量子力学３　演習問題（１）講評　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
（配布：4 月 15 日(月)、締切：4 月 22 日(月)）

・全体の出来は悪くなかった。1.の(i)と(ii)は採点対象外とし、残りの小問を１問１点で１０点満点で採点した。満点は９名、平均は 7.7 点であった。１番は解答の仕方が色々可能であるが、摂動を扱った２番と３番は一本道である。２次の摂動はよく使うので、出来なかった人はよく復習してほしい。

・採点はしなかったが、1.の(i)は"$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$と仮定される"の１行で終えても構わないし、(ii)は"$\hat{a}=\frac{\hat{x}}{\sqrt{2\hbar/m\omega}}+\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$と定義して$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$を計算する"から始めても問題ない。ただ敢えてこのような問題を出したのは、量子力学は数式変形が全てなのではなく、あくまで自分なりのイメージを持ってもらうことが大事であることを体験してもらおうとしたのである。

・関連して私が生成消滅演算子$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$に対して持っているイメージを紹介しておこう。私はxとpで張られた２次元平面を、複素数に直したものが$\hat{a}$であると考えている。古典力学では、エネルギーがEの調和振動子はxとpの張る位相空間において、x方向に半径$\sqrt{2E/(m\omega^2)}$、p方向に半径$\sqrt{2mE}$の楕円上を運動する。（囲まれる面積$2\pi E/\omega$がプランク定数によって量子化される。）従って、xを$\sqrt{2E/(m\omega^2)}$で割った$\frac{\hat{x}}{\sqrt{2\hbar/m\omega}}$、$p$を$\sqrt{2mE}$で割った$\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$という２つの新しい変数を作れば軌道は円軌道になり、原点からの距離が全エネルギーを与えることになる。このような発想をすると$\hat{a}=\frac{\hat{x}}{\sqrt{2\hbar/m\omega}}+\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$のように$\hat{a}$を定義するのは自然に思えてくる。（囲む面積が$2\pi E/\omega$だったので、これがプランク定数によって量子化されていると仮定してEに$\hbar\omega$を代入した。）しかし単位円を原点の周りに回転しても、状況は同じはずである。そう考えると、

$$\hat{a}=\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2\hbar/m\omega}}+\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)e^{i\varphi}$$
$$\hat{a}^\dagger=\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2\hbar/m\omega}}-\frac{i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)e^{-i\varphi}$$

と定義しても大丈夫に思える。実際、上の２式は条件を生成消滅演算子の条件を満たす。

・１番の(iii)はハミルトニアンを経由した解答が多かったが、もっと直接的な解答が可能である。具体的には

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

は次の式と同値。

$$\langle n+1|a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}$$

エルミート共役をとれば

$$\langle n|a|n+1\rangle = \sqrt{n+1}$$

１ずらして

$$\langle n-1|a|n\rangle = \sqrt{n}$$

これは次と同値

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

エルミート共役を使いこなせるようになりましょう。

（以上）