高次元ブラックホールの対称性と厳密解

安井　幸則　(大阪市立大学)

1. はじめに

高次元時空を分類する対称性

(I) Hidden Symmetry and Exact Solutions in Einstein Gravity

Houri-Y.Y: Progress Supplement (2011)

(II) Generalized Hidden Symmetries and Kerr-Sen Black Hole

Houri-Kubiznak-Warnick-Y.Y: JHEP (2010)

(III) コンパクトEinstein多様体, 佐々木-Einstein多様体への応用

大田-安井　（準備中）

数理科学 2011年4月号 「物理学と多様体」

キーワード：共形キリング・矢野テンソル（CKY）

♣ CKYとは

♣ なぜCKYに注目

- 4次元Kerrブラックホールの隠れた対称性
- 特殊ホロノミー多様体の自然な拡張

CKYは高次元時空を分類する上で大変有効な対称性

4-dim. Kerr metric

$$g = -\frac{\triangle_r}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{\triangle_r}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(adt - (r^2+a^2)d\phi\right)^2$$

$$\triangle_r = r^2 + a^2 - 2mr, \qquad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

m: 質量,　a: 角運動量

場の方程式の変数分離性:

- 測地線方程式, Klein-Gordon 方程式　[Carter 1968]
- Maxwell 方程式, 重力摂動 [Teukolsky 1972]
- Dirac 方程式 [Chandrasekhar 1976]

♣ 対称性をキリングベクトル場　∂_t, ∂_ϕ だけでは説明できない.

♣ キリング・矢野テンソル $f = (f_{ab})$:

$$\boldsymbol{f_{ab} = -f_{ba}, \quad \nabla_a f_{bc} + \nabla_b f_{ac} = 0}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & a\cos\theta & ar\sin\theta & 0 \\ -a\cos\theta & 0 & 0 & a^2\cos\theta\sin^2\theta \\ -ar\sin\theta & 0 & 0 & r(r^2+a^2)\sin\theta \\ 0 & -a^2\cos\theta\sin^2\theta & -r(r^2+a^2)\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \boldsymbol{t} & \qquad\qquad \boldsymbol{r} & \qquad\qquad \boldsymbol{\theta} & \qquad\qquad \boldsymbol{\phi} \end{matrix} \end{array}$$

(1) Carter 定数 (Walker-Penrose 1970, Floyd 1973)：

$$C = K_{ab} p^a p^b, \quad K_{ab} \equiv f_{ac} f_b{}^c \text{ (キリングテンソル)}$$

(2) Klein-Gordon 対称演算子 (Carter 1977):

$$K = \nabla_a K^{ab} \nabla_b$$

(3) Dirac 対称演算子 (Carter-McLenaghan 1979):

$$f = i\gamma_5 \gamma^a (f_a{}^b \nabla_b - (1/6)\gamma^b \gamma^c \nabla_c f_{ab})$$

共形キリング・矢野テンソル (CKY) はキリングベクトルの拡張

◇ 反対称rank-2 CKY (立花 1969):

$$\nabla_a h_{bc} + \nabla_b h_{ac} = 2g_{ab}\xi_c - g_{cb}\xi_a - g_{ca}\xi_b, \quad \xi_c = \frac{1}{n-1}\nabla^a h_{ac}$$

◇ 反対称rank-p CKY (柏田 1968):

$$\nabla_a h_{bc_1\cdots c_{p-1}} + \nabla_b h_{ac_1\cdots c_{p-1}} = 2g_{ab}\xi_{c_1\cdots c_{p-1}} + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i g_{c_i(a}\xi_{b)c_1\cdots\hat{c}_i\cdots c_{p-1}}$$

$$\xi_{c_1\cdots c_{p-1}} = \frac{1}{D-p+1}\nabla^a h_{ac_1\cdots c_{p-1}}$$

特に $\xi_{c_1\cdots c_{p-1}} \equiv 0$ のとき CKY はキリング・矢野テンソルと呼ばれる.

反対称テンソル＝微分形式

$$h_{a_1a_2\cdots a_p} \Longleftrightarrow h = \frac{1}{p!}h_{a_1a_2\cdots a_p}dx^{a_1}\wedge\cdots\wedge dx^{a_p}$$

D 次元空間上の CKY p-form

$$\nabla_X h = \frac{1}{p+1}i(X)dh - \frac{1}{D-p+1}X^*\wedge\delta h$$

- $\delta h = 0$ のときキリング・矢野テンソル
- $dh = 0$ のとき closed CKY

closed CKY (p-form) $\Longleftrightarrow$ キリング・矢野テンソル (D-p form)

ホッジ演算

例1　定曲率空間：

$\mathbf{S}^n$, $\mathbf{E}^n$, $\mathbf{H}^n$ **(Riemann)**　$\mathbf{dS}_n$, $\mathbf{E}^{1,n-1}$, $\mathbf{AdS}_n$ **(Lorentz).**

例2　Special CKY [立花-Yu 1970]：

$$\boldsymbol{\nabla}_X(dh) = cX \wedge h \quad c \text{ は定数}$$

に従うキリング・矢野テンソル

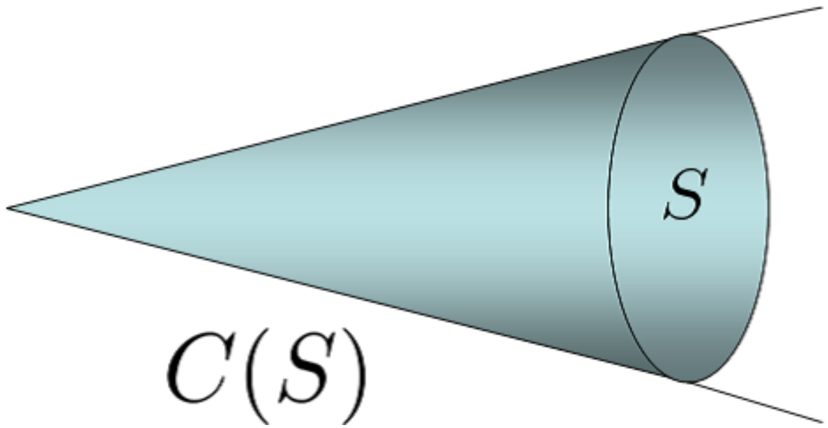
定理 [Semmelmann 2002]

Special CKY を許すコンパクト Einstein 多様体 S は次のいずれかである

(a) S^n (b) 佐々木-Einstein (c) 3-佐々木 (d) Nearly Kähler (e) Weak G_2

対応する錐空間 $C(S)$ **(特殊ホロノミーを持つ空間)**

(a) Euclid (b) Calabi-Yau (c) Hyperkähler (d) G_2 (e) Spin(7)



超重力理論の超対称なコンパクト化

(実) 次元	コンパクト多様体	ホロノミー	SUSY
k	T^k	$\{1\}$	1
6	Calabi-Yau	SU(3)	1/2
7	G_2	G_2	1/8
8	Hyper-Kähler	Sp(2)	1/4
8	Calabi-Yau	SU(4)	1/8
8	Spin(7)	Spin(7)	1/16

◇ CKYを許す時空は特殊ではあるが重要な時空

- dS_n, AdS_n, 4次元Kerr (Lorentz)
- S^n, H^n, 錐空間が特殊ホロノミー (Riemann)

◇ 可積分性 (rank-2 closed CKY)

- 計量テンソル
- 測地線, Klein-Gordon, Dirac方程式

♣ rank-2 closed CKY　高次元時空の分類

目次

2. CKYを持つ高次元ブラックホール解

1970年代：４次元Einstein方程式の厳密解

- “Solutions of Einstein’s Equation” Lecture Notes in Physics 205 (1984)
- “Gravitational Solitons” V. Belinski (2001)

♣ 逆散乱の方法 (5次元)

ブラックリング解 [Pomeransky-Sen’kov]

多重ブラックホール解 [Elvang-Figueras, 三島-井口]

♣ Kerr-Schildの方法 (D次元)

Minkowski (AdS)からの摂動 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

Ansatz: $h_{\mu\nu} \propto k_\mu k_\nu$ (ヌルベクトル)

“線形摂動から厳密解”

D (≥ 4) 次元ブラックホール解 $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$

	mass	rotation	NUT	Λ	parameter
Myers-Perry (1986)	◯	◯	×	0	1+[(D-1)/2]
Gibbons-Lü-Page-Pope (2004)	◯	◯	×	non-zero	2+[(D-1)/2]
Chen-Lü-Pope (2006)	◯	◯	◯	non-zero	D

Kerr-NUT-de Sitter 解（Chen-Lü-Pope解)：

現在知られている最も一般的な球形ホライズンのブラックホール解

Kerr-NUT-de Sitter metric [Chen-Lü-Pope 2006]

(a) $D = 2n$

$$g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2$$

(b) $D = 2n+1$

$$g^{(2n+1)} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^{n} Q_\mu(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 + \frac{c}{\sigma_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \sigma_k d\psi_k \right)^2$$

σ_k は基本対称多項式

$$\sigma_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \ \ \sigma_2 = x_1^2 x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 x_n^2, \ \ \cdots$$

$$Q_\mu(x) = X_\mu / U_\mu, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu\neq\mu}^{n} (x_\mu^2 - x_\nu^2)$$

$X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ は１変数 x_μ だけに依存する. Einstein 方程式を満たすためには

$$(a) \quad X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu x_\mu \quad (D = 2n)$$

$$(b) \quad X_\mu = \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu + \frac{(-1)^n c}{x_\mu^2} \quad (D = 2n+1)$$

定数 c_k, b_μ, c は質量, 角運動量, NUT, 宇宙項.

$D = 4$ Kerr-NUT de Sitter metric:

$$g^{(4)} = \frac{x^2 - y^2}{X(x)} dx^2 + \frac{y^2 - x^2}{Y(y)} dy^2 + \frac{X(x)}{x^2 - y^2}(dt + y^2 d\psi)^2 + \frac{Y(y)}{y^2 - x^2}(dt + x^2 d\psi)^2,$$

where

$$X(x) = (a^2 - x^2)(1 + \lambda x^2) + 2Mx$$

$$Y(y) = (a^2 - y^2)(1 + \lambda y^2) + 2Ly$$

$$Ric^{(4)}_{\mu\nu} = 3\lambda g^{(4)}_{\mu\nu}$$

a : angular momentum, M : mass, L : NUT

Bolyer-Lindquist coordinate : $(x, y, \psi, t) \to (r, \theta, \phi, \tau)$

$$x = \sqrt{-1}r, \quad y = a\cos\theta, \quad \psi = \phi/a, \quad t = \tau - a\phi$$

$D = 5$ Kerr-NUT-de Sitter metric

$$
\begin{aligned}
g^{(5)} = & \frac{x^2 - y^2}{X(x)} dx^2 + \frac{y^2 - x^2}{Y(y)} dy^2 \\
& + \frac{X(x)}{x^2 - y^2} (dt + y^2 d\psi_1)^2 + \frac{Y(y)}{y^2 - x^2} (dt + x^2 d\psi_1)^2 \\
& - \frac{a^2 b^2}{x^2 y^2} \left(dt + (x^2 + y^2) d\psi_1 + x^2 y^2 d\psi_2 \right)^2
\end{aligned}
$$

where

$$
X(x) = -\frac{1}{x^2}(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)(1 + \lambda x^2) - 2M
$$

$$
Y(y) = -\frac{1}{y^2}(a^2 - y^2)(b^2 - y^2)(1 + \lambda y^2) - 2L
$$

$$
R^{(5)}_{\mu\nu} = 4\lambda g^{(5)}_{\mu\nu}
$$

a, b : angular momenta, $\quad M$: mass, $\quad L$: NUT

$\boldsymbol{D = 6}$ **Kerr-NUT-de Sitter metric**

$$
\begin{aligned}
g^{(6)} =& \frac{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}{X(x)}dx^2 + \frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{Y(y)}dy^2 + \frac{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}{Z(z)}dz^2 \\
&+ \frac{X(x)}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}(dt + (y^2+z^2)d\psi_1 + y^2z^2 d\psi_2)^2 \\
&+ \frac{Y(y)}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}(dt + (z^2+x^2)d\psi_1 + z^2x^2 d\psi_2)^2 \\
&+ \frac{Z(z)}{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}(dt + (x^2+y^2)d\psi_1 + x^2y^2 d\psi_2)^2
\end{aligned}
$$

where

$$X(x) = -(a^2-x^2)(b^2-x^2)(1+\lambda x^2) - 2Mx$$

$$Y(y) = -(a^2-y^2)(b^2-y^2)(1+\lambda y^2) - 2L_1 y$$

$$Z(z) = -(a^2-z^2)(b^2-z^2)(1+\lambda z^2) - 2L_2 z$$

$$R^{(6)}_{\mu\nu} = 5\lambda g^{(6)}_{\mu\nu}$$

$\boldsymbol{a, b}$ **: angular momenta,** $\boldsymbol{M}$ **: mass,** $\boldsymbol{L_1, L_2}$ **: NUT's**

CKY 2-form [Kubiznak-Frolov (2007)]

$$h = \sum_{k=1}^{n} d\psi_k \wedge d\sigma_k = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu e^\mu \wedge e^{\mu+n}$$

$\sigma_k = \sigma_k(x_1, \cdots, x_n)$ は対称多項式（運動量写像：$\mathcal{M}^{\mathcal{D}} \to R^n$）

♣ Killing テンソル $K^{(j)}$ (一般化された Carter 定数):

$$h \Longrightarrow h^{(j)} \equiv h \wedge \cdots \wedge h \Longrightarrow f^{(j)} \equiv *h^{(j)} \Longrightarrow K^{(j)}_{ab} \equiv f^{(j)}_{a\cdots} f_b^{(j)\cdots} \quad (j = 0, \cdots, n-1)$$

♣ Killing ベクトル $\eta^{(j)}$ ：

$$\xi_a \equiv (\delta h)_a \Longrightarrow \eta^{(j)}_a \equiv K^{(j)}_{ab} \xi^b \quad (j = 0, \cdots, n-1+\epsilon)$$

互いに交換する測地線の保存量： $C^{(j)} = K^{(j)}_{ab}\, p^a p^b, \quad \tilde{C}^{(j)} = \eta^{(j)}_a\, p^a$

D次元 Kerr-NUT-de Sitter時空上の場の方程式の変数分離性：

- **測地線方程式 [Frolov-Krtous-Kubiznak 2007]**
- **Klein-Gordon方程式 [Frolov-Krtous-Kubiznak 2007]**
- **Dirac 方程式 [Oota-Y.Y. 2008]**
- **重力摂動方程式 [Kunduri-Lucietti-Reall 2006, Murata-Soda 2008, Oota-Y.Y. 2009]**

Kerr-NUT-de Sitter時空上の交換する対称演算子

- **Klein-Gordon 方程式** [Sergyeyev-Krtous 2008]

$$\mathcal{O}_{K^{(i)}} = \nabla_a K^{(i)ab} \nabla_b, \quad \mathcal{O}_{\eta^{(j)}} = \eta^{(j)}$$

- **Dirac 方程式** [Benn-Kress 2004, Cariglia-Krtous-Kubiznak 2011]

$$\mathcal{O}_{h^{(i)}} = \gamma^a h^{(i)} \nabla_a + \alpha \delta h^{(i)}, \quad \mathcal{O}_{\eta^{(j)}} = \eta^{(j)a} \nabla_a + \beta d\eta^{(j)}$$

3. 共形キリング・矢野(CKY)テンソルを許す時空

定理 [Houri-Oota-Y.Y 2007, Krtous-Frolov-Kubiznak 2008]

CKY 2-form h が非退化で $dh=0$ のとき，すべての次元において Einstein 方程式を満たすブラックホール解は Kerr-NUT-de Sitter 時空だけである.

♣ 非退化条件を取り除く

最も一般的な Einstein 時空はファーバーバンドル構造

- ファイバー: Kerr-NUT-de Sitter タイプ
- 底空間: Einstein-Kähler 多様体の積空間

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_N$$

where $N = \#\{\text{CKY の定数固有値}\}$, $\dim M_i$=固有値の多重度.

Einstein 計量 [Houri-Oota-Y.Y 2009]：

$$g=\sum_{\mu=1}^{n}\frac{dx_\mu^2}{P_\mu(x)}+\sum_{\mu=1}^{n}P_\mu(x)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\sigma_k(\hat{x}_\mu)\theta_k\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\prod_{\mu=1}^{n}(x_\mu^2-\xi_i^2)g^{(i)}$$

ここで $g^{(i)}$ は m_i 次元 Kähler 計量.

$$P_\mu(x)=\frac{X_\mu}{\prod_{i=1}^{N}(x_\mu^2-\xi_i^2)^{m_i}U_\mu},\quad U_\mu=\prod_{\substack{\nu=1\\(\nu\neq\mu)}}^{n}(x_\mu^2-x_\nu^2)$$

$$X_\mu=b_\mu x_\mu+x_\mu\int_0^{x_\mu}\sum_{k=1}^{n}a_k y^{2(k-1)}\prod_{i=1}^{N}(y^2-\xi_i^2)^{m_i}dy.$$

θ_k は 1-form で次式に従う：

$$d\theta_k+2\sum_{i=1}^{N}(-1)^{k+n}\xi_i^{2n-2k-1}\omega^{(i)}=0,\qquad k=0,1,\cdots,n-1.$$

♣ 2とおりの証明

(a) 測地線の可積分性

(b) CKYの固有空間とCKY方程式の可積分性 (次章の一般的な枠組みで紹介)

♣ 退化した空間の応用

コンパクトEinstein体と佐々木多様体 (最後の章)

♣ 課題：

- 高階のCKY
- 物質場を入れる

3-2 超重力理論の対称性と一般化されたCKY (GCKY)

♣ 11次元および10次元超重力理論 (typeI, typeII, hetero....)

♣ 低次元超重力理論

(a) 特殊ホロノミーを持つRicci平坦な多様体によるコンパクト化

トーラス, Calabi-Yau 等々

(b) Special CKYを持つEinstein多様体によるコンパクト化

球面, 佐々木-Einstein 等々

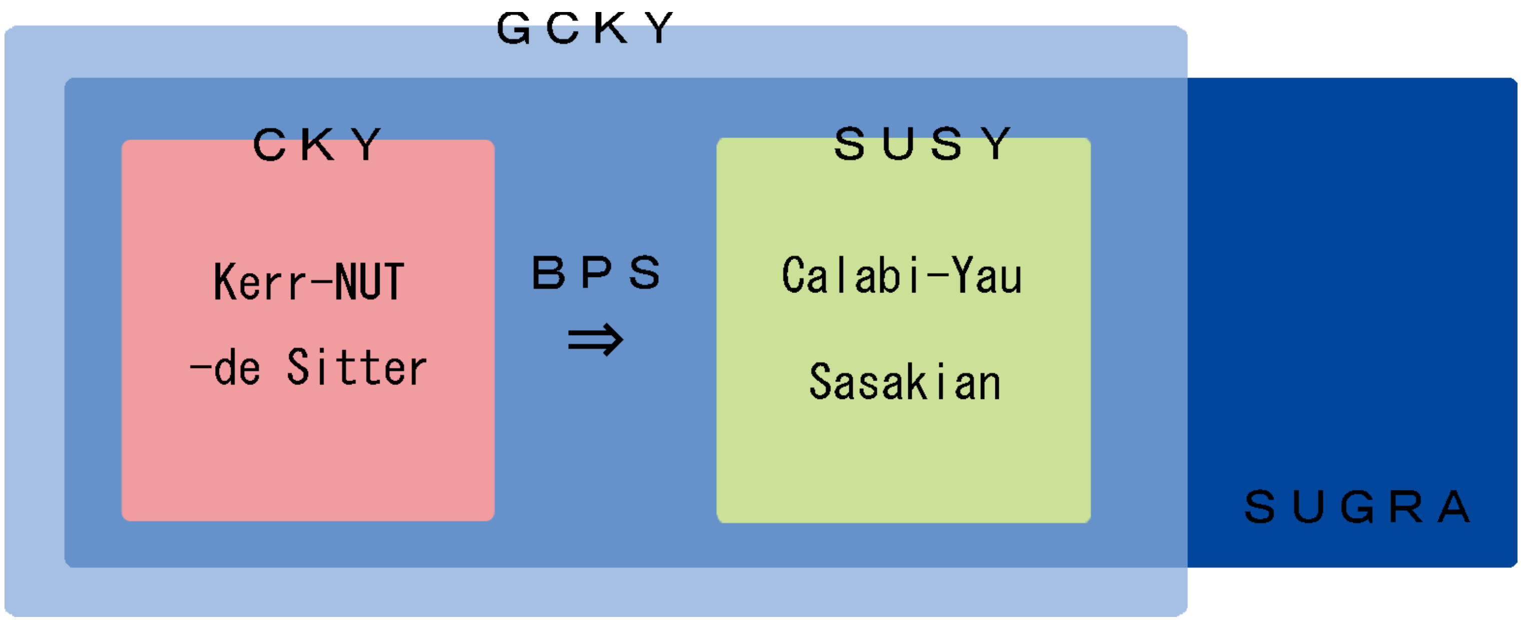
(c) トーション (Flux) を持つ特殊ホロノミー多様体

SUGRA 時空の対称性

(a) 超対称性を持つ時空

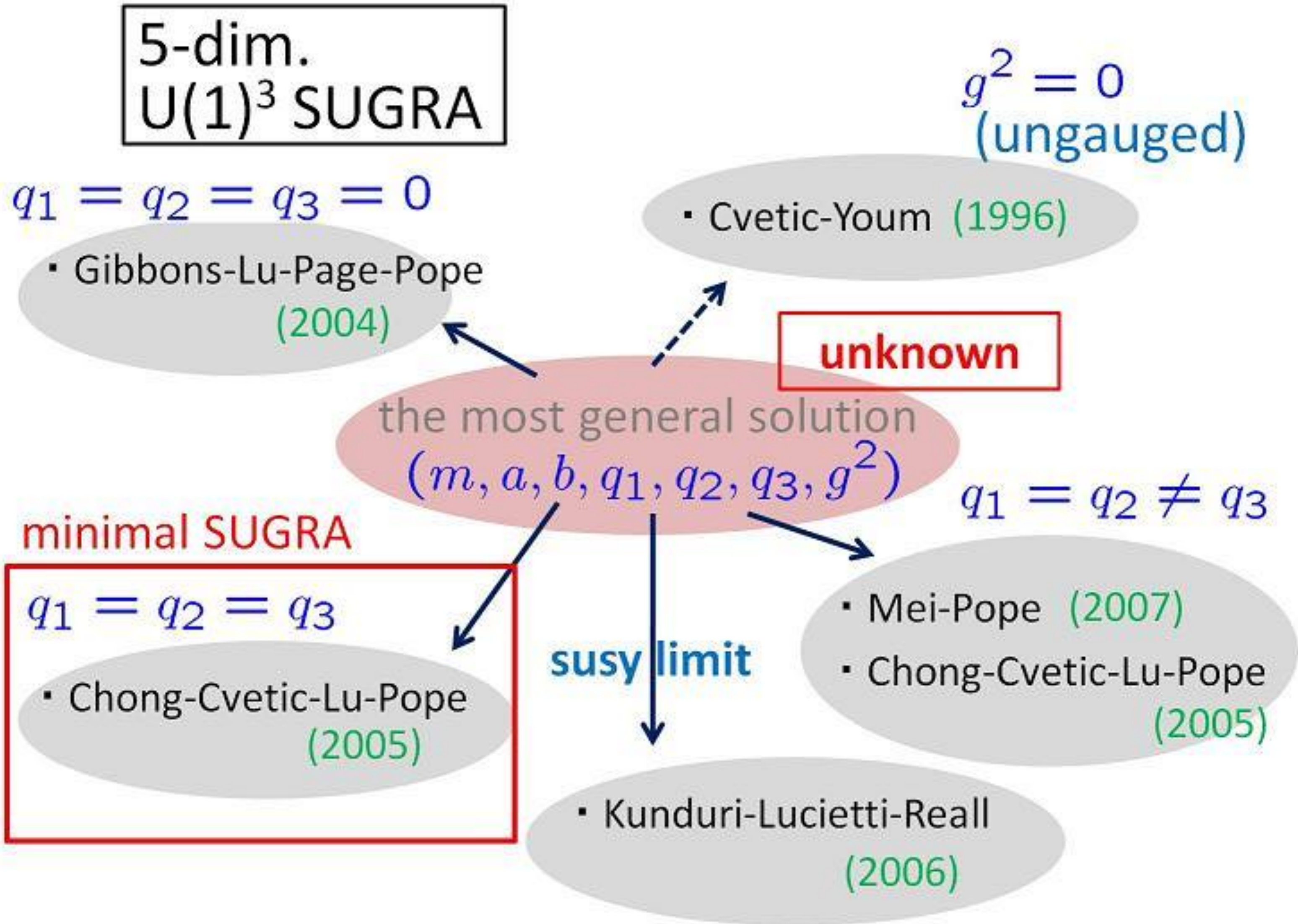
$R^{1,p}\times$（特殊ホロノミー），$\mathrm{AdS}_{p+2}\times(\text{Special CKY})$

(b) 一般化された CKY（GCKY) を許す時空



なぜGCKY?

- SUGRA 時空に住む反対称テンソルの自由度をトーションとして取り入れる
- GCKY 時空 $\cap$ SUSY 時空 $\neq \phi$ (BPS 極限)
- 可積分性
- 回転するブラックホール時空など興味深い例題



5-dim.
U(1)3 SUGRA
$g^2 = 0$
(ungauged)
$q_1 = q_2 = q_3 = 0$
・Cvetic-Youm (1996)
・Gibbons-Lu-Page-Pope (2004)
unknown
the most general solution
$(m, a, b, q_1, q_2, q_3, g^2)$
$q_1 = q_2 \neq q_3$
minimal SUGRA
$q_1 = q_2 = q_3$
・Mei-Pope (2007)
・Chong-Cvetic-Lu-Pope (2005)
susy limit
・Chong-Cvetic-Lu-Pope (2005)
・Kunduri-Lucietti-Reall (2006)

(A) D=5 Minimal Gauged Supergravity

$$\boldsymbol{S} = \int_{M^5} \boldsymbol{d^5 x} \sqrt{|\boldsymbol{g}|} \left(\boldsymbol{R} + 12\boldsymbol{g}^2 - \frac{1}{4} \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \boldsymbol{F}^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{M^5} \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{A}$$

♣ Chong-Cvetic-Lu-Pope解 (電荷を持つ回転するブラックホール解)

GCKY=CKY with $\boldsymbol{T} = *\boldsymbol{F}$(トーション3-form)

♣ 場の方程式の変数分離性：

- 測地線方程式
- Klein-Gordon方程式
- Dirac方程式

(B) ヘテロ型 超重力理論

$$S = \int_{M^D} d^D x \sqrt{|g|} e^{\phi} \left(R + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right)$$

♣ **電荷を持つ回転するブラックホール解** [D=4: Sen 1992, **任意次元:** Chow 2010]

GCKY=CKY with $T = H$(**トーション** 3-form)

♣ **場の方程式の変数分離性：**

- **測地線方程式** • Klein-Gordon **方程式** • Dirac **方程式**

(C) 4,5,6,7 次元超重力理論のブラックホール時空 [Chow 2008-2010]

GCKYの定義

- Yano-Bochner(1953) "Curvature and Betti Number"
- Kubiznak-Kundri-Y.Y (2009)

$$\nabla^T_X h = \frac{1}{p+1} i(X) d^T h - \frac{1}{D-p+1} X^* \wedge \delta^T h$$

$$(d^T \equiv e^a \wedge \nabla^T_{e_a}, \quad \delta^T = d^T \text{ に双対な微分})$$

Rank-2 GCKY:

$$\nabla^T_a h_{bc} + \nabla^T_b h_{ac} = 2 g_{ab} \xi_c - g_{cb} \xi_a - g_{ca} \xi_b, \quad \xi_a = \frac{1}{D-1} \nabla^T_b {h^b}_a$$

∇^T は3-formトーションン$T = (T_{abc})$を持つ接続：

$$(\Gamma^T)^a{}_{bc} = \Gamma^a{}_{bc} + \frac{1}{2} T_{ab}{}^c$$

♣ **GCKYの性質**

- d^T **closed GCKY**
- δ^T **closed GCKY** $\equiv$ **Killing-Yano with torsion**
- **Hodge演算**

♣ **可積分性**

- d^T **closed 2-form** h

$$h \Longrightarrow h^{(j)} \equiv h \wedge \cdots \wedge h \Longrightarrow f^{(j)} \equiv *h^{(j)} \Longrightarrow K^{(j)}_{ab} \equiv f^{(j)}_{a\cdots}\ f_b^{(j)\cdots}$$

$$[K^{(i)},\ K^{(j)}] = 0, \quad \text{(キリングテンソルの交換性)}$$

- **Klein-Gordon, Dirac方程式には"アノーマリー"が出現 [Houri-Kubiznak-Warnick-Y.Y 2010]**

Rank-2 closed GCKYを許すD次元時空を分類せよ.

(1) CKY ($T=0$): $\{$Kerr-NUT-de Sitter $\}\times(\prod_{i=1}^{N} M_i)$

(2) GCKY ($T=T_0\neq 0$): Kahler 多様体 [Apostolov et.al, 2002-2005]

Sasakian, Calabi-Yau

一般的な時空の性質 [Houri-Kubiznak-Warnick-Y.Y 2011]

♣ $D=2n$のときはHermitian構造, $D=2n+1$のときはCR構造.

♣ $D=2n$のときトーションは$T=T_0+T_B$ の形に限られる.

◇ T_BはHermitian 多様体$(M,\ g,\ J)$に対し$\nabla^B g=0,\quad \nabla^B J=0$からユニークに定まるBismut トーション(3-form).

証明の道筋

$$g = g_{ab} dx^a dx^b \quad \Longrightarrow \{e_a\} \quad \text{(正規直交基底)} \quad \Longrightarrow [e_a, e_b] = f^c{}_{ab} e_c \quad \text{(交換関係)}$$

$$\Longrightarrow \nabla_a \text{ and } \nabla^T_a \quad \text{(共変微分)} \quad \Longrightarrow R_{abcd} \text{ and } R^T{}_{abcd} \quad \text{(曲率)}$$

♣ 矢印の向きを逆転する

(1) 共変微分

- GCKY を対角化する直交基底 $\{e^\mu, \ e^{\hat{\mu}}\}$ を使う：$h = \sum_{\mu=1}^n x_\mu e^\mu \wedge e^{\hat{\mu}}$

- GCKY 方程式と可積分条件：

$$\nabla^T_a h_{bc} = g_{ab}\xi_c - g_{ac}\xi_b$$

$$R^T{}_{abcd} h_{de} - R^T{}_{abed} h_{dc} = g_{ae} \nabla^T_b \xi_c + g_{bc} \nabla^T_a \xi_e + \xi_e T_{abc} \ - \ \{e \longleftrightarrow c\}$$

(2) 交換関係：

$$[e_\mu,\ e_\nu] = -\frac{x_\nu\sqrt{Q_\nu}}{x_\mu^2 - x_\nu^2} e_\mu - \frac{x_\mu\sqrt{Q_\mu}}{x_\mu^2 - x_\nu^2} e_\nu,$$

$$[e_\mu,\ e_{\hat\mu}] = K_\mu e_\mu + L_\mu e_{\hat\mu} + \sum_{\nu\neq\mu}\left(\frac{2x_\mu\sqrt{Q_\nu}}{x_\mu^2 - x_\nu^2} - T_{\mu\hat\mu\hat\nu}\right) e_{\hat\nu},$$

$$[e_\mu,\ e_{\hat\nu}] = -\frac{x_\mu\sqrt{Q_\mu}}{x_\mu^2 - x_\nu^2} e_{\hat\nu}, \qquad [e_{\hat\mu},\ e_{\hat\nu}] = 0$$

$$Q_\mu = \frac{X_\mu(x_\mu)}{U_\mu}, \qquad U_\mu = \prod_{\nu=1(\nu\neq\mu)}^{n} (x_\mu^2 - x_\nu^2)$$

♣ K_μ, L_μ, $T_{\mu\hat\mu\hat\nu}$(トーション）は未知関数で偏微分方程式に従う

特にトーションが消えるとき:

$$T_{\mu\hat\mu\hat\nu} = K_\mu = 0, \quad L_\mu = -\partial_\mu\sqrt{Q_\mu} \quad \Longrightarrow \text{Kerr-NUT-de Sitter}$$

Hermitian 構造 $(g,\ J,\ \Omega)$ と Bismut トーション

◇ 計量 g と基本 2 形式 Ω:

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{n} (e^{\mu} \otimes e^{\mu} + e^{\hat{\mu}} \otimes e^{\hat{\mu}}), \quad \boldsymbol{\Omega} = \sum_{mu=1}^{n} e^{\mu} \wedge e^{\hat{\mu}}$$

◇ 複素構造 J:

$$J(e_{\mu}) = -e_{\hat{\mu}}, \quad J(e_{\hat{\mu}}) = e_{\mu}$$

$$[J(e_a), J(e_b)] - [e_a, e_b] - J([e_a, J(e_b)]) - J([J(e_a), e_b]) = 0$$

◇ Bismut トーション $T^B = (T^B_{abc})$:

$$T^B_{abc} = -d\Omega(J(e_a), J(e_b), J(e_c))$$

具体例

$$e^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{\sqrt{Q_{\mu}}}, \quad e^{\hat{\mu}} = \sqrt{R_{\mu}} \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_{\mu}) d\psi_k - \frac{1}{\Phi} \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{k-1}(\hat{x}_{\nu}) d\psi_k \right)$$

♣ トーション 3-form $T = T_0 + T_B$

$$T_0 = \frac{2x_{\mu}\sqrt{Q_{\nu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} e^{\mu} \wedge e^{\hat{\mu}} \wedge e^{\hat{\nu}},$$

$$T_B = -\sqrt{\frac{Q_{\mu}R_{\nu}}{R_{\mu}}} \left(\partial_{\mu} \log \Phi + \frac{2x_{\mu}\sqrt{Q_{\nu}}}{x_{\mu}^2 - x_{\nu}^2} \right) e^{\mu} \wedge e^{\hat{\mu}} \wedge e^{\hat{\nu}}$$

♣ $3n$ 個の 1 変数任意関数: $X_{\mu} = X_{\mu}(x_{\mu}), \quad Y_{\mu} = Y_{\mu}(x_{\mu}), \quad Z_{\mu} = Z_{\mu}(x_{\mu})$

$$Q_{\mu} = \frac{X_{\mu}}{U_{\mu}}, \quad R_{\mu} = \frac{Y_{\mu}}{U_{\mu}}, \quad S_{\mu} = \frac{Z_{\mu}}{U_{\mu}}$$

D 次元超重力理論（g_{ab}, ϕ, H_{abc}, F_{ab}）

$$H = dB - A \wedge dA \quad \text{(3-form)}$$

$$F = dA \quad \text{(2-form)}$$

運動方程式:

$$R_{ab} - \nabla_a \nabla_b \phi - F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4} H_a{}^{cd} H_{bcd} = 0$$

$$d(e^{\phi} * F) = e^{\phi} * H \wedge F, \qquad d(e^{\phi} * H) = 0$$

$$(\nabla \phi)^2 + 2\nabla^2 \phi + \frac{1}{2} F_{ab} F^{ab} + \frac{1}{12} H_{abc} H^{abc} - R = 0$$

H=T (トーション)

(a) Kerr-Sen BH

$$\boldsymbol{X_\mu = Y_\mu = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_\mu^{2k} + b_\mu x_\mu, \quad Z_\mu = q x_\mu + \sum_{k=0}^{n-1} d_k x_\mu^{2k}}$$

(b) CYT (Calabi-Yau with torsion)

$$\boldsymbol{X_\mu = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} c_k x_\mu^{2k-2}, \quad Y_\mu = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x_\mu^{2k}, \quad Z_\mu = \sum_{k=0}^{n-1} d_k x_\mu^{2k}}$$

Hol(∇^T)=SU(n)

特に４次元ではHKT (Hyper Kähler with torsion)

$\surd$ 1. はじめに

$\surd$ 2. 高次元ブラックホール解

$\surd$ 3. 共形キリング・矢野 (CKY) テンソルを許す時空の分類

$\surd$ 4. 超重力理論と一般化された CKY (GCKY)

CKY (with torsion) を許す時空の分類

真空の高次元ブラックホール解および SUGRA 時空の Hermitian 構造

- CKY 2-form を許す前者の分類は（少なくとも局所的には）理解した.
- SUGRA 時空の分類は発展途上. GCKY は１つの方向性を与える.

5. コンパクトEinstein多様体・佐々木多様体

Page計量(1978): 4次元Kerr-de Sitterブラックホール時空のコンパクト化

トポロジーはCP(1)上のS^2束

非等質なEinstein計量の最初の例

Page計量の一般化

♣ S^2 bundle over Einstein-Kähler [Berard-Bergery 1986, Page-Pope 1987]

♢ S^3 bundle over CP(1) [Hashimoto-Sakaguchi-Y.Y. 2004]

♡ S^n bundle over CP(1) [Gibbons-Lü-Page-Pope 2004]

♠ S^n bundle over Einstein-Kähler [Lü-Page-Pope 2004]

すべてがコンパクトCKY多様体 !!

D次元Kerr-NUT-de Sitter 計量

- CKYが非退化: $\{\alpha_A\}$=\{質量, NUT, 宇宙項\}

- CKYが非退化でない: $\{\alpha_A\} \cup \{\xi_i\}$

  ξ_i はCKYの定数固有値

$$\mathcal{M} = \{\text{Kerr-NUT-de Sitter}\} \times \prod_{i=1}^{N} M_i$$

$$N = \#\{\xi_i\}, \quad M_i : \text{Kähler-Einstein}, \quad \dim\, M_i = \xi_i \text{の多重度}$$

Einstein計量：

$$\boldsymbol{g} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{d\boldsymbol{x}_\mu^2}{\boldsymbol{P}_\mu(\boldsymbol{x})} + \sum_{\mu=1}^{n} \boldsymbol{P}_\mu(\boldsymbol{x}) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\sigma}_k(\hat{\boldsymbol{x}}_\mu)\boldsymbol{\theta}_k \right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{\mu=1}^{n} (\boldsymbol{x}_\mu^2 - \boldsymbol{\xi}_i^2)\boldsymbol{g}^{(i)}$$

ここで $g^{(i)}$ は m_i 次元Kähler計量.

$$\boldsymbol{P}_\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{X}_\mu}{\prod_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x}_\mu^2 - \boldsymbol{\xi}_i^2)^{m_i}\boldsymbol{U}_\mu}, \quad \boldsymbol{U}_\mu = \prod_{\substack{\nu=1 \\ (\nu\neq\mu)}}^{n} (\boldsymbol{x}_\mu^2 - \boldsymbol{x}_\nu^2)$$

$$\boldsymbol{X}_\mu = \boldsymbol{b}_\mu \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\mu \int_0^{x_\mu} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}_k \boldsymbol{y}^{2(k-1)} \prod_{i=1}^{N} (\boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{\xi}_i^2)^{m_i} d\boldsymbol{y}.$$

$\mathcal{M}$のコンパクト化

$\{a_k\} = \{\alpha_A\} \cup \{\xi_i\}$ が特別な値のときだけ可能.

- 計量の正定値性: $a_1 \leq x_1 \leq a_2 \leq x_2 \leq \cdots$
- 特異点の解消: パラメータの "量子化条件" (位相的な条件)

$$q_k(a_1, \cdots, a_n) \equiv \frac{p a_k}{m+1} A_k \frac{\partial}{\partial A_k} \log f_{m+1} \in \text{整数}$$

$$\frac{(1-t)^\delta}{\prod_{\ell=1}^n (1 - t A_\ell)} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(A_1, \cdots, A_n) t^i, \quad A_k = 1/(1 - a_k^2)$$

$$\mathcal{M} = \{\text{Kerr-NUT-de Sitter}\} \times \prod_{i=1}^{N} M_i \Longrightarrow \bar{\mathcal{M}} = (\prod_{i=1}^{N} M_i) \text{ 上の球面束}$$

7-dim. Einstein metrics on S^5-bundle over CP(1)

$\{a_1, a_2, a_3\}$ の量子化条件 $(q_1, q_2, q_3) \in Z \oplus Z \oplus Z$ ：

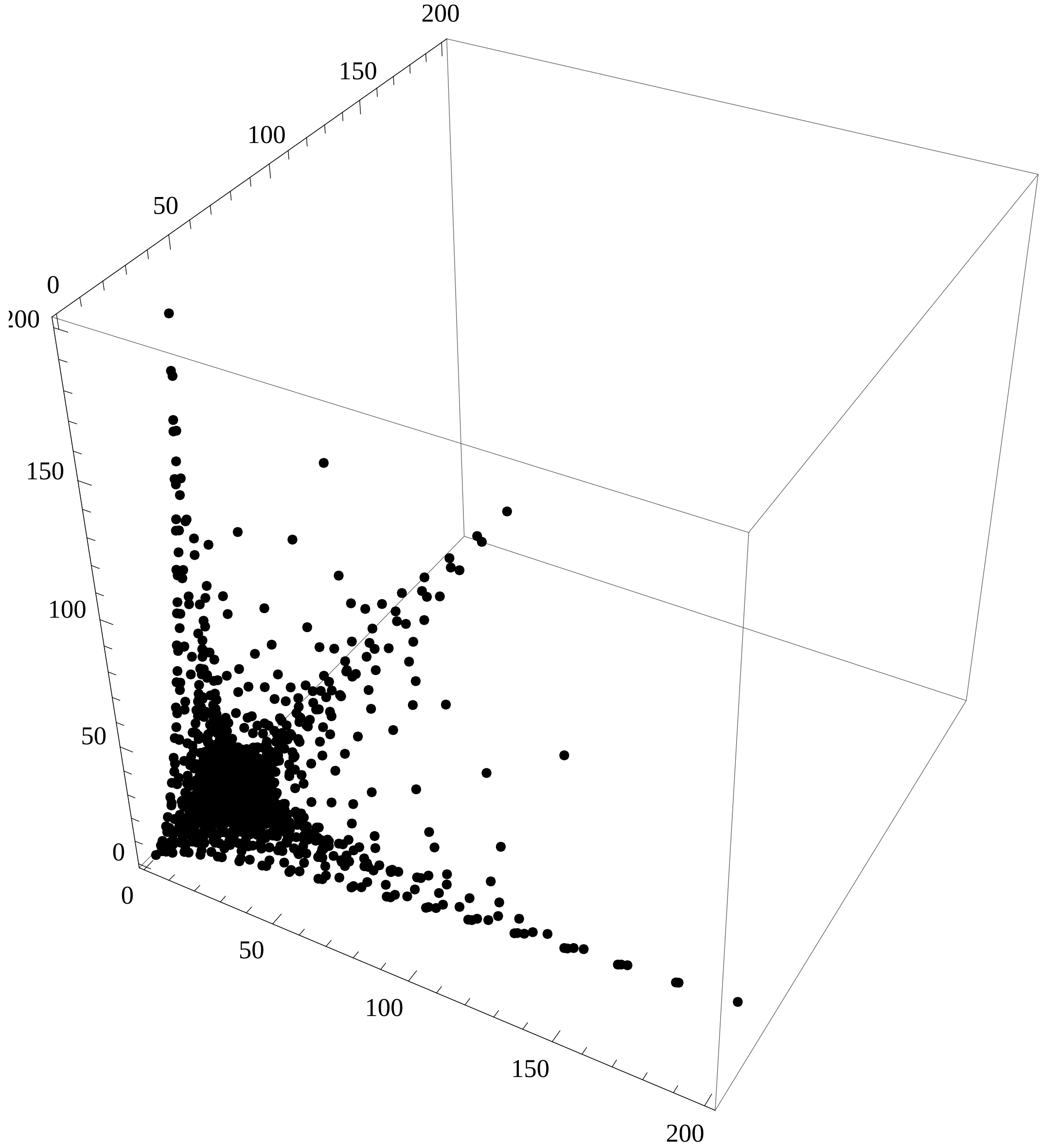
$$q_1 = a_1(a_2^2 - 1)(a_3^2 - 1)(3 - a_1^2 - 2a_2^2 - 2a_3^2 + a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_3^2)/\Delta$$

$$q_2 = a_2(a_1^2 - 1)(a_3^2 - 1)(3 - a_2^2 - 2a_1^2 - 2a_3^2 + a_1^2 a_3^2 + a_1^2 a_2^2 a_3^2)/\Delta$$

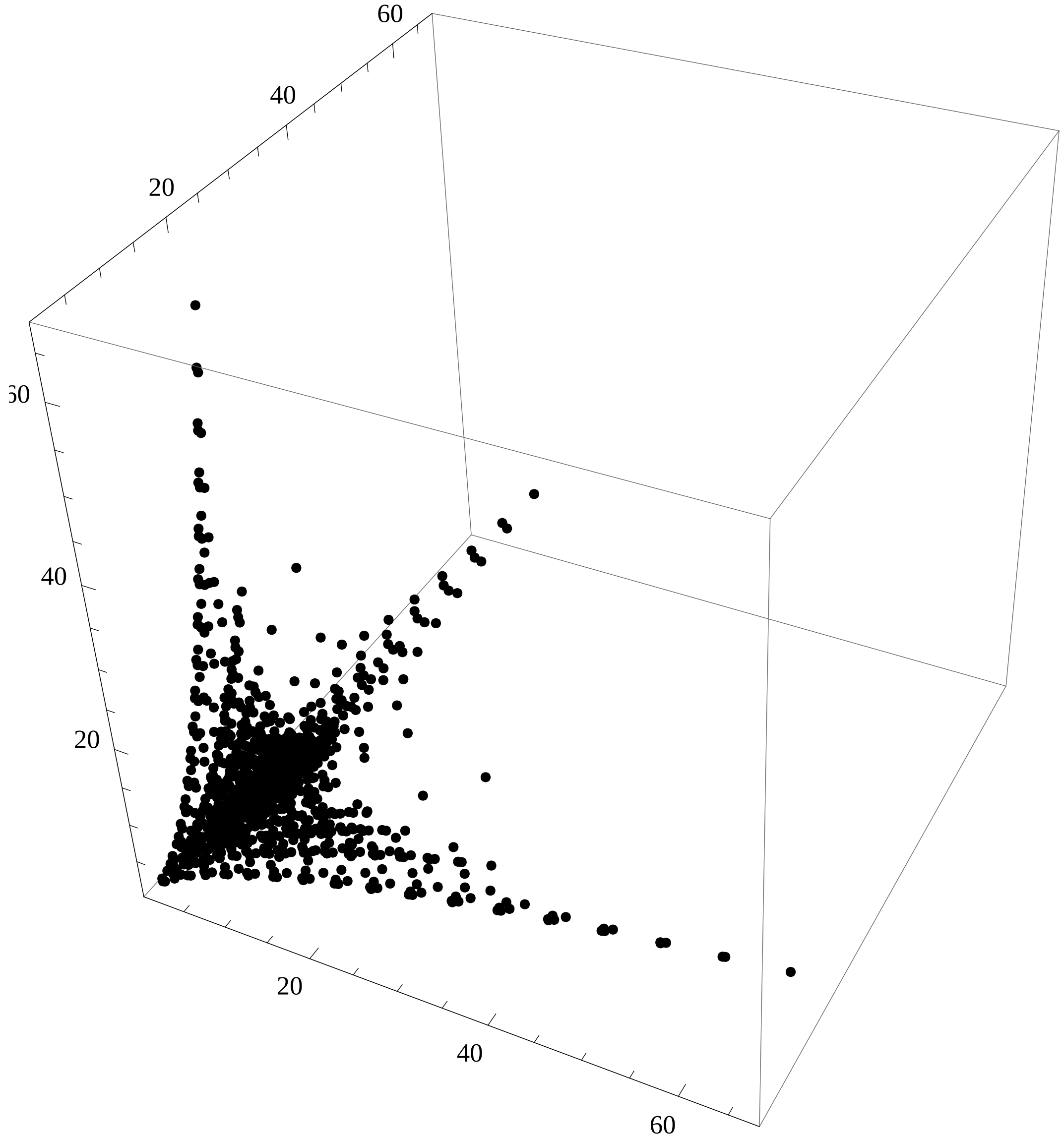
$$q_3 = a_3(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1)(3 - a_3^2 - 2a_1^2 - 2a_2^2 + a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_2^2 a_3^2)/\Delta$$

$$\begin{aligned}\Delta = {} & 3 - 3a_1^2 + a_1^4 - 3a_2^2 + a_1^2 a_2^2 + a_2^4 - 3a_3^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_2^2 a_3^2 \\ & - 3a_1^4 a_2^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^4 a_3^2 + a_1^4 a_2^4 a_3^2 + a_3^4 - 3a_1^2 a_2^2 a_3^4 + a_1^4 a_2^2 a_3^4 + a_1^2 a_2^4 a_3^4\end{aligned}$$

7-dim. Einstein metrics on S^5-bundle over CP(1)



9-dim. Einstein metrics on S^5-bundle over CP(2)



♣ BPS 極限 [Hashimoto-Skaguchi-Yasui, 2004]

- 質量=電荷
- CKY の固有値: $x_\mu \longrightarrow 1 + \epsilon y_\mu, \ \ \epsilon \longrightarrow 0$

Odd dim. Kerr-NUT-de Sitter $\Longrightarrow$ Sasaki-Einstein metrics

Even dim. Kerr-NUT-de Sitter $\Longrightarrow$ Calabi-Yau metrics

CKY 2-form を許すコンパクトEinstein多様体 [Oota-Y.Y 2010]

B: Einstein-Kähler manifold with $c_1(B) = p\alpha \in H^2(B, Z)$, $p \in Z_{>0}$.

$P_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$: T^n bundle over B classified by integers $(k_1, \cdots, k_n)$

$M^{(\epsilon)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ $(\epsilon = 0, 1)$: $S^{2n-\epsilon}$ bundle over B associated with $P_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$

THEOREM 1. If k_α are positive integers satisfying $0 < k_1 + k_2 + \cdots + k_n < p$, then $M^{(0)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ admits an Einstein metric with $\Lambda > 0$.

THEOREM 2. If k_α are positive integers, then $M^{(1)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ admits an Einstein metric with $\Lambda > 0$. Especially, if $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = p$, then $M^{(1)}_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ admits a Sasaki-Einstein metric.