今日の場の量子論と紐(弦)理論への道

大阪市立大学・大学院理学研究科
糸山　浩司

湯川秀樹による量子論的粒子の交換に基づく力の伝達という着想から始めて、歴史的に困難とされた場の量子論の紫外発散の問題、これを回避するくりこみの処方箋とその現代的意義について解説する。紫外発散の問題の解決策を与える紐(弦)理論の基本的考え方、近年のアイデア、現在の紐理論に残された課題について概観する。近年の場の量子論、紐理論に不可欠とされる超対称性についても触れたい。

平成19年6月15日
於　大阪市立大学工学部

目次

I）（粒子=波動)の場の量子論的描像

II） 力の媒介となる場の量子

III） 場の量子論の(歴史的)困難と自己救済策

IV） 紐による解決策

V） 課題といくつかのアイデア

I)

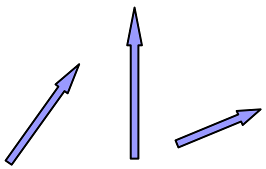
(1) 古典物理は「粒子(質点)」と「場」の2本立て

i） Newton(古典)力学　　　　　$\circ\ \vec{x}(t)$

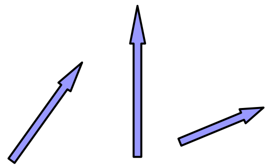
Galilei変換で運動方程式は不変。

ii） Maxwell(古典)電磁気学

Lorentz変換で運動方程式は不変。



$\mathbf{E}(\vec{x},t)$　　　$\mathbf{B}(\vec{x},t)$



iii） i)を修正 → Einsteinの特殊相対論

v / c << 1 で特殊相対論はNewton力学に移行。

その他に流体力学、弾性体力学・・・

粒子(質点)系の定義:　空間内のいくつかの点に物理的性質が確定したものが集中的に存在する場合

粒子系に対する法則:　これらの点は時間とともにどう位置を変えていくかに答える

場の定義:　空間の各点各点での物理量の分布。即ち、波動の伝播。物理量ごとに別の場を導入。

場の法則:　物理量が各点各点で時間とともにどう変動していくかに答える。

最初は媒質中での物理現象で確立。　例:音波の場
後に媒質なしの空間でも確認。

(1) 量子論では　粒子=波動

・量子論は古典論と概念的に独立と考えた方が簡潔

・繰り返し実験を行うことを前提、測定結果を確率として予言。

2通りの理解の仕方があり、それらはほぼ同等。

その1）　学部の講義　　　　　　　**量子力学**

i) (及びiii)による修正) において、電子を複素数値をとる波動とみなす。

$\Longrightarrow$　多体系では統計性をさらに課す。

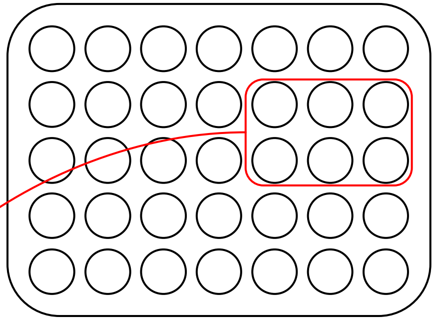
その2）　今日の話の立場　　　　　**場の量子論**

ii) において、電磁場をエネルギーのかたまりとみなす。

$\Longrightarrow$　電子等の物質も場から考える。

(cf. 連成振動)

(2) 電光掲示板的な説明



を用意する。

光はある時は位相差として測定され、

ある時はエネルギーのかたまりとして

測定されるという事実をどう(数学的に)

考えるか

<u>構成</u>

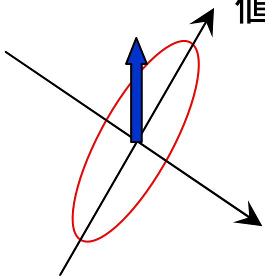
- 各点の状態をベクトルで表わす。

- このベクトルの住んでいる空間の次元数

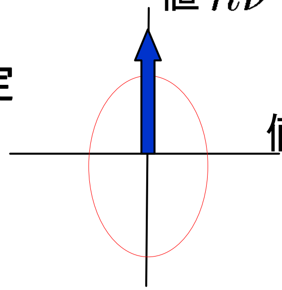
 ＝ある物理量の組の許される値の総数

- 物理量ごと(場＝変位とエネルギーそれぞれ)に楕円体を導入

ある小領域での
場の測定



振動数 ν の
エネルギー測定



⇒ 光子1個あった

II)

(1) 湯川秀樹が考えたこと

「力が存在すれば、これは量子論的粒子を交換することにより導き出せる。」

・核子(陽子と中性子を総称してこう呼ぶ)間に働く強い力に適用。

当時、核力の到達距離は $a = 1.4 \times 10^{-13}$cm であることが知られていた。

π 中間子という素粒子の存在とその質量を予言。

この力は現在ではクォーク間に働く力として理解されている。

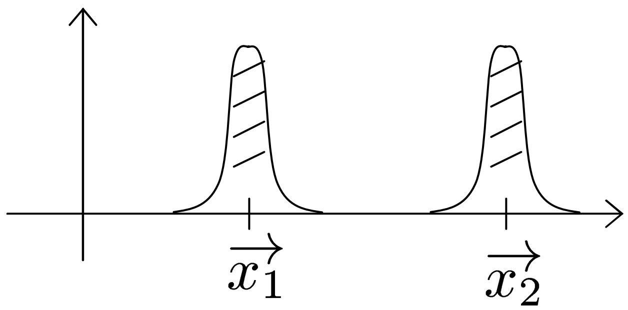
内容

・湯川はπ中間子(質量mとする)に対する場を導入し、

これを用いて相互作用のエネルギーを与える行列

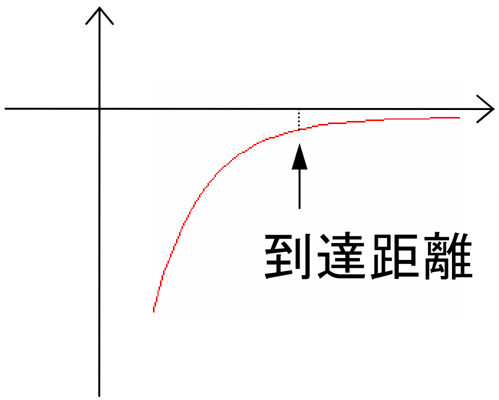
$\hat{H}_{湯川}$ を与えた。

核子の分布



結果

$\hat{H}_{湯川}$のとる値



到達距離 $a = \frac{\hbar}{mc}$ と結論

$$\therefore mc^2 = \frac{\hbar c}{a} = \frac{197[\mathrm{Mev} \cdot \mathrm{fm}]}{1.4[\mathrm{fm}]} \approx 140[\mathrm{Mev}]$$

(2) $\hat{H}_{\text{湯川}}$からの教科書的計算

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{湯川}} &= \int d^3\vec{x}\ \hat{\Pi}(\vec{x},t)\ \hat{\dot{\varphi}}(\vec{x},t) - L_{\text{KleinGordon}} \qquad\qquad c=1 \\
&= \int d^3\vec{x} \left\{ \frac{1}{2}\hat{\Pi}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\hat{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\hat{\varphi}^2 + g\rho\hat{\varphi} \right\} \\
&= \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}
\end{aligned}
$$

$$[\hat{\Pi}(\vec{x},t), \hat{\varphi}(\vec{y},t)] = -i\hbar\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

場の演算子
正準交換関係

以下、$\hbar = 1$

$\rho(\vec{x})$; 静的な核子分布の古典場

$= \delta(\vec{x}-\vec{x}_1) + \delta(\vec{x}-\vec{x}_2)$ ととろう

基底状態のエネルギーのずれを摂動論の最低次で求める。

$$E^{(2)} = \int d^3\vec{k} \frac{\langle 0|\hat{H}_{\rm int}|\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|\hat{H}_{\rm int}|0\rangle}{0-\omega_{\vec{k}}}$$
$$= E^{(2)}_{x_1,x_1} + E^{(2)}_{x_2,x_2} + E^{(2)}_{x_1,x_2}$$

ここで　$|\vec{k}\rangle = a^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle$　で　$a_{\vec{k}}$　,　$a^\dagger_{\vec{k}}$　は　$\hat{\varphi}(\vec{x},t)$　のフーリエ係数演算子

結果；　　（ c　,　$\hbar$ 再現して）

$$E^{(2)}_{x_1,x_2} = -\frac{g^2}{4\pi} c\hbar \frac{e^{-c|\vec{x}_1-\vec{x}_2|/\hbar}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

しかし $\dfrac{g^2}{4\pi} \gg 1$　と小さくない

核力の飽和性は説明できず。

(1) 自己エネルギーと紫外発散の問題

III)

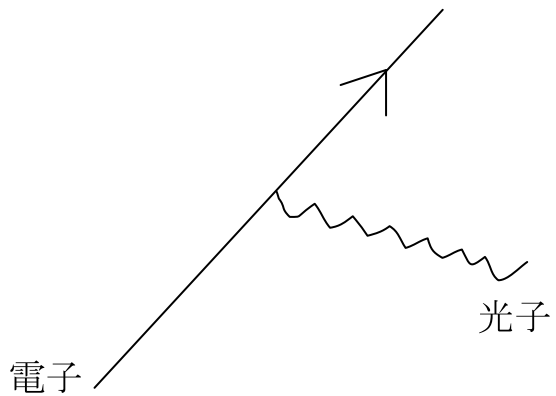
1） 場の量子論における自己エネルギーの問題

（量子電磁力学 QED）

・光子と同様電子などの物質も物質場で記述できる。

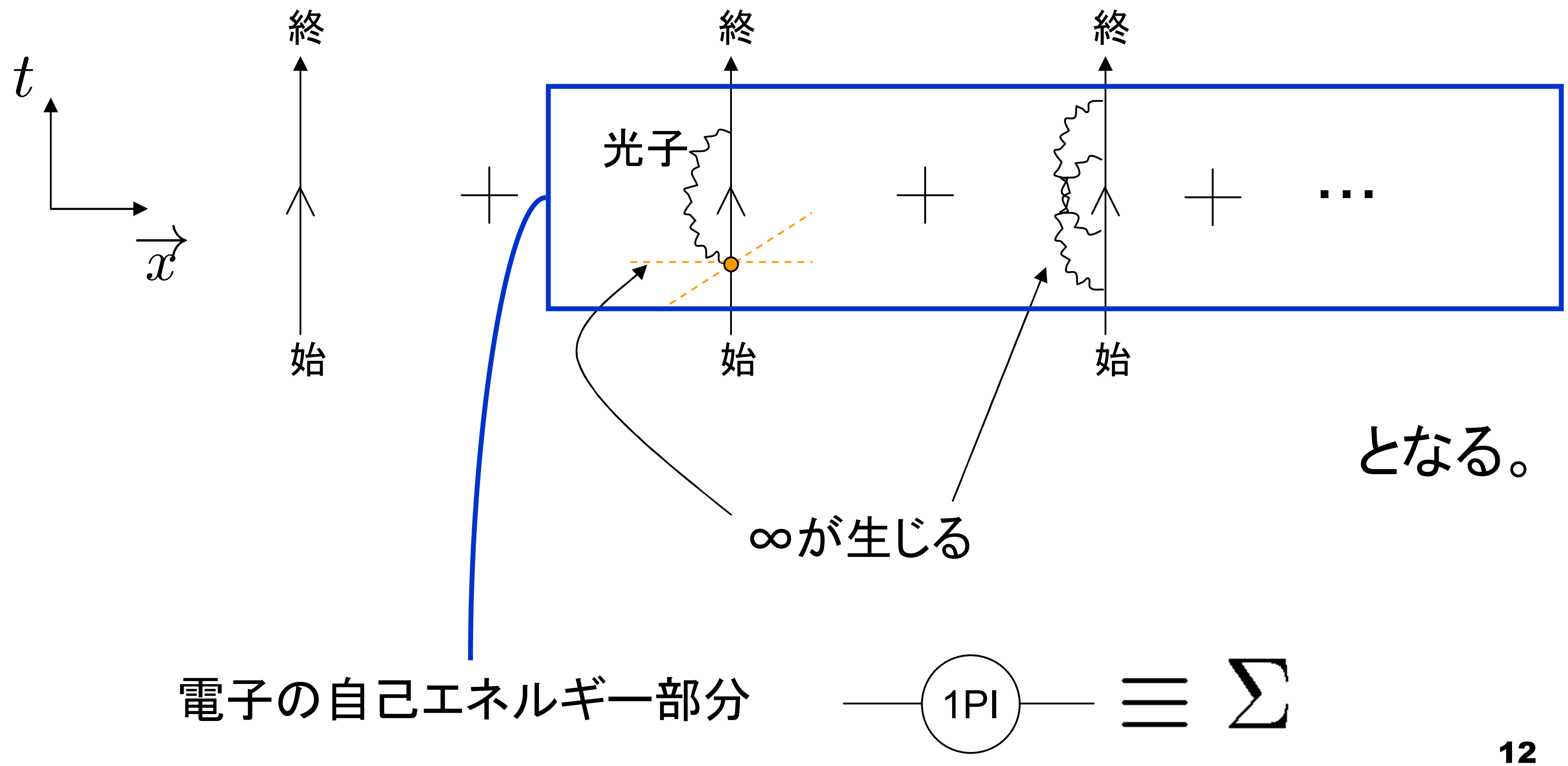
・量子論的粒子なので米粒ではないが、相互作用は時空の確定した点で起きる。

⇒ いくらでも大きい振動数の量子論的粒子の交換が可能。



・エネルギー、運動量が無限の過去と未来で確定値をもつ場合を考える。電子1個の動きを図式化し、光子の放出、吸収の回数で分類すると、

(Feynman ダイアグラム)



となる。

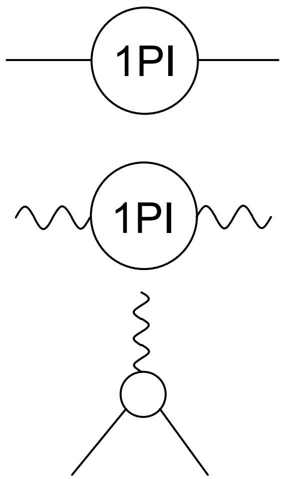
(2) くりこみの処方箋とその解釈

摂動論を実行する。

$H_{\mathrm{QED}} = H_0 + H_{相互}$ の分離は一意的ではない。

⇔ counter term の存在

H_{QED} は4項からなるので、4つの条件(もともとは物理的要請)を課す。



例
$$
\begin{cases}
\Sigma(\not p = m) = 0 \\
\left.\dfrac{d}{d\not p}\Sigma(\not p)\right|_{\not p = m} = 0 \\
\Pi(q^2 = 0) = 0 \\
-ie\Gamma^{\mu}(p' - p = 0) = -ie\gamma^{\mu}
\end{cases}
$$

振幅(あるいは Green 関数)を運動量の切断 $\Lambda \to \infty$ で有限にする。

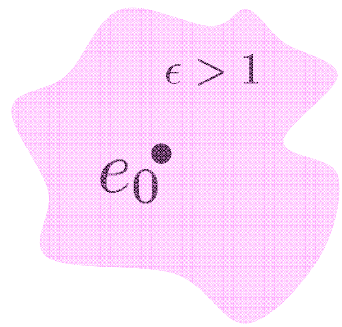
朝永、Schwinger、Feynman、Dyson

この条件に限らない。

- 提案した本人達も最終的なものとは思っていなかったようだ。
- 一般に2つのエネルギー scale での実験の比を予言する。
- μ でくりこまれた結合定数 $e^2(\mu)$ は scale μ に依存。

(3) 真空偏極と電荷のスクリーニング(QED)

- $\Pi(q^2)$ の意味合い



真空にテスト電荷(裸の電荷)をおくと
$e^+ e^-$ 対生成のゆらぎにより、静電遮蔽が起こる。

光子の外場に対する補正

$$\frac{-i\eta_{\mu\nu}e_0^2}{q^2 4\pi} \quad \rightarrow \quad \frac{-i\eta_{\mu\nu}\boxed{e_0^2}}{q^2\boxed{(1-\Pi(q^2))4\pi}} \equiv \alpha_{\mathrm{eff}}(q^2);$$

q^2 に依存する有効結合定数

$$\alpha_{\mathrm{eff}}(q^2) = \frac{e^2 \big/ 4\pi}{(1-\Pi(q^2)) \big/ (1-\Pi(0))} \xrightarrow[q^2 \gg m^2]{\text{One-loop}} \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\log\left(\frac{|q^2|}{Am^2}\right)}$$

q^2 大 (近距離)で実際強くなり、摂動論はいずれ破綻する。

・0 電荷の問題

くりこまれた摂動論ではなく、$\alpha_{\rm eff}(q^2)$ を
切断 Λ と裸の結合定数 α_0 で考えることもできる。

上と同様の計算及び一連の高次補正の考察より、
既に1950 年代に Landau たちは

$$\alpha_{\rm eff} \approx \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{3\pi}\log\left(\frac{\Lambda^2}{|q^2|}\right)}$$

と結論した。

α_0 を小さくし、Λ^2 を十分大きくとって1を無視すると

$$\approx \frac{3\pi}{\log\left(\frac{\Lambda^2}{|q^2|}\right)} \xrightarrow{\Lambda\to\infty} 0$$

これは、今日で言うtriviality, 構成論的に格子上で理論を定義すると
連続極限で相互作用しなくなる場合。

(4) 漸近的に自由な場の理論

Q: 反遮蔽は可能か？　　A: Yes

結果: ゲージ群 G、フェルミオンの表現 r 、個数 n_f の nonabelian gauge theory では、one-loop で

Gross, Wilczek, Politzer

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s}{1 + b_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \log Q/\mu} \equiv \frac{2\pi}{b_0 \log Q/\Lambda_{\mathrm{QCD}}}$$

$$b_0 = \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r)$$

後付け　$\epsilon_{誘} \mu_{透} = 1$ なので、$\epsilon < 1$ は $\mu > 1$ 、つまり常磁性を意味する。

スピン1の粒子は color magnetic dipole moment を持ち、$\delta\mu > 0$

⋮

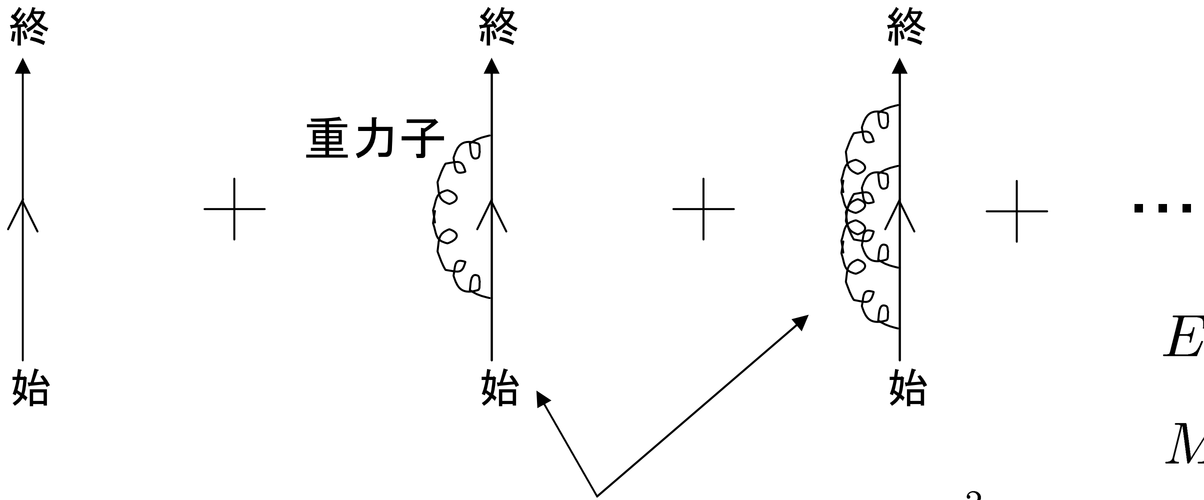
- Q 大で $\alpha_s(Q)$ 小さくなるので問題なし。

- 格子上で厳密なゲージ不変性をもち、閉じ込めを自明に実現する格子ゲージ理論があり、滑らかな連続極限(弱結合極限で)を持つことが数値的に判っている。

（ほぼ）完全な理論といえる。

(5) 重力の場の量子論

・重力相互作用では



この2つの補正の比は $\left(\frac{E}{M_p c^2}\right)^2$

E ;電子のエネルギー

$M_p = \sqrt{\hbar c / G_N}$

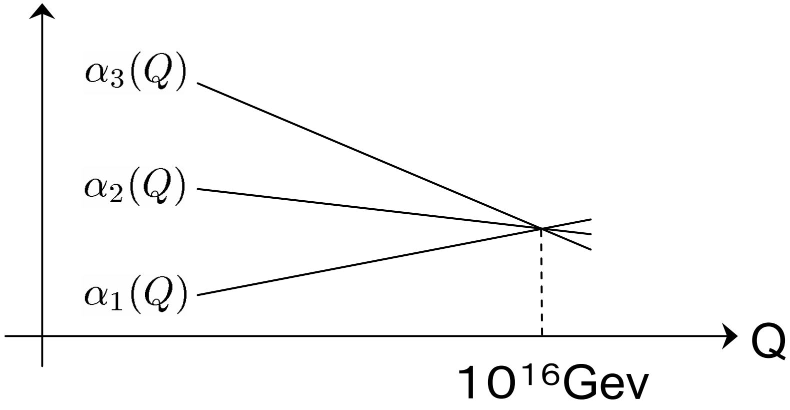
G_N ;万有引力定数

- 高エネルギーになると高次補正の方が大きくなってしまう。
- 無限大の処理がうまくいかない。
- 格子に切って、構成論的にやろうとすると
  一般座標変換(diffeomorphisms)がわからなくなる。
  cf. Regge calculus, dynamical triangulation, spin network,
  Ashtekar

(6) 超対称性

boson ⇔ fermion

3つの力の統一に必要とされている。



- 量子効果を大きく相殺・制限する。
- 結合定数に関する解析性(holomorphy)を持たせることが
  可能(切断 Λ でくり込み)　Seiberg
  摂動補正は1-loopで止まる。
- 摂動部分と非摂動部分(instanton)の分離が容易。
- Riemann面(curve)とその上に住む有理型微分 dS_{SW} を用いて
  exact な低エネルギー極限での有効作用が求まっている。

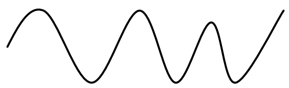
$$\begin{cases} a_i = \oint_{\alpha_i} dS_{SW}(u) \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i} = \oint_{\beta_i} dS_{SW}(u) \end{cases}$$

Seiberg-Witten
cf. Gorsky et.al., H.I.-Morozov

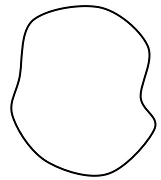
IV)

(1) 量子論的粒子ではなくひもを量子化しよう

大きさ10^{-33} cm程度

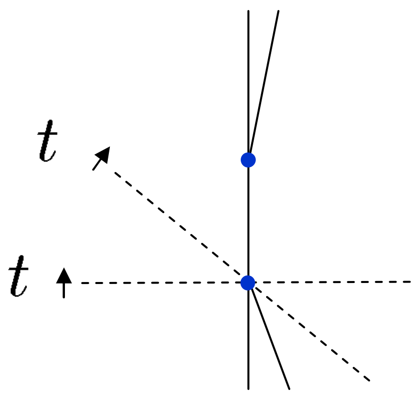


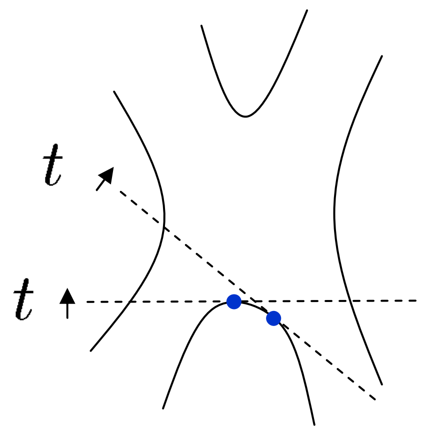
の1つのモードとして
電子などの物質と光子がある。



の1つのモードとして
重力子
つまり時空のゆらぎがある。

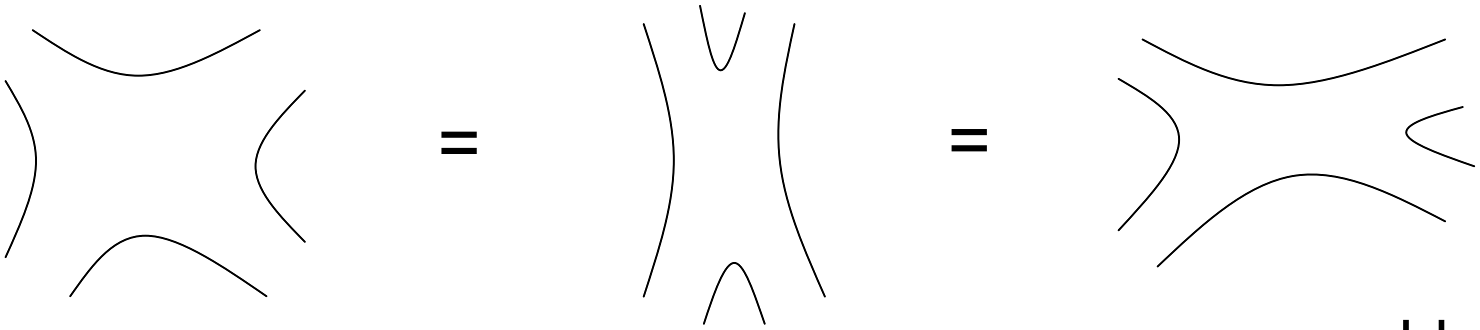
(2) 紫外発散がない理由





相互作用の起こる点が
不確定

(3) 紐の振幅の双対性

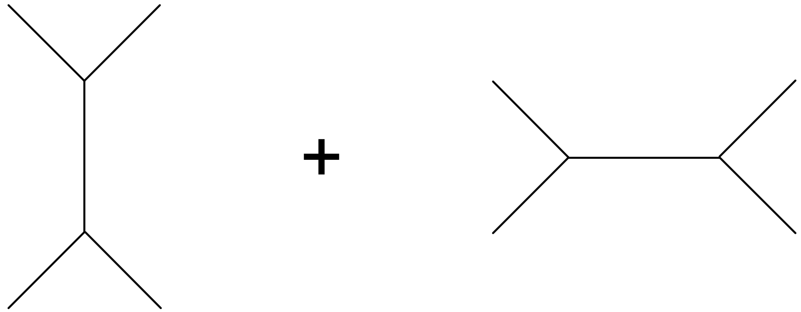


rubber band

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

$= $ 紐の張力

$\xrightarrow{\alpha' \to 0}$

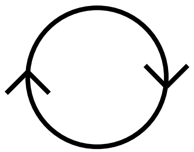


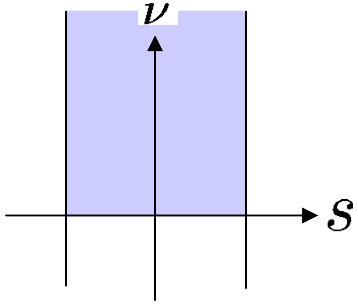
点粒子極限

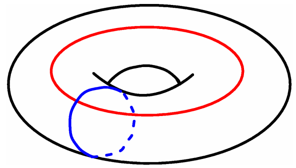
紐のダイアグラムと粒子のファインマンダイアグラムは
1:1に対応していない

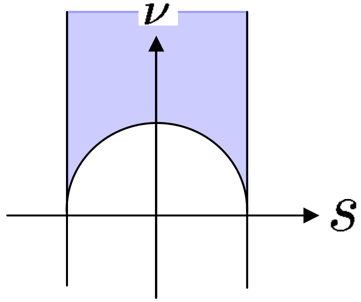
(4) 1-ループの真空ゆらぎの振幅

・測定にかからないので、ずっと無視してきた。
最近、宇宙の観測が進み、物質のエネルギーとはみなされない「宇宙項」とよばれる真空のエネルギーが0でないことが分かってきた。

粒子 $\displaystyle\sum_{\substack{\text{振動数}\,\nu \\ \text{種類}\,s}}$ 



ひも $\displaystyle\sum_{\text{形}}$ 

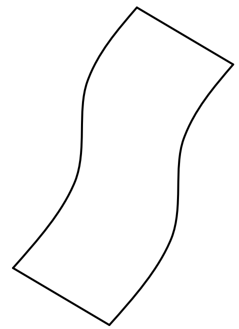


長い紐の短時間の伝播＝短い紐の長時間の伝播

cf. H.I. – T.R.Taylor '87

(1) 紐の摂動論をどう乗り越えようか

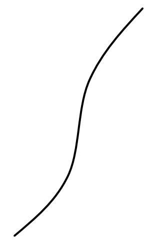
今まで述べなかったが、計算にあたっては作用



$$S_{\rm string} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{1}{2}\int_\Sigma d\sigma d\tau\sqrt{-g}g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

から得られる時空を伝播する1本の紐の量子力学を用いる。

これは、質量のない相対論的点粒子の作用



$$S_{\rm particle} \propto \int d\tau \eta^{-1}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}$$ の拡張

量子論的なスケール不変性　⇒　・$d_{\rm crit} = 10$

・平坦な時空に住むスピン2の粒子は
　質量を持たない。

・紐の結合定数 λ
　その強さは力学的に決まる。

Q: 何故、紐の場の理論にいかないのか

A: 1本の紐の量子論の規則が

Dysonの公式 $\langle \cdots T e^{-iH_{\rm int}} \cdots \rangle$ と合致しない。

よって、粒子の場の理論から遺産相続がうまくいかない。

対策: いくつかあるが、ここでは述べない。

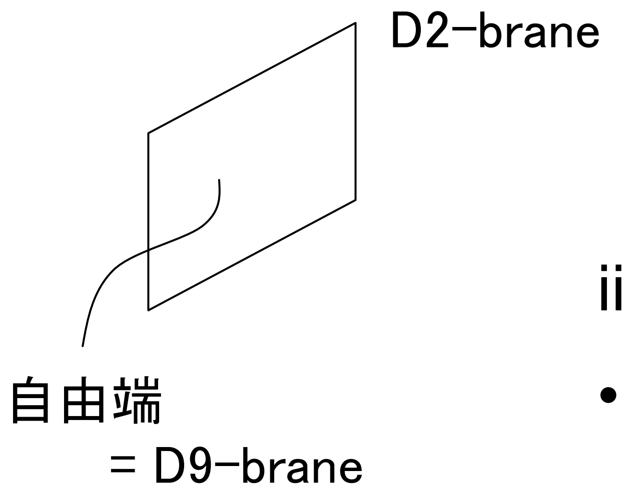
いずれにせよ、rubber band の特性は犠牲にせねばならない。

摂動論の処方箋のみがあり、無限に縮退した真空から
真の真空を決定する手段を我々は持ち合わせていない。

(2) D-branes　Polchinski

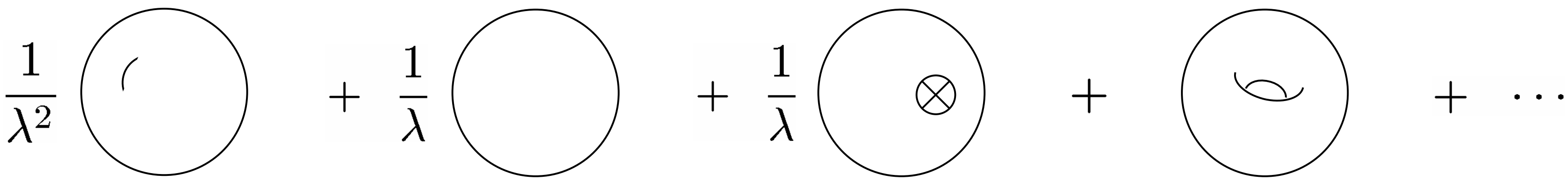
場の方程式は得られていないが、我々は来たるべき紐理論のソリトンが何であるかを1本の紐から同定することができた。

i) Dp-brane の定義 ; 開いた紐 $X^{\mu}(\tau,\sigma)$ の空間成分のうち p 個を固定端 (Dirichlet境界条件) とした時現われる幅 $\sqrt{\alpha'}$ 程度の壁



ii) 力学的な soliton である理由

- 真空のゆらぎの振幅に $1/\lambda$ の寄与。
- 空間に局在している。



sphere　　disc　　RP^2　　torus

= 0

非摂動、強結合で重要というが
ゆらぎはやはり小さくなければならない。

(3) ゲージ重力対応

・D3 brane を N (>>1)枚用意する。重いので周りの時空も曲げられる。

・D3 brane上には、その上についた開いた紐により、

U(N)ゲージ理論が誘導される。

r_0； 古典ソリトンとしてのD3 braneを表わす超重力理論における古典解のscale
r ； 古典解の動径座標

$r \ll r_0$ (near horizon 極限)で$AdS_5 \times S^5$時空が出現する。

Maldacena

この時空上での超ひも理論の性質により、

４次元($\mathcal{N}=4$)超対称ゲージ理論の性質が調べられている。

海外にはもっと強い主張をする人も多い。

(4) 行列

理念として、紐の理論では時空というのは導き出されるもの
でなければならない。

⇒ ・ 摂動論と無関係に構成
　 ・ 紐の世界面を離散化し、行列として表わそう。

Maxwell型の紐の作用がやりやすい。

$$S_{\text{Schild}} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma \frac{1}{2} F_{MN}F^{MN}, \quad F^{MN} = \{X^M(\tau,\sigma), X^N(\tau,\sigma)\}_{\text{P.B.}}$$

$$\xleftarrow{\text{行列のサイズ}\infty} \quad \mathrm{Tr}[X_M, X_N][X^M, X^N]$$

行列

0次元の力学系

	時間	空間
量子力学	パラメーター	力学変数
場の理論	パラメーター	パラメーター
行列	力学変数	力学変数