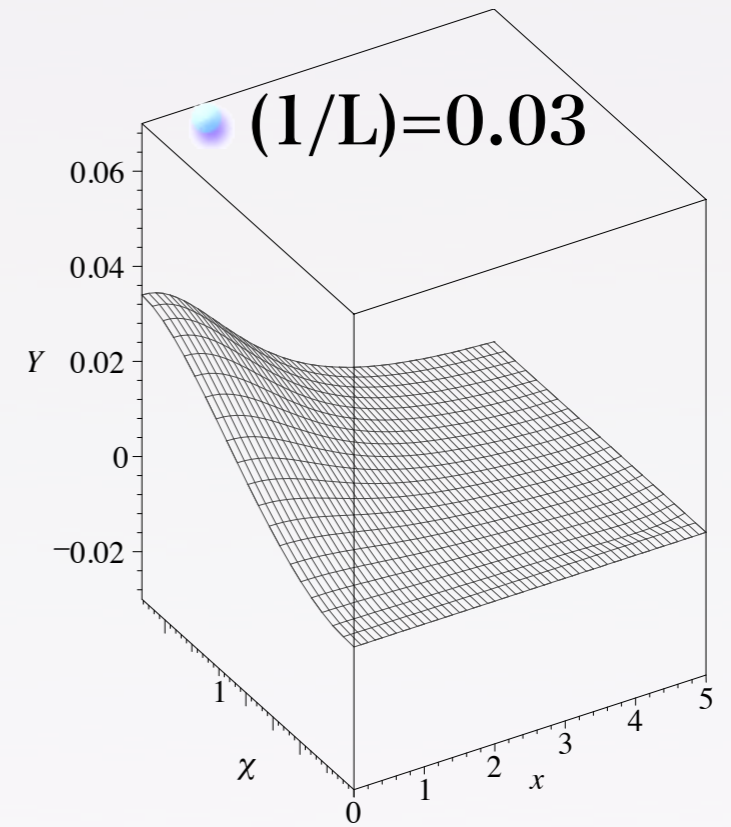
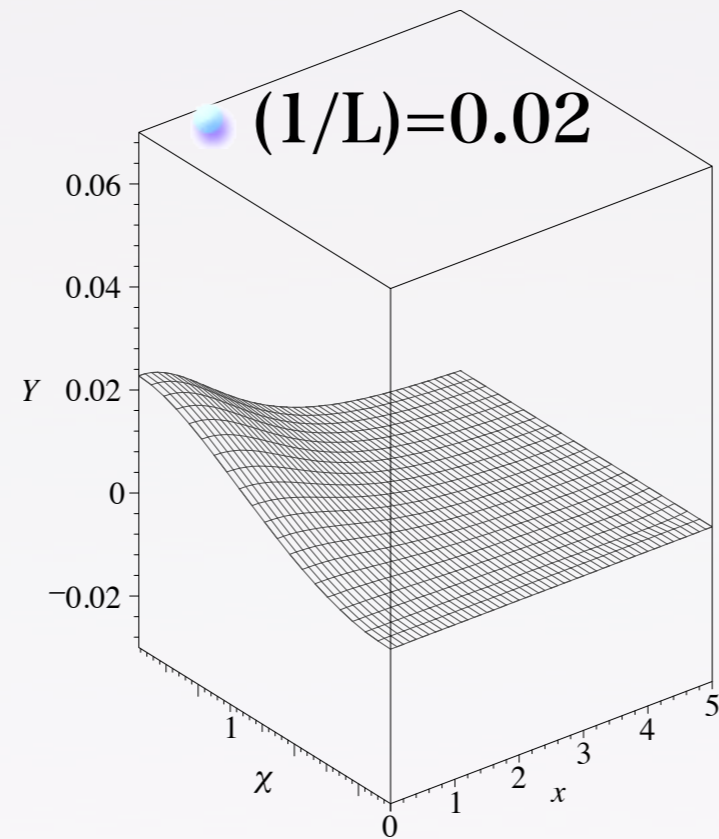
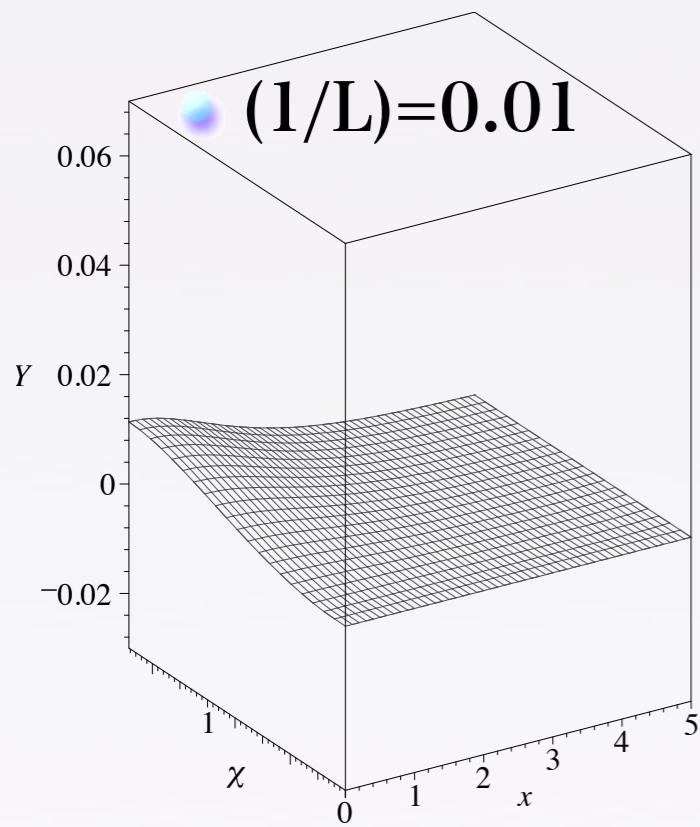


 C



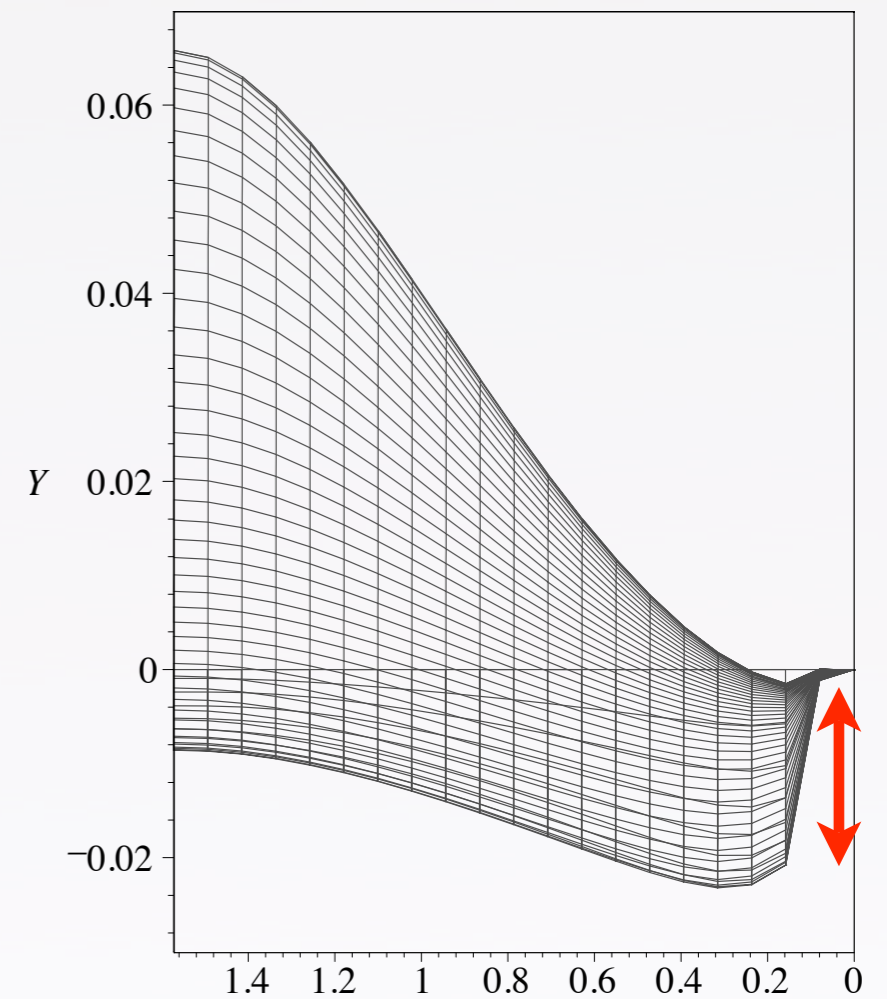
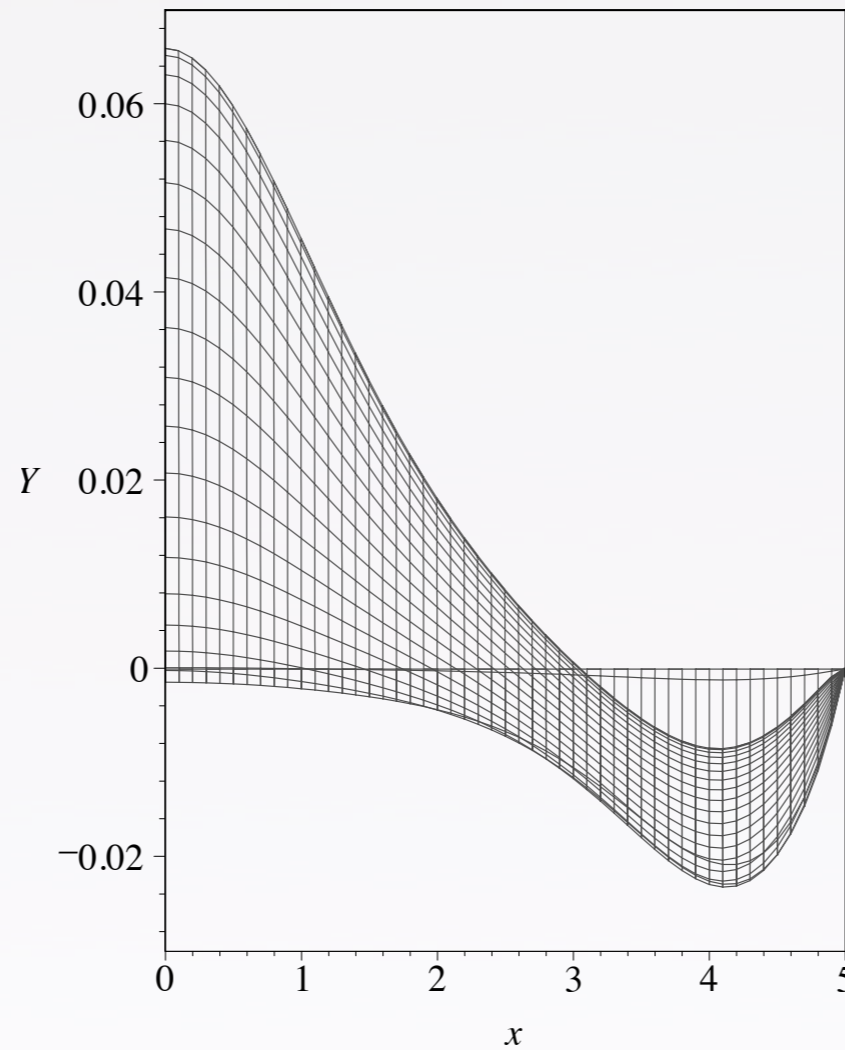
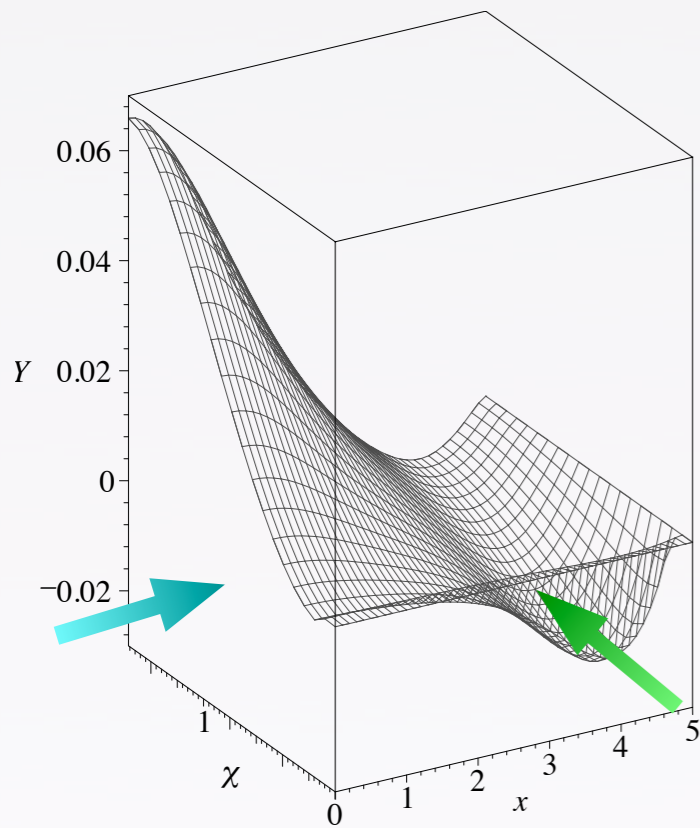
しかし問題があります

数值計算結果 ($Y := R - C$)



数値計算結果 (1/L=0.06)

● (1/L)=0.06

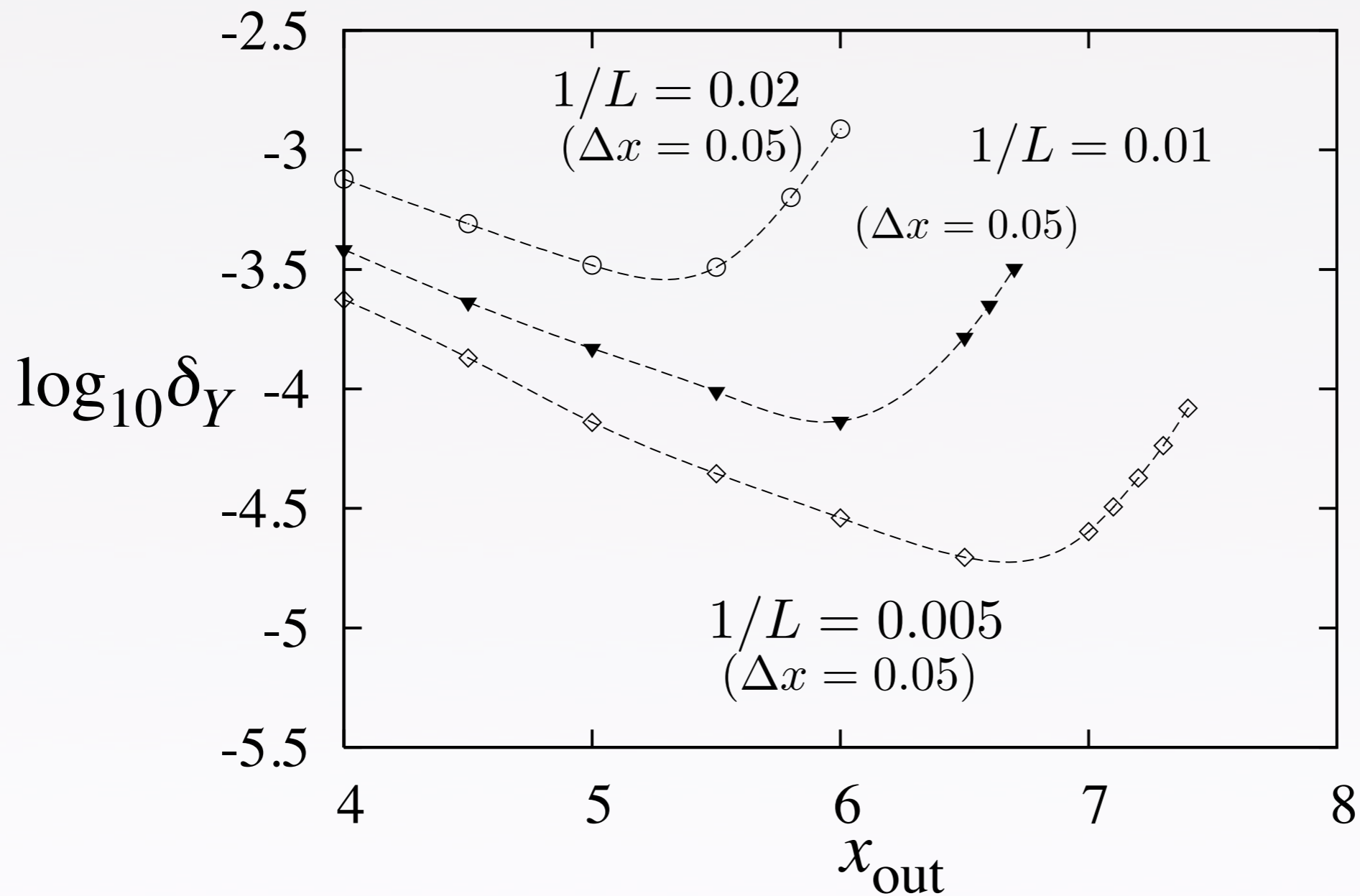


$$\delta_Y := \max_{\chi} |Y(2\Delta\chi) - Y_{ep}|$$

- Y が減衰しない
- $\chi = \Delta\chi$ と $2\Delta\chi$ の値の間に不自然なジャンプがある。

Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)

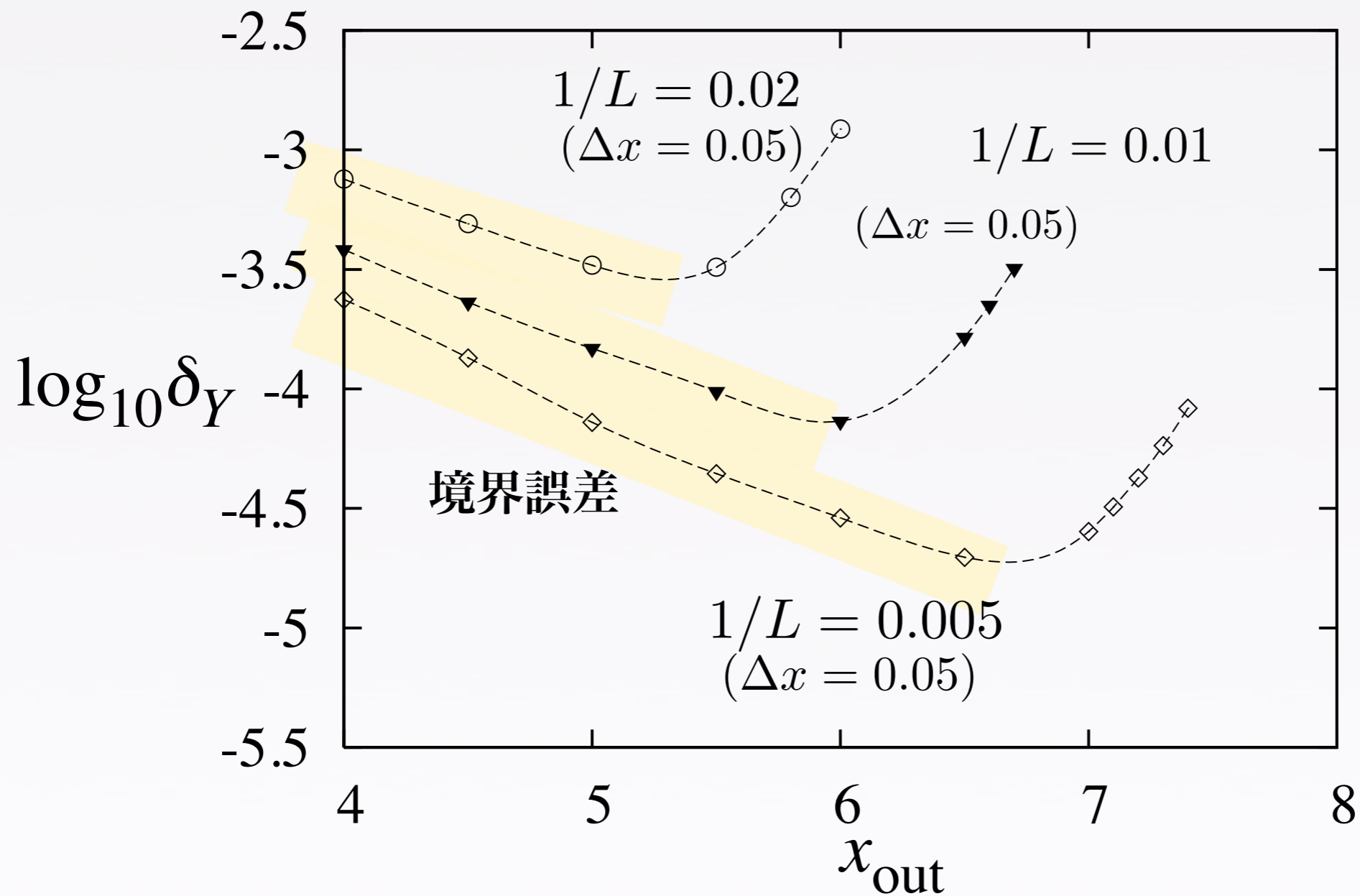
$$\delta_Y := \max |Y(2\Delta\chi) - Y_{\text{ep}}|$$



- 外側の境界の位置 x_{out} を遠くに移動したときに、解が収束しない。

Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)

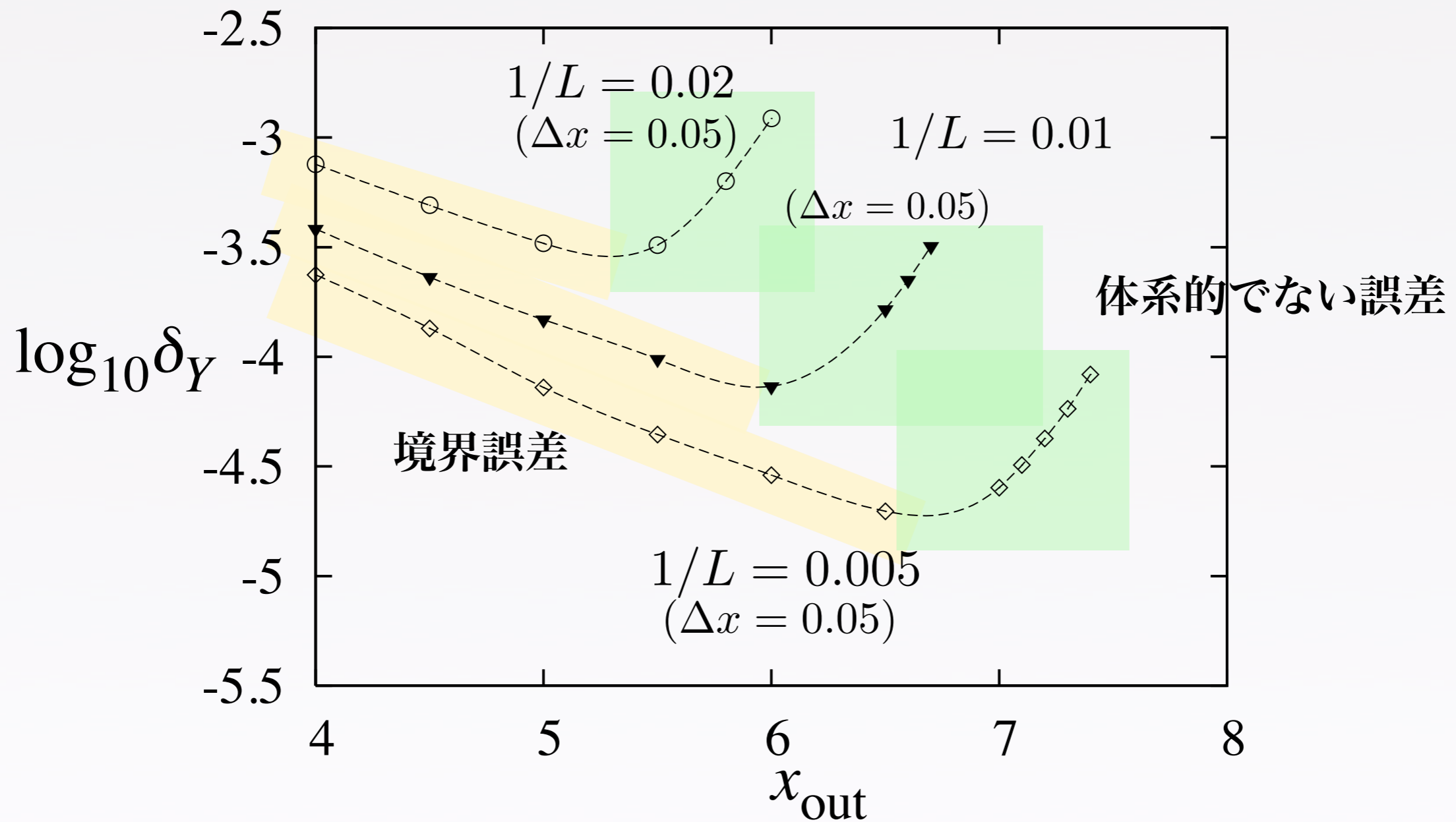
$$\delta_Y := \max |Y(2\Delta\chi) - Y_{\text{ep}}|$$



- 外側の境界の位置 x_{out} を遠くに移動したときに、解が収束しない。

Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)

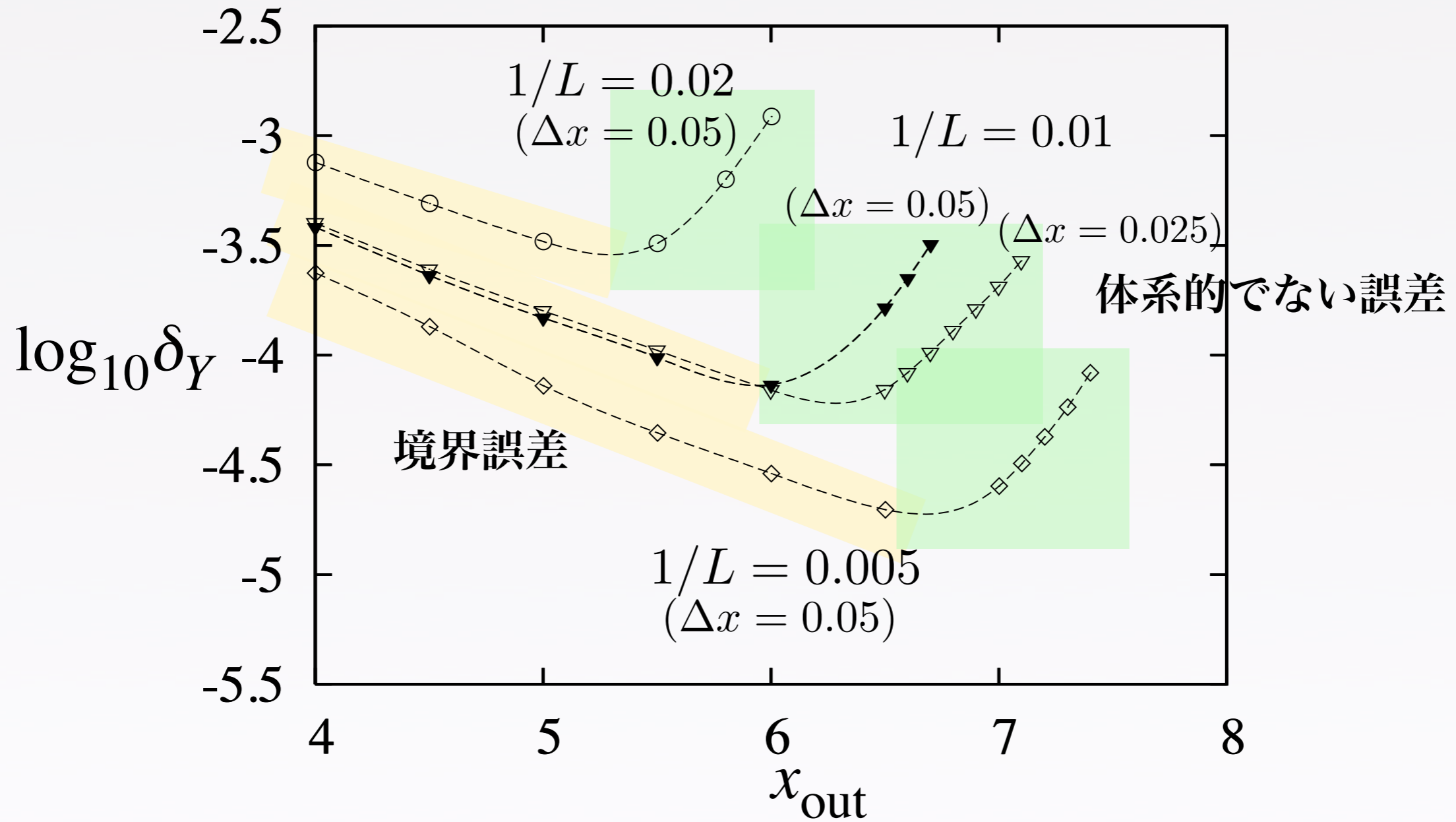
$$\delta_Y := \max |Y(2\Delta\chi) - Y_{ep}|$$



- 外側の境界の位置 x_{out} を遠くに移動したときに、解が収束しない。

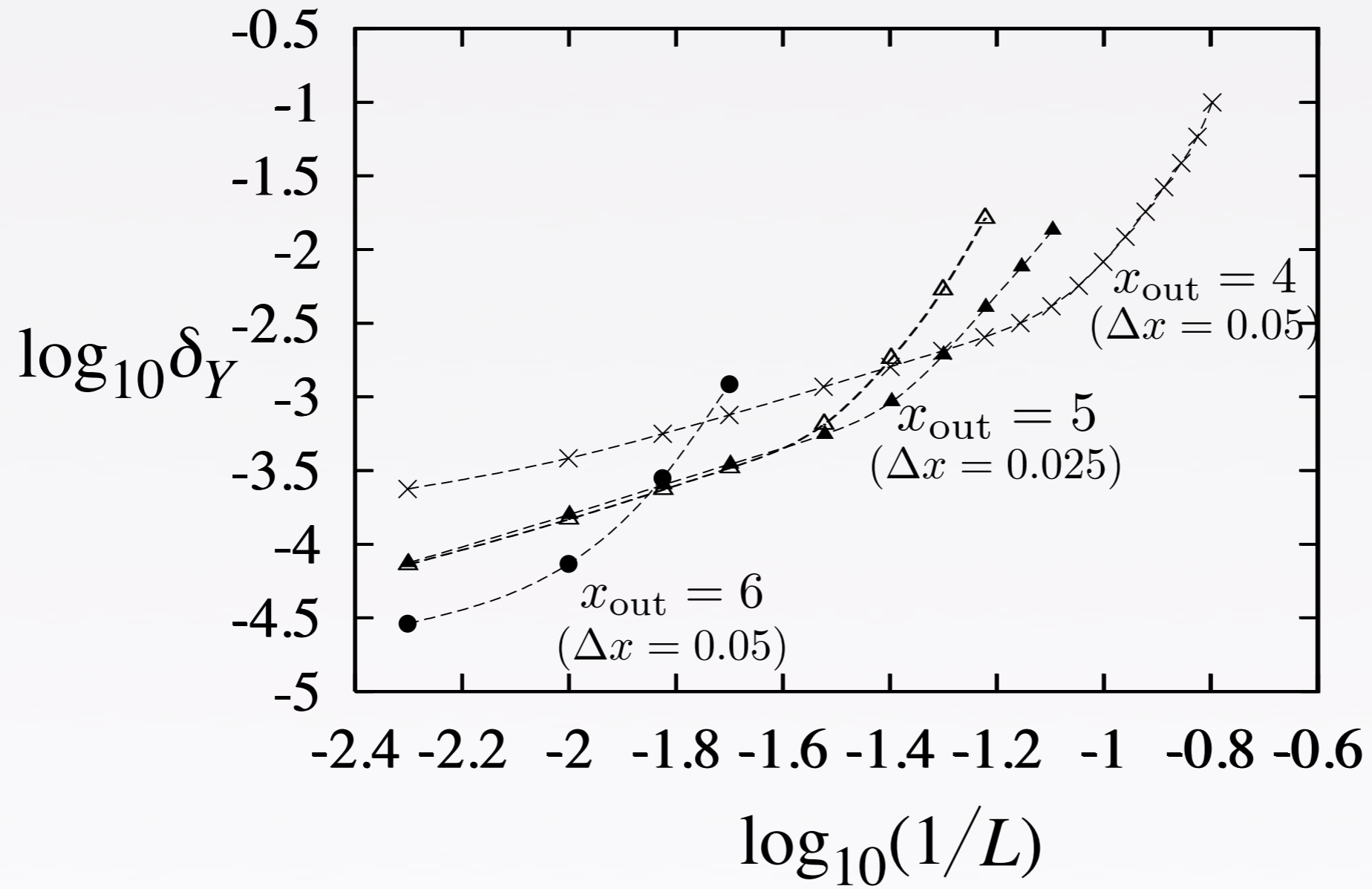
Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)

$$\delta_Y := \max |Y(2\Delta\chi) - Y_{\text{ep}}|$$

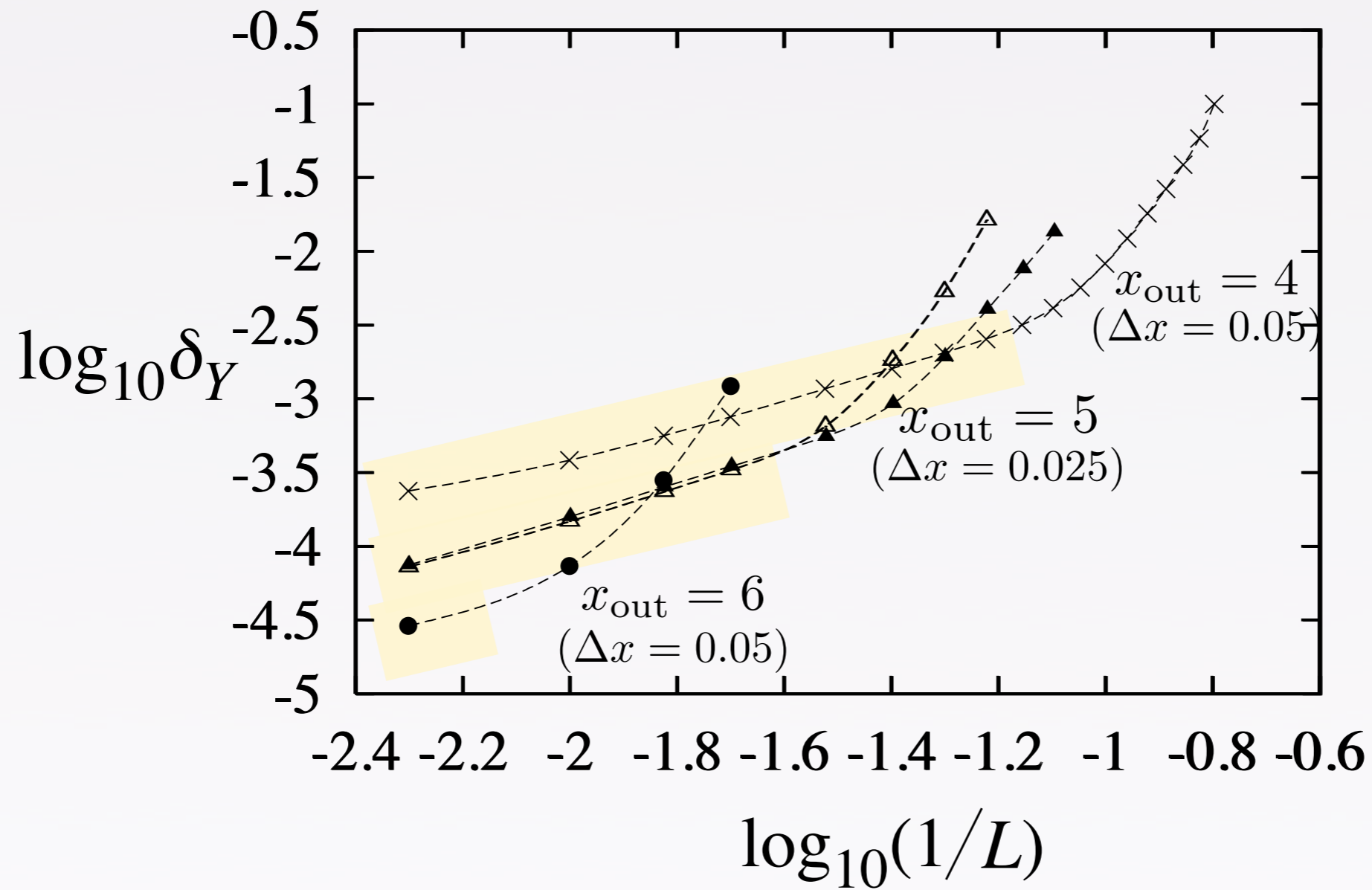


- 外側の境界の位置 x_{out} を遠くに移動したときに、解が収束しない。

Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)

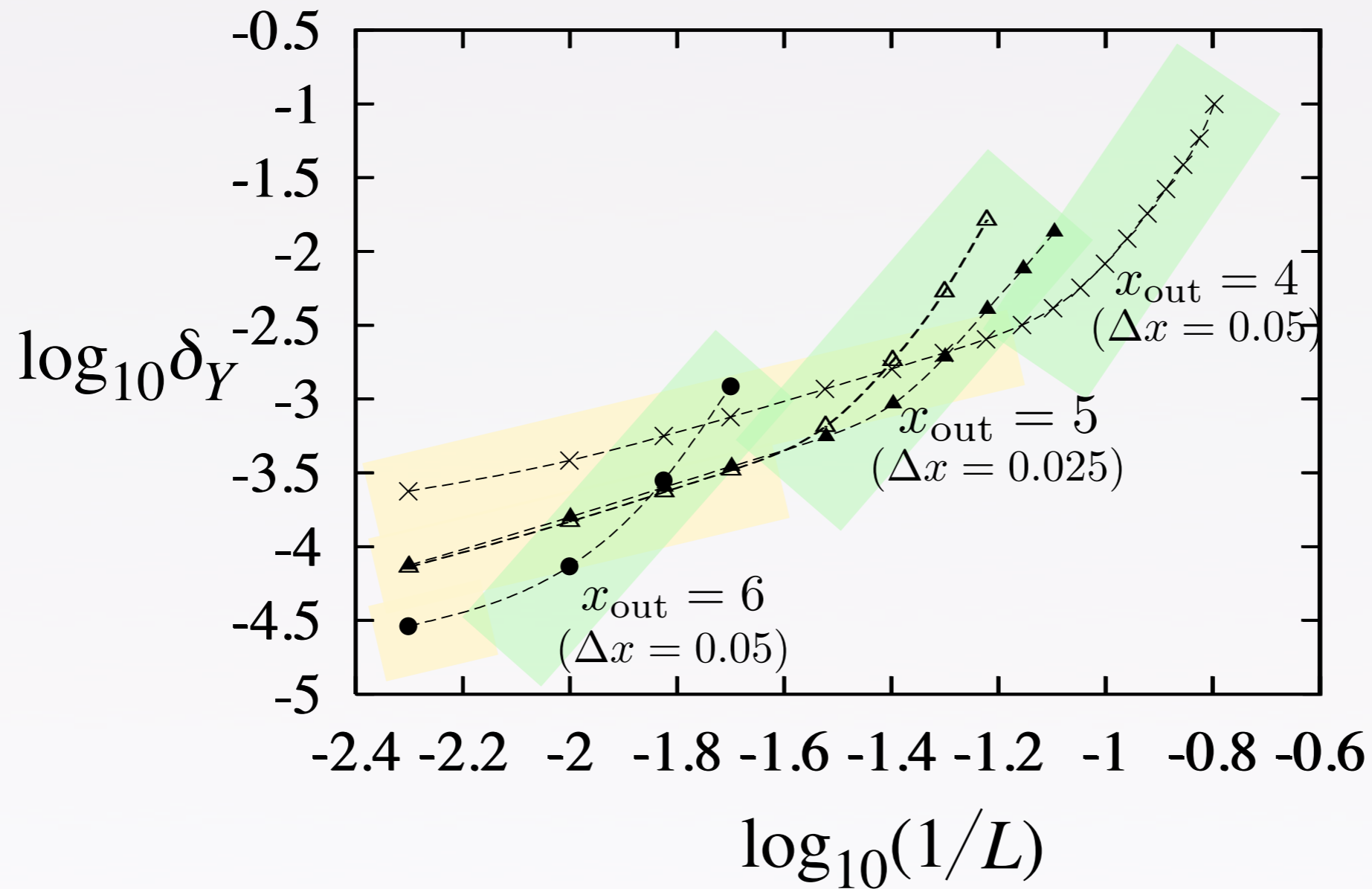


Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)



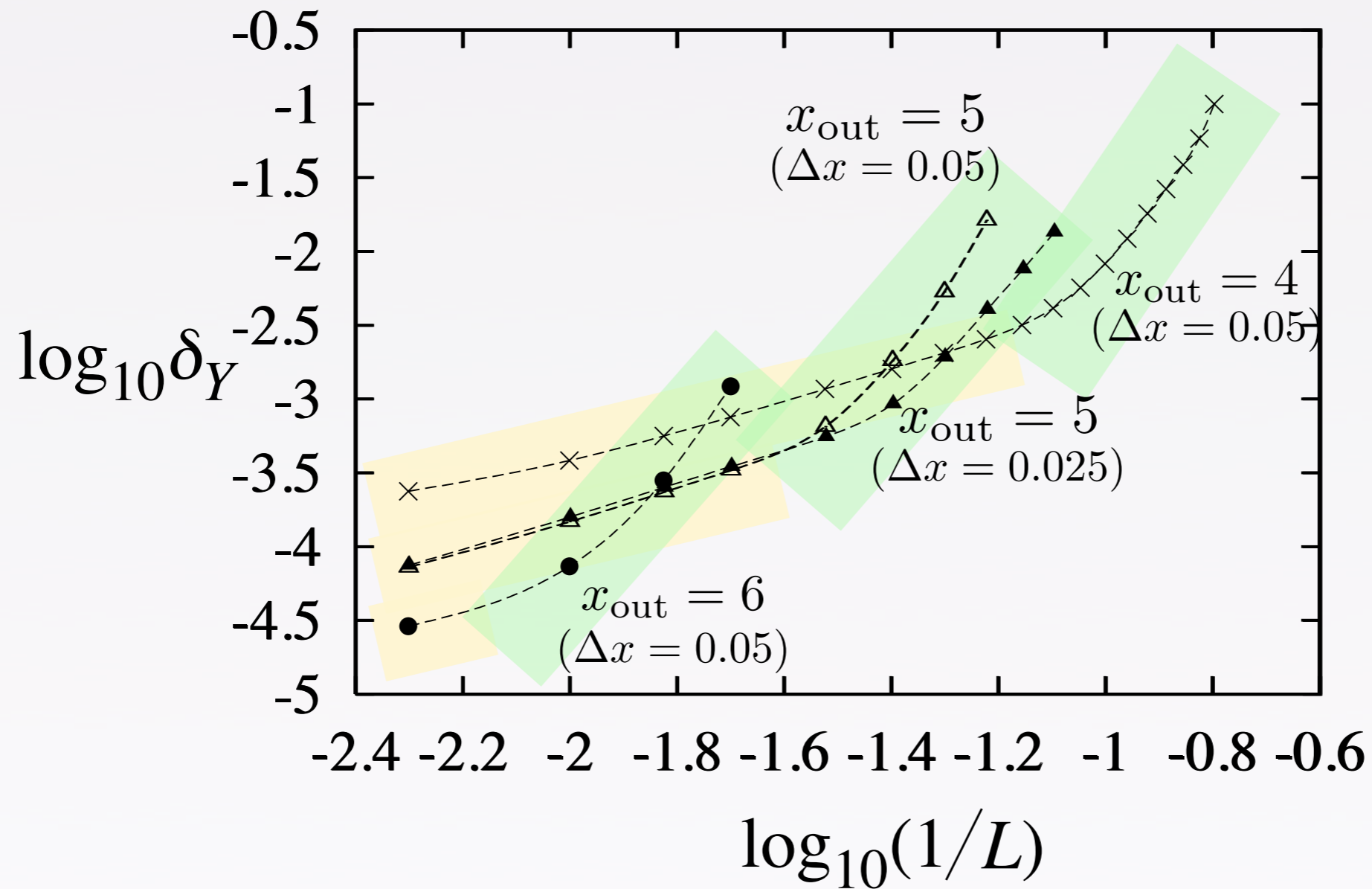
● $\rho_{\text{out}} < 4L$ では境界誤差。

Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)



- $\rho_{\text{out}} < 4L$ では境界誤差。
- $\rho_{\text{out}} > 4L$ では体系的でない誤差。

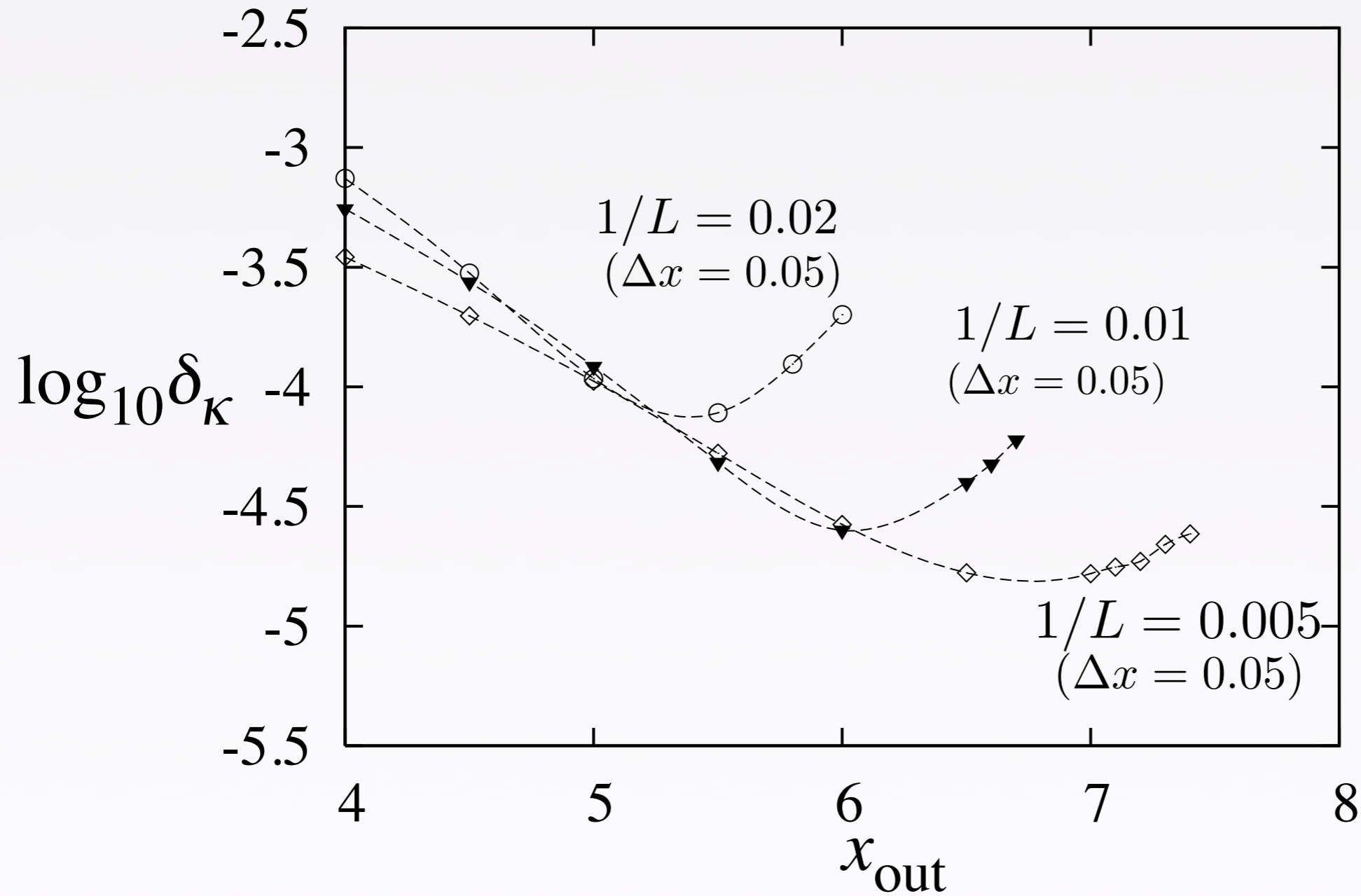
Y の誤差 (変なジャンプの大きさ)



- $\rho_{\text{out}} < 4L$ では境界誤差。
- $\rho_{\text{out}} > 4L$ では体系的でない誤差。
- $(1/L)$ を増やすと, 体系的でない誤差は非線形に増大する。
 $\sim (1/L)^4?$

表面重力の誤差

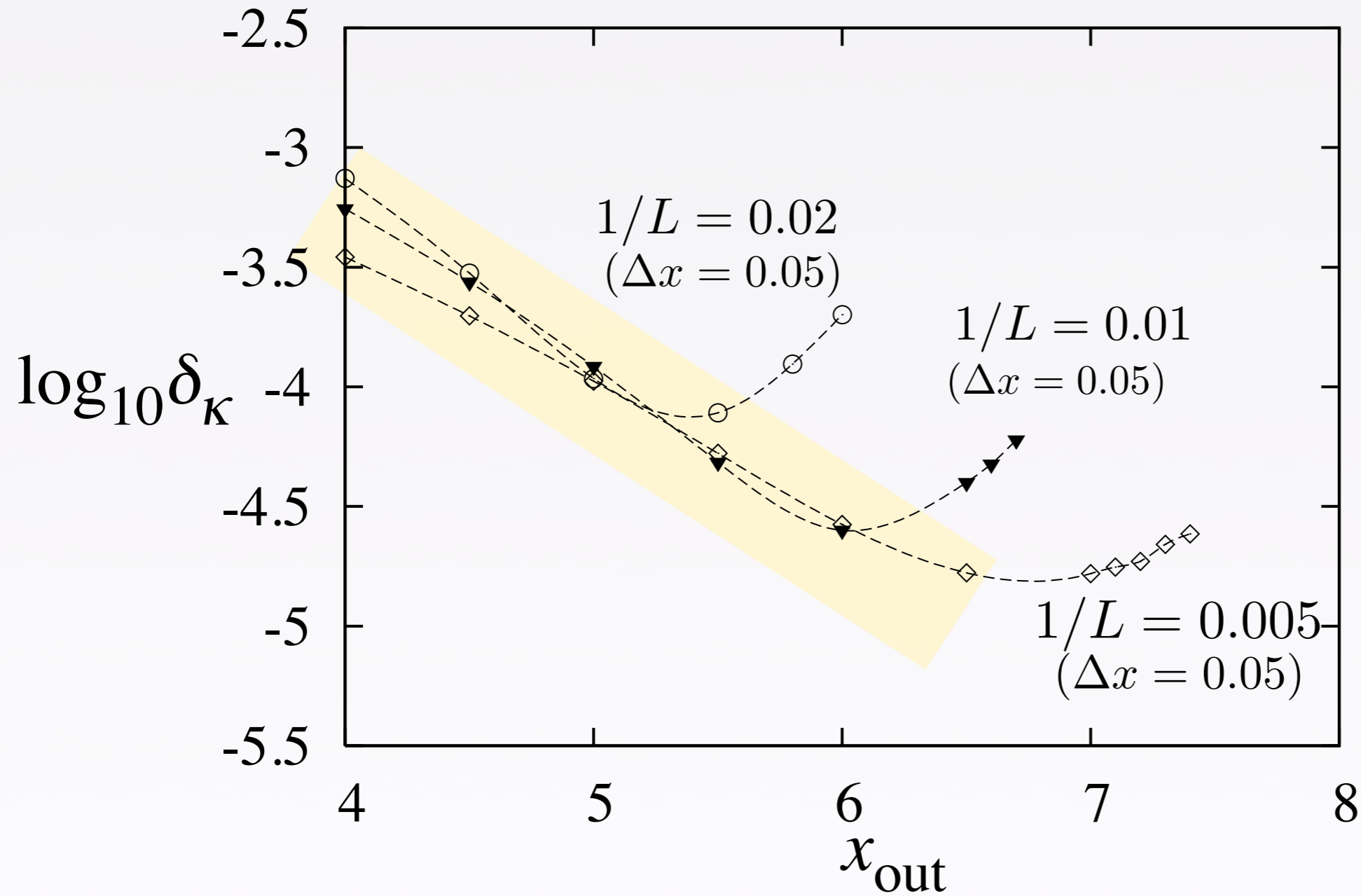
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



● 体系的でない誤差は、表面重力の誤差 δ_{κ} にもあらわれる。

表面重力の誤差

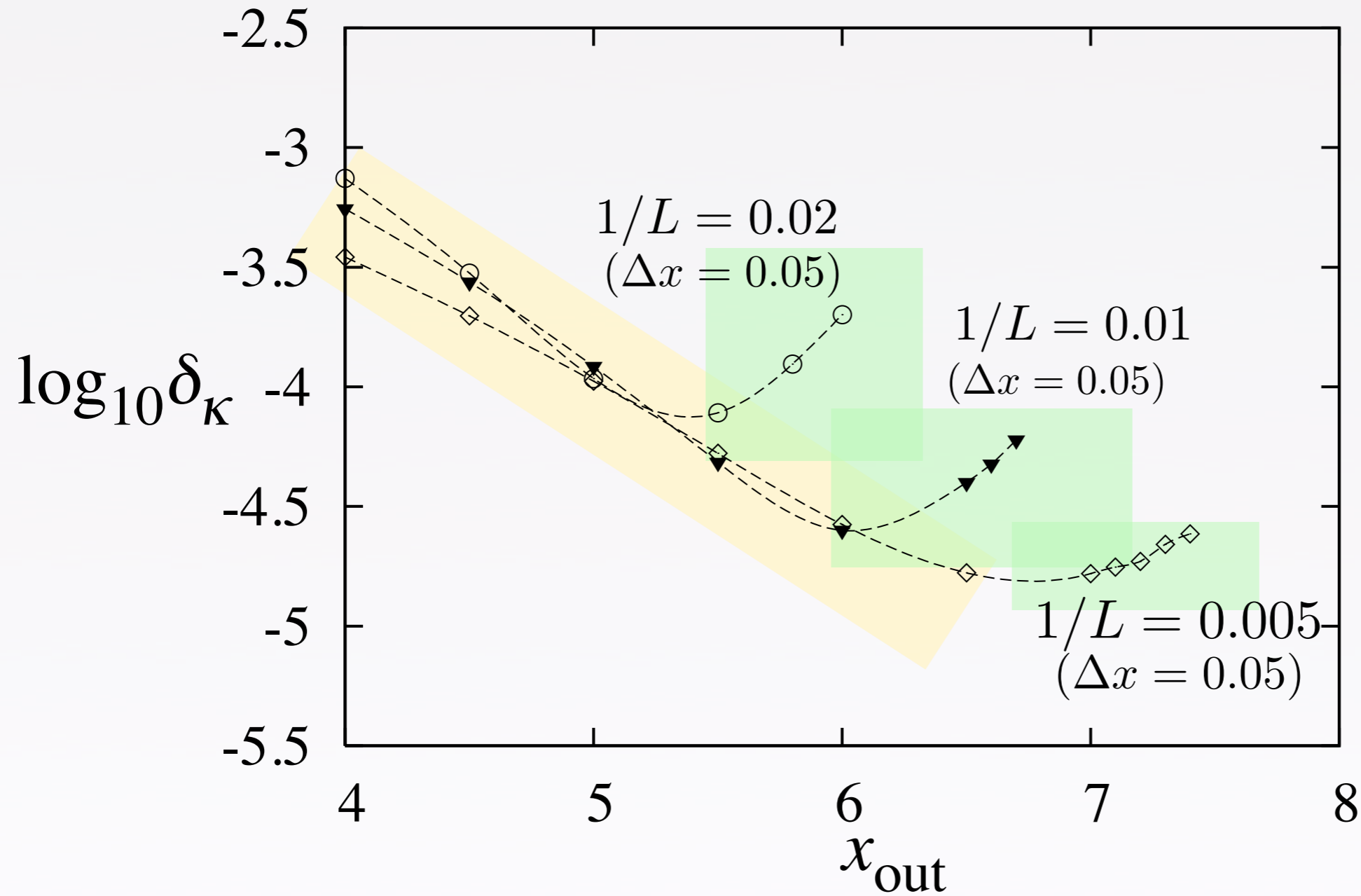
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



- 体系的でない誤差は、表面重力の誤差 δ_{κ} にもあらわれる。

表面重力の誤差

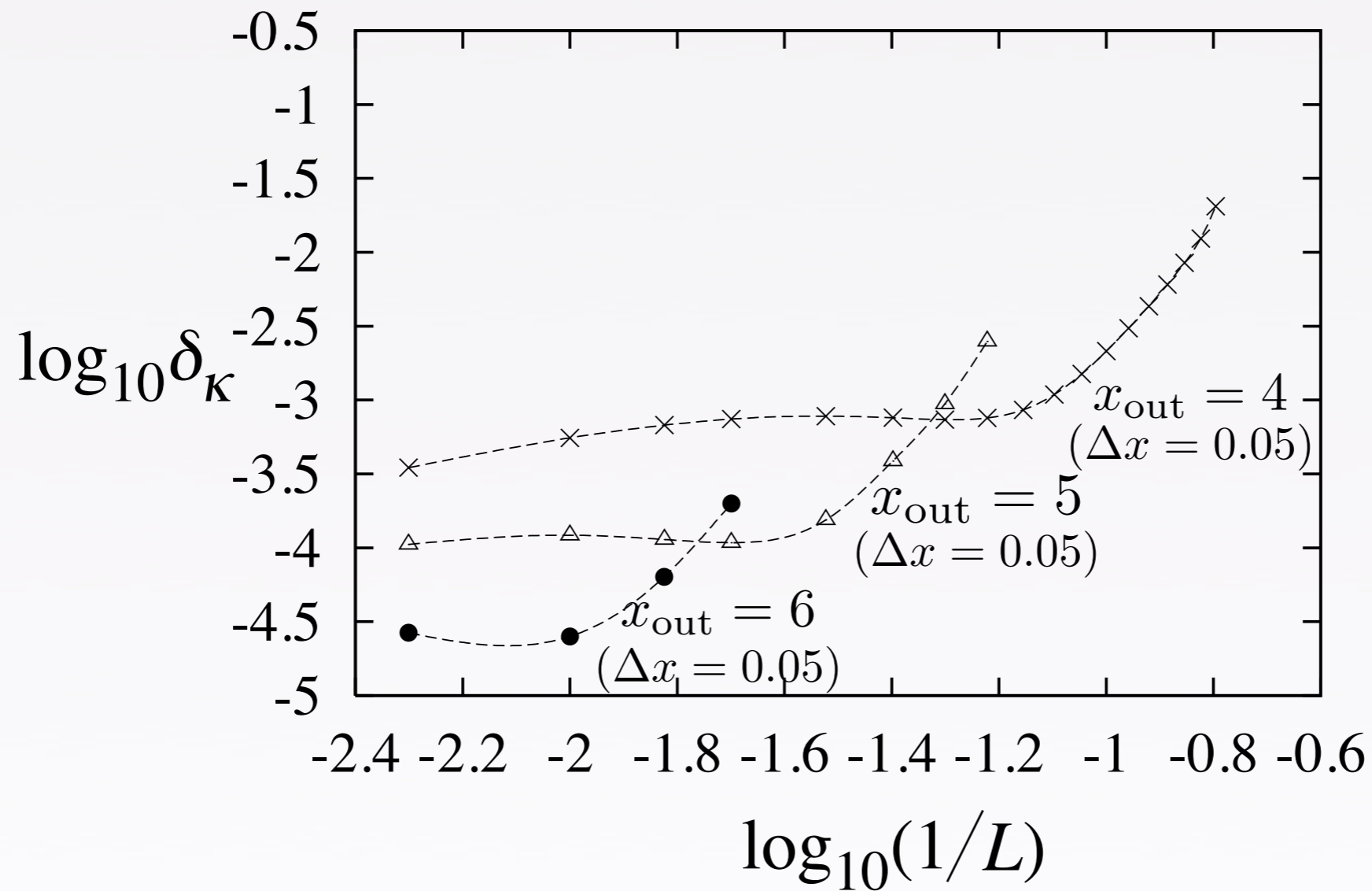
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



- 体系的でない誤差は、表面重力の誤差 δ_{κ} にもあらわれる。

表面重力の誤差

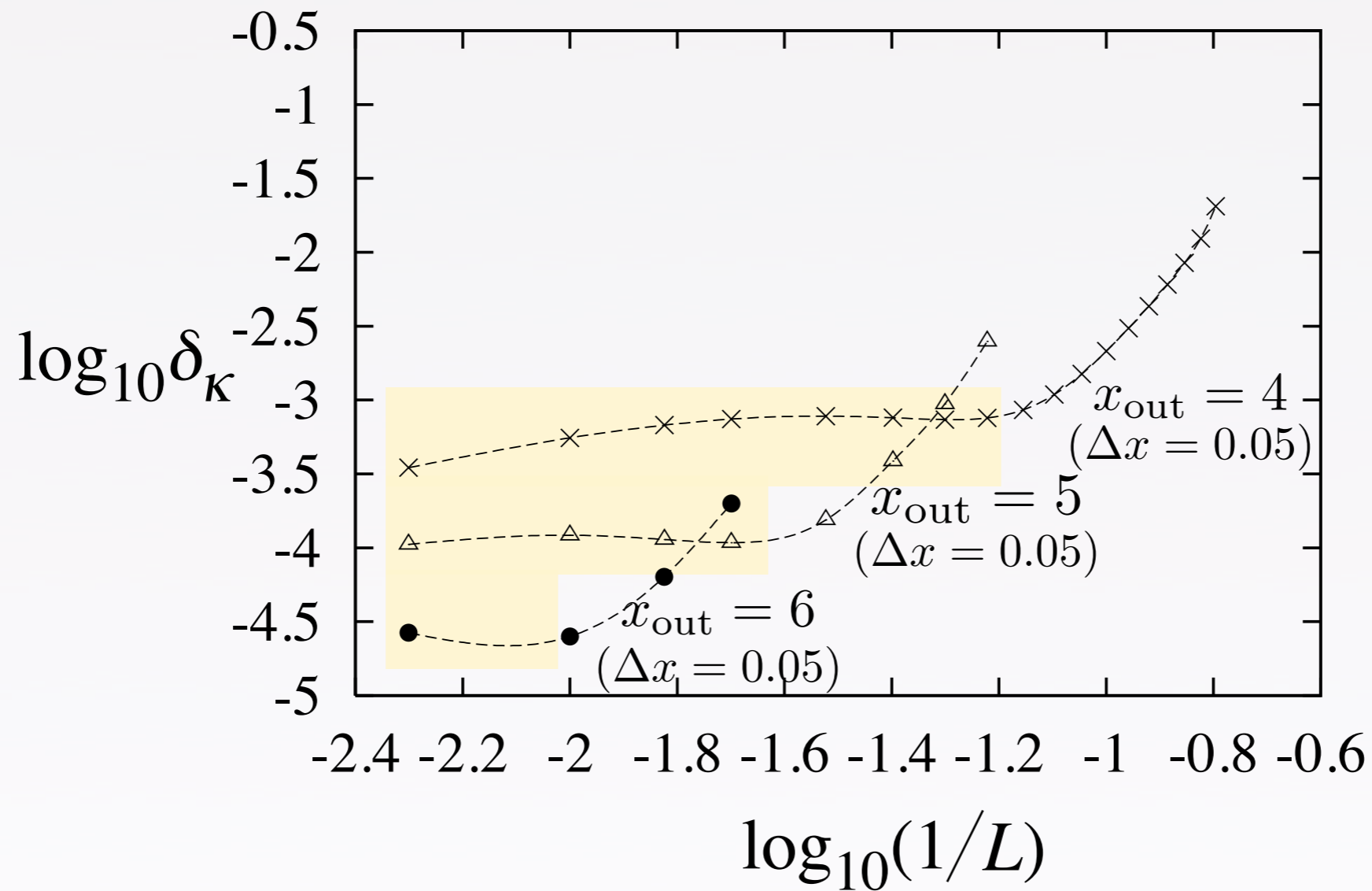
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



- 表面重力の誤差にあらわれる体系的でない誤差も非線形に増大。
 $\sim (1/L)^4?$

表面重力の誤差

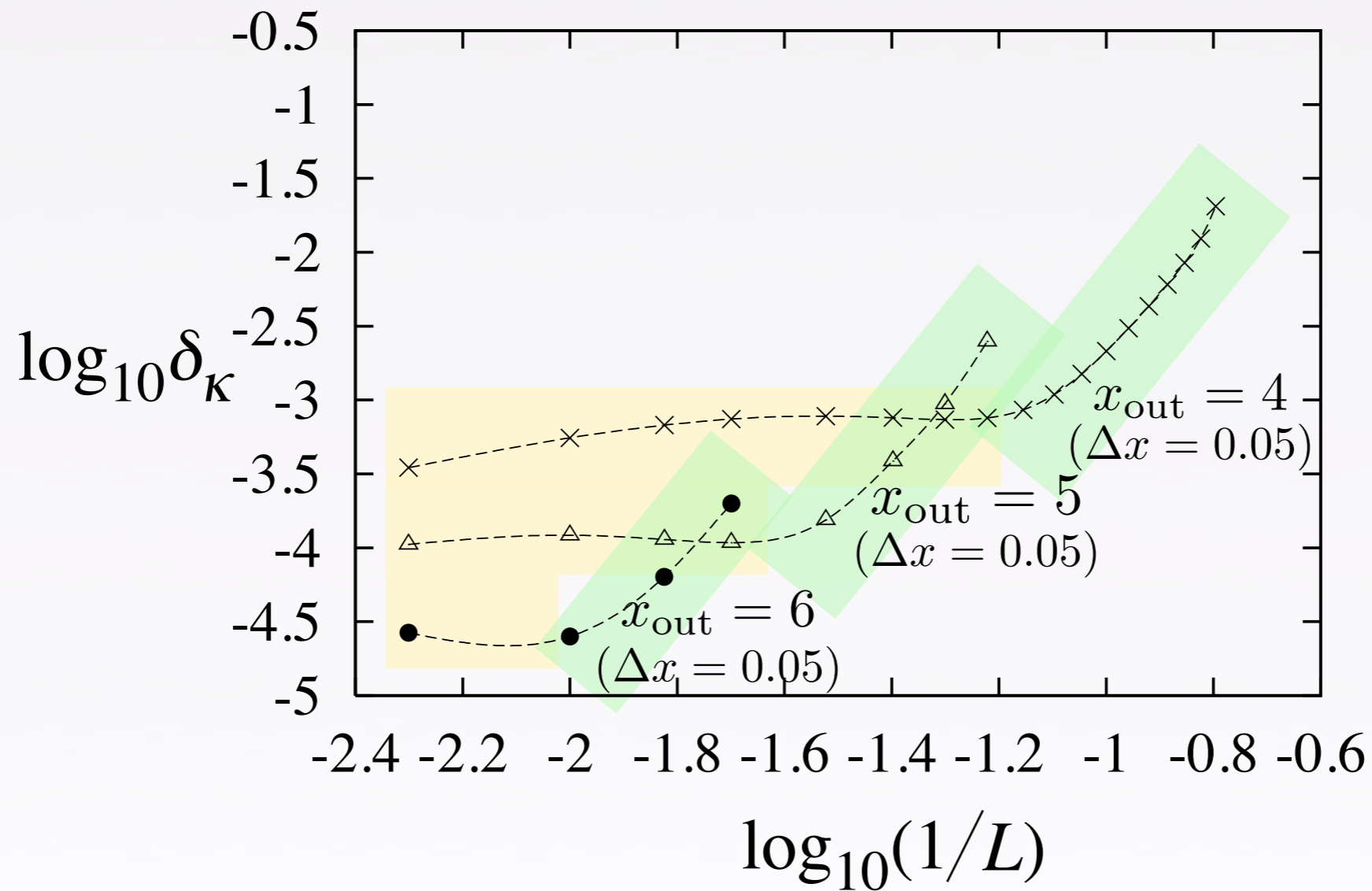
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



- 表面重力の誤差にあらわれる体系的でない誤差も非線形に増大。
 $\sim (1/L)^4?$

表面重力の誤差

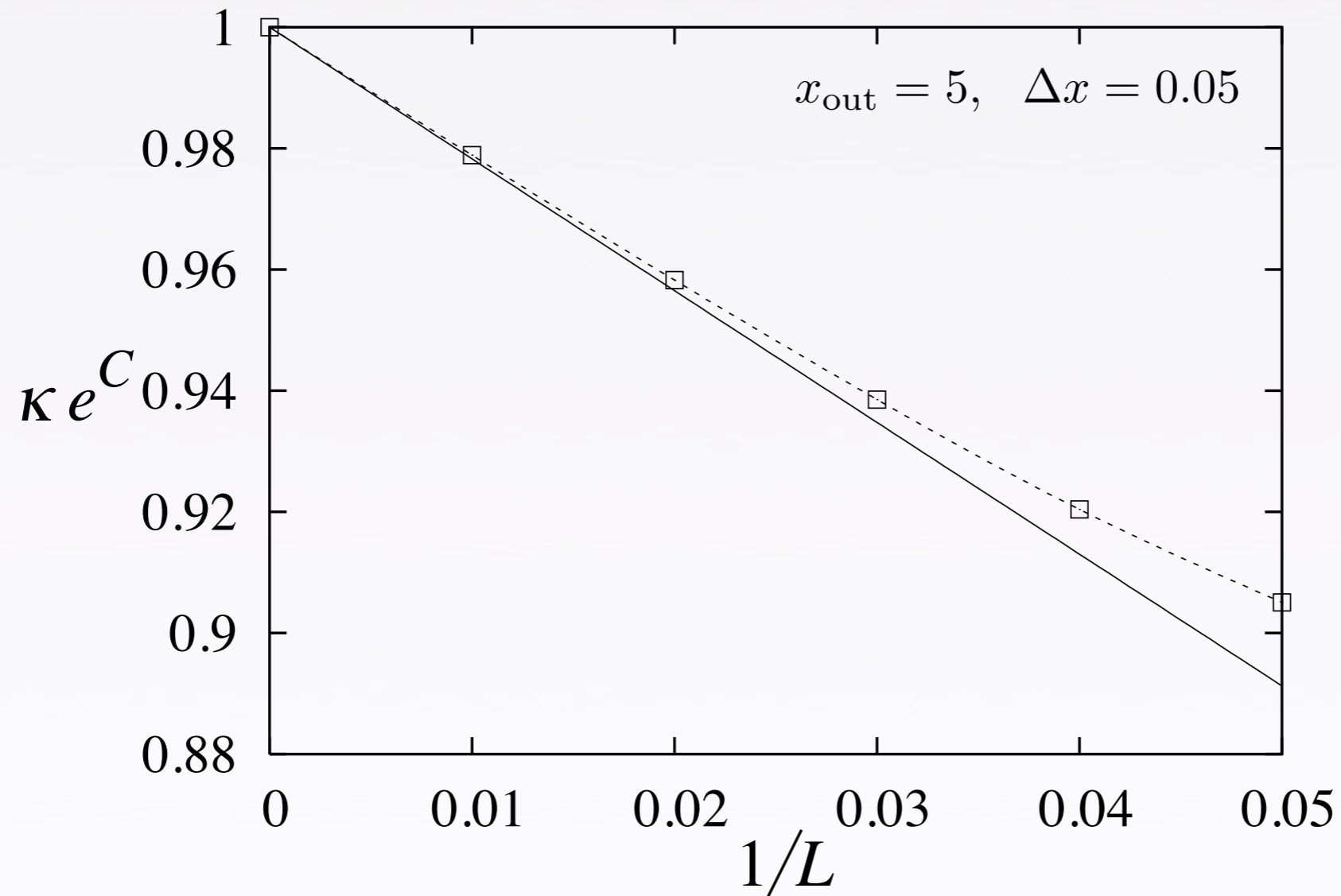
$$\delta_{\kappa} := \max[\kappa] - \min[\kappa]$$



- 表面重力の誤差にあらわれる体系的でない誤差も非線形に増大。
 $\sim (1/L)^4?$

Karasik et al. の摂動計算結果との比較

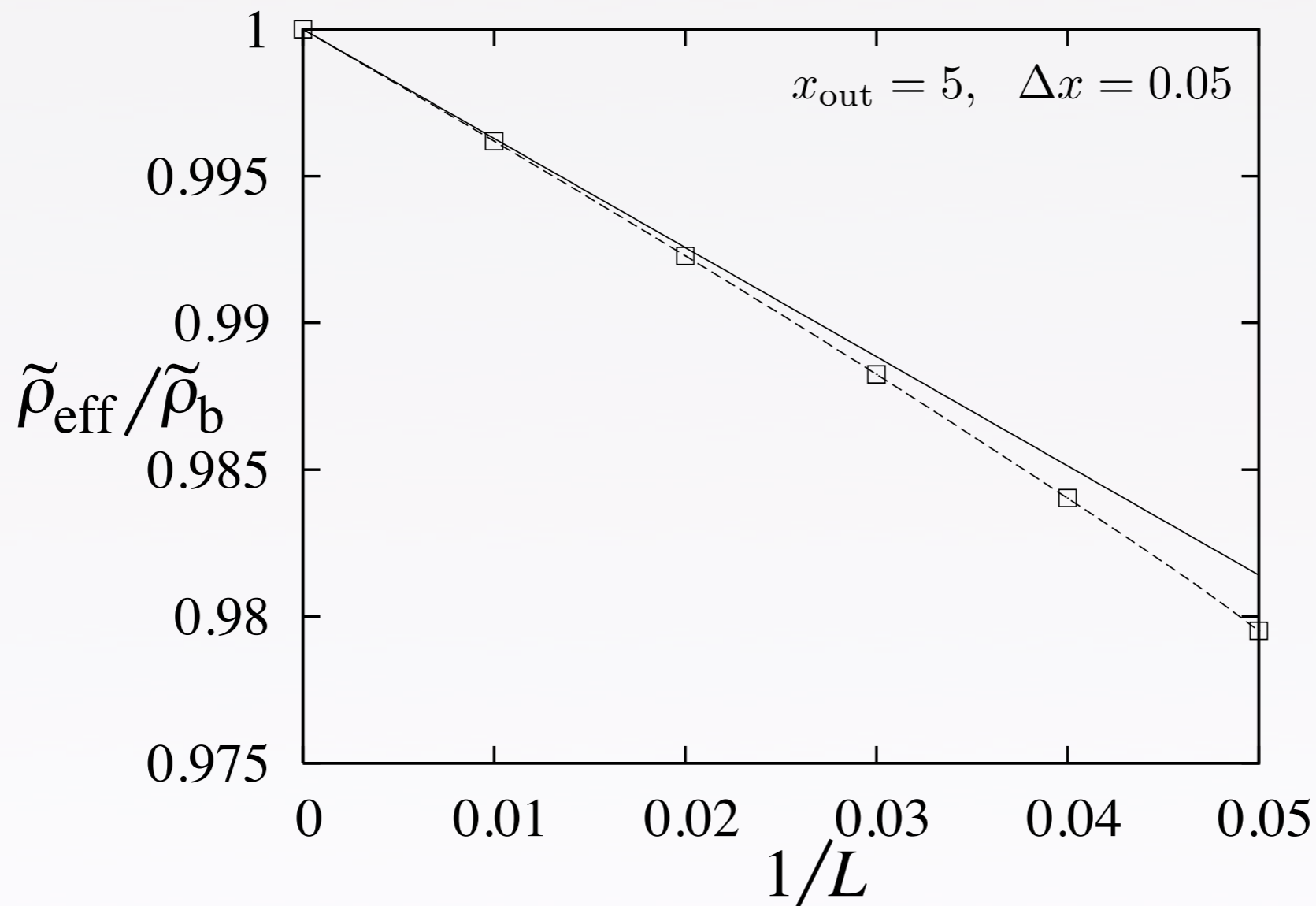
(表面重力) × (ブレーン上の地平面半径)



- 誤差を無視すると、摂動計算の結果によく一致する。

Karasik et al. の摂動計算結果との比較

(バルク方向の平均的な地平面半径) / (ブレーン上の地平面半径)



- 誤差を無視すると、摂動計算の結果によく一致する。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

3つの可能性

- コードの間違い。
- 方程式の解はあるが、数値的には求められなかった。
- 方程式の解がない。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

● 3つの可能性

- ~~● コードの間違い。~~
- 方程式の解はあるが、数値的には求められなかった。
- 方程式の解がない。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

● 3つの可能性

- ~~● コードの間違い。~~
- 方程式の解はあるが、数値的には求められなかった。
- 方程式の解がない。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

● 3つの可能性

- ~~● コードの間違い。~~
- ~~● 方程式の解はあるが、数値的には求められなかった。~~
- 方程式の解がない。

結果の解釈

- 結果をまとめると,
 - 体系的でない誤差を検出。
これは $(1/L)$ に関して非線形に増大する。
 - 誤差を無視すると、Karasik の摂動計算を再現。

3つの可能性

- ~~● コードの間違い。~~
- ~~● 方程式の解はあるが、数値的には求められなかった。~~
- 方程式の解がない。

議論

- 高次の摂動で発散がおきる可能性が残されている。
- その場合、その特異な効果は数値計算では体系的でない誤差として振る舞うはずである。

目次

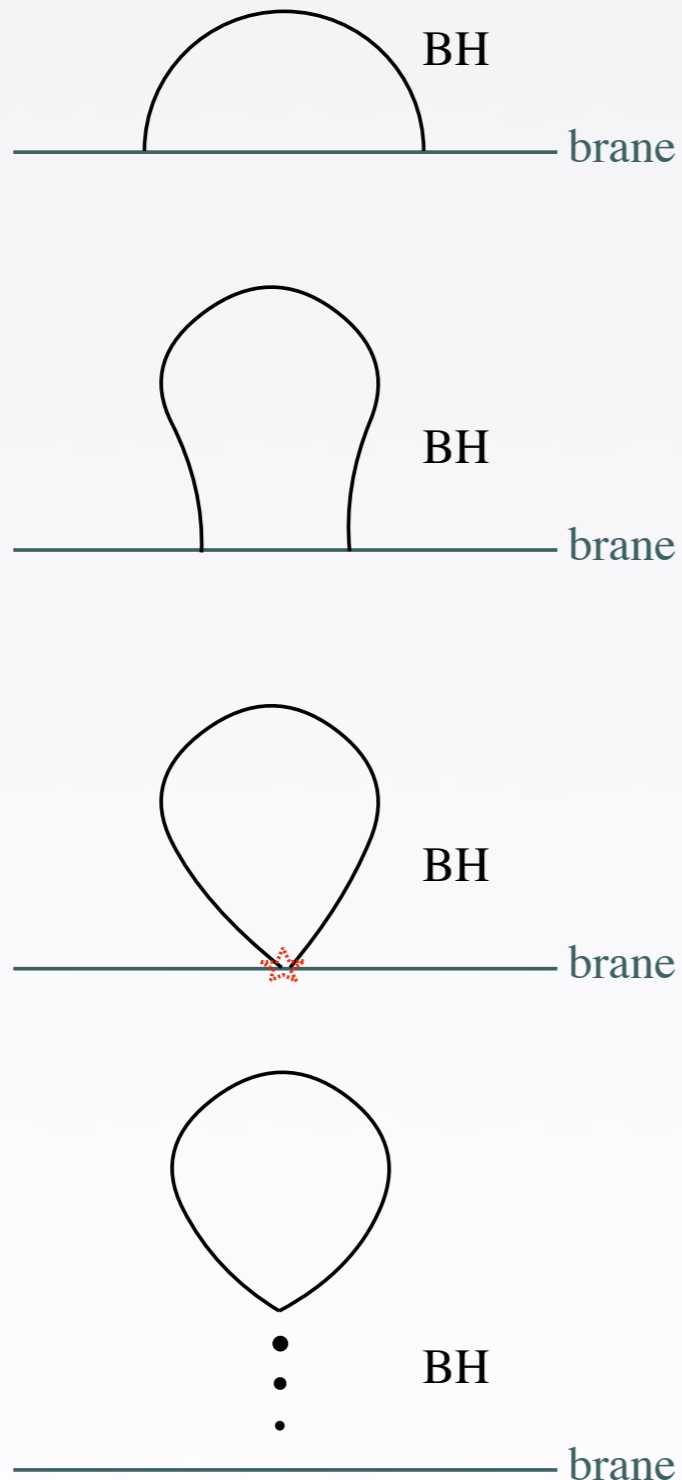
- 📍 導入
- 📍 問題設定
- 📍 コード
- 📍 結果
- 📍 まとめ

まとめ

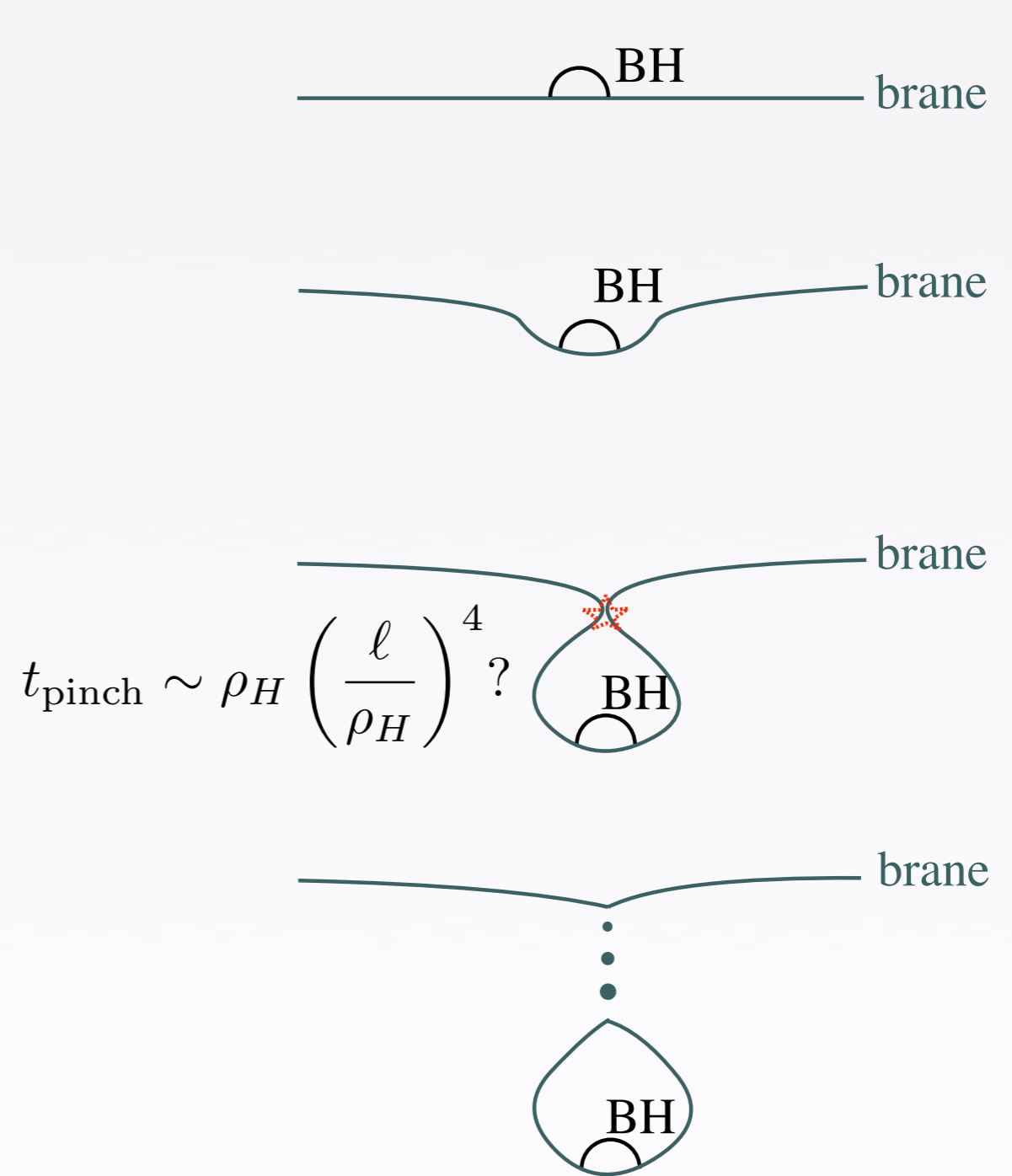
- ブレーン上に局在する静的ブラックホール解を数値的に調べた。
- Karasik の摂動計算の結果は再現したが、除去不可能な数値誤差も検出した。
- もっとも自然な解釈は、摂動は高次で特異になり、その効果が数値計算では誤差として見えているというものだろう。
- これが本当だったら、Randall-Sundrum II シナリオの静的なブレーン上のブラックホール解は（厳密な意味では）存在しない。
- ブラックホールは形成後、落ち着く先がないため不安定であり、その時間発展を調べるのは面白い課題。

BH が時間発展を続けるとしたら

● 地平面のピンチ? ($l \ll \rho_H$)



● ブレーンのピンチ? ($l \gg \rho_H$)



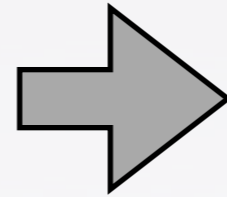
see also Flachi and Tanaka, PRL95, 161302 (2005)

議論

解がないことを支持する数学的な議論

方程式

- $\nabla^2 T = \dots$
- $\nabla^2 R = \dots$
- $\nabla^2 C = \dots$
- $T_{,\rho\chi}/2T + C_{,\rho\chi} = \dots$
- $T_{,\chi\chi}/T + 2C_{,\chi\chi} = \dots$



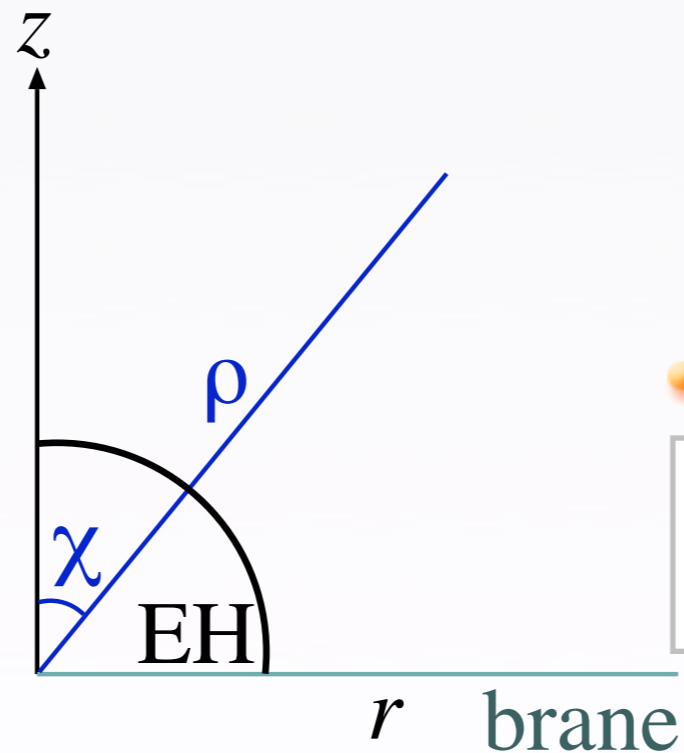
- $\nabla^2 T = \dots$
- $\nabla^2 R = \dots$
- $-C_{,\chi\chi} + \rho^2 C_{,\rho\rho} = \dots$

境界条件

● 軸上

$$R = C$$

$$T_{,\chi} = R_{,\chi} = C_{,\chi} = 0$$



● ブレーン上

$$\frac{T_{,\chi}}{T} = R_{,\chi} = C_{,\chi} = \frac{\rho}{\ell}(e^R - 1)$$