量子力学３　演習問題　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：5 月 20 日(月)
締切：5 月 27 日(月)２限　授業開始時

10. いよいよ、外部磁場中のポジトロニウムを考えよう。全ハミルトニアンは

$$H = H_a + H_b = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z})$$

と表される。この固有値と固有状態を求めたい。
(i) 9.の(iii)に現れた固有状態のうち２個と、(iv)に現れた固有状態のうち２個は共通している。それらの状態に対する固有エネルギーを求めよ。

(ii) 次の空欄や？の欄を埋めよ。
「残りの２個の固有状態は磁場Bが小さいか大きいかによって係数が変わるので、エネルギー固有値を求めるには２×２の行列の対角化が必要である。準備としてS_{1z}上向きかつS_{2z}下向きを$|+-\rangle$、S_{1z}下向きかつS_{2z}上向きを$|-+\rangle$と表そう。$(|+-\rangle, |-+\rangle)$の基底で$H_b = \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z})$を表すと$\begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$と対角成分のみで表現される。基底を変換し、$\left(\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}\right)$の基底で$H_b = \frac{eB}{m}(S_{1z} - S_{2z})$を表すと今度は非対角項が生じて

$$\boldsymbol{H_b} = \begin{pmatrix} ?? & ?? \\ ?? & ?? \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる。これだけでは何故基底を$\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}$と$\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}$にしたか分からないが、そのご利益は$H_a$を扱うとはっきりする。$H_a$は

$$H_a = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{A}{2}\left(\vec{S}_{total}^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\right)$$

と書け、$\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}$と$\frac{|+-\rangle-|-+\rangle}{\sqrt{2}}$が$\vec{S}_{total}^2$の固有状態であることを用いると、$H_a$は

$$\boldsymbol{H_a} = \begin{pmatrix} ??? & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & ??? \end{pmatrix} \tag{2}$$

と書ける。(1)式と(2)式を使い、$H = H_a + H_b$の固有値を求めると固有エネルギーが_____と求まる。」

(iii) (i)と(ii)で求めた固有エネルギーを磁場Bの関数としてグラフに表せ。

---

11. (量子ダイナミクス) Schrodinger 表示では波動関数が時間発展し、$\hat{x}$や$\hat{p}$などといった演算子は時間に寄らない。一方、Heisenberg 表示の演算子$\hat{A}_H$はそれ自体が時間発展する：

$$\hat{A}_H = exp(i\hat{H}t/\hbar)\,\hat{A}\,exp(-i\hat{H}t/\hbar)$$

演算子を t=0 のブラケットで挟むことで観測量の期待値が得られる：

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi(0)|\hat{A}_H|\psi(0)\rangle$$

Heisenberg 表示を用いた次の問いに答えよ。

(i) Heisenberg 表示の演算子は次の運動方程式を満たすことを示せ。

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}_H = [\hat{A}_H, \hat{H}] + \left(i\hbar\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right)_H$$

ただし$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$は交換関係を表す。最後の項は、元々Schrodinger 表示の演算子$\hat{A}$が露わに時間に依存していた場合につけ加わる項である。

大きさがB_0で z 方向を向いた静磁場中に置かれた電子スピンの運動を考える。ハミルトニアンはスピン 1/2 の演算子を用いて

$$\hat{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = g\frac{e}{2m}\hat{S}_z B_0$$

で与えられる。

(ii) Heisenberg 表示のスピン演算子の x,y,z 成分$\hat{S}_{x,H}$、$\hat{S}_{y,H}$、$\hat{S}_{z,H}$の満たす方程式を求めよ。運動方程式を眺めると、スピンベクトルがどのような運動をするかが分かる。その運動の様子を図示せよ。