Exact results for perturbative partition functions of theories with $SU(2|4)$ symmetry

Yuhma Asano (Kyoto U.)

Mar 23, 2013   RFBR@Osaka

Based on "Y.A., G. Ishiki, T. Okada and S. Shimasaki, JHEP 1302 (2013) 148"

$SU(2|4)$ 対称な理論とは

$\mathcal{N}$ = 4 SYM on $R \times S^3$ $\cdots$ $SU(2,2|4)$

↓ consistent truncation

$\mathcal{N}$ = 4 SYM on $R \times S^3/Z_k$

$\mathcal{N}$=8 SYM on $R \times S^2$

Plane Wave Matrix Model

} $SU(2|4)$ 対称な理論

動機 1

- AdS/CFT

[Maldacena '97]

Type IIB on $AdS_5 \times S^5$ $\Longleftrightarrow$ 4D $\mathcal{N}$=4 SYM

- Gauge/Gravity

[Lin-Maldacena '05]

Type IIA SUGRA bubbling geometry $\Longleftrightarrow$ $SU(2|4)$ 対称な理論

動機 2

- M-theoryとしての行列模型

BFSS model

・・・ 平坦BG周りのM理論 [Banks-Fischler-Shenker-Susskind '96]

↓ mass-deformation

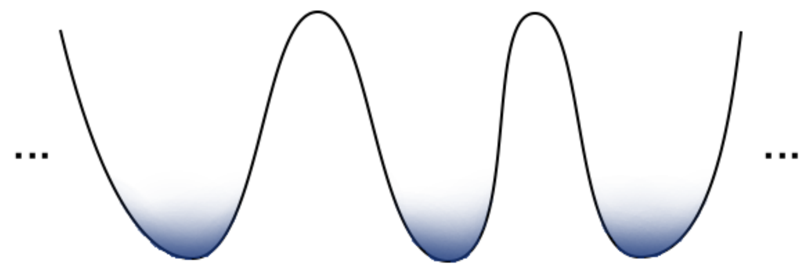
BMN model (Plane Wave Matrix Model)

・・・ pp-wave BG周りのM理論 [Berenstein-Maldacena-Nastase '02]

$SU(2|4)$対称性を持つ。

結果

- PWMMの各真空(fuzzy sphere)周りの摂動的分配関数を求めた。



- $R\times S^2$ 上の$\mathcal{N}$=8 SYMと$R\times S^3/Z_k$ 上の$\mathcal{N}$=4 SYMについても、それぞれある極限をとることにより摂動的分配関数を得た。

$$Z_{PWMM} \longrightarrow Z_{R\times S^2}$$

$$Z_{PWMM} \xrightarrow{\text{ある極限}} Z_{R\times S^3/Z_k}$$

- $R\times S^2$ 上のSYMの自由エネルギーがLin-Maldacenaの重力解から計算される結果とconsistentであることを確かめた。
- PWMMの別のある極限でNS5上のlittle string theoryが実現するという予想に対する証拠を数値的に与えた。

$SU(2|4)$ 対称な理論の間の関係

$\mathcal{N} = 4$ SYM on $R \times S^3/Z_k$

S^1 fiber に沿った dimensional reduction ↓ ↑ Taylor's T-duality

$\mathcal{N} = 8$ SYM on $R \times S^2$

S^2 の dimensional reduction ↓ ↑ fuzzy sphere の commutative lim.

PWMM (1D)

Contents

PWMM

$$S_{PW} = \frac{1}{g_{PW}^2} \int d\tau \, \mathrm{Tr} \biggl(-\frac{1}{2}(D_1 X_a)^2 - \frac{1}{2}(D_1 X_m)^2 - \frac{1}{4}(\mu \varepsilon_{abc} X_c - i[X_a, X_b])^2 + \frac{1}{2}[X_a, X_m]^2 + \frac{1}{4}[X_m, X_n]^2 - \frac{\mu^2}{8} X_m X_m \quad + \text{fermion} \biggr)$$

$$a = 2, 3, 4, \qquad m = 5, \cdots, 10$$

Vacua: fuzzy sphere

$$\hat{X}_a = -\mu L_a = -\mu \begin{pmatrix} 1_{N_1} \otimes L_a^{[j_1]} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1_{N_s} \otimes L_a^{[j_s]} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1_{N_\Lambda} \otimes L_a^{[j_\Lambda]} \end{pmatrix}$$

$$\text{others} = 0$$

既約分解に現れる表現とその重複度$\{j_s, N_s\}_{s=1,\cdots,\Lambda}$でラベルされる。

$\mathcal{N}$=8 SYM on $R \times S^2$

$$S_{R\times S^2} = \frac{1}{g_{S^2}^2}\int d\tau d\Omega_2 \,\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=\theta,\phi}\frac{-1}{2}(f_{1i})^2 - \frac{1}{2}(f_{\theta\phi}-\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}(D_1\Phi)^2 - \sum_{i=\theta,\phi}\frac{1}{2}(D_i\Phi)^2 \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}(D_a X_m)^2 + \frac{1}{4}[X_m, X_n]^2 - \frac{\mu^2}{8}X_m X_m + \text{fermion}\right)$$

Vacua: Dirac monopole

$$\hat{\Phi} = \mu \begin{pmatrix} q_1 \mathbf{1}_{N_1} & & \\ & \ddots & \\ & & q_\Lambda \mathbf{1}_{N_\Lambda} \end{pmatrix} \qquad \hat{a}_\phi = -\frac{\cos\theta \mp 1}{\sin\theta}\hat{\Phi} \qquad \hat{a}_\theta = 0 \qquad \text{others} = 0$$

q_s : monopole charge (integer or half-integer)

$\{\, q_s, N_s \,\}_{s=1,\cdots,\Lambda}$ でラベルされる。

$\mathcal{N}$=4 SYM on $R\times S^3/Z_k$

$$S_{R\times S^3}=\frac{1}{g^2}\int d\tau d\Omega_3 \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F^{MN}F_{MN}-\frac{\mu^2}{8}X_mX_m-\frac{i}{2}\Psi\Gamma^M D_M\Psi\right)$$

但し場のモードは Z_k 不変なものに制限される。 $Z_k:(\theta,\phi,\psi)\to(\theta,\phi,\psi+4\pi/k)$

Vacua: ホロノミー U (U^k=1)

$$U=\begin{pmatrix}\exp[\frac{2\pi i}{k}\times 0]\mathbf{1}_{M_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \exp[\frac{2\pi i}{k}(k-1)]\mathbf{1}_{M_k}\end{pmatrix}$$

M_i (i=1,$\cdots$ k) でラベルされる。

Contents

PWMM → $\mathcal{N}$=8 SYM on $R\times S^2$

PWMMでcommutative limitをとる。

$$2j_s+1=n+2q_s,\quad n\to\infty,\quad \frac{g_{PW}^2}{n}=\frac{g_{S^2}^2}{4\pi}:\ \text{fixed}$$

この極限で、fuzzy sphereは実際にcommutativeになる:

PWMM	SYM on $R\times S^2$
matrix base	monopole harmonics

$$Y_{Jm(j_s,j_t)}\to Y_{Jm(q_s-q_t)}(\theta,\phi)$$

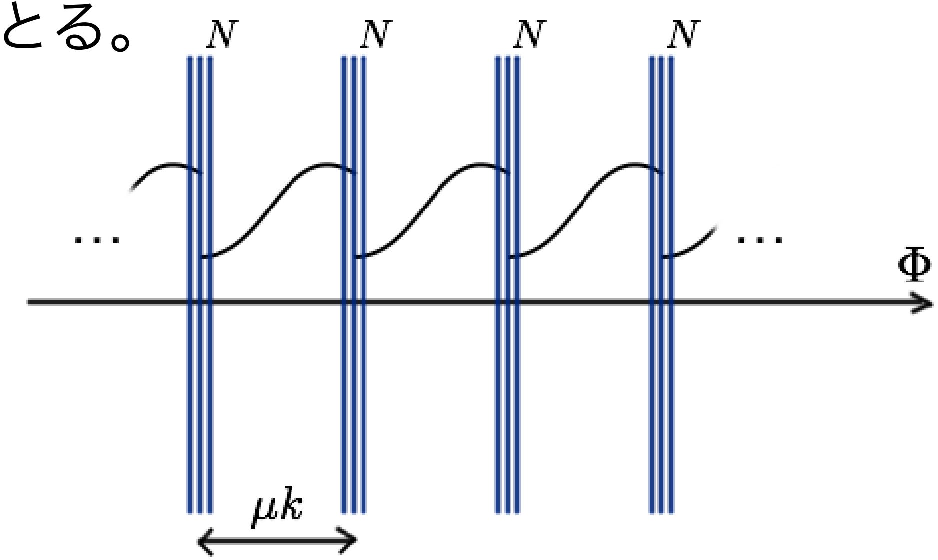
$$\frac{1}{n}\text{tr}\to\int\frac{d\Omega}{4\pi}$$

PWMMの作用は、$R\times S^2$ 上のSYMの作用と等しくなることが示せる。

3. Relations among $SU(2|4)$ Symmetric Theories

$\mathcal{N}$=8 SYM on $R\times S^2 \to \mathcal{N}$=4 SYM on $R\times S^3/Z_k$

$R\times S^2$ 上のSYMで S^2 にtransverseな方向(スカラーΦ に対応)に Taylor's T-dualityをとる。



・周期的にブレーンを配位

$$\hat{\Phi} = \mu k \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & s-1 & & & \\ & & s & & \\ & & & s+1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \otimes 1_N$$

・開弦に対応するゆらぎを同一視

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ & X^{(w+1)} & X^{(w)} & X^{(w-1)} & \\ & & X^{(w+1)} & X^{(w)} & X^{(w-1)} \\ & & & X^{(w+1)} \quad X^{(w)} & X^{(w-1)} \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots \quad \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

この操作の下で $R\times S^2$ 上の SYM の作用は $R\times S^3/Z_k$ 上のものと一致。

- Summary for the relations

PWMM

↓ commutative lim.

$$2j_s+1=n+2q_s,\quad n\to\infty,\quad \frac{g_{PW}^2}{n}=\frac{g_{S^2}^2}{4\pi}:\ \text{fixed}$$

$\mathcal{N}$=8 SYM on $R\times S^2$

↓ Taylor's T-duality

$$q_s=\frac{k}{2}s,\quad N_s=N,\quad X^{(s,t)}=:X^{(s-t)}$$

$\mathcal{N}$=4 SYM on $R\times S^3/Z_k$

Contents

PWMM の localization

$$Z_{\mathcal{R}}(t) = \int \mathcal{D}X\, e^{-S[X]-tQV}$$

- 境界条件: $\tau \to \pm\infty$ で同じ$SU(2)$ 表現$\mathcal{R}$ に対応する真空の配位となるようにとる。

- Q-symmetry

[Pestun '07]

$$Q := \delta_{susy} + \delta_{BRS} \quad \Longrightarrow \quad QS = 0$$

- 汎函数 V

$$V = \int d\tau\, \mathrm{Tr}\, \left[\Psi \overline{Q\Psi} + V_{ghost}\right] \quad \Longrightarrow \quad Q^2 V = 0$$

QV is positive-definite.

saddle point (QV=0) の周りの1-loopでexactな結果を与える。

Saddle point

$$\hat{X}_{10} = \frac{M}{\cosh\tau}, \quad \hat{K}_5 = \frac{M}{\cosh^2\tau}, \quad \hat{X}_a = -2L_a \qquad (a = 2,3,4)$$

$$= -2\begin{pmatrix} 1_{N_1}\otimes L_a^{[j_1]} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1_{N_s}\otimes L_a^{[j_s]} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1_{N_\Lambda}\otimes L_a^{[j_\Lambda]} \end{pmatrix}$$

others $= 0$

M は $[L_a, M]=0$, $\partial_\tau M=0$ を満たす：

$$M = \begin{pmatrix} M_1\otimes 1_{2j_1+1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & M_s\otimes 1_{2j_s+1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & M_\Lambda\otimes 1_{2j_\Lambda+1} \end{pmatrix}$$

$N_s \times N_s$ const. matrix

Contents

5. Exact partition function of $SU(2|4)$ theories

結果：

- PWMMの摂動的分配函数は

$$Z_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \int \prod_{s=1}^{\Lambda} \prod_{i=1}^{N_s} dm_{si}\ Z_{1-\mathrm{loop}}(\mathcal{R}, \{m_{si}\}) e^{-\frac{2}{g_{PW}^2} \sum_s \sum_i (2j_s+1) m_{si}^2}$$

$$Z_{1-\mathrm{loop}} = \prod_{s,t=1}^{\Lambda} \prod_{J=|j_s-j_t|}^{j_s+j_t} \prod_{i=1}^{N_s} \prod_{j=1}^{N_t}{}' \left[\frac{\{(2J+2)^2 + (m_{si}-m_{tj})^2\}\{(2J)^2 + (m_{si}-m_{tj})^2\}}{\{(2J+1)^2 + (m_{si}-m_{tj})^2\}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

※ m_{si} はM の固有値

- Taylor's T-dualityとcommutative lim.を用いることで、他の$SU(2|4)$対称な理論の分配函数も上のPWMMの分配函数から得ることが出来る。

- consistency check
  - localizationを使わずに摂動計算した結果と1-loopまでで一致
  - $R \times S^3/Z_k$ 上のSYMの分配函数は $k=1$でGaussian matrix model ($\mathcal{N}$=4 SYMの結果と一致) [Erickson-Semenoff-Zarembo, Drukker-Gross '00, Pestun '07]

他の $SU(2|4)$ 対称な理論についての結果：

※ $\Delta(m)$: Vandermonde det.

- SYM on $R\times S^2$ $\quad (2j_s+1=n+2q_s,\ \ n\to\infty)$

$$Z_{R\times S^2}^{\{(q_s,N_s)\}}=\int\prod_{s=1}^{\Lambda}\prod_{i=1}^{N_s}dm_{si}\prod_{s=1}^{\Lambda}\Delta(m_s)^2\prod_{s=1}^{\Lambda}\prod_{i,j=1}^{N_s}\left[\frac{1+\left(\frac{m_{si}-m_{sj}}{2}\right)^2}{\{1+(m_{si}-m_{sj})^2\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\prod_{s,t=1}^{\Lambda}\prod_{\substack{J=|q_s-q_t|\\ J\neq 0}}^{\infty}\prod_{i=1}^{N_s}\prod_{j=1}^{N_t}\left[\frac{\left\{1+\left(\frac{m_{si}-m_{tj}}{2J+2}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{m_{si}-m_{tj}}{2J}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\frac{m_{si}-m_{tj}}{2J+1}\right)^2\right\}^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{8\pi}{g_{S^2}^2}\sum_{s,i}m_{si}^2}$$

- SYM on $R\times S^3/Z_k$ $\quad \left(q_s=\frac{k}{2}s,\ \ N_s=N,\ \ \prod_{s,t}\to\prod_{s-t=-\infty}^{\infty}\right)$

$$Z_{R\times S^3/Z_k}^{\mathrm{t.b.}}=\int\prod_{i=1}^{N}dm_i\Delta(m)^2\prod_{i,j=1}^{N}\left[\frac{1+\left(\frac{m_i-m_j}{2}\right)^2}{\{1+(m_i-m_j)^2\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\prod_{u=-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{J=|ku/2|\\ J\neq 0}}^{\infty}\prod_{i,j=1}^{N}\left[\frac{\left\{1+\left(\frac{m_i-m_j}{2J+2}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{m_i-m_j}{2J}\right)^2\right\}}{\left\{1+\left(\frac{m_i-m_j}{2J+1}\right)^2\right\}^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{4\pi^2}{g^2}\sum_{i=1}^{N}m_i^2}$$

Contents

SYM on $R\times S^2$ の自明な背景周りの分配函数

$$Z^{\rm t.b.}_{R\times S^2}=\int\prod_i dm_i\prod_{J=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}{}'\left[\frac{\{1+\frac{(m_i-m_j)^2}{(2J+2)^2}\}\{1+\frac{(m_i-m_j)^2}{(2J)^2}\}}{\{1+\frac{(m_i-m_j)^2}{(2J+1)^2}\}^2}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{8\pi}{g^2_{S^2}}\sum_i m_i^2}$$

$$=\int\prod_i dm_i\prod_{i>j}\tanh^2\left(\frac{\pi(m_i-m_j)}{2}\right)e^{-\frac{8\pi}{g^2_{S^2}}\sum_i m_i^2}$$

・・・2つのadjoint hypermultipletを持つ

super Chern-Simons theoryの分配函数と同じ形。

これは少なくともlarge-N の強結合極限($\lambda\to\infty$) で解ける。 [Suyama '11]

⇨ $\ln Z\sim N^2\lambda^{-1/3}$

・・・ Lin-Maldacenaの重力解と一致

Little String Theory

真空 $\hat{X}_a = -\mu 1_N \otimes L_a^{[j]}$ 周りのPWMMで極限

$$j = \frac{N_5 - 1}{2}\text{: fixed}, \quad N \to \infty, \quad \frac{1}{N}\lambda^{\frac{5}{8}} e^{a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5} = \tilde{g}_s\text{: fixed}$$

を取ると$R \times S^5$ 上のIIA little string theoryを記述するという予想が提唱されている。(重力側はこの極限でNS5ブレーン解に帰着する。)

[Ling-Mohazab-Shieh-Anders-Raamsdonk '06]

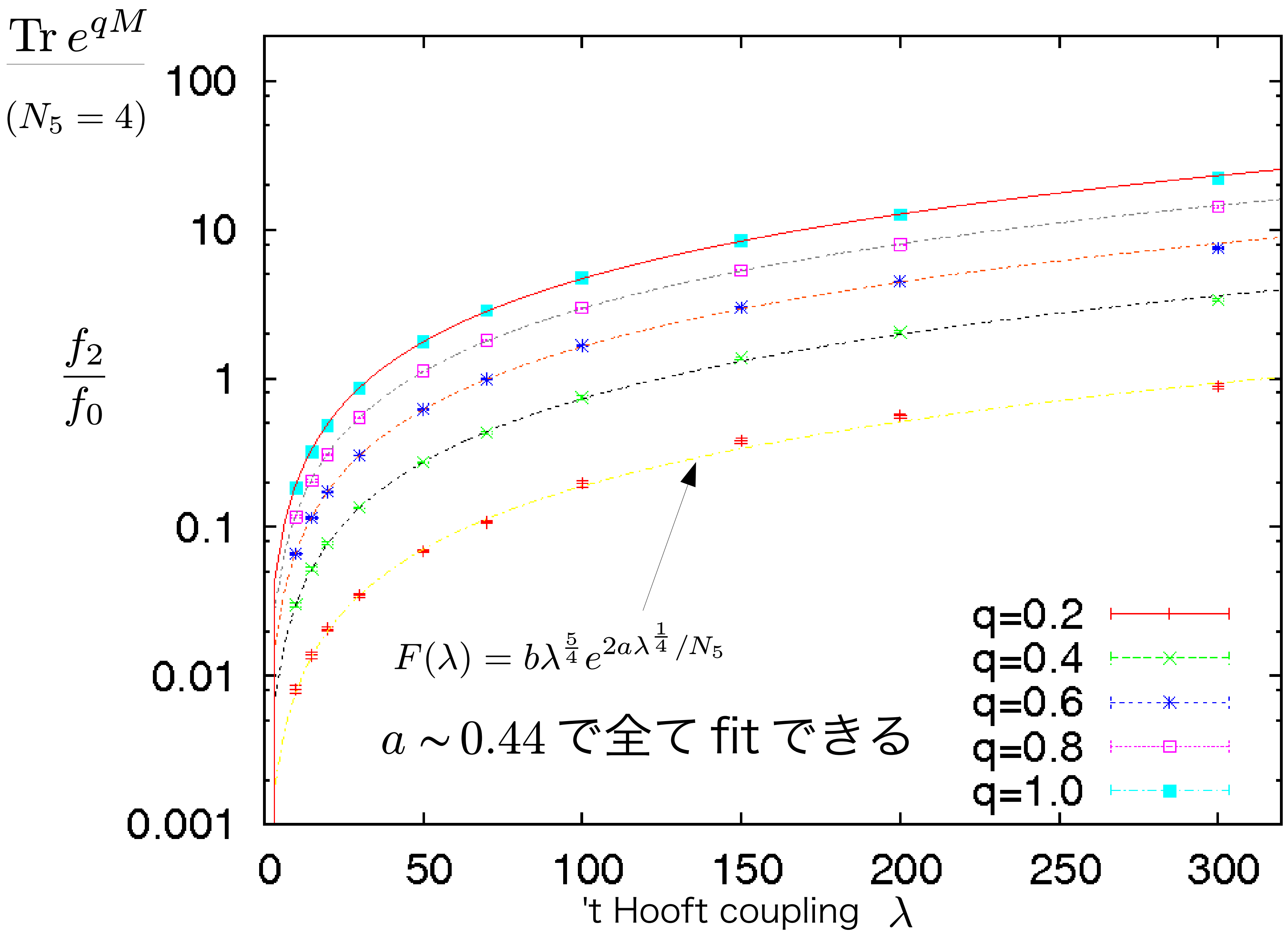
この極限は存在するか？

⇒ 存在するとすれば

$$\langle \mathcal{O} \rangle = c(\lambda)(a_0 + a_2 \tilde{g}_s^2 + a_4 \tilde{g}_s^4 + \cdots)$$
$$= f_0 + \frac{f_2}{N^2} + \frac{f_4}{N^4} + \cdots$$

⇒ $$\frac{f_{2n+2}}{f_{2n}} \propto \lambda^{\frac{5}{4}} e^{2a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5}$$

non-planar の λ 依存性が強い制限を受ける。


$\mathrm{Tr}\, e^{qM}$
$(N_5 = 4)$
$\frac{f_2}{f_0}$
100
10
1
0.1
0.01
0.001
0
50
100
150
200
250
300
't Hooft coupling λ
$F(\lambda) = b\lambda^{\frac{5}{4}} e^{2a\lambda^{\frac{1}{4}}/N_5}$
$a \sim 0.44$ で全て fit できる
q=0.2
q=0.4
q=0.6
q=0.8
q=1.0

7. Summary

- PWMMと$R\times S^2$上のSYM、$R\times S^3/Z_k$ 上のSYMの摂動的分配函数を求めた。BPS Wilson loopなどのQ-closed演算子についても同様に求めることができる。

- Lin-Maldacenaの重力解から計算される自由エネルギーとconsistentな結果を得た。

- PWMMのあるdouble scaling lim.で、NS5上のlittle string theoryが記述される予想に対する証拠を得た。

- 有限N ではインスタントン解が存在すると考えられる。
  (mass-deformed Nahm eq.)
  この効果も求めたい。(future work)

- M理論との関係？ (future work)

- Taylor's T-duality

[Taylor '96]

Dp (R^p) ⟷ D$(p+1)$ $(R^p \times S^1)$

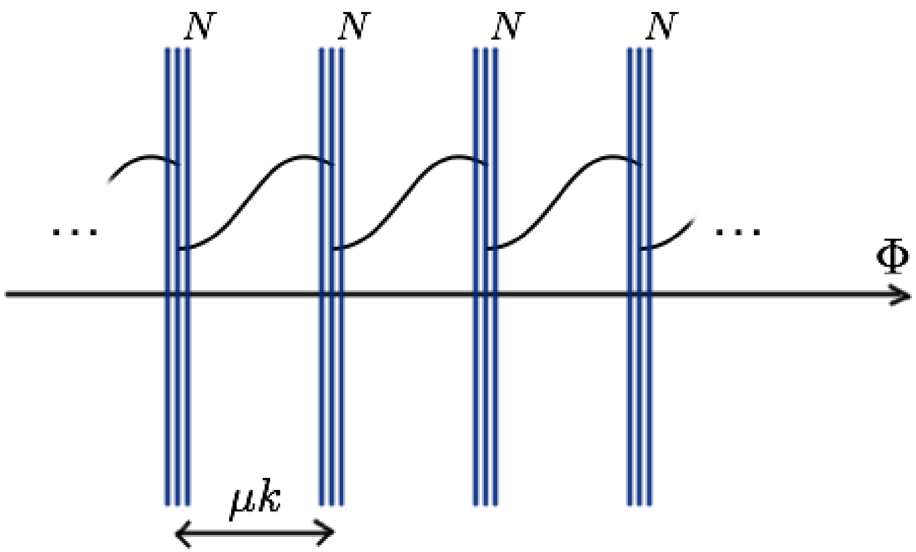
$$S_p = \frac{1}{g_p^2}\int d^p x\,\mathrm{Tr}\,[\frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)^2]$$

$$S_{p+1} = \frac{1}{g_{p+1}^2}\int d^{p+1}z\,\mathrm{tr}\,[\frac{1}{4}F_{MN}^2]$$

$$z = (x, y), \quad y \sim y + 2\pi R$$

vacuum

$$\hat{\Phi} = 2\pi\tilde{R}\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & s-1 & & & \\ & & s & & \\ & & & s+1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \otimes 1_N$$



orbifolding for fluctuations

$$\tilde{a}_\mu^{(s,t)}(x) = \tilde{a}_\mu^{(s+1,t+1)}(x), \quad \tilde{\Phi}^{(s,t)}(x) = \tilde{\Phi}^{(s+1,t+1)}(x)$$

$$=: \tilde{a}_\mu^{(s-t)}(x) \qquad\qquad =: \tilde{\Phi}^{(s-t)}(x)$$

2. Relations among $SU(2|4)$ Symmetric Theories

- Taylor's T-duality

[Taylor '96]

Dp (R^p) ⟷ D$(p+1)$ $(R^p \times S^1)$

$$S_p = \frac{1}{g_p^2}\int d^p x \,\mathrm{Tr}\,[\frac{1}{4}f_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(D_\mu \Phi)^2]$$

with $\hat{\Phi}$ and orbifolding

$$S_{p+1} = \frac{1}{g_{p+1}^2}\int d^{p+1}z \,\mathrm{tr}\,[\frac{1}{4}F_{MN}^2]$$

$$z = (x, y), \quad y \sim y + 2\pi R$$

$$A_\mu(x,y) = \sum_w \tilde{a}_\mu^{(w)}(x) e^{-\frac{i}{R}wy}$$

$$A_y(x,y) = \sum_w \tilde{\Phi}^{(w)}(x) e^{-\frac{i}{R}wy}$$

$$D_\mu \Phi^{(s,t)} = \partial_\mu \tilde{\Phi}^{(s,t)} + 2\pi i \tilde{R}(s-t)\tilde{a}_\mu^{(s,t)} -i\sum_u (\tilde{a}_\mu^{(s,u)}\tilde{\Phi}^{(u,t)} - \tilde{\Phi}^{(s,u)}\tilde{a}_\mu^{(u,t)}) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} dy\,(\partial_\mu A_y - \partial_y A_\mu - i[A_\mu, A_y])e^{\frac{i}{R}wy}$$

$$\frac{1}{2\pi\tilde{R}} = R$$

$$\frac{\sum_w \tilde{R}}{g_p^2} = \frac{1}{g_{p+1}^2}$$

- BPS Wilson loops

The loop is taken as a great circle on S^3 at $\tau=0$.

- SYM on $R \times S^3/Z_k$

$$W = \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\, P \exp \left[\frac{i}{\mu} \oint ds (A_4 - iX_{10}) \right]$$

- SYM on $R \times S^2$

$$W_{S^2} = \frac{1}{N_{S^2}} \mathrm{Tr} \exp \left[\frac{4\pi i}{\mu} (\Phi - iX_{10}) \right]$$

- PWMM

$$W_{PW} = \frac{1}{N_{PW}} \mathrm{Tr} \exp \left[\frac{4\pi i}{\mu} (X_4 - iX_{10}) \right]$$

3. Localization

- SUSY
  Off-shell SUSY can be constructed by introducing fields K_i and spinors ν_i , and adding to the action a term of auxiliary fields K_i ,

[Berkovits '93]

$$+\frac{1}{2g_{PW}^2}\int d\tau \mathrm{Tr}\, K_i K_i. \qquad i=1,\cdots,7$$

Then $(\mu=2)$

$$\delta_s X_M = -i\Psi\Gamma_M\epsilon$$
$$\delta_s\Psi = \frac{1}{2}F_{MN}\Gamma^{MN}\epsilon - X_m\tilde{\Gamma}^m\Gamma^{19}\epsilon + K^i\nu_i$$
$$\delta_s K_i = i\nu_i\Gamma^M D_M\Psi$$

with a conformal Killing spinor satisfying

$$\nabla_a\epsilon = \pm\frac{1}{2}\Gamma^a\Gamma^{19}\epsilon$$

Corresponding to ϵ , ν_i is determined by

$$\epsilon\Gamma^M\nu_i = 0, \quad \frac{1}{2}(\epsilon\Gamma_N\epsilon)\tilde{\Gamma}^N_{\alpha\beta} = \nu^i_\alpha\nu^i_\beta + \epsilon_\alpha\epsilon_\beta, \quad \nu_i\Gamma^M\nu_j = \delta_{ij}\epsilon\Gamma^M\epsilon$$

Take one SUSY: $\epsilon = e^{\frac{\pi}{2}\Gamma^{09}}e^{-\frac{\pi}{4}\Gamma^{49}}\begin{pmatrix}\eta_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \nu_i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}\Gamma^{09}}e^{-\frac{\pi}{4}\Gamma^{49}}\Gamma^{i8}\begin{pmatrix}\eta_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\eta_1 = (1,0,0,0)^T$ $\qquad i=1,\cdots,7$

The solutions of the conformal Killing spinor equation of PWMM are

$$\epsilon_+ = \begin{pmatrix} e^{\frac{\tau}{2}}\ \eta_1 \\ 0 \\ e^{-\frac{\tau}{2}}\ \eta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \epsilon_- = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\frac{\tau}{2}}\ \eta_2 \\ 0 \\ e^{\frac{\tau}{2}}\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

But it is sufficient to take just one SUSY. $\eta_1 = (1,0,0,0)^T$

$$\epsilon = e^{\frac{\tau}{2}\Gamma^{09}} e^{-\frac{\pi}{4}\Gamma^{49}} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nu_i = \sqrt{2} e^{\frac{\tau}{2}\Gamma^{09}} e^{-\frac{\pi}{4}\Gamma^{49}} \Gamma^{i8} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, \cdots, 7$$

Note: It is taken so that the Wilson loop should be supersymmetric.

$$\delta_s \mathrm{Tr}\ \exp[2\pi i(\overset{=\tau}{X_4(0)} - X_0(0))] \propto \Psi(0)(\Gamma_4 - \Gamma_0)\epsilon = 0$$

- BRS symmetry

$$\delta_B X = -[C, X]_{\mp}, \qquad \delta_B C = a_0 - C^2,$$
$$\delta_B \tilde{C} = b, \qquad \delta_B b = -[a_0, \tilde{C}], \ \cdots \qquad \Longrightarrow \qquad \delta_B^2 = -[a_0, *]$$

$C, \tilde{C}, b, a_0, \cdots$: ghost fields and ghosts of the ghosts

3. Localization

Killing vector

$$v^M = \epsilon\Gamma^M\epsilon$$

SUSY invariant operator ϕ

$$\phi = v_M X^M \quad \Longrightarrow \quad \delta_s\phi = 0$$

- Mass-deformed Nahm equation

$$-e^{\tau}(D_1X_0+X_0-e^{-\tau}K_5)^2=0$$

$$-e^{-\tau}(D_1X_0-X_0+e^{\tau}K_5)^2=0$$

$$e^{-\tau}\left\{\frac{1}{2}D_1(e^{\tau}X_9)-F^{+}_{14}-F^{+}_{5,8}\right\}^2=0$$

$$e^{\tau}\left\{\frac{1}{2}D_1(e^{-\tau}X_9)+F^{-}_{14}-F^{-}_{5,8}\right\}^2=0$$

$$e^{-\tau}\left\{F^{+}_{a4}-\frac{1}{2}D_a(e^{\tau}X_9)+F^{+}_{a+4,8}\right\}^2=0$$

$$(a=2,3)$$

$$e^{\tau}\left\{F^{-}_{a4}+\frac{1}{2}D_a(e^{-\tau}X_9)-F^{-}_{a+4,8}\right\}^2=0$$

$$\vdots$$

- 1-loop determinant

After a proper field-redefinition, we can construct doublets under the Q transformation:

$$Z_0 = X_{M'}, \quad Z_1 = \Upsilon_i, \qquad Z'_0 = \Psi_{M'}, \quad Z'_1 = H_i \quad \Longrightarrow \quad QZ_i = Z'_i, \quad QZ'_i = PZ_i, \quad (i = 0, 1)$$

$$\Psi = \Psi_{M'}\Gamma^{M'}\epsilon + \Upsilon_i\nu_i, \quad H_i = (\epsilon\epsilon)\delta_s\Upsilon_i, \quad P := Q^2 = \delta_{U(1)} - [a_0, *]$$

※ This $U(1)$ is a part of Lie derivative in $SO(3)$ and $SO(6)$ R symmetry.

The quadratic part of V is in the form of

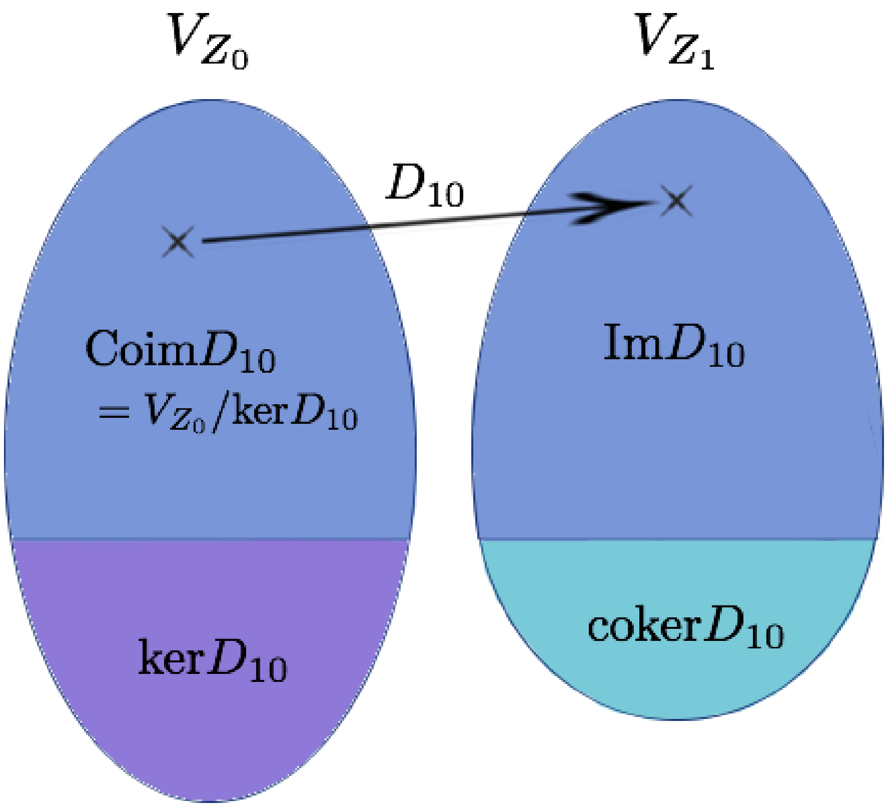
$$V \ni (Z'_0, Z_1)\begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z'_1 \end{pmatrix}$$

$$QV \ni (PZ_0, Z'_1)\begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z'_1 \end{pmatrix} + (Z'_0, Z_1)\begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z'_0 \\ PZ_1 \end{pmatrix}$$

- 1-loop determinant

$$QV \ni (PZ_0, Z_1') \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1' \end{pmatrix} + (Z_0', Z_1) \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0' \\ PZ_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ Z_{1-\mathrm{loop}} = \left(\frac{\det_{V_{Z_1}} P}{\det_{V_{Z_0}} P} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\det_{\mathrm{coker} D_{10}} P}{\det_{\ker D_{10}} P} \right)^{\frac{1}{2}}$$



⇒ We only need to know $\ker D_{10}$ and $\mathrm{coker} D_{10}$.

$D_{10} : V_{Z_0} \to V_{Z_1}$: linear map

$$V_{Z_i} = \{ Z_i | \lim_{\tau \to \pm\infty} Z_i(\tau) = 0 \}$$