量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：5 月 13 日(月)
締切：5 月 20 日(月)２限　授業開始時

8.(量子ダイナミクス) エネルギーがE_0とE_1の２準位からなる系に、調和摂動$\hat{V} = Ve^{i\omega t}|0\rangle\langle 1| + h.c.$が加わった場合の系の時間発展を考えよう。全ハミルトニアンは次の行列表示で与えられる。

$$H(t) = \begin{pmatrix} E_0 & Ve^{i\omega t} \\ V^* e^{-i\omega t} & E_1 \end{pmatrix}$$

時刻に$t = 0$系が$|0\rangle$にあった（$|\psi(t = 0)\rangle = |0\rangle$）とする。また、時間原点を選び、V を実数にできたとする。

(i) $|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle$と書いたとき、$c_0(t)$と$c_1(t)$の満たす方程式を求めよ。

(ii) 方程式の係数から振動する項を取り除きたい。そこで変数を

$$d_0(t) = c_0(t)e^{-i\omega t/2}$$
$$d_1(t) = c_1(t)e^{+i\omega t/2}$$

と置き直す。（行列$S_z(\omega t)$をかけたことに等しい。）$d_0(t)$と$d_1(t)$の満たす方程式を求めよ。結果を2×2の行列H_rを用いて

$$i\hbar \begin{pmatrix} \dot{d}_0(t) \\ \dot{d}_1(t) \end{pmatrix} = H_r \begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \end{pmatrix}$$

の形に書き直せ。

(iii) H_rは定数行列なので、上記の微分方程式を通常の対角化の手法で解くことができる。ここではさらに計算の見通しをよくするため、エネルギーの原点をシフトしよう。具体的には、

$$e_0(t) = d_0(t)e^{iat}$$
$$e_1(t) = d_1(t)e^{iat}$$

とおき、 $\hbar a = (E_0 + E_1)/2$とすることによって、連立微分方程式を

$$i\begin{pmatrix} \dot{e}_0(t) \\ \dot{e}_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_0(t) \\ e_1(t) \end{pmatrix}$$

の形にできることを示せ。ここで、ラビ周波数$\Omega \equiv 2V/\hbar$、調和摂動の周波数の

共鳴周波数からのずれ$\delta \equiv \omega - (E_1 - E_0)/\hbar$を用いた。

(iv)連立微分方程式の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(v) 初期条件を$c_0(t=0)=1$、$c_1(t=0)=0$として微分方程式を解きたい。初期状態を固有ベクトルの線型結合で表せ。

(vi) $|c_0(t)|^2$、$|c_1(t)|^2$の時間発展を求め、グラフに表せ。

9.(対角化) ポジトロニウムは電子と陽電子の束縛状態である。電子と陽電子はそれぞれスピン 1/2 を持ち、相互作用ハミルトニアンはAを定数として、

$$H_a = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

で与えられる。これは、「$\vec{S}_1$は$\vec{S}_2$の周りを、$\vec{S}_2$は$\vec{S}_1$の周りを歳差運動する…(A)」と解釈できる。

(i) なぜ(A)のように解釈できるのか、説明せよ。

$\vec{S}_1$と$\vec{S}_2$が互いに相手の周りを歳差運動しようとするので、$\vec{S}_1$も$\vec{S}_2$も運動の定数ではない。そこで$\vec{S}_{total} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$を考える。

(ii) $\vec{S}_{total}$は保存することを示せ。

具体的に$\vec{S}_1$と$\vec{S}_2$がスピン 1/2 であることを利用して、$\vec{S}_{total}$を構成しよう。

(iii) 角運動量 $\vec{S}_{total}$の大きさを求めよ。H_aの固有値と対応する縮重度を求めよ。

次に、一時的に電子と陽電子の相互作用を忘れ、外部磁場との相互作用を考えよう。電子と陽電子では磁気モーメントとスピンの関係の符号が異なる。z 軸に沿って均一な静磁場 B がある時、磁場との相互作用ハミルトニアンは

$$H_b = \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z})$$

となる。

(iv) H_bの固有値と対応する縮重度を求めよ。