# 岩波全書『数学公式』第 III 巻、p192 の上から 7 番目の積分の誤植について

大阪市立大・理　　小栗 章

問題の箇所は、第 III 巻, p192 上から 7 番目の Bessel 関数の積の積分です。結果として、“定積分の値”の欄の $r$ に関する $\sum$ の中に、以下のように <u>最後の $1/r!$ が必要</u> です：

$$\int_0^\infty J_{\nu+n}(ax)\,J_{\nu-n-1}(bx)\;dx \;=\; \frac{1}{b}\,\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{(-1)^r\;\Gamma(\nu+r)}{(n-r)!\,\Gamma(\nu-n+r)}\;\left(\frac{b}{a}\right)^{\nu-n+2r}\right]\times\;\frac{1}{r!}\,. \qquad (1)$$

ここで、$a>b>0$ です。

## [確認]

この積分を計算して見せれば一番はっきりしますが、その方法は知りません。しかし (1) 式は、隣のページ p193 上から 10 番目の積分で $\lambda=0$ の特殊な場合と見なせます：

$$\int_0^\infty x^\lambda\,J_\mu(ax)\,J_\nu(bx)\;dx \;=\frac{2^\lambda\,b^\nu\,\Gamma(\alpha)}{a^{\lambda+\nu+1}\;\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\beta)}\;F(\alpha,\beta,\nu+1;\frac{b^2}{a^2})\,. \qquad (2)$$

ここで、$a>b>0$、$\alpha=(\lambda+\mu+\nu+1)/2$、$\beta=(\lambda-\mu+\nu+1)/2$。こちらの公式は、他の数学公式集で “Weber-Schafheitlin integral” を見ると全く同じものを見つけることが出来ます [1, 2]。(2) 式で $\lambda=0$ とし、さらに $\nu\Rightarrow\nu-n-1$、$\mu\Rightarrow\nu+n$ とする。この結果、$\alpha\Rightarrow\nu$、$\beta\Rightarrow-n$ となるので、

$$\int_0^\infty J_{\nu+n}(ax)\,J_{\nu-n-1}(bx)\;dx \;=\;\frac{b^{\nu-n-1}\;\Gamma(\nu)}{a^{\nu-n}\;\Gamma(\nu-n)\,n!}\;F(\nu,-n,\nu-n;\frac{b^2}{a^2})\,. \qquad (3)$$

ところで Gauss の超幾何関数は、定義に従うと次のように書けます；

$$F(\nu,-n,\nu-n;z)\;=\;\frac{\Gamma(\nu-n)\,n!}{\Gamma(\nu)}\;\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r\;\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(\nu-n+r)\,(n-r)!}\;\frac{z^r}{r!}\,. \qquad (4)$$

(4) 式を (3) 式に代入すると、(1) 式を得ます。

最後に、私は『数学公式集』を愛用しています。この小文は、私のように本書を愛用している方々に、ちょっとしたメモ程度に参考にしてもらえればと思い書きました。重箱の隅をつつくことが目的ではありません。なお、岩波書店には上記の内容の手紙を送ったことがありますが、返答はもらえませんでした。送り先が適当でなかったのかもしれません。

# 参考文献

[1] See, for instance, the formula (6) at p. 404 in G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1922).

[2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbooks of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965).