

特異点定理と特異点研究会

The Singularity Theorem and The Workshop on “Spacetime Singularities” in Japan

We would like to express our congratulations to Professor Sir Roger Penrose on being awarded the Nobel prize in Physics 2020 for the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity. His contributions to the physics of spacetime have spanned a wide array of topics, ranging from black holes to cosmology, classical to quantum, and have provided us with major new insights. It was, in particular, his pioneering work on the singularity theorems that led the way and inspired us to study spacetime singularities and related topics in general relativity.

Let us take this opportunity to introduce the workshop on “Spacetime singularities” held, every year since 1999, in Japan. The main purpose of the workshop is to bring together researchers working on physical and mathematical problems of spacetime singularities and related topics in both classical and quantum theories of gravity, to share our understandings on the subjects, and to have discussions that hopefully develop into future collaborations. For this purpose, all talks (including intensive lectures on topical issues) are given in a relaxed style. Contributed talks are not necessarily about the results already published, and those about ongoing—even not fully fleshed out—work are very welcomed. Researchers—especially graduate students and postdocs—working on the connected subjects are all encouraged to take part in this workshop, which hopefully will keep producing new ideas and research directions on the subjects.

We would also like to take this opportunity to attempt to give a pedagogic account—intended for general readers, (junior) high school and college students in Japan—of the celebrated first singularity theorem, hoping that this article could be of some help to inspire the next generation of young physicists in Japan.

The workshop committee
Autumn 2020

2020年のノーベル物理学賞は、ブラックホールの研究に対して3名の研究者に贈られました。その内の一人であるロジャー・ペンローズさんは、ブラックホールをはじめ一般相対論に関する多くの先駆的な理論研究をされてきました。特に今回の受賞に結び付いた主要研究である「特異点定理」は、私たち一般相対論研究者に、新しい方法論とともに特異点にまつわる問題に取り組む強い動機を与えてくれました。ペンローズさんのノーベル物理学賞受賞を心からお祝い申し上げます。

ここで日本の「特異点研究会」についても、簡単に紹介させていただきます。この研究会は、1999年より毎年、国内の一般相対論研究者有志が、大学等の所属研究機関に於いて

持ち回りで開催しております。一般相対論の理論的側面を中心に、特異点およびその周辺テーマに関する研究促進や新たな研究分野を開拓することを目指すものです。そのため、発表内容は必ずしも完成したものを要求するものではなく、分野も強く限定されているわけではありません。参加者の興味の赴くまま議論と討論を通じて、各人が研究中の問題の解決の糸口、新しい研究課題、共同研究などを見出す機会となることを期待して開催している研究会です。

研究会 HP: <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/astrophys/tokuiten/index.html>

この機会に、ペンローズさんの有名な最初の特異点定理について、一般の方や学生の皆さんを対象とした解説を試みたいと思います。次の世代の皆さんに物理学への興味をもつていただく小さなきっかけになれば、私たちにとって大きな喜びです。

特異点研究会世話人一同
令和2年 晩秋

特異点定理の解説

1 はじめに

ブラックホールの中には必ず物理法則が破たん¹する点が存在します—そのような点を「時空特異点」と言います。ロジャー・ペンローズさんの2020年のノーベル賞受賞の対象となった研究の要にあたるのが、このような時空特異点の存在を証明した「特異点定理」です。

時空特異点として有名なものは宇宙のビッグバン特異点かもしれません。宇宙は膨張していますが、時間をさかのぼればどんどん小さくなって、宇宙の始まりは一点に潰れていることになります。それをビッグバン特異点とよんでいます。ブラックホールは重い星が潰れて行った（重力崩壊といいます）結果できると考えられていますから、その中はちょうど膨張宇宙を時間をさかのぼって見るのとよく似ているはずです。すると、最後には一点に潰れて特異点ができそうに思えてきます。実際、アインシュタイン方程式を解いて数学的に得られるシュヴァルツシルト解²を調べてみると、ブラックホールの内部に特異点があることがわかります。ところが、シュヴァルツシルト解は特別な「球対称性」の条件のもとで理想化された話であり、現実の宇宙では、この条件が成り立つことはありません³。これは宇宙のビッグバン特異点についてもそうで、現実の宇宙は星々がたくさんあって単純ではないですから、本当に宇宙が一点に潰れてしまうかどうかは分かりませんでした⁴。

ペンローズさんは、時空が高い対称性を満たさなくとも、ブラックホールができるような状況では必ず時空特異点が発生してしまうことを数学の定理として厳密に証明して見せました。また、証明に必要な様々な数学的な「道具」の大部分も自ら開発し、当時の一般相対論の研究に新しい研究方法を導入したのです。ペンローズさんの特異点研究のポイントは、ブラックホールが形成されるような過程では対称性がなくても、つまり理想的な状況からずれた現実の宇宙においても、一般的に成り立つ結論を導いたことです。1965年

¹さまざまな物理量の計算が無限大になって値が確定しなくなるところを一般に特異点とよびます。具体例はC4.2参照。

²アインシュタイン方程式の静的球対称真空解です。C4.2参照

³「球対称」という条件は、球面のようにどの角度から見ても性質が同じという条件です。球面には必ず中心がありますから、球対称なシュヴァルツシルト解では中心が特異点になります。ジャガイモのように真ん丸ではなく凸凹していると中心なんて定まりません。現実の宇宙には完全に真ん丸な星は存在しませんから、ジャガイモと同じで、明確な中心もありません（図1）。そのような星が重力でつぶれていっても特異点は発生しないだろうと考えられていたのです。

物理学では、自然現象をしばしば理想的な状況で記述しようとし、そのために「対称性」の概念を用います。対称性とは、「雪の結晶は6角形」というときのような、幾何学的な規則性のことです。対称性により余分なことを削ぎ落とすと、法則が明確な形で見えてくることがあるのです。一方、現実の世界はとても複雑ですから、対称性をもつ理想的な状況から「ずれ」ています。そうした「ずれ」をどのように理解するかも物理学の重要な課題です。特異点定理は対称性からのずれの効果も見事に取り込んでいます。

⁴ペンローズさんの1965年の定理は、その発表直後にスティーブン・ホーキング (S. W. Hawking) 博士により、宇宙のビッグバンに適用され、ビッグバン特異点の存在が証明されました (Physical Review Letters, 15, 689, 1965, 同 17, 444, 1966)。その後、ホーキングさんとペンローズさんの共同研究により、ビッグバン宇宙と星の重力崩壊の両方に当てはまる一般的な特異点定理が発表されました (S. W. Hawking and R. Penrose, Proc. R. Soc. Lond. A 1970 314, 529-548)。

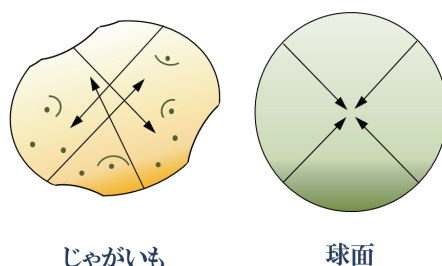


図 1: 球面はどの角度から見ても同じであり、そのような性質を「球対称性」と言います。球面には中心がありますが、ジャガイモは真の球面ではないので中心は定まりません。

の最初の特異点定理の論文中にある「Collapse without assumptions of symmetry will be discussed here.」という言葉に集約されています。

ペンローズさんの研究のアイディアは、大枠では次のようなものです。無限に広がる宇宙空間（「コーシー面」⁵とといいます）に重い星があるとします。そして、その星が強大な重力で潰れて行く状況を考えましょう。ペンローズさんは、証明の大前提として

「時空特異点」なんて存在しない

と仮定した上で推論を進めて行きます。また、特別に重力が強い領域を表すために「捕捉面」⁶という概念を導入して考えます。さて、一般相対論によると、重力は時空を曲げることを意味します。しかも万有「引力」ですから、互いに引き合って空間はどんどん縮んで行こうとします。ペンローズさんは、捕捉面が存在するほど強い重力のもとで宇宙空間が大きく曲げられて行くようすを数学的に考察しました。すると、宇宙空間が有限の時間内に、完全に「有限の大きさの閉じた空間」に丸まってしまうと結論されたのです。しかし、これはとても奇妙なことです。なぜなら、もともと宇宙空間は無限に広がっていたはずですから。事実、トポロジー⁷という空間の形についての数学によると、無限に広がる空間が連続的に変化して有限の閉じた空間になることは禁止されているのです。ですからこの推論には矛盾があり、前提として『時空特異点なんて存在しない』と仮定したことがおかしいこととなります⁸。つまり、時空特異点は**必ず存在**しなくてはならないと言えます。以上が、証明のあらすじですが、ペンローズさんの用いた証明方法では、アインシュタイン方程式を解いたりしません⁹。そのおかげで、対称性の有る無しに関係のない、強力な結論が得られたのです。

⁵A および B3.2 を参照。

⁶A および B3.1 を参照。

⁷C4.6 を参照。

⁸このように、ある前提条件のもとで推論を進めて矛盾を導き、それにより前提条件を否定する証明の仕方を「背理法」といいます。

⁹『方程式があるのに解かないの?』と思われるかもしれませんが、解がなくても分かることはあります。例えば $x^2 + 2x + 1 = 0$ という方程式を考えましょう。もし x がゼロ以上の実数であれば、左辺は 1 以上になるので方程式は満たされません。ですから、この方程式の解が実際に $x = -1$ であるとは知らなくても、「 x は負の数でなければならない」という情報は確実に読み取れます。ペンローズさんは、アインシュタイン方程式を解かずに利用する方法論を導入したのです。

実はペンローズさんの2020年ノーベル物理学賞受賞理由は、時空特異点が存在することの発見ではなく「ブラックホール形成が一般相対性理論の確固たる予言であることの発見」です。シュヴァルツシルト解では時空特異点はブラックホール内部にありましたが、もし時空特異点が必ずブラックホールの内部にあるのであれば、時空特異点の存在がブラックホールの存在につながるようになります。ペンローズさんは時空特異点は必ずブラックホールの内部にあるだろうという予想を1969年および1979年に発表しました¹⁰。この予想は宇宙検閲官仮説と呼ばれています。この仮説に反する一般的な例は知られておらず、現在もさまざまな個別の状況における議論が続いています。宇宙検閲官仮説も含めれば、特異点定理によってブラックホール形成が一般的に不可避免的に起こることが示されたと言えるでしょう。

ペンローズさんとともに今回のノーベル物理学賞を受賞されるラインハルト・ゲンツェルさんとアンドレア・ゲズさんは、われわれの天の川銀河の中心にある超大質量コンパクト天体の発見に貢献されました。この天体はブラックホールであることが確実視されています。2019年には、イベントホライズンテレスコープ国際共同研究プロジェクトが、M87銀河の中心にあるブラックホールのシャドウの撮像に成功したと発表し、大きな話題となりました。また、2015年には重力波が初めて直接観測（2017年ノーベル物理学賞受賞）されましたが、その重力波源は13億光年彼方のブラックホール連星と考えられています。一般相対論の誕生から一世紀を経た今、ブラックホールのように当初は物理的実在というより数学的可能性と見なされた一般相対論の予想が、宇宙観測によりつぎつぎと実測されて行くのを現在進行形で目撃できることは、とても素敵なことではないでしょうか。数学者であるペンローズさんがノーベル物理学賞を受賞されるのは象徴的なことに思えます。

本稿は、ペンローズさんによる最初の特異点定理の解説であり、大きく分けて、A、B、Cの3つの部分から成ります。Aは有名な1965年の論文「Gravitational Collapse and Space-Time Singularities」(Physical Review Letters, 14, 57 (1965))に基づいて説明を試みるものです。ここでは、原論文におけるペンローズさんの発想と論理の導き方をお伝えするのが目的ですから、解説では原論文の論旨の展開をできるだけそのままに保ちました。また物理学や数学の専門用語にも若干の補足説明を加えるにとどめました。一方、解説Bでは数式は用いず、キーワードを取り上げることで解説Aを要所に解体し、平易な言葉とイラストによるかみ砕いた説明を試みました。解説Cでは、Aの中のキーワードや数学概念について、もう少し詳しい（若干の数式を用いた）説明を加えました。ここは大学生（理系）上級レベルになります。

¹⁰R. Penrose, *Revistas del Nuovo Cimento* 1, 252 (1969), R. Penrose, in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. S.W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press (Cambridge, 1979)

2 A：原論文に基づく特異点定理の解説

ここでは最初の特異点定理の原論文¹¹を、できるだけその簡潔さと明解さが伝わるよう解説することを試みます。論旨の流れを妨げないよう、高度に数学的な部分も最小限の説明にとどめ、常体語で述べることにします。

重力崩壊と時空特異点

ロジャー・ペンローズ

1915年から1916年にかけてのアインシュタインによる一般相対論の提案以来、重力崩壊とブラックホールに関する研究が行われてきた。しかし、長い間これに対応する天文学的な手がかりが見つからず、多くの研究者は単なる学術的問題と捉えていた。しかし、1963年にシュミットが3C 273という明るく輝くコンパクトな天体が我々の銀河系の外の非常に遠方にある天体であることを突き止めた。このような天体は準恒星状電波源¹²とよばれた。これらの天体から放出されるエネルギーは核融合反応などでは説明できない莫大なものであり、そのエネルギー源として一般相対論的な重力エネルギーの解放が注目されていた。

準恒星状電波源の発見により、重力崩壊の問題への新たな興味が刺激された。これらの天体が放射すると推定されるとつもない量のエネルギーが、おそらく重力波放射の形をとったエネルギーの爆発的な解放をともなって、太陽質量の百万倍から1億倍の桁の質量の重力崩壊から生じるかもしれないと、何人かの著者たちによって示唆された。そのような状況の詳細な数学的議論は難しい。なぜならそれには一般相対論の完全な複雑性が必要だからである。それゆえに、重力崩壊の重要性に関わる最も正確な計算には、簡単化のために球対称性の仮定が用いられてきた。しかし残念なことに、この仮定は重力波放射のどんな詳細な議論も予め排除してしまう。なぜなら重力波放射には少なくとも四重極構造が必要だからである¹³。

球対称物体に関する一般的な状況はよく知られている。十分大きい質量に対しては、最終平衡状態は存在しない¹⁴。熱エネルギーが十分に放射されて失われると、物体は収縮し、 $r = 0$ で物理的特異点に遭遇するまで収縮し続ける。例えば、圧力が無視できる物質でできたような球体の球対称重力崩壊はオープンハイマーとスナイダー(1939)によってアインシュタイン方程式の厳密解を用いて調べられた¹⁵。外側の観測者にとっては、物体のシュヴァルツシルト半径¹⁶ $r = 2m$ への収縮には無限の時間がかかるように見える。一方、局

¹¹R. Penrose, "GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES" Physical Review Letters, 14, 57 (1965)

¹²準恒星状電波源とは、遠方の銀河の中心核において非常に明るく輝くコンパクトな天体である。現在では一般的にクエーサーとよばれる。

¹³球対称時空では重力波は存在しない。弱い重力場と遅い運動の極限では、重力波は物質の作る四重極モーメントの時間変化により引き起こされる。

¹⁴恒星進化の最終段階で支えられる質量には最大値がある。この最大値は中性子星などの核物質からなる星の場合でも太陽質量の5倍は超えないと考えられている。

¹⁵C4.4 参照。

¹⁶シュヴァルツシルト半径とは、質量 m の物体に対して $r = 2m$ によって決まる半径である。ただし $G = c = 1$ という単位系をとっている。球対称静的真空解であるシュヴァルツシルト解ではシュヴァルツシルト半径は事象の地平線の半径である。C4.2 参照。

所的な共動観測者から見ると、物体は $r = 2m$ 以内へ通過する。(もし総質量が十分大きければ、これが起こる密度は必ずしもとてつもなく高いというわけではない。) 内部領域での物理を完全に議論するにあたっては、特異点の存在が深刻な問題を引き起こしてしまう。なぜなら、時空特異点は時空多様体としての性質が失われているため、一般に我々が知っている物理法則を適用することができないからである。

この特異点が、実は、単に仮定された高い対称性の性質に過ぎないのではないかという疑問が挙げられてきた。球対称性の仮定のもとでは、物質は中心の単一の点に向かって動径方向内向きに崩壊する。そのため、そこで起こる時空の破局は多分驚くべきではないだろう。では、もし球対称性を壊す摂動が存在すれば、この状況は劇的に変更され得るであろうか？カーの最近の回転解¹⁷も物理的特異点を持っているが、それでも高度な対称性がある(そしてこの解は代数的に特別でもある)ので、これが一般的な状況を代表するものではないと再び議論されるかもしれない。そこで、ここでは対称性を仮定することなく重力崩壊を議論しよう。

物質分布の初期条件を指定するコーシー面 C^3 を用意し、アインシュタイン方程式による時間発展を考えよう¹⁸。物質に対する適当な状態方程式として、ここで仮定するのは、局所的なエネルギーが(宇宙項を含む、含まないに依らず)非負となることのみである¹⁹。この初期物質分布が、少なくともその初期段階では球対称な場合と定性的に同様に重力崩壊を起こすものとしよう。このとき、重力崩壊の進行により、ひとたび「捕捉面」が形成されると、その後は、たとえ球対称からのずれがあったとしても、もはや重力崩壊の結果として時空特異点が発生することを妨げることはできない事を示そう²⁰。

対称性のない場合を検討する前に、 C^3 上で球対称で有限半径の物質分布が対称性を保ったまま崩壊する状況を考えよう。この物質分布外部の真空領域は、球対称性よりシュヴァルツシルト計量²¹で表される。ここでは、先進時間パラメーター v による表式

$$ds^2 = -2drdv + (1 - 2m/r)dv^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

を用いて記述しよう。状況は図2のようになる。外部観測者は常に $r = 2m$ より外部にある物質を見ているのであり、 $r = 2m$ を超えて $r = 0$ にある特異点へ向けて崩壊して行く様子は、(その外部観測者には) 見ることができないことに注意しよう。

重力崩壊する物質が $r = 2m$ より内部に収縮した後には、その物質をとり囲む真空領域において $v = \text{一定}$ 、 $2m > r = \text{一定}$ の球面 S^2 を考えると、その球面に垂直未来向きに放

¹⁷カー解とよばれる。定常軸対称な真空解であり回転を表すパラメータがある範囲にあるときブラックホールを表す。C4.3 参照。

¹⁸ C^3 が M_+^4 のコーシー面であるとは、 M_+^4 内の事は全て C^3 上の初期データから物理法則を用いて予測できることをいう。このとき、 M_+^4 内のどの点からの過去向きの時間的曲線も、ただ一度だけ必ず C^3 と交わる。B3.2 参照。さまざまな空間領域を表す記号 T^2 , B^3 , F^4 , K^4 , M_+^4 は原論文で用いられたものに表記を合わせてある。そこに添えてある数字 2, 3, 4 はその空間領域の次元を表している。たとえば T^2 は 2次元領域、 C^3 は 3次元空間領域、といった具合である。

¹⁹一般にエネルギー条件とよばれる仮定であり、様々なものがある。後に述べる条件 (iv) 参照。

²⁰原論文では、ここでもし物理的な時空特異点の発生が禁じられているとするならば、その原因として以下の項目の内の少なくとも一つが起こることは避けられないと論じている：(a) 局所的に負のエネルギーが発生する。(b) アインシュタイン方程式が成り立たなくなる。(c) 時空多様体不完備となる。(d) 時空の概念が大きな曲率の下でその意味を失ってしまう(これは量子効果により起こり得る)。ただし、実際のところ (a),(b),(c),(d) は互いにいくらか関係しており、これらの区別は考え方による。この考察から、後の段落で証明のために必要な仮定が設定される。

²¹シュヴァルツシルト計量については、C4.2 参照。

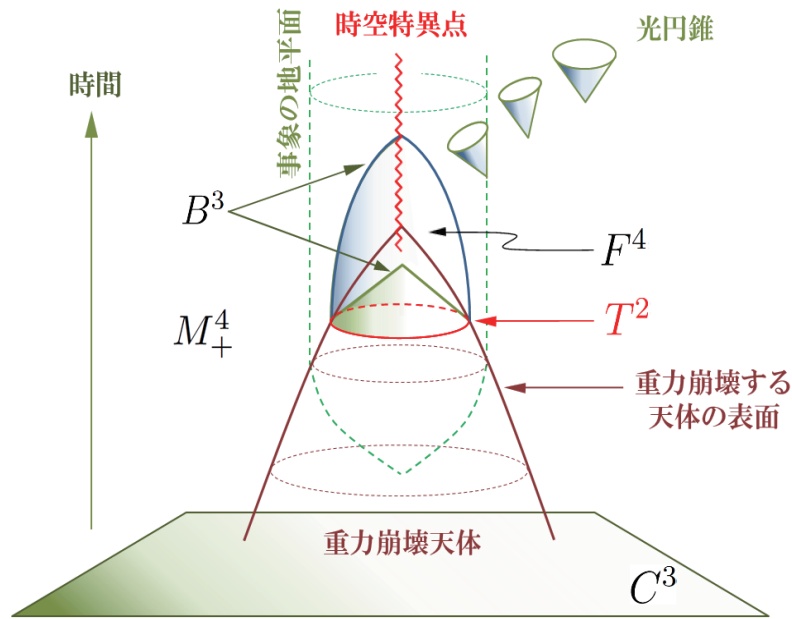


図 2: 球対称な重力崩壊の様子.

たれる（「内向き」と「外向き」に対応する）2方向の光の測地線群²²はいずれも収束—つまり波面の面積が減少—することが分かる．このように，そこから垂直未来向きに放たれる2方向の光の測地線群が局所的に収束するような閉じた空間的2次元面 T^2 を，一般に「捕捉面」という²³．この定義は明らかに，考察する時空が球対称でなくても適用できるものである．実際， $m > a$ （角運動量は ma ）となるカー解においても捕捉面が存在する²⁴．以下では，捕捉面が存在すると—対称性の有無にかかわらず—必然的に特異点が発生することを示そう．

次の5つの条件を仮定しよう．

- (i) M_+^4 は正則で符号 $(+, -, -, -)$ のリーマン多様体である²⁵．
- (ii) M_+^4 内の全ての光的測地線は，未来向きにいくらでも大きなアフィン・パラメーターの値をとるように拡張可能である（光的完備性）²⁶．
- (iii) M_+^4 内の全ての時間的または光的測地線は C^3 と交わるまで過去向きに拡張できる（コーシー面の条件）²⁷．

²²測地線は，平坦な空間における直線概念を曲がった空間（時空）上に一般化したものである．通常，「アフィン・パラメーター」とよばれる弧長に比例する助変数を用いることで「真つすぐ，一定の速さ」で進む様を表す．ただし，光の測地線に対しては注意が必要．C4.7 参照．

²³2次元面として「閉じている」ことは本質的であり“閉じた捕捉面”とよぶこともある．B3.1 参照．

²⁴ただし， $m \leq a$ の解には捕捉面は存在しない．

²⁵時間的に向きづけ可能とする．C4.6 参照．

²⁶全ての光の測地線が，そのアフィン・パラメーターについていくらでも延ばせることをいう．もし完備でなければ，ある有限のアフィン・パラメーターで測地線が終了するので，それは時空に“行き止まり”があることになる．光的または時間的測地線が完備でなくなることは物理的な時空特異点の特徴の一つであり，特異点定理で証明するのは，そのような完備でない光的（または時間的）測地線が存在することである．C4.1 参照．

²⁷ C^3 が M_+^4 のコーシー面であるとは， M_+^4 内の事は全て C^3 上の初期データから物理法則を用いて予測できることをいう．B3.2 参照．

(iv) M_+^4 の各点において、すべての時間的ベクトル場 t^μ は $(-R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu})t^\mu t^\nu \geq 0$ を満たす (局所的エネルギーの非負性)²⁸.

(v) M_+^4 内に捕捉面 T^2 が存在する (強い重力領域の条件)²⁹.

以下では、(i), \dots , (v) は同時には成立せず、全体として矛盾が生じることを示す。

捕捉面 T^2 上の点から未来向きに放たれる任意の滑らかな時間的曲線を考え、それにより T^2 とつながり得る M_+^4 上の点全体の集合を F^4 と表すことにする。そして、 F^4 の境界を B^3 と表すことにしよう。このとき B^3 は、 T^2 と垂直に交わるように過去の端点を持つ光的測地線群により生成される。また、 B^3 を生成する各々の未来向き光的測地線は、条件 (ii), (iv), (v) より、 B^3 のコースティック (焦線) に未来の端点を持つことが分かる³⁰。実際、それらの光的測地線に対して、 l^μ をその未来向きの接ベクトル ($l^\mu{}_{;\nu}l^\nu = 0$ を満たす)、また

$$\rho = -\frac{1}{2}l^\mu{}_{;\mu}, \quad |\sigma| = \left[\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu} - \frac{1}{4}(l^\mu{}_{;\mu})^2 \right]^{1/2},$$

を、それぞれ上記の光的測地線に対する、「収束率」、「せん断ひずみ」とし、さらに A を B^3 の無限小断面積とする。すると、(iv) より $\Phi = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ であり、

$$[(A^{1/2})_{;\mu}l^\mu]_{;\nu}l^\nu = -(A^{1/2}\rho)_{;\mu}l^\mu = -A^{1/2}(|\sigma|^2 + \Phi) \leq 0,$$

が成り立つ³¹。 T^2 は捕捉面であるからそこで $\rho > 0$ であり、それは $(A^{1/2})_{;\mu}l^\mu < 0$ を意味する。つまり $A^{1/2}$ は T^2 において既に減少傾向にあるのだが、上記の不等式により、 T^2 から未来に向かうにつれて、その減少傾向はますます強まるので、やがて A は有限のアフィン時間の内に必ずゼロとなることが分かる。これは、各々の光的測地線はコースティックに必ず出くわすことを意味する。よって B^3 は、過去と未来の両方に端点をもつ光的測地線の有限区間線分によって生成される閉じたコンパクト集合となることが示された³²。 B^3 は非時間的であるから、それを滑らかな閉じた空間的超曲面 B^{3*} によって十分精度よく近似して良い。 $P \in B^{3*}$ と $0 \leq s \leq 1$ の組 (P, s) を K^4 と表すことにする。そして、固定した B^{3*} 上の点 $P = \mu\{(P, 1)\}$ において、 B^{3*} と垂直な過去向きの時間的測地線を考えると、条件 (iii) より必ず C^3 と交わるので、その交点を $\mu\{(P, 0)\}$ としよう。このような時間的測地線を B^{3*} の各点に対して考えることで、連続写像 $\mu: K^4 \rightarrow M_+^4$ が定義できる。この連続写像は写像度 $d\mu$ が (K^4 の境界の像を含まない全ての領域で) 一定である³³。 μ は B^{3*} の近傍で一对一であるから $d\mu = 1$ である。したがって C^3 の近傍でも $d\mu = 1$ となる。しかし、それは C^3 が非コンパクトであることから矛盾である³⁴。したがって、前提

²⁸これは「弱いエネルギー条件」とよばれる。連続性から t^μ が光的ベクトル場となる場合に対しても、同様の不等式 (「光的エネルギー条件」という) が成り立つ。もし光的エネルギー条件が破れると、弱いエネルギー条件も破れることが示される。証明では、光的エネルギー条件の成立が肝心となる。ここでは、重力が斥力ではなく「引力」となることを保証する条件という理解で十分である。C4.5 参照。

²⁹B3.1 および C4.5 参照。

³⁰原論文では「コースティック」という用語で表すところを、本稿では「共役点」「焦点」「焦線」を同意語として用いる。

³¹C4.5 参照。

³²コースティックに出くわした光的測地線は、もはや境界 B^3 上に留まることはできず、コースティックより未来では F^4 の内部へ入ってしまう。B3.4 参照。

³³写像度については解説 C4.6 参照。

³⁴解説 B3.3 および C4.6 参照。

として仮定した (i)–(v) は同時には成り立たないことが結論される. (ii) の光的完備性が成り立たないと解釈すれば, 有限のアフィン・パラメーターまでしか延ばせない光的測地線が存在する. それは時空特異点が存在するからである.

3 B：数式を用いない解説

ここでは、Aで解説した特異点定理の証明の中で特に要となる概念を取り上げ、証明の要所を、数式は用いず、できるかぎりイラストを用いて解説します。

特異点定理では、特異点が、光が有限時間で到達し、それより先には進めない時空に開いた“穴”のような性質をもつことに着目して、光の測地線の完備性の条件(ii)が破れることを証明しています³⁵。その際に、捕捉面 T^2 の未来領域の境界 B^3 とコーシー面 C^3 の2つを対比することで、矛盾を導き出すという背理法を用いています。そこで、証明の要所を説明する前に、「捕捉面」、「コーシー面」を取り上げることにします。補足として「光円錐と焦点」についても解説します。

3.1 捕捉面 T^2

捕捉面は、強力な重力のはたらく時空領域を表すために導入された概念で、光の振舞いに基づいて定義される2次元の閉じた曲面です。光を「粒子」として考えると光の世界線³⁶が描けますが、特に重力の他には影響を受けない状況での光の世界線を「光の測地線」あるいは「光的測地線」といいます³⁷。解説Aでは光的測地線群の振舞いを考えたのですが、光の正体は電磁波ですから「波」として考えることもできます。水面波を思い描いてもらうとよいでしょう。例えば水面に石を投げ込むと、そこを中心に円形の波紋が広がって行きます。このとき、波の山や谷の部分のように（ある時刻に）高さが同じところ（同位相の点）を連ねたものを「波面」といいます。光の波面についても3次元のユークリッド空間で同様に考えれば、球面状の波面をもつ波（球面波）が広がって行くのが分かるはずです。

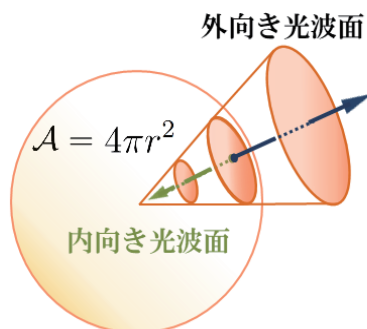
ここで、(1) 先ず3次元の平坦な空間（ユークリッド空間）の中に置かれた、有限の半径 R の球面 S^2 から光を放つことを考えましょう。図3のように、光の進む方向は、半径 R の球面の「内向き」と「外向き」の2方向になります。いずれも球面波になります。波面の面積を A とすると、内向きの光の波面は収縮して行くので原点で A はゼロとなります。原点が内向きの光線にとっての「焦点」です。一方、外向きの光の波面は広がりますから、当然、面積 A は増大して行きます。

(2) 次に宇宙空間を考え、半径 R の球面 S^2 内部に“透明な”天体があると仮定し、 S^2 から光を放つことを想像します。内向きの光は透明な天体の内部を中心へ向かって進むので(1)と同様、波面の面積 A は減少し、原点でゼロになります。一方、外向きに放たれた光の波面は広がって行くのですが、重力の効果により、波面の面積 A の増大する割合は(1)の場合とくらべて小さくなります。これは、一般相対論では通常の物体と同様に光も重力によって天体に引き付けられるため、天体が重くて重力が強いほど、光が飛び出し難くなることの反映です。一般に天体から無限遠方へ向けて飛び出すことができる速さを脱出速度といいますが、天体の質量が大きくその半径が小さいほど、脱出速度は大きくなり

³⁵特異点と不完備性については、C4.1 参照。

³⁶B3.2 参照

³⁷光的測地線については、C4.7 参照。



平坦な空間の2次元球面から「内向き」・「外向き」に放たれた光波面の収縮・膨張

図 3: 3次元の平坦空間の球面から放たれた光の波面.

ます。ですから、脱出速度が光速に達するほど重くて小さな天体があれば、光でも逃れられないこととなります³⁸。

(3) 一般相対論で考えると、中心へ向かう重力が強すぎると、球面 S^2 から「外向きに放たれたはずの光が、最初から“内向き”（波面の半径あるいは面積 A が減少する方向）に進む」ことすら起こり得るのです。そのような球面 S^2 が捕捉面 T^2 です。解説 A にあるように、シュヴァルツシルト時空の場合には $v = \text{一定}$, $2m > r = \text{一定}$, の球面が捕捉面であり³⁹, そこから“外向き”に放たれたはずの光が（上記の意味で）“内向き”に進むことが計算により分かります。

「外向きに放たれたはずの光が内向きに進む」

というのはなんとも不思議で想像し難いかもしれません⁴⁰。そこで水面波の例を用いて上記 (1), (2), (3) を再考してみましょう。

まず、広い池の平坦な水面上で、図 4 のように半径 R の円周状の「輪っか」を用意し、それを振動させます。すると、輪っかから同心円の波ができ、輪っかの内側と外側へ進んで行くのがわかります。「外向き」の波面の円周はどんどん大きくなって行きます。一方「内向き」の波面の円周は縮小して行き、やがて「ぽっしょん！」と中心でぶつかります。

³⁸そのような仮想的な天体を最初に考えたのはミッチェル (J. Michell) とラプラス (P. S. Laplace) であり、18 世紀のことです。ただし、無限遠方へ逃れられないという意味であり、光は（やがて戻ってくるにしても）天体の表面から離れることは可能です。一方、一般相対論におけるブラックホールは真空でも存在し、光はその表面である「事象の地平面」から“一歩も”外へ抜け出すことができないので、性質も概念も大きく異なります。

³⁹C4.2 参照。

⁴⁰例えば、光を発する球面 S^2 を含む 3 次元空間全体が時間経過とともに収縮する状況を想像すると、直感的なイメージがもてるかもしれません。ちょうど膨張宇宙において時間を遡って考えるのと同じです。実際に、現代宇宙論を記述する一様等方 (FLRW) 宇宙モデル (C4.4 参照) では、過去向きに捕捉面があることが確かめられます。

そこが波にとっての「焦点」です。この状況は、3次元の平坦空間で半径 R の球面から光を放った話 (1) に対応します。

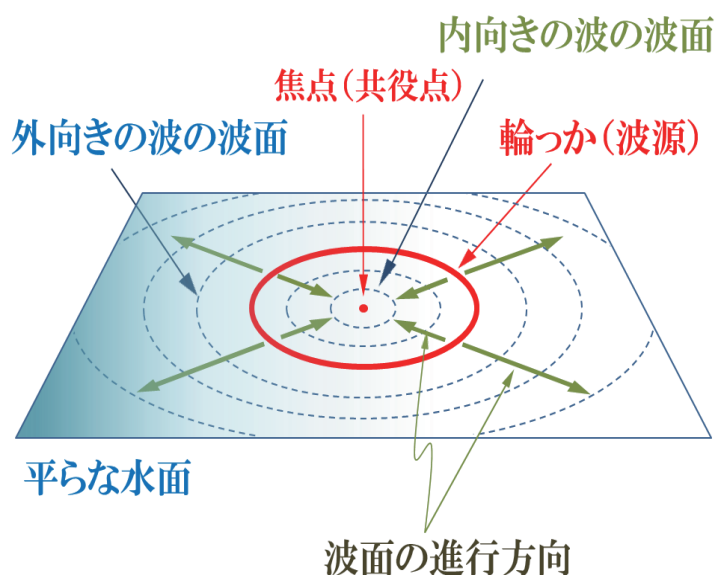


図 4: 平坦な水面上を半径 R の「輪っか」から発生した円周状の波が進行します。内向きの波面の円周は縮小, 外向きの波面の円周は増大します。図 3 に描いた 3 次元平坦空間中の球面的光波面の進行に対応します。

次に (2) と (3) にあたる例を考えましょう。解説 A の図 2 に描かれた T^2 , B^3 , F^4 との関係も明示します。一般相対論では重力は空間の曲がり具合と解釈します。重力の効果で曲がった空間を半径 R^* の球面で例えることにします⁴¹。その球面上での水面波を考えます。ちょうど丸い地球の海洋上で実験することを想像してもよいのですが、地球には大陸があるので、陸地がなく海洋のみが広がった「水の惑星」を想像した方が良いでしょう。

まず、図 5 のように、輪っかの半径 R に比べて水の惑星の半径が大きい場合を考えることにします。輪っかを地球で言うところの北極を中心とし日本の緯度にあたる円周にとることにします。この輪っかを振動させて発生する水面波は、円周状の波面の形を保ったまま進行します。北極へ向かう内向きの波の波面の円周は収縮して行き、北極点で「ぼしゃん!」とぶつかります。一方、外向きの波は赤道方面へ向かいますが、平坦な池の波と違い、その波面の円周の広がる度合いは遅くなって行くのが分かるでしょう。これが光波面についての (2) に対応する例です。

さらに重力が強くなり宇宙空間が大きく曲がった (3) の場合を例えるため、水面がさらに大きく曲げられて半径 R の球面になった水の惑星を考えます。すると図 6 のように、半径 R の輪っかは、ちょうど赤道面に位置することになります。ここまでの話と同様、“内向き”の水面波は北極へ向かい、その波面の円周は減少し北極点でゼロになります。一方、

⁴¹強い重力のもとで空間が球面のように“閉じる”方向に曲がることは、アインシュタイン方程式の具体的な解にも見ることができます。例えば、一様等方 (FLRW) 宇宙モデルでは、3次元の空間曲率が正、ゼロ、負の3つの場合が考えられます。(宇宙観測により、我々の宇宙は、空間曲率がゼロの FLRW モデルと最も整合することがわかっています。) この内、正曲率の場合は空間が丸まった3次元球面の宇宙を記述するので「閉じた宇宙モデル」といいます。閉じた宇宙モデルの場合は、重力源である物質が他の2つの場合に比べてより多く存在する場合に起こりますから、重力が強くなると空間が丸く閉じる傾向にあることを表しています。

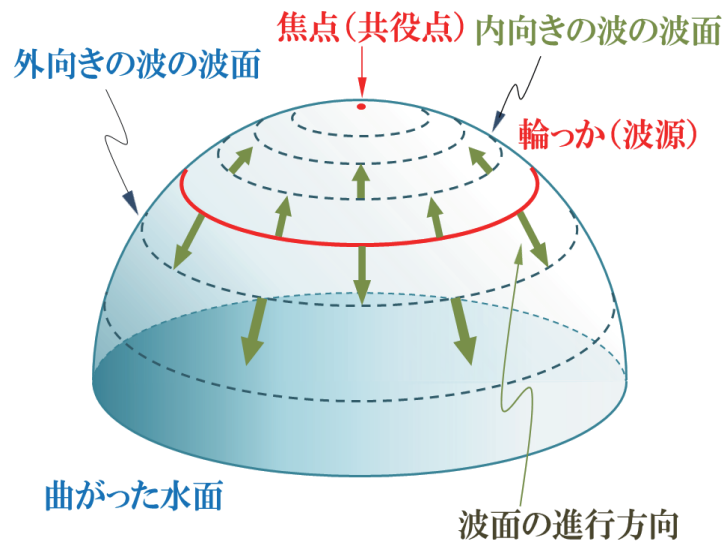


図 5: 重力により丸く曲がった半球面 (半径 $R_* > R$) の水面上を, 半径 R の「輪っか」から発生した円周状の波が進行します. 内向きの波面の円周は縮小し, 北極点でゼロになります. 外向きの波面の円周は増大しますが, 平坦な水面のときと比べると, 進行するにつれて波面の増大具合は小さくなって行き, 赤道面に近づくときほとんど増大しなくなります.

“外向き”の水面波は南極へ向かいますが, その波面の円周は, 輪っかを離れた次の瞬間から減少しはじめ, やがて南極点でゼロになります. この場合の赤道面の輪っかは, 捕捉面の集合の外部境界に対応するもので「見かけの地平面」とよばれ, ここでは波面の円周の収縮率 ρ がちょうどゼロになります. これが, “外向き”に出発したはずの波が (円周が減少する) 内向きに進むということになります. もはや内側と外側の区別がないといってもよいでしょう.

重力が極端に強くなった場合は, もはや完全な球面ではなく, 図7のように“二枚貝”あるいは“レンズ”のような南極と北極方向により潰れた形の水の惑星に例えることで理解できます. その赤道面に輪っかがあり, そこから内向きと外向きに水面波が出て行くのを想像してもらえるとよいでしょう. そのような場合の「輪っか」にあたるのが捕捉面 T^2 です. ここでは, 内向きはもちろん, 外向きの波の波面の円周の収縮率 ρ も輪っかのところで既に正になっています.

ここまでの水の惑星の例によって, 重力により時空が大きく曲がっていると, 外向きに進む光であってもその光波面の面積 A が減少し得ることが分かってもらえたかと思います. さらに言うと, 水の惑星がジャガイモのように少々歪んでいたとしても, また波源である輪っかが完全な円周状から多少ずれていても, 波面の収縮は避けられないことは想像していただけたかと思います. 歪んだ波面であっても, 収縮して行く限り, 逃げ場がないので最終的には必ず波面と波面が交わるしかありません (そこが解説 A にあるコースティックに対応します).

波面に垂直な方向が光の測地線の進行方向にあたりますが, 波面の例からわかる通り, T^2 から垂直に出発した“全ての”光的測地線がいずれ互いに交差して, 必ず「焦点」あ

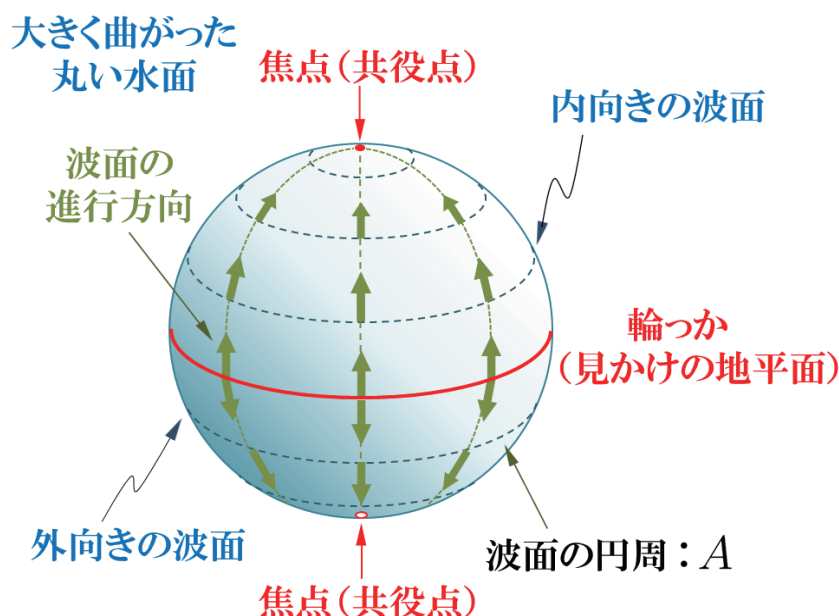


図 6: 強い重力で大きく曲がり、丸い球面 (半径 $R_* = R$) 状になった水面上を、赤道に位置する半径 R の「輪っか」から発生した円周状の波が進行します。内向きの波も、“外向き”の波も、その波面の円周は減少して行き、それぞれ北極点と南極点でゼロになります。波の進行方向にあたる水の惑星の経線が、光点測地線に対応します。赤道の輪っかは“ほぼ”捕捉面に対応します。より正確には捕捉面の集合の外部境界に対応するもので「見かけの地平面」とよべれます。一般には、見かけの地平面に対してコースティックが必ずできるというわけではありませんが、ここでの南極点と北極点は輪っか (赤道) に対するコースティックであり、「焦点」または「共役点」ともいいます。

るいは「焦線」(コースティック)を形成することになります⁴²。それを避ける唯一の方法は、時空 (T^2 の未来領域) のどこかに光の“抜け穴”を見つけるしかありませんが、あるとすれば、それは特異点なのです。このようにして、対称性のない時空においても、捕捉面の概念は、特異点の存在証明に決定的役割をはたすのです。

水の惑星の例と、解説 A に登場した様々な定義の対応は次のようになります。図 8 にもまとめてあります。図 7 における波源の輪っかが捕捉面 T^2 、水の惑星の内部が F^4 、その境界であり水面波が進行する水の惑星表面が B^3 に対応しています。また、輪っかからでた水面波の進行方向を表す (波面に垂直な) 曲線を考えると、ちょうど水の惑星の経線に沿っています。これは水の惑星の上の測地線でもあります。さらに、この曲線は輪っかを始点とし南極点あるいは北極点をその終点とする有限閉区間線分になっています。この有限閉区間線分は、ちょうど T^2 を過去の端点、コースティックを未来の端点として B^3 を生成する光的測地線の有限閉区間線分に対応しています。水の惑星の南極と北極は B^3 上のコースティックに対応します。水面波の円周が、 B^3 を生成する光的測地線線分の断面積 A に対応し、コースティックにあたる南極点と北極点でゼロになります。

⁴² T^2 に垂直で未来向きに発する光の測地線は全て未来の端点をもつことが分かりました。一方、 F^4 の境界面として導入された B^3 が、そのような T^2 から出発する光的測地線だけによって生成され得るかどうかは、当たり前のことではなく、コーシー面の存在が貢献しています。

極端に曲がって潰れた形の水の惑星

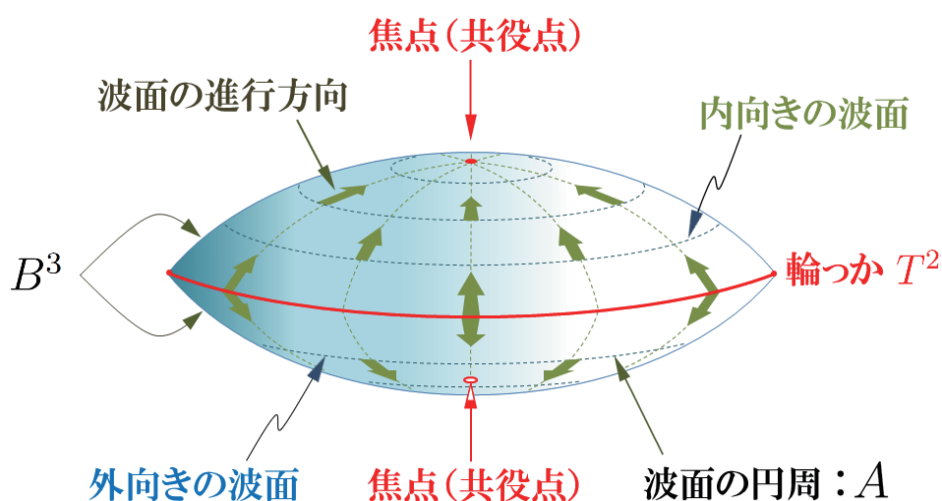


図 7: さらに強い重力によって潰れて、“はまぐり”のようになった水の惑星の表面を、「輪っか」から発生した円周状の波が進行します。内向きも外向きも、いずれの波も「輪っか」から放たれる瞬間から、その波面の円周は収縮して行き、それぞれ北極点と南極点でゼロになります。「輪っか」は捕捉面 T^2 に対応します。内向きの波面も、外向きの波面も輪っかで発生した瞬間から既に収縮へ向かっており、それが解説 A における捕捉面 T^2 では $\rho > 0$ という内容を表しています。南極点と北極点は解説 A のコースティック、球面状の水面がコンパクトな B^3 に対応します。ここでのコースティックは、輪っか（赤道）に対する「焦点」または「共役点」ともいいます。波面の進行方向は経線に沿っており、その赤道から南極、および赤道から北極までの有限閉区間が、 B^3 を生成する光的測地線の有限閉区間線分に対応します。また B^3 を境界とする水の惑星内部の領域は F^4 に、そして水の惑星の内部と外部（宇宙空間）が M_+^4 に対応します。

3.2 コーシー面 C^3

例えば、ボールを地上から鉛直上向きに速さ 20 メートル毎秒で投げ上げるとします。力学法則を用いると、約 2 秒後には高さ 20 メートルに達して速さはゼロとなり、その後約 2 秒で地上に落下すると予言できます。このように、ある時刻で対象の状態（初期データ）が与えられたときに、物理法則に則って対象の状態が時間の経過とともにどのように変化するか（時間発展）を考えることを「コーシー（Cauchy）問題」といいます。力学に限らず、物理法則は一般にコーシー問題の形式で述べることができます。

コーシー面は、そこでの情報（初期データ）から物理法則を用いて、それより未来が全て予想できるような、空間的（または光的）な 3 次元の曲面（超曲面）のことです。コーシー面をもつ時空は「大域的双曲」な時空ともよばれます。最初のコーシー面 C^3 （初期コーシー面）から未来が予測できるので、 C^3 の未来に新たなコーシー面を考えることができます。その未来に次のコーシー面を考え、さらにその未来にコーシー面、... と繰り返して行くことができます。すると、図 9 のように、各時刻のコーシー面が地層のように積み重なって時空（証明の中の M_+^4 ）を埋め尽くすことができます。つまり初期コー

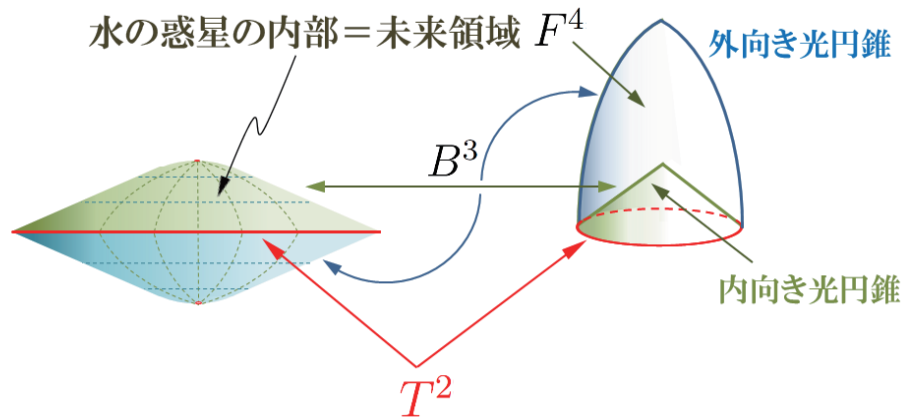


図 8: 図 2 と図 7 の対応関係. 潰れた形の水の惑星の表面が B^3 であり, そこを境界とする惑星内部の領域は F^4 に, そして水の惑星の内部と外部 (宇宙空間) が M_+^4 に対応します. 水の惑星上で内向きの波面が進む上半部分 (緑色) は B^3 の内向き光円錐に, 外向きの波面が進む下半部分 (水色) は B^3 の外向き光円錐に対応します. 水の惑星の例では内部へ向かうことが, 時間を未来向きに進むことに対応します. (表面では南北の極への向きが未来向きですが, そこは光のみが進める未来です. B^3 は T^2 も含みます.) つまり, 水の惑星の内部 F^4 (Future) と表面 B^3 (Boundary) は, T^2 の未来領域にあたります. そのため T^2 の未来は閉じた有界の領域 (F^4 と B^3 の和) に完全に“捕捉”されてしまうことが分かります.

シー面 C^3 をもつ時空 M_+^4 は, C^3 と同様なコーシー面の連続体といっても良いでしょう. これは数学的にも証明されています.

粒子 (質点) の運動を例として考えましょう. 図 9 のように初期コーシー面 C^3 上で位置と速度が与えられると, その未来にあるコーシー面上でも粒子の位置と速度が定まります. したがって, さらに未来にあるコーシー面でも位置と速度が定まるといった具合で, 繰り返して行くことが出来ます. 各時刻のコーシー面に刻まれた粒子の位置を連ねて行くと, M_+^4 の中に 1 つの曲線を描くことができます. これを粒子の「世界線」といいます. これは「時間的曲線」の典型例です. この 1 本の世界線によって, 初期コーシー面 C^3 上の 1 点と未来のコーシー面上の 1 点が結ばれるのが分かります.

多数の粒子を考えると, それぞれの粒子に 1 本ずつ世界線が描けるので, 多数の世界線, つまり時間的曲線群が描けます. ですから, もっと一般に, 初期コーシー面 C^3 上の各点で粒子の初期データ (位置と速度) を与えると, 図 10 のように, それぞれの粒子の世界線の集合から成る時間的曲線群⁴³によって, C^3 上の各点と未来のコーシー面上の各

⁴³一通りに決まるわけではありませんし, 粒子が衝突する場合は世界線が交わることになりませんが, 少し変形するなどして, 互いに交わらない適切な曲線群を選ぶことにします. 時空が時間について向きづけ可能である場合には, 必ずそのような適切な時間的曲線群を設定することができます. C4.6 参照.

点が一対一に結ばれることが分ります。このような対応付けが、証明の中で用いる「連続写像」のアイデアの素です。

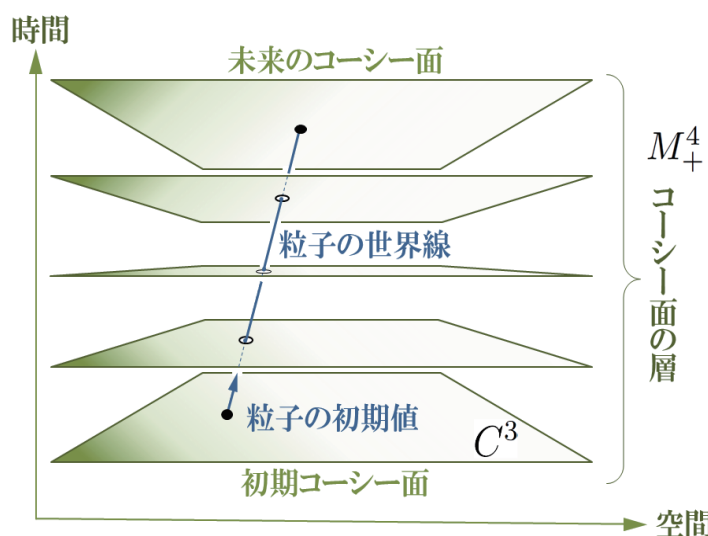


図 9: 初期コーシー面 C^3 の上で粒子の初期値（データ）が与えられると、その後の粒子の運動が決定します。粒子の各時刻の位置を連ねて行くことのできる時間的曲線を、粒子の「世界線」といいます。（図にあるように「直線」的であっても、一般に「曲線」とよんでいます。）コーシー面のある時空 M_+^4 は、 C^3 と同様のコーシー面を層のように連続的に重ねたものになります。

どんな時空でもコーシー面が存在するわけではありません。例えば、初期の準コーシー面⁴⁴ と未来の準コーシー面の間に特異点が存在したとしましょう。特異点では物理法則が成り立ちませんから、その未来では、もはや粒子がどのような世界線を描くのが予測できなくなります。また、途中でタイムマシンのように過去と未来を行き来する時間的曲線（時間的に閉じた曲線）があると、世界線が閉じて、いつまでもぐるぐると回って一行に進まなくなり、やはりコーシー面の条件を満たしません。閉じた時間的曲線が存在すると時間順序が保たれず、因果律が破れるので、物理法則の予言能力を台無しにしてしまいます。このように、コーシー面の存在は、物理法則の予言能力にとって、きわめて重要な条件といえます⁴⁵。

時間の向きをひっくり返していうと、 C^3 の未来にあたる時空領域のどの点からでも、過去向きに時間的曲線を延ばして行くと — 途中で特異点に到達して途切れたり閉じた曲線となってぐるぐる回りだしたりすることなく — 初期コーシー面 C^3 と必ず、しかも唯一度だけ交点をもつことが言えます。これが証明における仮定 (iii) です。

コーシー面が「光的超曲面」の場合もあります。たくさんの直線が集まって面をなし、さらに面が集まって空間をなすように、光の測地線が縦糸のように集まってできる3次元

⁴⁴この例では、もはや本来の“コーシー面”ではないので、代わりに「準コーシー面」とよんでいます。

⁴⁵コーシー面の存在を仮定すると、因果的にとても性質のよい時空に制限して考察を進められることが分かっていたかと思います。一方、特異点定理の研究は、その後スティーブン・ホーキング博士も加わって、できるだけコーシー面の条件を前提から排除する方向に改良がなされて行きました。

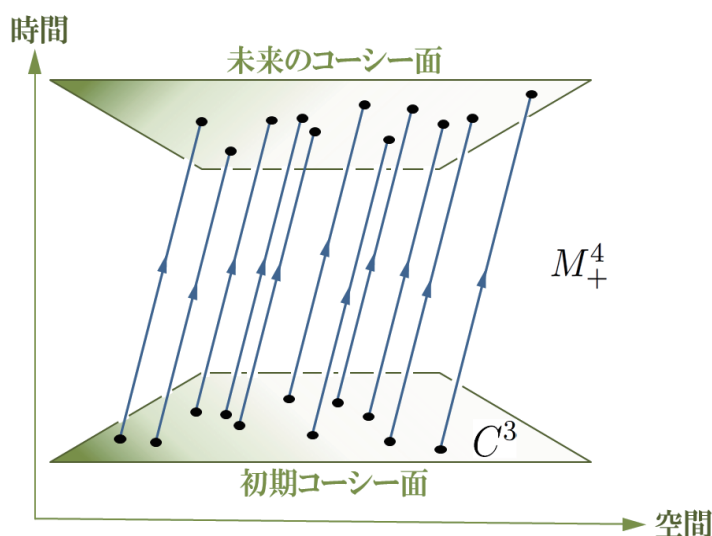


図 10: 多数の粒子を考えると, 多数の世界線 (時間的曲線) が描けます. 一般に, 初期コーシー面 C^3 の各点から時間的曲線を考えることで, C^3 上の各点と未来のコーシー面上の各点を一対一に対応付ける連続写像が得られます.

面を光的超曲面とよびます. 光円錐を思い描いてもらえばよいでしょう. 具体的な例は, アインシュタインの考えた空間が閉じた静的宇宙においては, 任意の 1 点から発する未来向き (または過去向き) 光円錐を考えると, それはコンパクトなコーシー面になります.

3.3 証明の要所

証明の肝は, 条件 (i)–(v) 全てを認めると, B^3 と C^3 の対比により矛盾が導かれるところです.

まず, 上で述べた時間的曲線群による連続写像を過去向きにつかうことで, B^3 上の各点に対して C^3 上の 1 点を対応させることができます. それが可能なのは, コーシー面の存在と, B^3 が非時間的⁴⁶であるためです. この対応は解説 A では連続写像 μ と表記されています. これにより, 図 11 のように B^3 の像 (イメージ) を C^3 上に描くことができるので, それを $\mu(B^3)$ と記すことにします. いわば μ により C^3 上に B^3 の影ができるようなものですが, B^3 と $\mu(B^3)$ は一対一対応しているところが肝心です. すると, もともと B^3 はコンパクトでしたから $\mu(B^3)$ もコンパクトであり, C^3 上の部分集合として「閉集合」になります⁴⁷.

一方, B^3 は十分小さな領域に限って見れば 3 次元ユークリッド空間 (の開部分集合) と

⁴⁶ B^3 の上のどの 2 点も決して時間的曲線で結ぶことはできないということです. これは B^3 は時間的未来領域 F^4 の境界だからです. 解説 A では B^3 を空間的超曲面 B^{3*} に置き換えて推論を進めていますが, ここでは B^3 のまま進めます.

⁴⁷実数直線上の有界开区間 $a < x < b$ (両端の点を含まない) は開集合で, 有界閉区間 $a \leq x \leq b$ (両端の点 a, b を含む) は閉集合の例です. 無限に広がる C^3 の中で像 $\mu(B^3)$ が閉集合ということは「境界」を持つということです. ちょうど図 11 の濃青色の領域には外側に「縁」があると想像してください.

同じと見ることができます⁴⁸。ですから、その像は C^3 上の「開集合」となります⁴⁹。結局 C^3 上の部分集合として閉集合かつ開集合となることから、 $\mu(B^3)$ は C^3 全体と一致すると結論されます⁵⁰。すると B^3 と $\mu(B^3)$ とは一対一対応していますから、結局 B^3 自身もコーシー面であることとなります。しかし、 B^3 (および $\mu(B^3)$) は有限の大きさのコンパクトな空間であり、一方 C^3 は無限に広がった空間ですから、これらを一対一対応で結び付けることは不可能です。これで矛盾が導かれました。したがって、前提である条件 (i)–(v) 全てを同時に満たすことはできません。

5つの条件の内、(ii) を除く4つを物理的に妥当だと認めれば、条件 (ii) が破れなければならず、完備でない光的測地線が存在します。それが時空特異点が存在する証拠ということになります。

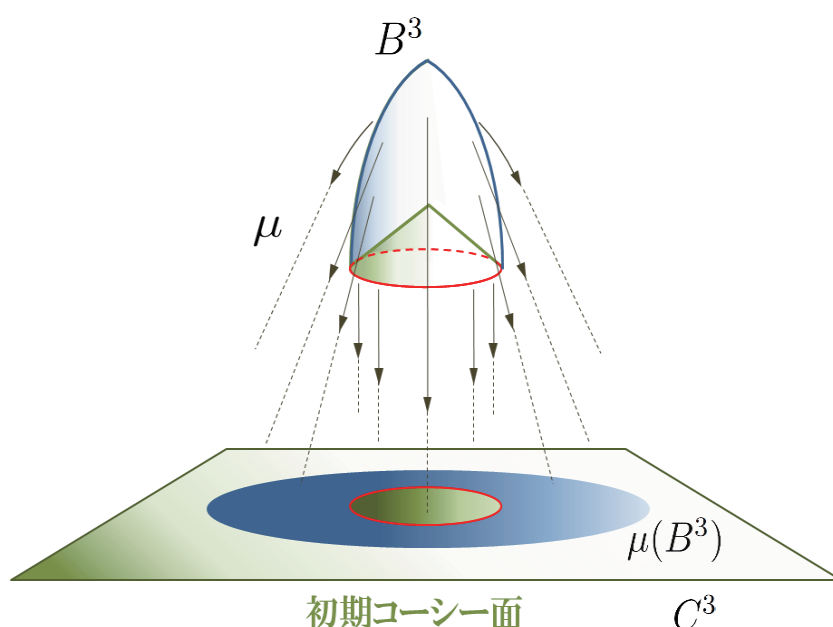


図 11: 連続写像 μ (矢印) により B^3 の像 $\mu(B^3)$ (濃青色領域とその内部の赤色円周および濃緑領域) が C^3 上にできます。そこから矛盾を導き出すことができます。

⁴⁸そのような空間を「位相多様体」といいます。例えば、地球のように丸い球面も、東京や大阪のように狭い範囲に限ってみれば、平面に見えるのと同じことです。図 14, 15 から、 B^3 は一部が“とんがった”印象を持たれるかもしれませんが、ここでの議論では気にする必要はありません。 B^3 は 3次元球面と同じと考えて結構です。小さな領域に限って見ると、3次元ユークリッド空間の開部分集合と同じと見なすことができます。

⁴⁹位相多様体から位相多様体への一対一の上への連続写像（正確にはその逆も連続な「同相写像」または「位相同型写像」4.6 参照）は、開集合を開集合に写すことが分かっています。もともと B^3 は F^4 の「境界」として定義されました。境界には境界が存在しませんから、 B^3 は境界を持ち得ません。今度は図 11 の濃青色の領域の外側には「緑」がないと想像してください。

⁵⁰これは C^3 がひとつつながりの空間、つまり「連結」であることの帰結です。

3.4 補足：光円錐と焦点

証明のキーポイントの一つは、捕捉面 T^2 の未来領域の境界である B^3 がコンパクトになることです。ここでは、その理由を補足説明します。

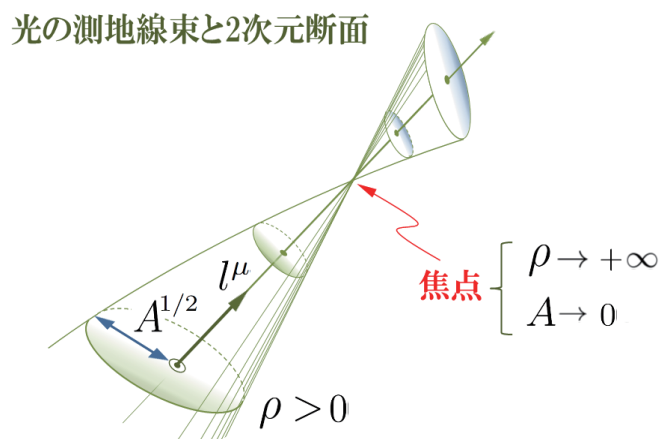


図 12: 光的測地線束が重力の効果で収縮し、焦点（解説 A のコースティック）を形成します。焦点を超えると、今度は測地線束は広がって行きます。

図 12 のように、ある 2 次元面から放たれた光の測地線の束を考えましょう。光波面にあたる 2 次元断面の面積を A とおくと、解説 A に登場した「収縮率」 ρ は一般に次のように定義されます：

$$\text{収縮率 } \rho = \frac{\text{光波面の面積 } A \text{ の減少率}}{\text{面積 } A}.$$

ここで“時間変化”は、光の測地線に沿ったアフィン・パラメーター λ についての変化を意味します。全体にマイナス符号をつけて、面積 A が減少するときに収縮率が正、 $\rho > 0$ 、となるように決めてあります。これが解説 A における ρ の方程式を満たすことが分かります。条件 (ii), (iv), (v) より、有限の時間（アフィン・パラメーターの値）で必ず $\rho \rightarrow \infty$ となります。そこで $A \rightarrow 0$ となることを意味します。これは光の測地線がいくつもその点で交わる点であり、解説 A ではコースティック（焦線）とよんでいます。文脈によって「焦点」あるいは「共役点」とよびます。実際、解説 A で用いた計算式に登場する $A^{1/2}$ は、断面積 A の平方根であり、それは隣り合う 2 つの測地線間の距離を表します。ですから、大まかに言えば、収縮率 ρ は 2 つの測地線が近づきあうスピードを表しています。

具体例として図 3 にあるように、平坦な時空において半径一定の 2 次元球面から垂直に放たれた光の測地線束に対する収縮率を考えてみましょう。半径 r の光波面の面積は $A = 4\pi r^2$ です。収縮率 ρ は (C4.7 参照)，

$$\text{外向きの光の } \rho = -\frac{1}{r}, \quad \text{内向きの光の } \rho = \frac{1}{r}.$$

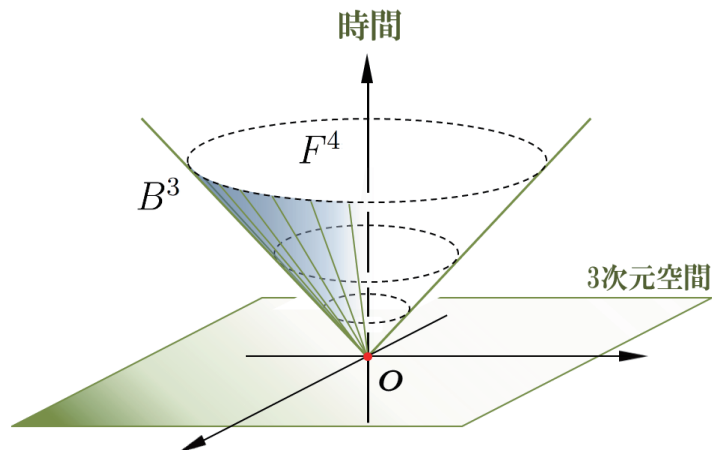


図 13: 原点 O に対する未来の光円錐 B^3 . 点線は, その時刻における光波面です. 図では 1 次元省略してあるため, 円周 (点線) で 2 次元球面を表しています. 原点 O の未来領域は, 光円錐の内部 F^4 と光円錐 B^3 上の点になります. 光円錐の頂点は, この光波面に対する共役点です.

となります. 図 3 から明らかなように, 中心に向けて波面が収縮する内向きの光に対して $\rho > 0$ であり, 中心 $r = 0$ では $\rho \rightarrow \infty$ と発散することが分かります. そこが「焦点」になります.

光の測地線 (あるいは自由粒子の時間的測地線) 束の焦点 (共役点) は, 重力が引力であるために互いに引き寄せあって発生する, きわめて自然な現象であり, 特別に重力が強くなくても起こります. 図 12 にあるように 1 点である必要はなく, 後の図 15 にあるように広がりをもつコースティック (焦線) になることもあります. (本稿では, 共役点, 焦点, 焦線 (コースティック) の用語をあまり区別せずにあつかいます.) 解説 A での収縮率 ρ のしたがう方程式に, せん断ひずみの大きさ “ $|\sigma|^2$ ” が現れています. この項は, 重力の「潮汐力」の効果で, 光波面が球面的な形からずれている大きさを表します. 方程式からわかることは, 球面からのずれの大きさ—つまり球対称性の破れ—もコースティックの形成を助長することです. この点も特異点定理が対称性の有無にかかわらず成り立つ理由です.

特異点定理における焦点の役割を理解するために, 時空の因果構造を決める光円錐について簡単に説明します. 図 13 のように, 水平面が 3 次元の平坦空間を, 縦 (鉛直) 方向に時間軸をとります. 上方が未来向きです. (時刻一定面は全て 3 次元の平坦空間で, この 4 次元平坦時空のコーシー面です.) 原点 O から光を四方八方へ放つと, 図 3 にあるように球面波として広がって行きます. この光の球面波の半径は, 時間の経過 (つまり縦軸の上方へ向かう) とともに大きくなっていきます. 大きくなるスピードが光速 c で一定です. ですから各時刻の光波面を連ねると円錐の形になります. これを「光円錐」といいます. 図 13 では原点 O を頂点とする円錐になっていますが, 時空の各点各点で考えることができます. 光より速く運動する粒子は存在しないので, 光円錐の頂点 O を通過するあらゆる粒子の世界線は, この光円錐の内部にあります. つまり, 光円錐の内部 F^4 およびその

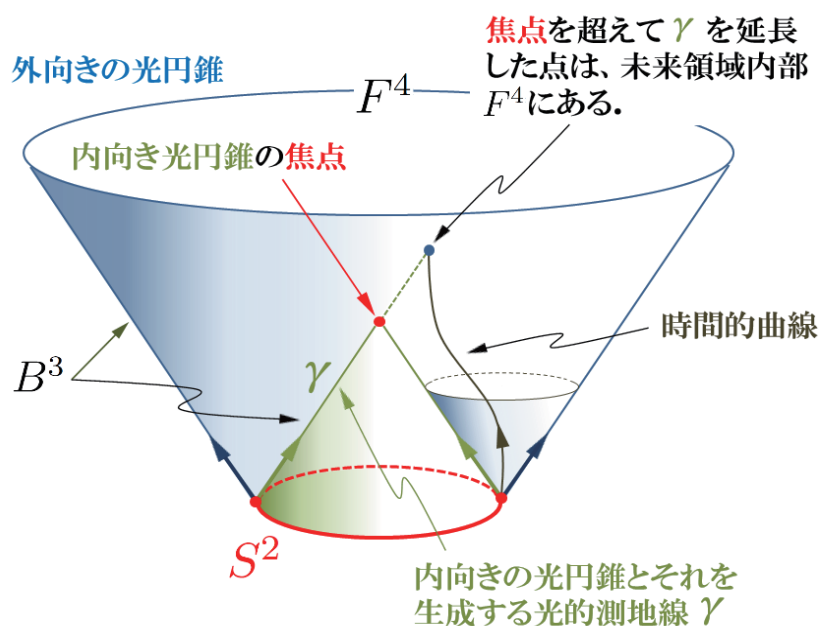


図 14: 2次元の閉じた曲面 S^2 (赤色の円周) の未来領域は、 S^2 から垂直に放たれた外向きの光円錐 (青色) と内向きの光円錐 (緑色) の間の領域になります。 S^2 の内向き光円錐を形成する光的測地線分 γ を、その焦点を超えて延長すると、 S^2 から時間的曲線で結ばれる未来領域内部 F^4 に入ります。

境界 B^3 である光円錐上の点が、原点 O の「未来領域」になります。(過去向きの光円錐も考えることができ、その内部および境界の光円錐上の点が、原点 O の「過去領域」になります。) 曲がった時空でも概ね同じです。

水の惑星の例えでの波源の「輪っか」に対応するものとして、閉じた2次元曲面 S^2 を考えましょう。 S^2 は閉じていればよく、完全な球面である必要はありません。 S^2 上の各点を頂点とする未来向き光円錐を描き、それらの連なり全体を考えると、図 14 のようになります。 外向き光円錐 (青色) と内向き光円錐 (緑色) の間の領域が S^2 の未来領域になります。 未来領域の内部は F^4 、その境界は B^3 です。 S^2 上の点から未来向きの時間的曲線で結ばれる点全体の集合が F^4 です。 一方、境界 B^3 上の点は、時間的曲線で結ぶことは出来ず、光的測地線のみで結ばれます。

内向き光円錐の頂点は、光円錐を生成する光的測地線 γ にとっての焦点 (共役点) です。 焦点を超えて γ を延長した点は、図 14 にあるように、 S^2 上の点から時間的曲線で結ぶことができるので、もはや未来領域の境界 B^3 ではなく、その内部 F^4 に在ることがわかります。

図 15 のように、外向きの光円錐についても焦点あるいはその連なりである焦線 (コースティック) ができることがあります。 その場合も、内向きの場合と同様に、焦点を超えて光的測地線をのばすと、境界面 B^3 の中に留まることはできず、未来領域の内部 F^4 へと入ってしまいます。 図 15 では1つのコースティックしか描いていませんが、出発点の2次元閉曲面 S^2 として捕捉面 T^2 を考えると、そこから垂直に放たれた“全て”の光的測地線は必ず焦点を形成しますから、そこが未来の端点になります。 これが、解説Aにおい

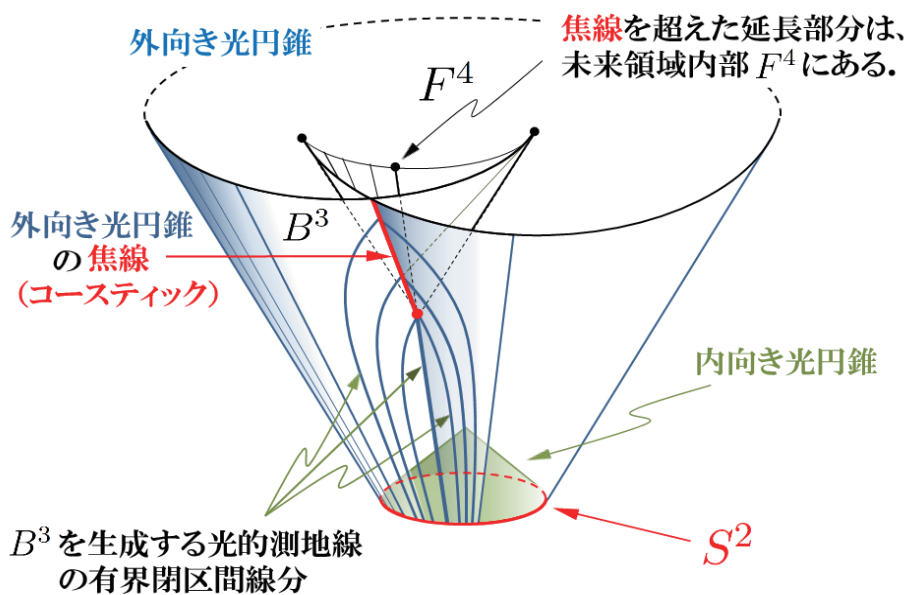


図 15: 2次元の閉じた曲面 S^2 から垂直外向きに放たれた光的測地線 (青色) からなる外向き光円錐. 外向き光円錐を生成する光的測地線も、重力により互いに引き寄せられて焦点あるいは焦線 (赤色線分) を形成し得ます. 焦点を超えると、 B^3 から離れ、その内部領域 F^4 に入るため、焦点が未来の端点になります. 2次元閉曲面 S^2 として捕捉面 T^2 を考えると、 B^3 を生成する全ての光的測地線が焦点に未来の端点をもつこととなります.

て B^3 を生成する光的測地線はコースティックに未来の端点を持つ有界閉区間線分となり、 B^3 が閉じたコンパクトな光的超曲面になる理由です.

4 C：より詳しい解説

ここでは、解説 A と B で取り上げたキーワードについてさらに詳しく解説します。若干の数式も用いた説明ですが、理系の大学学部生であれば理解できると思います。各節が独立して読めるようにしてあります。数式の表記は、解説 A、解説 B ではペンローズさんの特異点定理の原論文にある表記に合わせましたが、本章では現在手に入りやすい標準的教科書で多く使われている記法を用いることにします。例えば、解説 A では時空計量の符号を $(+, -, -, -)$ (条件 (i) 参照) としてありますが、本章では $(-, +, +, +)$ としています。これにより議論は何も変わりません。また、光速 c や重力定数 G は規格化して $c = 1 = G$ とする単位系をとります。その他、「共変微分」、「測地線方程式」、「曲率テンソル」といった、一般相対論の標準的教科書に登場する基本数式は、本章の最期 4.7 に付録として挙げておきます。

4.1 特異点定理の特異点

特異点定理は、閉じた捕捉面の存在など一定の条件下で時空に必ず“特異点がある”ことを証明するものです。しかし、厳密に言えばこの記述は正確ではありません。なぜならば曲率が発散するなどの“特異点”はもはや時空上の点としては取り扱えないからです。我々が住む時空は滑らかな多様体 (C4.6) であり、隣り合う時空点間の微小距離を決める計量は少なくとも二階微分可能であることを要求します。これは時空の各点で適当な局所座標系を用いれば曲率テンソル (C4.7) が定義できることを意味します。では、正則な時空点の集合を用いてどの様に時空に“特異点”があることを定義したら良いのでしょうか？ 宇宙のあらゆる天体や塵は他の天体が生み出す重力に引かれて運動しています。このような重力のみがはたらくときの天体の運動の 4 次元時空上での軌跡は「時間的測地線」(C4.7) とよばれ、ロケットなどで燃料を使って加速度運動しない限りすべての物体はこの時間的測地線に沿って運動しています。特に光子などの質量のない粒子が辿る軌跡を「光的測地線」とよびます。これらの測地線を総称して「因果的測地線」といいます。各因果的測地線に沿って、アフィン・パラメーターと呼ばれるパラメーターが自然に定義され、特に時間的測地線の場合にはその測地線に沿って運動する物体の「固有時間」(C4.7) に一致します。時空が特異であるということは、このアフィン・パラメーターが過去か未来かどちらか一方に少なくとも無限に伸ばせない測地線が存在することです。例えばシュヴァルツシルト時空の場合、ブラックホールの中心点に向かって動径方向に運動する物体は、有限の固有時間で曲率の発散した $r = 0$ の点に到達します (C4.2 参照)。この物体の時間的測地線は少なくとも未来側に無限にアフィン・パラメーターを伸ばすことが出来ず、「不完備」な測地線とよばれます。因果的測地線に関して時空内にこのような不完備な測地線が一本でも存在するとき、時空は特異であると定義します。では、例えば平坦なミンコフスキー時空から時空点を 1 点だけ人工的に取り除いた時空は特異でしょうか？

一見、この点に到達する因果的測地線に沿って、アフィン・パラメーターは有限なので時空は特異であると言えそうですが、実はそうではありません。あくまでも時空を“最大限拡張した”時空についての定義なので、1 点を埋め直せば因果的測地線のアフィン・パラメーターは無限に伸ばすことが可能で、この最大限拡張された時空は特異ではありません。

ん。解説 A で言及されているシュヴァルツシルト時空の場合は、いくら頑張っても $r = 0$ の点を越えて拡張できないので、時空は特異であると言えるのです。このような因果的測地線が不完備となる特異な時空が必ず存在することをペンローズさんの特異点定理は主張しているのです。

4.2 シュヴァルツシルト時空

アインシュタイン方程式の静的球対称真空解であるシュヴァルツシルト計量は、 m を中心天体の質量を表す定数として通常次のように表されます：

$$ds^2 = -(1 - 2m/r) dt^2 + \frac{1}{(1 - 2m/r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

角度座標 (θ, φ) の関与する部分が、2次元球面の計量 $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ としてひとまとまりになっており、時空の球対称性を反映しています。

この表式では例えば第2項目が $r = 2m$ のところで無限大に発散してしまいます。幸い $r = 2m$ の位置は単に座標系 (t, r, θ, φ) の振舞いが良くないだけで、座標系の取り換えにより解消できます。そのようなところを座標特異点といいます。 $r = 2m$ は、ブラックホールの事象の地平面（イベント・ホライズン）にあたります。原論文では $r = 2m$ の外部と内部を結びつけて考察するため、 t の代わりに先進時間 v を用いています。先進時間は $dv = dt + dr/(1 - 2m/r)$ の関係式によって定義されます。この新しい座標系 (v, r, θ, φ) では、解説 A にあるように計量の各成分が発散し得るのは中心 $r = 0$ のみです。実際に曲率テンソル $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ から構成されるスカラー量を計算すると

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{48m^2}{r^6},$$

となり $r = 0$ でのみ発散します。これはスカラー量ですから、座標変換によって取り除くことのできない物理的な特異点です。一般相対論では、このような真の特異点 $r = 0$ はもはや時空上の点とは見なしません。先進時間を用いた座標系 (v, r, θ, φ) では、ある半径 r_0 の球面から、その球面に垂直未来向きに発した内向きの光的測地線のアフィン・パラメーター λ は、 $\lambda = r_0 - r$ ととることができます。この光線は明らかに有限時間 $\lambda = r_0$ で $r = 0$ の特異点に到達します。そこはもはや時空内の点ではないので、それ以上測地線を延ばすことも不可能です。こうした事情が前節 4.1 で述べたように「不完備な光の測地線の存在を特異点とみなす」ことの根拠になります。

解説 A では「 $v = \text{一定}$, $2m > r = \text{一定}$ の球面 S^2 が捕捉面」であると述べました。そのような球面に垂直で未来向きの光的測地線を考えます。測地線の外向きおよび内向きそれぞれの接ベクトルを l_+^μ , l_-^μ とすると、先進時間座標系では、内向きは（上で述べたとおり） $l_-^\mu (\partial/\partial x^\mu) = -\partial/\partial r$ となり、外向きは $l_+^\mu (\partial/\partial x^\mu) = -2/(1 - 2m/r)(\partial/\partial v) - (\partial/\partial r)$ となります。つまり、内向き外向きのいずれも r 成分が $l_\pm^r = -1$ ですから、いずれの方向の収縮率 ρ_\pm も、球面の面積 $A = 4\pi r^2$ を用いて、

$$\rho_\pm = -\frac{1}{A^{1/2}} \frac{dA^{1/2}}{d\lambda} = -\frac{1}{A^{1/2}} l_\pm^\mu \frac{\partial A^{1/2}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{4\pi r^2}} \frac{d}{dr} \sqrt{4\pi r^2} = \frac{1}{r} > 0.$$

このようにして領域 $2m > r$ における S^2 が捕捉面であることが確認できます。

座標系 (t, r, θ, ϕ) で考えても同じです。内部 $2m > r$ では、 $1 - 2m/r < 0$ となることから、 t ではなく r が時間方向の座標であり、未来向きは r が減少する向きであることが読み取れます。ですから、内向きか外向きかに関係なく、未来へ向かう限り面積 A は減少するしかないのです。

4.3 カー時空

前節 4.2 で紹介したシュヴァルツシルト時空は、静的かつ球対称であるという非常に単純な性質を持つ時空でした。その次に単純な性質を持つのが、定常かつ軸対称であるカー時空で、回転しているブラックホールを表しています。このカー時空には、定常・軸対称かつ真空である時空はカー時空以外には存在しないという性質（唯一性）⁵¹、カー時空を多少歪ませても時間がたてば結局カー時空に戻ってしまうという性質（安定性）があるため、私たちの宇宙におけるブラックホールの最終状態はこのカー時空で与えられるだろうと考えられています。実際、昨今の重力波観測においても、ブラックホールやコンパクト天体が合体した暁に生じるのはカーブラックホールであるとして解析が進められています。

カー時空の計量は、やや複雑ですが

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 \left(1 + \frac{2mr}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \right] \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{4mr}{\Sigma} a \sin^2 \theta dt d\phi$$

と与えられます。ただし、 $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ 、 $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ と定義しました。この計量の各成分は時間 t にも角度 ϕ にも依存しないので、定常かつ軸対称な時空を表しています。 m は質量、 a は回転と関係するパラメーターで、 $a = 0$ とすると球対称なシュヴァルツシルト時空に帰着します。なお、この計量は無限遠 $r \rightarrow \infty$ で

$$ds^2 \simeq - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \frac{4m}{r} a \sin^2 \theta dt d\phi$$

と振る舞いますが、この式からブラックホールの質量が m 、角運動量が Ma と読み取れることが知られています。また、 $m > a > 0$ の場合には $\Delta = 0$ を満たす動径座標が $r = r_{\pm}$ と2つ出てきます。 $r = r_+$ 、 $r = r_-$ 一定面はそれぞれ外向き、内向きの捕捉面（の集合の外部境界）であり、特に $r = r_+$ はブラックホール領域の表面である事象の地平面となっています。これらのことから、カー計量が表しているのは一定の角速度で回転する軸対称なブラックホールであるとわかります（図 16）。

ペンローズさんの論文には「カーの最近の回転解⁵²も物理的特異点を持っているが、それでも高度な対称性がある」と書かれています。この言葉の意味を少し説明してみましょ

⁵¹事象の地平面の外側、すなわちブラックホールの外側にいる私たちに見える領域には特異点が存在しないということは仮定しています。なお、定常かつ真空であれば時空は軸対称となる、という定理も別途証明されているため、実際には定常かつ真空でさえあれば時空はカー時空となることが示されます。

⁵²カー計量が発見されたのは1963年で、ペンローズ論文が発表された1965年の2年前のことでした。当時重力理論研究の一気に発展した時代であったことをうかがえる記述だと思います。

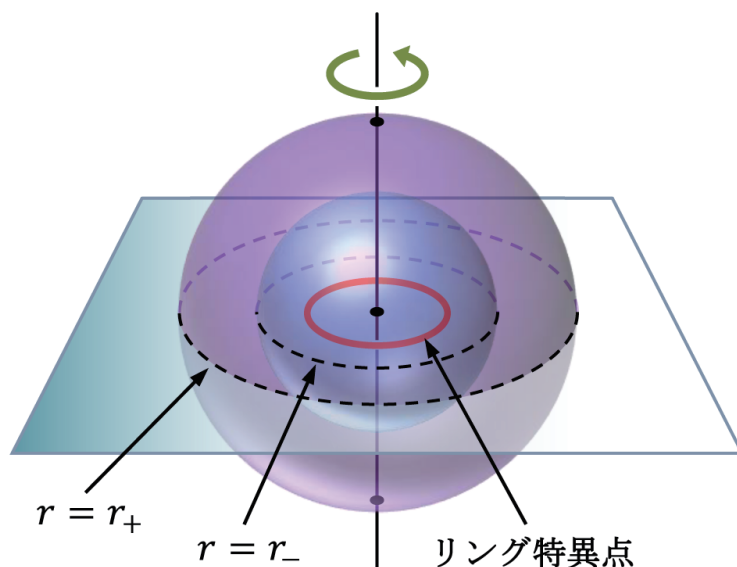


図 16: カー時空の模式図. 一定の速度で回転するブラックホールを表している.

う. その文章に先立つ部分にも書いてありますが, シュヴァルツシルト時空は静的・球対称という非常に高い対称性を持っており, 中心 $r = 0$ に特異点が生じているのもそれが原因ではないか, という疑問がわいてきます. たとえば, ブラックホールが回転しているなど球対称ではない場合には, 特異性が弱まって特異点が解消してしまう可能性などが原理的には考えられます. この疑問の解決に向けて, ひとまず回転ブラックホールを表すカー時空の特異点について調べてみましょう. カー時空について曲率テンソルから構成されるスカラー量を求めると

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda}R^{\mu\nu\sigma\lambda} = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\Sigma^2 - 16a^2r^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^6}$$

となりますが, これは $\Sigma = 0 \Leftrightarrow r = 0, \theta = \pi/2$ の地点に曲率が発散する特異点が発生していることを示しています. この特異点に沿った方向の時空計量は $ds^2 \approx \frac{2mr}{\Sigma} a^2 d\phi^2$ となりますが, これはカー時空の特異点が角度 ϕ の方向に伸びたリング状の構造を持つことを示しています (図 16). したがって, 球対称なシュヴァルツシルト時空では中心 $r = 0$ の一点に局在していた特異点が, 定常軸対称なカー時空では回転の効果によってリング状に変形することがわかりました. 変形こそするものの回転を与えた程度では特異点は解消されないまま, という結果になったわけですが, これはもちろん特異点定理の主張 (捕捉面が存在すればその内部に特異点が必ず存在する) にそぐうものとなっています.

ここまではカー時空の諸性質について説明してきましたが, では私たちの宇宙で実際に重力崩壊が起こった暁にはどのような時空や特異点の実現されるのでしょうか? カー時空は定常かつ軸対称な時空ですが, 一般的な重力崩壊では軸対称でないようなより複雑な歪み方をした時空が生じるでしょう. そのような場合でも, 本節冒頭でも述べた通りカー時空に与えた摂動は時間とともにゼロに近づいていくという性質があるため, 長時間経過後の時空はカー時空にほぼ一致します. しかし, この性質は実は事象の地平面 $r = r_+$ より外側の領域についての話であり, 地平面の内部領域における時空の歪みはより複雑な振り舞いをします. 特異点定理によって地平面内部のどこかに特異点が存在することは保証され

ているわけですが、その特異点がどのような性質を持つかについては別途調べてみないとわかりません。カー時空の地平面内部については、内側の地平面 $r = r_-$ 付近に時空の歪みが集積することで特異点が発生しうることが判明しており、そのためリング特異点よりも複雑な形状をした特異点が発生するのではと考えられています。この特異点の形状や性質、さらにはカー時空の安定性の厳密な導出などについては未解明の点もあり、現在でも理論物理・数理論理における重要な研究対象となっています。

4.4 オッペンハイマー・スナイダー崩壊

球対称重力崩壊では真空中にある球体の物質の時間発展を考えます。球対称で真空の領域の計量は、バーコフの定理により一意的にシュヴァルツシルト解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

によって与えられます。

球体の時間発展はもちろん物質の性質や分布に依存します。ここで最も簡単な例として、球体を構成する物質は圧力がないものとし、かつ、球体内部は一様かつ等方であると仮定します。これはオッペンハイマーとスナイダーによって1939年に提案された重力崩壊モデルです。

まず球体の表面を考えます。圧力がない物体の表面 $r = R$ は自由落下するので測地線方程式に従います。シュヴァルツシルト時空は静的なので測地線に沿ってエネルギー

$$E = \left(1 - \frac{2m}{R}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2)$$

が保存し、球体の表面 $r = R$ に対する運動方程式は

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{2m}{R} - E^2 = 0 \quad (3)$$

となります。ここで τ は表面とともに動く観測者の固有時間です。式(3)はただちに積分することができます。初期に球体が半径 R_i で止まっていたとすると、

$$E^2 = 1 - \frac{2m}{R_i} \quad (4)$$

であり、媒介変数 η をもちいて

$$R = \frac{1}{2}R_i(1 + \cos\eta), \quad \tau = \left(\frac{R_i^3}{8m}\right)^{1/2} (\eta + \sin\eta) \quad (5)$$

で与えられます。 $\eta = 0$ が初期時刻 $\tau = 0$ に対応します。

球体内部の計量は仮定によりフリードマン・ルメートル・ロバートソン・ウォーカー (FLRW) 計量によって与えられます。ここで空間曲率を正に選ぶと、その計量は

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (6)$$

と書くことができます。τは時間座標ですが、χ = 一定の観測者（共動観測者といいます）が観測する固有時間という意味もあります。物質場が圧力のない流体であるとする、アインシュタイン方程式は

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho - \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{3}{a} \frac{da}{d\tau} \rho = 0$$

という方程式系に帰着します。ここでρは物質のエネルギー密度です⁵³。この方程式系は積分することができて、その解は媒介変数ηを用いて

$$a = \frac{1}{2} a_m (1 + \cos \eta), \quad \tau = \frac{1}{2} a_m (\eta + \sin \eta), \quad \rho = \frac{3a_m}{8\pi} a^{-3} \quad (7)$$

となります。ここでaはη = 0すなわちτ = 0で最大値a_mをとり、この瞬間に球体は一旦静止します。またη = πすなわちτ = (π/2)a_mではa = 0になりρが発散しますから時空特異点に対応します。

考えている球体には表面があります。いま表面がχ = χ₀で与えられるとしましょう。その面積は、式(6)からR(τ) = a(τ) sin χ₀を用いて4πR²(τ)によって与えられます。したがって、

$$R = \frac{1}{2} a_m \sin \chi_0 (1 + \cos \eta), \quad \tau = \frac{1}{2} a_m (\eta + \sin \eta) \quad (8)$$

となります。このように球体の表面を内部の量と外部の量でそれぞれ(8)と(5)のように表すことができましたが、両者は同じ球体の表面積4πR²(τ)を与えるので、この2つの表現は一致していなければなりません。これよりm、R_iとa_m、χ₀の関係が

$$R_i = a_m \sin \chi_0, \quad m = \frac{1}{2} a_m \sin^3 \chi_0$$

となることがわかります。さらに、これらを用いて、式(7)の第三式を使うと、エネルギー密度ρが

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

と与えられることもわかります。

Rとτの関係は式(5)で与えられます。tとτの関係は式(2)–(5)から、

$$t = 2m \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R_i}{2m} - 1} + \tan \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\frac{R_i}{2m} - 1} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + 2m \sqrt{\frac{R_i}{2m} - 1} \left[\eta + \frac{R_i}{4m} (\eta + \sin \eta) \right] \quad (9)$$

と求めることができます。ただしη = 0でt = 0になるように積分定数を定めています。

図17は、式(5)と(9)を用いて、球体の半径Rの時間変化を、横軸を表面の共動観測者の固有時間τにとったR(τ)とシュヴァルツシルト時空の時間座標tにとったR(t)として、プロットしたものです。この図からもわかるように、重力崩壊がすすむと表面の共動観測

⁵³解説 A, B3.4, および C4.5 における光波面の収縮率ρとは異なるものです。

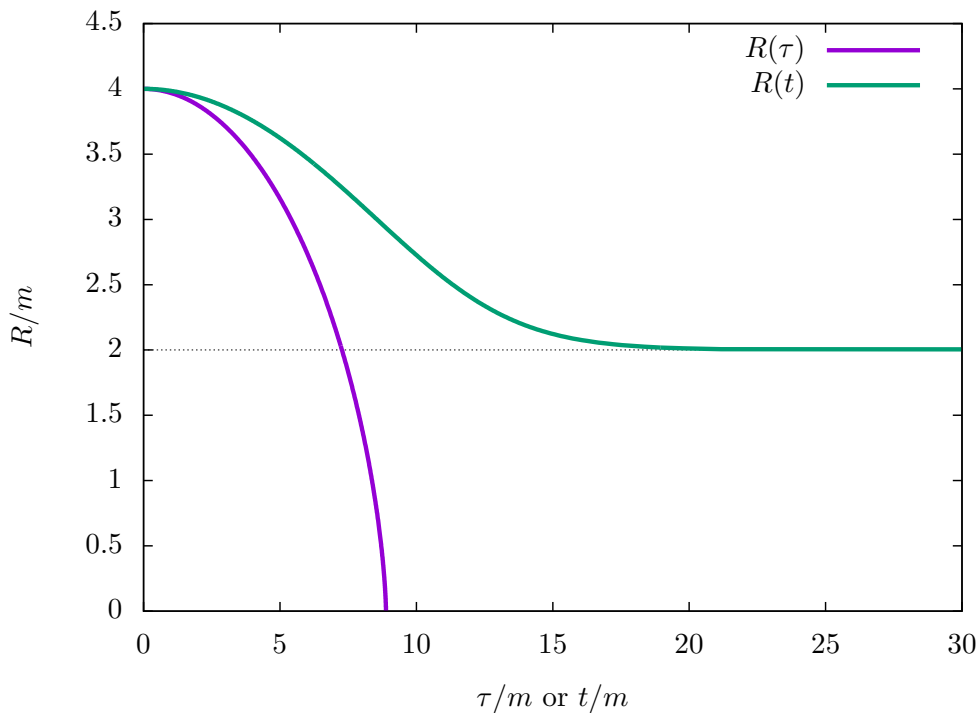


図 17: 紫色の曲線は横軸を τ/m , 緑色の曲線は横軸を t/m として, 球体の半径 R の時間変化をプロットした. ただし $R_i = 4m$ としてある.

者は有限の固有時間でシュヴァルツシルト半径 $2m$ 内に入ります. シュヴァルツシルト時空中では $r = 2m$ が事象の地平面に対応しますから, この瞬間にシュヴァルツシルトブラックホールができたということが出来ます. さらに有限の固有時間後の $\tau = (R_i^3/(8m))^{1/2}\pi$ に $R = 0$ の時空特異点に到達することがわかります. 球体の内部はこの同じ τ の時刻にすべての球面の面積が 0 になりエネルギー密度が発散して時空特異点になります. 一方, 外部のシュヴァルツシルト時空の時間座標 t でみると球体の半径 R は徐々に $2m$ に近づきますが, いつまで経っても $2m$ に到達することはない, R は $2m$ に漸近していきます.

この時空の様子を模式的に描いたのが図 18 です. オッペンハイマー・スナイダー崩壊模型の素晴らしいところは, その時空がアインシュタイン方程式の厳密解であることです. 時空の計量が完全に初等関数で書けているので, 時空の様々な構造を一切の曖昧さなく決定することができます. 歴史的には, このオッペンハイマー・スナイダー崩壊によって初めて, 重力崩壊からブラックホールが形成される物理的で厳密な例が与えられたといえるでしょう.

オッペンハイマー・スナイダー崩壊は球体内部において圧力のない物質と一様等方性を仮定していますが, 球対称だとしても物質が圧力を持っていたり球体内部が非一様である場合には, 一般にアインシュタイン方程式の厳密解を求めることは困難になります. またそのような場合には, 球体の表面の軌道はもはや測地線には沿わなくなります. しかし,, 物体の圧力が重力に抗いきれなくなって重力崩壊が進むと, 物体の表面が有限の固有時間でシュヴァルツシルト半径の内側に入り, 一方, 外部のシュヴァルツシルト時空の時間座標では球体表面はいつまで経ってもシュヴァルツシルト半径には到達できないという描像は, 球体内部の時空の詳細によらない一般的なものです.

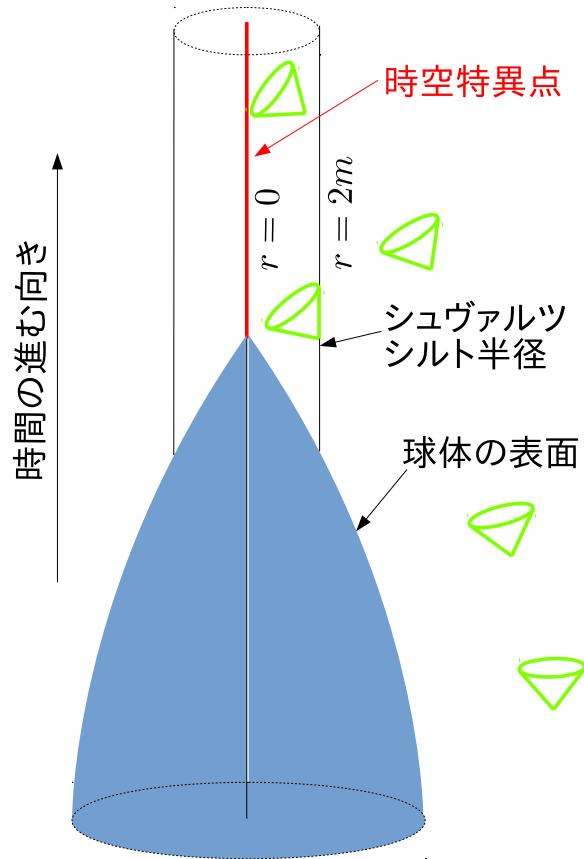


図 18: オッペンハイマー・スナイダー崩壊が表す時空の構造. 緑色の円錐は未来向きの光円錐を表す.

4.5 エネルギー条件と光的測地線束の振舞い

解説 A にある, 収束率 ρ と A のしたがう方程式について考察します. 光の測地線のアフィン・パラメーターを λ とし, その進行方向を表す 4 次元ベクトル $l^\mu = dx^\mu/d\lambda$ の 4 次元発散により与えられた収縮率 $\rho = -(1/2)l^\mu{}_{;\mu}$ は, 光波面の面積 A を用いると,

$$\rho = -\frac{1}{2} \frac{1}{A} \frac{dA}{d\lambda} = -\frac{1}{A^{1/2}} \frac{dA^{1/2}}{d\lambda}$$

と表すことができます (C4.7 参照). これは解説 A に登場した ρ の方程式を満たします. 実際, A は測地線束の無限小断面積ですから, 図 12 に示してあるように, その平方根 $A^{1/2}$ は隣り合う 2 つの測地線間の距離を表します. そこで $A^{1/2} = X$ と置くと, ρ の定義から,

$$A^{1/2}\rho = -\frac{dX}{d\lambda} \quad \rightarrow \quad [(A^{1/2})_{;\mu}l^\mu]_{;\nu}l^\nu = -(A^{1/2}\rho)_{;\mu}l^\mu = \frac{d^2X}{d\lambda^2}$$

となります. したがって, $A^{1/2}\rho$ は 2 つの測地線が近づく速度, $(A^{1/2}\rho)_{;\mu}l^\mu$ は加速度そのものです. すると解説 A の第 2 式は, $k = |\sigma|^2 + \Phi$ とおくと,

$$\frac{d^2X}{d\lambda^2} = -kX,$$

と表すことができます。これは単位質量の質点が「ばね定数 k 」のばねにつながれて「単振動」するときにしたがう運動方程式と同じ形をしています。もちろん、今の場合はばね定数にあたる量 k は一般に定数とは限らないのですが、証明で仮定したエネルギー条件 (iv) から ($t^\mu \rightarrow l^\mu$ と置き換えると) $\Phi = -(1/2)R_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$, また $|\sigma|^2 \geq 0$ ですから、少なくとも k は非負の値をとります。すると $k > 0$ の場合には、 X の振舞いは、ばねによる振動とだいたい同じと予想できるので、実際に上の方程式を解かなくとも X は必ずゼロになることは予想できるでしょう。また $k = 0$ の場合も、もともと捕捉面では $A^{1/2}\rho > 0$ ですから、 X の初速度は負 (つまり X が減少する傾向にある) ので、やはり有限のアフィン時間 λ で X はゼロとなります。 $X \rightarrow 0$ のとき、 $A \rightarrow 0$ ですから、そこが焦点です。

物質のエネルギー・運動量テンソルを $T_{\mu\nu}$ と表し、アインシュタイン方程式 (C4.7 参照)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

を用いると、 $\Phi = 4\pi T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu$ となります⁵⁴。これは光の測地線で測ったエネルギー密度に比例していますから、物質密度が大きな正の値をとるほど“ばね定数” k は大きくなります。また重力の潮汐力により光測地線束の断面が歪んでいるほど $|\sigma|^2$ は大きくなるので、やはり k は大きくなります。結局、「エネルギー条件 (iv) を満たす物質」の存在も、「対称性を破るひずみ」の存在も、いずれも焦点がより発生しやすくなるよう寄与することがわかります。

4.6 トポロジー

特異点定理の証明ではトポロジーという数学の手法を用います。ここでは、証明を理解する上で必要な概念について説明します。

4.6.1 位相空間

トポロジーで扱うのは位相空間です。位相空間というのは、集合 X に位相構造を入れたものです。位相構造を入れるというのは、 X の部分集合のうち、どれが開集合でどれが開集合でないのかを決めることです。ただし、(i) 空集合は開集合、(ii) X 自身は開集合、(iii) 開集合と開集合の共通部分は開集合、(iv) 開集合の族の和集合は開集合、をすべてみたくように決めます。これだけがルールです。

1つの集合 X にはいくつもの位相構造を考えることができます。 n 個の実数の組 (x_1, \dots, x_n) 全体のなす集合を \mathbb{R}^n といいますが、 \mathbb{R}^n の位相構造としては、自然なものが1つあります。 \mathbb{R}^n の部分集合 U が開集合であるとは、 U の任意の点 x に対して $\epsilon > 0$ が存在して、 x の ϵ -近傍

$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \epsilon\}$$

が U にすっぽり収まるときをいいます。この判定法によってさだまる \mathbb{R}^n の位相構造が「自然なもの」といったものです。ひとつ注意するとすれば、開集合というのは、最初から

⁵⁴全体の符号は本章の約束に合わせてあります。また解説 A で λ と表記した「宇宙項」は、ここでは Λ とし、光的測地線のアフィン・パラメーター λ と区別してあります。

決まっているものではなく、位相構造によってあとから備え付けられるものだけのことです。 \mathbb{R}^n の場合は、自然な位相構造が考えられるというだけです。

2つの位相空間 X, Y の間の写像 $f : X \rightarrow Y$ を考えます。 f が連続だというのは、 Y の任意の開集合 U の原像 $f^{-1}(U)$ が、いつでも X の開集合になっているときをいいます。 ふつうの実関数 $y = f(x)$ が連続だというのも、 $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ と考えると同じ意味ですので、 $f(x)$ が不連続関数の場合など、いくつか例をみても連続/不連続の感覚がつかめるかと思えます。

連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が全単射で、逆写像 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ も連続なとき、 f は位相同型写像だといい、 X から Y への位相同型写像が少なくとも1つ存在するとき、 X と Y は位相同型だといいます。 位相同型は位相空間の同値関係になっていて、位相同型な X と Y は集合としても同じですし、開集合の構造も同じですので、位相空間として同一のものです。

特異点定理の証明では、「コンパクト」というのが一つのキーワードになっています。位相空間にはコンパクトなものそうでないものがあります。 X の開集合の族

$$\mathcal{C} = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

は、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$$

のとき、つまり \mathcal{C} に属する X の開集合の和集合が X 全体になるとき、 X の開被覆だといいます。 Λ は添え字の集合で、アルファベットの集合でも、自然数の集合でも、非可算集合でも何でもよいです。 X がコンパクトだというのは、どんな開被覆 \mathcal{C} にも有限部分被覆が存在すること、つまり \mathcal{C} の添え字の集合の有限部分集合 Λ' が存在して、

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda = X$$

となるときをいいます。

「部分空間」についても説明しておきましょう。位相空間 X の部分集合 A は、 X から自然に位相構造を引き継いで、それ自身、位相空間になっています。位相空間 A を X の部分空間といいます。 X の開集合 U を用いて $U \cap A$ と書けるものを A の開集合と定めます。これが X の位相構造を引き継ぐといった意味です。ここでも注意したいのは、何々が開集合というとき、どの位相空間に対しての開集合かをはっきりしておかなければならないということです。つまり、 A の開集合は必ずしも X の開集合とはなっていません。

特に \mathbb{R}^n の部分集合 A は位相空間として見るわけですが、 A がコンパクトだというのは、 A が \mathbb{R}^n の有界な閉集合になっていることと同値になっています。 A が有界だというのは、正数 R があって、 A のすべての点 (x_1, \dots, x_n) に対して $|x_i| < R$ ($i = 1, \dots, n$) が成り立つときをいいます。また、 A が閉集合だというのは、 A の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus A$ が \mathbb{R}^n の開集合となっていることをいいます。例えば、3-球面

$$S^3 = \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 | w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

は \mathbb{R}^4 の有界閉集合なのでコンパクトですが、 S^3 から1点を除いた空間 $S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\}$ は \mathbb{R}^4 の閉集合ではないのでコンパクトではありません。実際、 $f : S^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f : (w, x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right)$$

によってさだめると、 f は連続な全単射で、逆写像 f^{-1}

$$f^{-1} : (X, Y, Z) \mapsto \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1, 2X, 2Y, 2Z)}{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}$$

も連続です。したがって、 S^3 から 1 点を除くと、 \mathbb{R}^3 と位相同型になります。

S^3 から 1 点を除いたところで有界集合なのに、と思ったかもしれませんが、トポロジーでは開集合の構造だけを問題にしている、長さや大きさや角度とは無関係な「空間のほしいの形」にだけ興味があります。

4.6.2 時空のトポロジー

時空のトポロジーについてのお話です。時空のモデルはローレンツ計量の入った多様体です。そこで多様体についておさらいしておきます。 n 次元位相多様体とは、位相空間 M であって、 M の各点 x には x が属する \mathbb{R}^n と位相同型な開集合が存在するもののことです。 \mathbb{R}^n のかわりに、それと位相同型な n 次元開直方体

$$I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \ (a_i < b_i; i = 1, \dots, n)\}$$

を考えてもよいです。あるいは、いくつかの n 次元開直方体を、それぞれの「のりしろ」を位相同型写像によって貼り合わせて作った位相空間が位相多様体だともいえます。例えば、2 枚のテープを貼り合わせると円筒やメビウスの輪を作れます。

今、テープは開直方体だと思っていましたが、閉長方形だとみなしたときは、「境界付きの」多様体になります。境界付きの多様体 M とは、各点 x に対して、 x が属する、 \mathbb{R}^n または上半空間

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

のどちらかに位相同型な開集合があるときをいいます。 \mathbb{H}^n の $x_n = 0$ に対応する点全体のなす集合が M の境界で、 ∂M と書きます。

位相多様体 M は開直方体を貼り合わせてできるといいましたが、開直方体は M の局所座標を決めているので、貼り合わせは n 個の n 変数連続関数

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n)$$

で書けています。また、位相同型写像ですから、逆変換

$$x_i = g_i(y_1, \dots, y_n), \quad (i = 1, \dots, n)$$

も連続関数です。これらが連続関数であるばかりでなくて、何回でも微分可能なとき、貼り合わせはなめらかで、すべての貼り合わせがなめらかなとき、 M は n 次元可微分多様体、またはなめらかな多様体だといえます。なめらかな多様体上の関数は、ある局所座標に関して微分可能なら別の局所座標に関しても微分可能になるので、「なめらかな関数」ということに意味付けができるようになります。

以下では連結でなめらかな多様体を考えます。連結というのもトポロジーの概念ですが、任意の2点が道でつながっていることだと考えてください。(これは弧状連結のことをいっているのですが、多様体では弧状連結と連結は同じことになります。)

多様体上のベクトル場についてです。多様体 M の点 x を通るなめらかなパラメータ付き曲線 γ を考えます。ある局所座標で γ は $x(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$ ($-1 < s < 1$) と表されるとします。ただし、 $x(0)$ が x に対応するとします。このとき、

$$v = (x'_1(0), \dots, x'_n(0))$$

は x で γ に接するベクトルを表しますが、 x における接ベクトルといいます。 $v^i = x'_i(0)$ が接ベクトルの成分です。もちろん接ベクトルの成分は用いる局所座標ごとに違います。 M の各点 x にベクトル空間があることになりましたが、これを x における接ベクトル空間といって、 TM_x と書きます。 M の各点に接ベクトルを対応させたものを、 M のベクトル場といいます。ベクトル場といったとき、以下では断らなくてもなめらかなベクトル場を考えます。

TM_x 上の非退化な対称双線型形式

$$g_x : TM_x \times TM_x \rightarrow \mathbb{R}$$

を x における計量といいます。 g_x は局所座標では $g_{ij}(x)$ と書けますが、これを M の各点に対応させたものを計量場、または単に計量 g といいます。ただし、各成分 $g_{ij}(x)$ は M のなめらかな関数だとします。 $g_{ij}(x)$ の固有値の符号は局所座標によらず、したがって連結な多様体ではどこでも同じになります。 g の符号が $(+, +, \dots, +)$ のときはリーマン計量、 $(-, +, +, \dots, +)$ のときローレンツ計量といいます。そして、ローレンツ計量をもつ4次元多様体が時空です。

そもそも M は計量を許容するかという問題があります。これは、 M にどこでもゼロベクトルにならない、なめらかなベクトル場が存在するか、という問題とよく似ています。例えば S^2 は2次元多様体ですが、 S^2 にはゼロ点をもたないベクトル場は存在しません。一般に偶数次元の球面にはゼロ点をもたないベクトル場は存在しませんが、奇数次元の球面には存在します。

ある条件をみたく場、例えばゼロ点をもたないベクトル場、ローレンツ計量場、スピノール場など、の存在が許されるか許されないかは、 M の位相構造によって決まります。

多様体 (パラコンパクトな多様体) はリーマン計量を許容します。一方で、ローレンツ計量は任意の多様体に許されるわけではなくて、位相的な理由で存在できない場合があります。したがって、時空にはもともと位相的な制限がかかっています。

多様体 M がローレンツ計量を許容する必要十分条件は、 M が線素場を許容することです。線素場というのは、各点にゼロでないベクトルのペア $\pm u$ が対応していて、その対応がなめらかになっているもののことです。幾何学的には、各点に方向をもたない線分がおいてある状況を表しています。実際、 M のリーマン計量 g_R と線素場 $\pm u$ があると、

$$g(v, w) = g_R(v, w) - \frac{2g_R(u, v)g_R(u, w)}{g_R(u, u)}$$

によってローレンツ計量 g が構成できます。ローレンツ計量 g があるとき、 $g(v, v) < 0$ となるベクトル v を時間的、 $g(v, v) > 0$ となるベクトルを空間的、 $g(v, v) = 0$ となるゼロでないベクトルを光的といいます。

接ベクトル空間 TM_x の光的なベクトル全体のなす集合を x の光円錐 LC_x といいます. 4次元の時空を考えて, 光円錐 LC_x は適当な局所座標のもとで

$$LC_x^\pm = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid t = \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\}$$

と2つの部分 LC_x^\pm からなっています. 今の時点で, LC_x^+ と LC_x^- の区別には絶対的な意味がないことに注意しておきましょう. t の符号は局所座標のとり方でかわりますから.

さて, ローレンツ計量が存在するという事は, 光円錐 LC_x が各点に置かれていて, M 上でなめらかにつながっていることを意味しています. つまり M には光円錐場が存在するわけです. もし, 各点でこれの半分, つまり LC_x^\pm のうち一方を選んで, M 上で連続的につなげることができる場合, 時空は時間的向き付け可能だといえます. 時間的向き付け可能な時空には, 「未来」と「過去」の概念をあたえることができます. それには, たとえば今選んだ方をあらためて LC_x^+ とよぶことにして, $l \in LC_x^+$ に対して $g(v, l) < 0$ となる時間的ベクトルを, 未来向きベクトルと定義することができます. そこで, ここからは時間的向き付け可能な時空を考えることにしましょう. これは特異点定理の仮定 (i) によって要請されています.

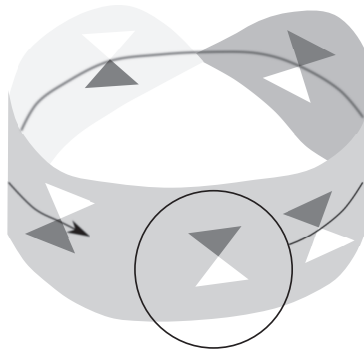


図 19: 時間的向き付け可能ではない, メビウスの輪上のローレンツ計量の例. 丸で囲んだ光円錐を矢印にそって一周すると, 光円錐の上下が入れ替わる.

4.6.3 光波面がコーシー面上におけること

時間的向き付け可能な時空は時間的な非特異ベクトル場, つまりゼロ点をもたない時間的ベクトル場を許容します. ゼロベクトルは時間的ベクトルに含めないことにして, 単に時間的ベクトル場ということにしましょう. そのようなベクトル場があると, それを利用して捕捉面の生成する光波面をコーシー面上に運んでくることができます. ここではこのことを見てみましょう.

まず, 時間的ベクトルは少なくとも局所的に存在します. それは, 時間的ベクトル v に十分近いベクトルはやはり時間的ベクトルだということに注意すればよいです. まず時空 M の任意の点 x をとったとき, x を要素にもつ, \mathbb{R}^4 に位相同型な開集合 U_x があります. x で未来向きで時間的になるようなベクトル場 v は, U_x を十分小さくとることにより, U_x 内のすべての点で時間的になるようにできます. これが x のまわりの局所的な未来向き時間

的ベクトル場です. 各点 x に対して U_x とその上の局所ベクトル場 v_x を構成すると, 時空 M の開被覆

$$\mathcal{C} = \{U_x | x \in M\}$$

になります.

\mathcal{C} の添え字集合は M になっていますが, これでは大きすぎるので, 少し間引くことにします. 間引くだけでなく, U_x よりも小さい, x の属する開集合 V_x をとつてもよいことにします. つまり,

$$\mathcal{C}' = \{V_x | x \in A\}$$

という形の開被覆をとります. ただし, A は M の部分集合, $V_x \subset U_x$ とします. そのような開被覆 \mathcal{C}' のうち, 任意の $x \in M$ について, x の属する開集合 W が存在して, W と共通部分をもつ \mathcal{C}' の開集合が有限個になるようにすることができます. (第2加算公理というのを仮定するとういうことが言えます.) このような開被覆を局所有限だといいます. こうして, 局所有限な開被覆 \mathcal{C}' で, 各開集合 V_x では未来向きで時間的な局所ベクトル場 v_x が存在するようなものが構成できます.

V_x と V_y が共通部分をもつとき, それぞれの局所ベクトル場 v_x, v_y は, 共通部分で一般には一致していません. これら局所ベクトル場をうまく張り合わせるにより, M で大域的に定義されたベクトル場を構成することが目的です.

そのために, 各 V_x 上の局所関数 $\rho_x : V_x \rightarrow [0, 1]$ を考えます. ρ_x は V_x 上でのみ定義された, 0 から 1 の間の値をとるなめらかな関数です. 局所関数の組 $\{\rho_x\}_{x \in A}$ は次のような性質をもっているとしします. それは, 各点 $y \in M$ に対して,

$$A_y = \{x \in A | y \in V_x\}$$

とすると,

$$\sum_{x \in A_y} \rho_x \Big|_y = 1$$

をみたすという性質です. つまり, 各点 y に対して, そこに定義域のある局所関数 ρ_x の値を全て足すと 1 になるという意味です. 局所有限な開被覆を考えているので, A_y は有限集合だということに注意しましょう. このような局所関数の組はいつでも存在します.

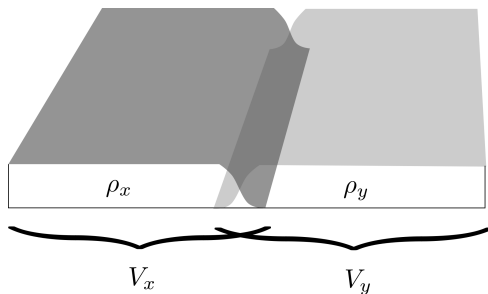


図 20: $\mathcal{C}' = \{V_x, V_y\}$ のときの局所関数 ρ_x, ρ_y の模式図.

これを用いて, 各点 $y \in M$ に対して

$$v = \sum_{x \in A_y} \rho_x v_x \Big|_y$$

という値をもつベクトル場 v を考えます。有限和なので、級数の収束について気にする必要ありません。 v_x は y で未来向きの時間的ベクトルで、そのようなベクトルの凸結合も未来向きかつ時間的ベクトルになっていることに注意しましょう。また、 ρ_x も v_x もなめらかなので、 v もなめらかなベクトル場になっています。しかも M の各点で定義された大域的ベクトル場です。 v_x が全て未来向きだということ、つまり M の時間的向き付け可能性がポイントになっていることに注意してください。もし過去向きなものが混じっていたら、上の和は時間的ベクトルをあたえる保証がありません。

こうして、時間的向き付け可能な時空は、ゼロ点をもたない時間的ベクトル場を許容することがわかりました。

特異点定理の仮定 (iii) により、時空 M にはコーシー面 C が存在するとしましょう⁵⁵。そして、 C 上の捕捉面が境界のないコンパクトな光波面 B を生成することが示せるのでした。 B は非時間的、つまり B 上の任意の2点は時間的な曲線で結ぶことはできません。 B には捕捉面とコースティック集合が含まれていますが、ここでは B は尖っています。そこで B を非時間的だという性質を保ったままなめらかな曲面 B^* で近似します。この近似は尖ったところだけで局所的にできます。非時間的でなめらかな閉曲面 B^* が C の未来にあることとなります。「閉曲面」というのは、「境界のないコンパクトな多様体」という意味で、閉曲面の「閉」は閉集合の「閉」とは違います。(ペンローズさんの論文や解説 A では B^* を空間的にする必要がありましたが、ここでは少し違う方法をとっていて、非時間的であれば十分です。)

時空 M はゼロ点をもたない、なめらかな時間的ベクトル場を許容するので、そのようなベクトル場 v を1つ選びましょう。 B^* の各点 x から、各点で v に接する過去向きの曲線 γ_x を考えることができます。 x を通る v の積分曲線といいます。 γ_x はコーシー面とちょうど1点 y で交差します。この対応を

$$f: B^* \rightarrow C$$

とします。 f はなめらかな単射になっています。

こうして、コーシー面には B^* の影、つまり f による B^* の像がおけることが示されました。

ペンローズさんの論文では、 B^* を空間的にとって、 B^* に垂直な過去向きの時間的測地線にそって対応 $\mu(\cdot, 0): B^* \rightarrow C$ を構成しています。その対応は単射とは限らないので、ここでは $\mu(\cdot, 0)$ のかわりに、上式であたえられる f を構成しました。

4.6.4 閉曲面が同じ次元の非コンパクト曲面内におけないこと

閉曲面というのは、境界のないコンパクトな多様体のことです。ペンローズさんの特異点定理の証明は背理法によっています。先ほどみたように、なめらかな閉曲面がコンパクトではないコーシー面におけることが導かれます。それが不可能なことだということを、ここでは見ていきます。

曲面 M が N におけるといったのは、なめらかな単射

$$f: M \rightarrow N$$

⁵⁵解説 A や B では時空 M 、コーシー面、捕捉面 T 、光波面 B などに次元を表す数字 2, 3, 4 をつけて表しましたが、本節では省略しています。

があるという意味です.

M として円周

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\},$$

N として \mathbb{R}^1 をとりましょう. S^1 はコンパクト, \mathbb{R}^1 はコンパクトではありません. S^1 の点は $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ によって θ でパラメーター付けします. S^1 から \mathbb{R}^1 へのなめらかな写像 f は, 周期 2π のなめらかな関数 $f(\theta) \in \mathbb{R}$ のことです. これが単射でないことは, 以下のようにわかります. (i) $f(0) = f(\pi)$ のとき. 明らかに単射ではありません. (ii) $f(0) \neq f(\pi)$ のとき. 中間値の定理よりある $0 < \theta_1 < \pi$ が存在して $f(\theta_1) = (f(0) + f(\pi))/2$ となっています. 同様に, $\pi < \theta_2 < 2\pi$ が存在して $f(\theta_2) = (f(0) + f(\pi))/2$ となっています. すると, $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ より, 単射ではありません.

次はもう少し難しい例を. M として, 球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を, N として平面 \mathbb{R}^2 をとりましょう. やはりなめらかな単射 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は存在しません. このことは直感的には明らかです. つまり, 私たちは世界地図を描くとき, 地球表面に切れ目を入れ, 切り開いた図を描くしかないとを経験的に知っています. ではなぜそうしなければならないのでしょうか.

一般に, $f: M \rightarrow N$ を, 閉曲面から同じ次元の連結な曲面へのなめらかな写像とします. M も N も n 次元だとすると, f は局所的には n 個のなめらかな n 変数関数 f_1, \dots, f_n を用いて

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

で表せます. ただし, (x_1, \dots, x_n) は M の局所座標, (y_1, \dots, y_n) は N の局所座標です. $x \in M$ に対して,

$$\det \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_x = 0$$

のとき, x は f の臨界点だといいます. N の点 y は, 原像 $f^{-1}(y)$ に f の臨界点が含まれていないとき f の正則値, 含まれるときは f の臨界値だといいます.

y が f の正則値なら, $f^{-1}(y)$ は M の有限個の点からなります. その個数を f の y における写像度 $\deg(f, y)$ といいます. つまり,

$$\deg(f, y) = \#f^{-1}(y)$$

です. 同様に, mod 2 の写像度を

$$\deg_2(f, y) \equiv \#f^{-1}(y) \pmod{2}$$

とします.

$f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ を考えると, $y \in \mathbb{R}^1$ が f の正則値になるのは, y が周期関数 $f(\theta)$ の極大値でも極小値でも変曲点の値でもないときです. y が正則値のとき, y を \mathbb{R}^1 上で動かすとき, f の極大値, または極小値を通過する毎に, 写像度は必ず 2 個を単位として変化することがわかると思います. したがって, mod 2 の写像度は変化しません. y を大きくして行って,

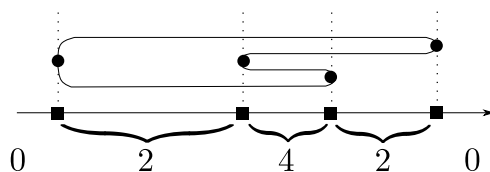


図 21: $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ の模式図. 黒丸が f の臨界点, 黒い四角が f の臨界値. 図中の数字はその点における f の写像度を表す.

f の最大値を超えたところで写像度はゼロになることから, 写像度はどの正則値 y に対しても偶数で, $\deg_2(f, y) = 0$ だとわかります.

$f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ のときも同様です. 紙風船を平面に押し付けるとき, 折り目の通ってない平面上の点が正則値です. そこでは紙風船が何枚か重なっているでしょうが, その枚数が写像度です. いつも偶数枚重なっていることがわかんと思います.

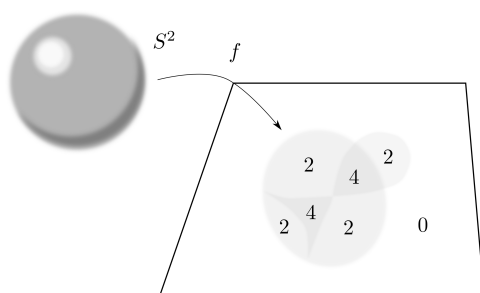


図 22: $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の模式図. 図中の数字はその点における f の写像度を表す.

写像度は局所的に定数で, 臨界値をまたぐときに偶数だけ変化するというのが, 一般的な $f : M \rightarrow N$ についていえることです. つまり, $\text{mod } 2$ の写像度を正則値 y に対して定義しましたが, 実は正則値のとり方によりません.

f が単射だとしましょう. すると, $y \in f(M)$ が正則値のとき, $\deg(f, y) = 1$ です. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトになることが知られていて, そのことから $f(M) \neq N$ です. したがって $z \in N \setminus f(M)$ がとれます. ところが, z は正則値なので写像度が定義できて, $\deg(f, z) = 0$ となります. すると, $\deg_2(f, y) \neq \deg_2(f, z)$ となっているので不合理です. このように, $\text{mod } 2$ の写像度の性質を使うと, 境界のないコンパクトな曲面から同じ次元のコンパクトでない曲面へのなめらかな単射は存在しないことがいえます.

これが, 世界地図を紙の上に描くことが不可能な理由であり, 捕捉面の生成する光波面がコーシー面におけないことの原因です. もちろん, S^2 から 1 点を除くと \mathbb{R}^2 と位相同型になりますので, その 1 点を犠牲にすれば世界地図は描けます. 実際, 正距方位図法によって描かれた世界地図はそのような例になっています. その 1 点を除くか除かないかが大きな違いですよ, という話です. こうして, 時空には特異点がなくてはならないことがわかりました.

4.7 一般相対論に登場する数式

ここでは、本章解説 C で用いている様々な数式が一般相対論においてどのように導入されるのか簡単に解説します。一般相対論であつかう「時空」の数学モデルは、どこにでも適当な局所座標系 x^μ がとれる 4次元空間 M (多様体) と、ローレンツ符号をもつ計量 $g_{\mu\nu}$ からなります。計量は M 上の世界距離 (世界線素) ds^2 を定めます：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

ここで μ, ν のように上下に繰り返す添え字については和をとる約束をします (つまり $\sum_{\mu=0}^3$ のような和を取る記号を省略します)。計量 $g_{\mu\nu}$ の添え字 μ, ν をベクトルが入る 2つのスロットと見なせば、前節 4.6 での非退化な対称双線形式 $g_x(\cdot, \cdot)$ と同じものです。一般相対論では、重力の効果は計量 $g_{\mu\nu}$ のみによって表されると仮定します。

4.7.1 等価原理と局所慣性系

一般相対論の指導原理である「等価原理」は、十分小さな時空領域に限定すれば重力の効果打ち消すことができるという主張です。等価原理に基づくと、時空 M 上のどこでも局所領域に限定すれば直交座標系 X^α をとることができ、上記の世界距離 ds^2 がミンコフスキー計量 $\eta_{\alpha\beta}$ で与えられることとなります：

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 .$$

各項の前の符号がローレンツ符号 $(-, +, +, +)$ となっており、負符号をもつ $X^0 = ct$ が時間 (本章では $c = 1$ としています)、正符号の X^i ($i = 1, 2, 3$) が 3次元空間の座標を表します。このように、重力を表すべき $g_{\mu\nu}$ の非自明な成分が現れない局所座標系 X^α を「局所慣性系」といいます。ちょうど自由落下する観測者が、身の回りの限られた領域に設置する自然な座標系と考えれば良いでしょう。一般座標系 x^μ における計量 $g_{\mu\nu}$ と $\eta_{\alpha\beta}$ とは、

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

と関係付いています。ローレンツ符号 $(-, +, +, +)$ と時間・空間座標の関係は保たれます。

時空の局所的な因果構造は局所慣性系での光円錐 (図 13) で定まります。粒子 (有質量) の運動の軌跡 (世界線) は、各点における局所慣性系での光円錐内部に向かうため、それに沿って $(dX^0)^2 > (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$, つまり $ds^2 < 0$ です。このように $ds^2 < 0$ となる曲線を「時間的曲線」といいます。光の世界線は光円錐に沿っており $ds^2 = 0$ です。そのような曲線を「光的曲線」といいます。解説 A ではペンローズさんの原論文に合わせて符号を $(+, -, -, -)$ としていました。そのため時間的な世界線に沿って $ds^2 > 0$ となります。それ以外の議論は同じです。

有質量粒子の世界線に沿った時間助変数 τ を $d\tau = \sqrt{-ds^2}$ と定義し、対象粒子の「固有時間」とよびます。粒子の世界線の接ベクトルは、局所慣性系 X^α では、

$$U^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\tau} ,$$

であり、粒子の4元速度とよばれます。重力以外の外力のはたらかない自由粒子は局所慣性系では等速直線運動しますから、

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = 0$$

にしたがいます。この方程式を一般座標系 x^μ で表すことを考えましょう。4元速度の局所慣性系での成分 U^α と一般座標系での成分 $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ は、座標変換 $X^\alpha \rightarrow x^\mu$ により、 $U^\alpha = (\partial X^\alpha/\partial x^\mu)u^\mu$ となること、また、 $d/d\tau = u^\nu(\partial/\partial x^\nu)$ であることを考慮すると

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} u^\nu u^\sigma = 0, \quad \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}.$$

これを「測地線方程式」といいます。ここで導入した $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ は「接続係数」とよばれます。測地線方程式にしたがう世界線 $x^\mu(\tau)$ の接ベクトル u^μ が $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 < 0$ となり、光円錐内部を向く時間的ベクトルなので、 $x^\mu(\tau)$ を「時間的測地線」といいます。

光の世界線に沿っては $ds^2 = 0$ となり固有時間が定義できないので、適当な時間助変数 λ をもちいて接ベクトルを

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = 0,$$

とします。上述の測地線方程式で $u^\mu \rightarrow l^\nu$, $\tau \rightarrow \lambda$ と置き換えたものが成り立つとき、世界線 $x^\mu(\lambda)$ を「光的測地線」、 λ を「アフィン・パラメーター」とよびます。固有時間 τ のように時間的測地線の助変数もアフィン・パラメーターといいます。また、時間的測地線と光的測地線を総称して「因果的測地線」とよびます (4.1 参照)。

時空は多様体ですから、どこにでも局所座標系をとることができます。必要なだけ局所座標系をとり必要なだけ座標変換を繰り返して求めた測地線 $x^\mu(\lambda)$ が、アフィン・パラメーター λ の全区間 $(-\infty, \infty)$ で定義されているとき、その測地線 $x^\mu(\lambda)$ を「完備な測地線」といいます。測地線が完備でなければ「不完備な測地線」といいます。特異点定理では、因果的測地線の完備性を基準に特異点の存在判定をします (C4.1)。測地線の助変数をアフィン・パラメーター以外に置き換えると注意が必要です。(その場合、上の測地線方程式に u^μ に比例する項がおつりとして現れます。) 例えば $t = \tan \lambda$ により導入した助変数 t について全区間 $(-\infty, \infty)$ で測地線が定義されていても、それはアフィン・パラメーター λ に対しては $(-\pi/2, \pi/2)$ の範囲しか見えていないことになるからです。どちらの助変数でも (該当する範囲では) 時空上の同じ軌道を描くのですが、その軌道を助変数 t では加速したり減速して進むことになるのに対し、アフィン・パラメーター λ では一定の速さで進むこととなります。

さて、 $\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma}$ と計量 $g_{\mu\nu}$ には関係がついています。はじめに述べた $g_{\mu\nu}$ と $\eta_{\alpha\beta}$ の関係式の両辺に x^σ による微分 $\partial_\sigma \equiv \partial/\partial x^\sigma$ を施し、 $\delta^\alpha{}_\gamma = (\partial X^\alpha/\partial x^\lambda)(\partial x^\lambda/\partial X^\gamma)$ をもちいると、

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 2\Gamma^\gamma{}_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu}$$

となります。添え字を適切に入れ替えたもの3つを組み合わせると

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\sigma}).$$

つまり、計量 $g_{\mu\nu}$ によって $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ は一意的に定まることが分かります。この表式を「クリストッフェル記号」とよびます。また、 $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0$ のとき明らかに測地線方程式は等速直線運動の方程式に帰着します。こうした理由で、一般に局所慣性系とは、 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ 、 $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0$ 、となる局所座標系のことをいいます。

4.7.2 一般共変性と共変微分

一般相対論のもう一つの指導原理である「一般共変性」は、すべての物理法則は任意の座標系で同じ形に表されるという主張です。これは、物理量が座標系に依らない幾何学量（テンソル）とすることで実現できます。テンソルの座標成分は一般の座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ に対して定まった変換性を持ちます。例えば、スカラー関数 $f(x)$ とその勾配 $W_\mu = \partial_\mu f(x) \equiv \partial f/\partial x^\mu$ 、およびベクトルの成分 V^μ は、

$$f'(x') = f(x), \quad W'_\alpha(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} W_\mu(x), \quad V'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu(x),$$

と振る舞います。何かの関数の勾配でなくとも、 W_μ のように変換される量を「双対ベクトル」（の成分）または「共変ベクトル」といいます。これに対してベクトルの成分は「反変ベクトル」ということもあります。反変ベクトルと同じ変換性をもつ上付き添え字を k 個、共変ベクトルと同じ変換性を表す下付き添え字を l 個もつ量 $T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}$ を「 (k, l) -型テンソル」または「 k 階反変 l 階共変テンソル」といいます。

さて、物理法則としてテンソルで表される物理量の関係性を記述するためには、それらの変化率を表す微分もテンソルである必要があります。しかし、それには通常の偏微分 $\partial/\partial x^\mu$ では不十分です。例えば、ベクトル成分の偏微分は座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\alpha$ に対して、

$$\partial_{\beta'} V'^\alpha \equiv \frac{\partial V'^\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu \right) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \cdot V^\mu,$$

となり、右辺第 2 項目のために $\partial_{\beta'} V'^\alpha$ は 2 階のテンソルの成分としての変換則を満たさないことがわかります⁵⁶。

ここで、一般座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ のもとでの接続係数の変換性を見てみると、次式のようになることがわかります：

$$\Gamma'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(x') \equiv \Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma} \Gamma^\mu_{\nu\sigma}(x) - \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}.$$

そこで、偏微分演算子 ∂_ν と接続係数 $\Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ を次のように組み合わせた微分演算 ∇_ν を考えることにします：

$$\nabla_\nu V^\mu \equiv \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma.$$

すると、 $\partial_{\beta'} V'^\alpha$ や $\Gamma'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}$ の座標変換の右辺第 2 項に現れた「 x'^α に対する 2 階微分の項」がみごとに打ち消しあって⁵⁷、

$$\nabla_{\beta'} V'^\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \nabla_\nu V^\mu,$$

⁵⁶ しばしば座標 x'^α の添え字の方にプライム「'」をつけて $x'^{\alpha'}$ のように表します。

⁵⁷ $V'^{\gamma'} = (\partial x'^{\gamma'}/\partial x^\sigma) V^\sigma$ と、 $(\partial x^\mu/\partial x'^{\gamma'}) \cdot (\partial x'^{\gamma'}/\partial x^\sigma) = \delta^\mu_\sigma$ を用います。

と振る舞うこと、したがって $\nabla_\nu V^\mu$ が 2 階のテンソルであることが直ちに確認できます。スカラー関数に対して

$$\nabla_\mu f(x) \equiv \partial_\mu f(x),$$

とすれば、一般の双対ベクトルに対して

$$\nabla_\nu W_\mu = \partial_\nu W_\mu - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} W_\sigma,$$

となり、これは 2 階共変テンソルとなることも確認できます。一般の (k, l) -型テンソルに対して次のように作用します：

$$\nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} = \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} + \sum_{i=1}^k \Gamma^{\mu_i}{}_{\sigma\alpha} T^{\mu_1 \dots \overset{i}{\alpha} \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} - \sum_{i=1}^l \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu_i} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \overset{i}{\alpha} \dots \nu_l}.$$

このように接続係数を伴うことで、 (k, l) -型テンソルを $(k, l+1)$ -型テンソルに移す微分を「共変微分」といいます。

共変微分は、上のように演算子 ∇_μ をあらわに記すこともあれば、解説 A や C の一部で表したようにセミコロン「;」を用いることもあります。また偏微分を $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ の代わりにコンマ「,」で表すこともあります：

$$A^\mu{}_{;\nu} \equiv \nabla_\nu A^\mu, \quad B_{\nu, \mu} \equiv \partial_\mu B_\nu.$$

4.7.3 共変微分と平行移動

直交座標系 X^α を備えた平坦な空間内ではベクトルの自然な平行移動が定義できます。ベクトル A^μ の曲線 $X^\alpha(t)$ に沿った平行移動は $dA^\mu/dt = (dX^\alpha/dt)\partial_\alpha A^\mu = 0$ を満たすものとすればよいでしょう。そこで、一般に共変微分をつかって、ベクトル A^μ の曲線 $x^\mu(\lambda)$ に沿った平行移動を、

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu A^\mu = 0,$$

を満たすものと定義します。直線の「真っすぐさ」とは、直感的には接ベクトル V^μ が常にその曲線 $x^\mu(\lambda)$ に沿って平行移動されたものといえるでしょう。それを表すには、平行移動の定義式で $dx^\mu/d\lambda$ と A^μ をともに V^μ に置き換えます。すると

$$V^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0 \iff \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} V^\nu V^\sigma = 0,$$

となり、測地線方程式になっています。

一般にベクトル l^μ の共変微分による発散は、計量の座標成分 $g_{\mu\nu}$ の行列式を $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$ として、次のように表されます：

$$\nabla_\mu l^\mu = l^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} l^\mu).$$

解説 A や C4.2, 4.5 において接ベクトルを l^μ とする光の測地線束の収縮率 ρ を、ベクトル l^μ の発散を用いて定義しました。簡単な例として、平坦な時空の半径 r の球面 S^2 から放た

れた光の収縮率を考えてみましょう。平坦時空を極座標 (t, r, θ, φ) で表すと、計量の座標成分は対角成分のみ $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ ですから、 $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta \propto A = 4\pi r^2$ となります。 S^2 に垂直な光的測地線の接ベクトルは、外向きと内向きそれぞれ l_+^μ, l_-^μ とすると $l_\pm^\mu \partial_\mu = \partial_t \pm \partial_r$ です。そこで上式を用いると、

$$\rho_\pm \equiv -\frac{1}{2} l_\pm^\mu{}_{;\mu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{A} \partial_\mu (A l_\pm^\mu) = \mp \frac{1}{2} \frac{1}{A} \frac{dA}{dr} = \mp \frac{1}{A^{1/2}} \frac{dA^{1/2}}{dr} = \mp \frac{1}{r},$$

となり、B3.4 で述べた収縮率が求まります。

4.7.4 平行移動と曲率テンソル

共変微分によりベクトルの平行移動を定義しました。一般にある点 p から別の点 q へのベクトルの平行移動は2点 p, q を結ぶ曲線の取り方に依存します。いいかえると、曲がった時空でベクトルを閉じた曲線に沿ってぐるりと一周して元の地点に戻ると、一般にベクトルの向きは異なっており、それを測るのが曲率です。時空内に2次元の曲面を考え、その上にある閉じた曲線に沿ってベクトルを一周します。それには曲面上の2つの独立な方向への平行移動を組み合わせればよいので、結局ベクトルの2階共変微分の非可換部分を考えることとなります。そこで、 V^μ を任意のベクトルとして「曲率テンソル $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ 」を次式で定義します：

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) V^\alpha = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} V^\beta.$$

これより曲率テンソルをクリストッフエル記号を用いて表すと、

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta}.$$

曲率テンソルがいたるところでゼロの場合に、時空は平坦になります。この4階テンソルから縮約により「リッチ・テンソル $R_{\mu\nu}$ 」と「スカラー曲率 R 」が得られます：

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

物質に関する「エネルギー・運動量テンソル」を $T_{\mu\nu}$ として「アインシュタイン方程式」が

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

と与えられます。 Λ は「宇宙項」とよばれる定数です。左辺の3つの項は、共変微分による発散が恒等的にゼロとなる組み合わせになっており、右辺の発散が表す局所的なエネルギー・運動量の保存則 $\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ と整合します。

特異点定理ではアインシュタイン方程式を直接解く代りに、アインシュタイン方程式と因果的（時間的あるいは光的）ベクトル V^μ との縮約をとったエネルギー条件

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \frac{1}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) V^\mu V^\nu \geq 0,$$

を通して、時空曲率と因果的測地線束の振舞いを制御しています。解説Aでは V^μ として時間的ベクトル t^μ をとる「弱いエネルギー条件(iv)」を採用しています。光の測地線束のコー

スティックの発生に用いた「光的エネルギー条件」は、 $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0$ より、 $8\pi T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$ となります。

執筆担当

第1章 石橋明浩, 原田知広

第2章 解説 A 石橋明浩, 原田知広

第3章 解説 B 石橋明浩

第4章 解説 C

4.1 前田健吾

4.2 石橋明浩

4.3 棚橋典大

4.4 原田知広

4.5 石橋明浩

4.6 井田大輔

4.7 石橋明浩