量子力学３　演習問題（３）講評　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
（配布：5 月 8 日(水)、締切：5 月 13 日(月)）

・一本道の問題だったので、出来は良く、半数が満点であった。平均点は 7.4 点。
・7 番で 1 次元の積分と 3 次元の積分を混同している例が見受けられた。先にクーロンポテンシャルについて指摘しておくと、$A^2\int_0^\infty \frac{1}{r}exp(-\beta r^2)dr$ の積分を試みて「原点で収束しない」と困った者もいたが、これはそもそも体積積分になっていない。$A^2\int_0^\infty \frac{1}{r}exp(-\beta r^2)4\pi r^2 dr$が正しく、これは原点での発散が回避されて計算可能になる。規格化定数の A は$1 = A^2\int_0^\infty exp(-\beta r^2)4\pi r^2 dr$から求めれば良い。問題に挙げた公式を使えば$1 = A^2 4\pi \frac{1}{4\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$となり、$A = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2}$が求まる。

次に$\frac{p_x^2}{2m}$の期待値だが、演習時間の解答例では$3\langle\frac{p_x^2}{2m}\rangle = \langle\frac{\vec{p}^2}{2m}\rangle$の期待値を求めるために 3 次元のラプラシアンの表式を用いていたが、別の方法もある。試行関数は$\psi(r) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}r^2\right)$ であるが、 $exp(-r^2) = exp(-x^2 - y^2 - z^2) = exp(-x^2)exp(-y^2)exp(-z^2)$を使うと

$$\psi(x,y,z) = \left[\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)\right] \times \left[\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}y^2\right)\right] \times \left[\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}z^2\right)\right]$$

と x,y,z の 3 方向の掛け算に分解することができる。それぞれのカッコ内の関数を絶対値自乗をとって積分をすると、それぞれがきちんと規格化されていることが分かる。これを使うと、$\frac{p_x^2}{2m}$の期待値の計算は

$$\begin{aligned}\langle\frac{p_x^2}{2m}\rangle = &\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)dx \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}y^2\right)\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}y^2\right)dy \\ &\times\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}z^2\right)\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} exp\left(-\frac{\beta}{2}z^2\right)dz\end{aligned}$$

となる。2 行目と 3 行目は規格化そのものなので、計算せずとも 1 を与えることが分かる。計算が必要なのは 1 行目だけで、問題に挙げた公式を用いると、$\langle\frac{p_x^2}{2m}\rangle = \frac{\hbar^2\beta}{4m}$と求まる。（以上）