量子力学３　演習問題（９）　担当：井上慎<inouye@sci.osaka-cu.ac.jp>
配布：6 月 17 日(月)
締切：6 月 24 日(月)２限　授業開始時
参考：<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/phys/laser/class/class-j.html>

18.(散乱問題) 質量 m の粒子が、浅い３次元井戸型ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ 0, & r \geq R \end{cases}$$

で散乱される際の断面積を考える。
(i)低エネルギー散乱においては、部分波の方法が有効である。$l = 0$の部分波のみを考え、井戸の内側での波動関数を$(sin\, k'r)/r$、外側での波動関数を位相のずれを用いて$\big(sin\,(kr + \delta_0)\big)/r$とかき、散乱長$a$を用いて位相のずれを$\delta_0 = -ka$と書くと、$a$ は

$$a = R\left(1 - \frac{\tan\left(\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}R\right)}{\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}R}\right)$$

と求まることを示せ。

(ii) V_0が小さい（$V_0 \ll \frac{\hbar^2}{2mR^2}$）として、$tan$を展開し、散乱長を$V_0$の最低次で求めよ。 $\sigma = 4\pi a^2$を用いて散乱の全断面積σを求めよ。

前問で求まった散乱断面積はV_0^2に比例するので、ボルン近似を思い起こさせる。V_0が小さいと両者は一致するのか比較してみよう。ボルン近似の散乱の微分断面積の表式は、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \left|\int e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f)\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r}\right|^2$$

であった。
(iii) ボルン近似の表式において、$k \longrightarrow 0$の極限を考えるため$e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f)\cdot\vec{r}}$を 1 で近似しよう。フーリエ変換の部分は単に$V_0$と半径$R$の球の体積の積になる。散乱の全断面積$\sigma$を求め、(ii)の結果と比較せよ。

19. １次元井戸型ポテンシャルの反射・透過の問題（15 番）を境界での反射を組み合わせることにより、より直感的に解けることを示そう。
まず、波数kを持つ質量 m の粒子が、ポテンシャルのない $x<0$ の領域から引力ポテンシャルのある $x>0$ の領域に入射したとする。

$$V(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0 \\ -V_0<0, & x>0 \end{cases}$$

振幅反射率 r、振幅透過率 t を次のように定義する。

$$\varphi(x)=\begin{cases} \exp(ikx)+r\exp(-ikx)\ , & x<0 \\ t\exp(ik'x), & x>0 \end{cases}$$

(i) r と t を求めよ。
上記の r と t は「ポテンシャルが**ない**ところから**ある**ところに入った時の」振幅反射率と振幅透過率である。今度は逆の「ポテンシャルが**ある**ところから**ない**ところに出て行く時の」振幅反射率 r' と振幅透過率 t' を求めたい。よって、以下のような状況を考える。
粒子が、ポテンシャルのある $x<0$の領域からポテンシャルのない $x>0$ の領域に出て行くとする。

$$V(x)=\begin{cases} -V_0<\ 0, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

振幅反射率 r'、振幅透過率 t' を次のように定義する。

$$\varphi(x)=\begin{cases} \exp(ik'x)+r'\exp(-ik'x)\ , & x<0 \\ t'\exp(ikx), & x>0 \end{cases}$$

(ii) r' と t' を求めよ。
準備が整ったので、改めて１次元井戸型ポテンシャルの反射・透過の問題を考える。ポテンシャルを

$$V(x)=\begin{cases} -V_0, & 0\le x\le a \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

と表す。１次元井戸型ポテンシャルによる振幅透過率を t_{well}とする。粒子が透過するためには、
(1) $x=0$の面を透過し、位相を$k'a$だけ発展させた後、$x=a$の面を透過する。
(2) $x=0$の面を透過し、位相を$k'a$だけ発展させた後、$x=a$の面で反射し、
位相を$k'a$だけ発展させた後、$x=0$の面で反射し、
位相を$k'a$だけ発展させた後、$x=a$の面を透過する。

(3) …（以下、反射の部分が増えて行く）
の全てのプロセスの和と、考えられる。

(iii)以上の考察を t_{well} に当てはめると、

$$t_{well} = te^{ik'a}t' + te^{ik'a}r'e^{ik'a}r'e^{ik'a}t' + \cdots$$

となることを示せ。

(iv)無限和を計算し、粒子が１次元井戸型ポテンシャルを透過する確率である $T_{well} = |t_{well}|^2$ を k, k', a の関数として求め、15.の結果と比較せよ。

(v)$V_0 = 3E = 3\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ として k と k' の関係を求めよ。さらにこの条件の元で T_{well} を a の関数としてグラフに表せ。

このような直感的な方法の利点の一つは、理想的でない効果も取り入れやすいことにある。例えば、井戸型ポテンシャルを伝搬する粒子の量子力学的位相が不純物散乱などの効果で徐々に減衰していくとしよう。この効果は正の定数ηを用い、$e^{ik'a}$ を $e^{-\eta a + ik'a}$ とすることで取り入れることができる。

(vi)減衰の効果を取り入れると(v)のグラフはどのように変化するか。複数のηの値を選び、グラフを書いてその効果を示せ。