

定常パルサー磁気圏の数値解析 手法について



大阪市立大学数学研究所 孝森 洋介

共同研究者

京都大学基礎研 大川 博督

名古屋大学TA研 高本 亮

京都大学基礎研 諏訪 雄大

目次

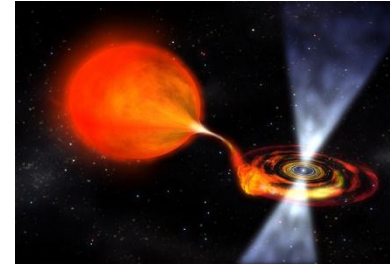
- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- パルサー方程式の別の解き方
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

パルサーについて

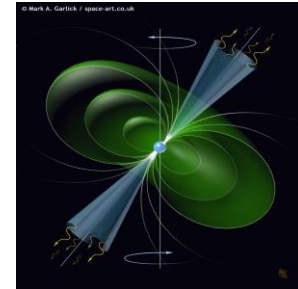
- ・ ミリ秒から秒の安定した周期で電磁パルス波を放出する天体。
- ・ 1967年に発見されて以来、現在2000個ほど発見されている。
- ・ 観測されている波長帯は様々。
(可視光、電波、X線、ガンマ線)
- ・ 中心天体は中性子星。
典型的には $R_S \sim 10\text{km}$, $M \sim M_{\odot}$, $B \sim 10^{12}\text{G}$
- ・ 放射機構はまだ完全にわかっていない。
どこで？ どうやって？

パルサーの種類

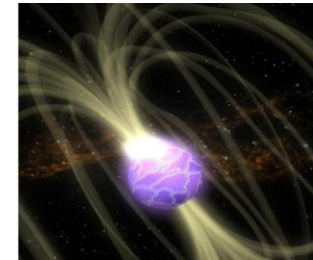
- 質量降着型(X線パルサー)
伴星からの質量降着で光る。



- 回転駆動型(電波パルサー)
磁場を通して自転エネルギーを解放して光る。



- 磁気エネルギー解放型(マグネター)
星の磁気エネルギーを解放して光る。



パルサー周辺の物理を理解するためには磁場の情報が不可欠。
→ “パルサー磁気圏”の研究。

ダイナミカルシミュレーション(MHD)、定常磁気圏、粒子法、...

回転双極子磁場 (Pacini, 1967)

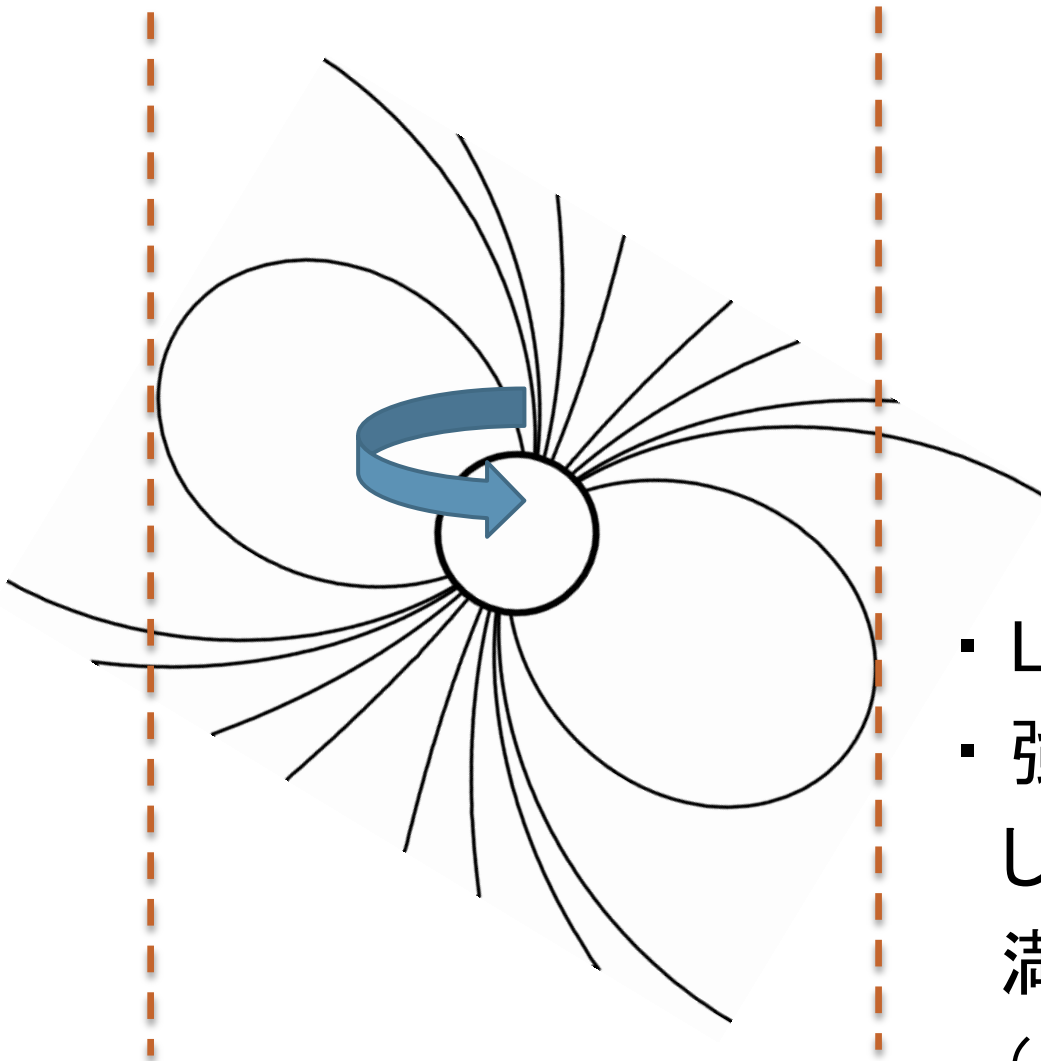
特徴

- 剛体回転する真空の双極子磁場解
- 双極子放射

問題

- LCの外の磁力線は開くはず。
- 強磁場を持って高速で回転している星の外はプラズマで満たされるはず。

(Goldreich & Julian, 1969)

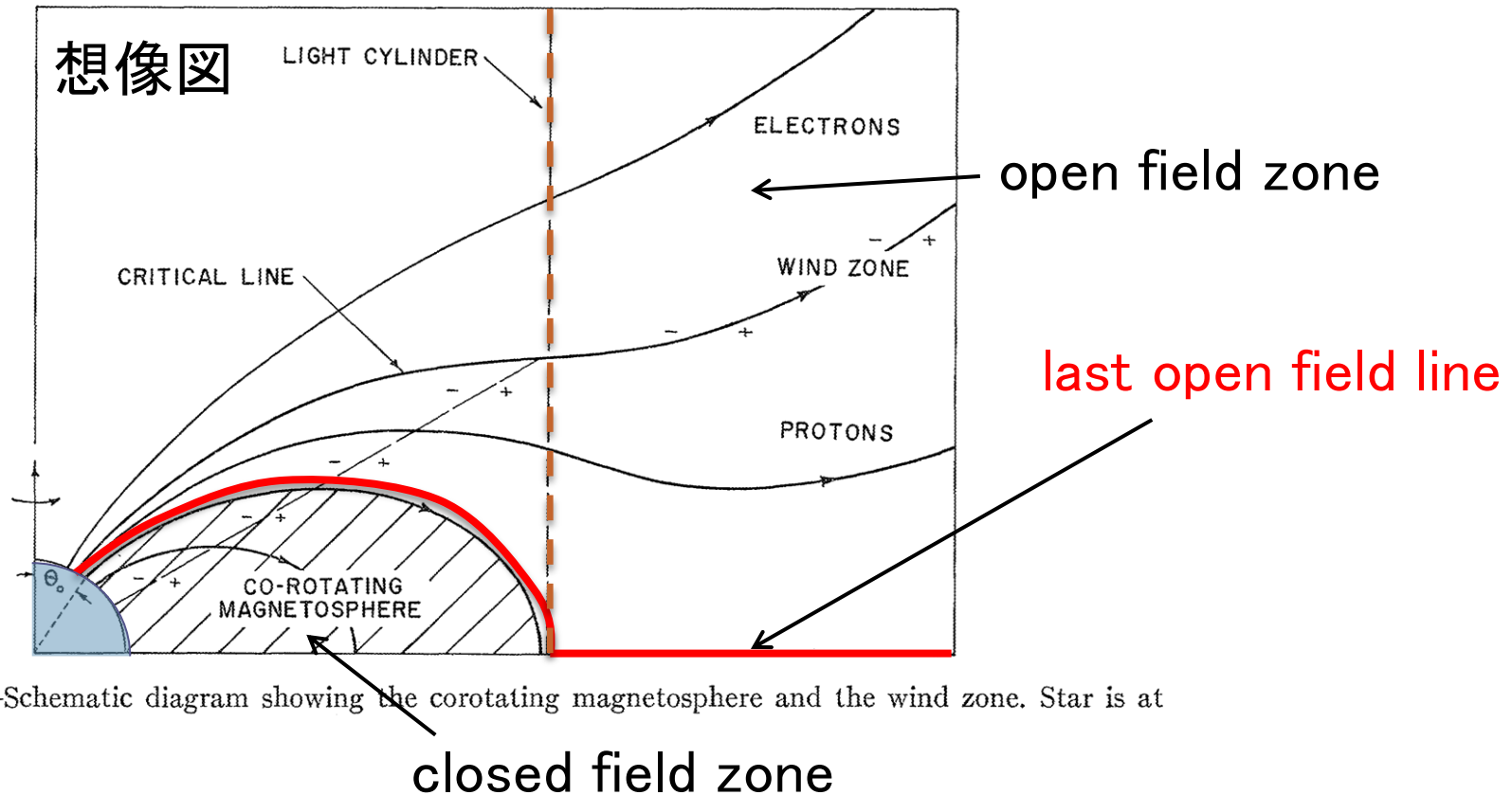


Light Cylinder(LC)

Goldreich & Julian (1969)

関西相対論・宇宙論合同セミナー
@京大基礎研

2012/6/23



- 磁場とプラズマが混ざった非線形系。
- まずは定常問題を考える。

目次

- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- パルサー方程式の別の解き方
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

Force-Free パルサー磁気圏

- 定常かつ軸対称を仮定。
- 自転軸と磁軸はそろえる。
- プラズマの慣性を無視する (force-free近似)。

Maxwell方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{J}$$

force-free近似

$$\rho_e\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} = 0$$

パルサー方程式の導出①

Gaussの法則

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\Omega_F \vec{\nabla} \Psi}{2\pi} \right) = 4\pi \rho_e$$

Ampereの法則

$$-R \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \Psi}{2\pi R^2} \right) = 4\pi J_T$$

force-free条件

$$R \Omega_F \rho_e + \frac{2I_P}{R} \frac{dI_P}{d\Psi} = J_T$$

円筒座標 (R, z, ϕ)

$$\vec{E} = \frac{-\Omega_F(\Psi)}{2\pi} \vec{\nabla} \Psi$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla} \Psi \times \vec{e}_\phi}{2\pi R} + \frac{2I_P(\Psi)}{R} \vec{e}_\phi$$

$\Psi(R, z)$: 磁束

$\Omega_F(\Psi)$: 磁場の角速度

$I_P(\Psi)$: ポロイダル電流

$J_T(R, z)$: トロイダル電流密度

$$I_P(\Psi) = \int \vec{J}_P \cdot d\vec{S}$$

$$J_T(R, z) = \vec{J} \cdot \vec{e}_\phi$$

パルサー方程式の導出②

磁力線はパルサーの自転角速度で回転($\Omega_F = \text{const.}$)

パルサー方程式(Grad-Shafranov方程式)

$$(1 - R^2 \Omega_F^2) \left(\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) - 2R \Omega_F^2 \partial_R \Psi + 16\pi^2 I_P I'_P = 0$$

$$I'_P \equiv \frac{dI_P}{d\Psi}$$

Gaussの法則

$$-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\Omega_F \vec{\nabla} \Psi}{2\pi} \right) = 4\pi \rho_e$$

force-free条件

$$R \Omega_F \rho_e + \frac{2I_P}{R} \frac{dI_P}{d\Psi} = J_T$$

Ampereの法則

$$-R \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} \Psi}{2\pi R^2} \right) = 4\pi J_T$$

パルサー方程式の特徴

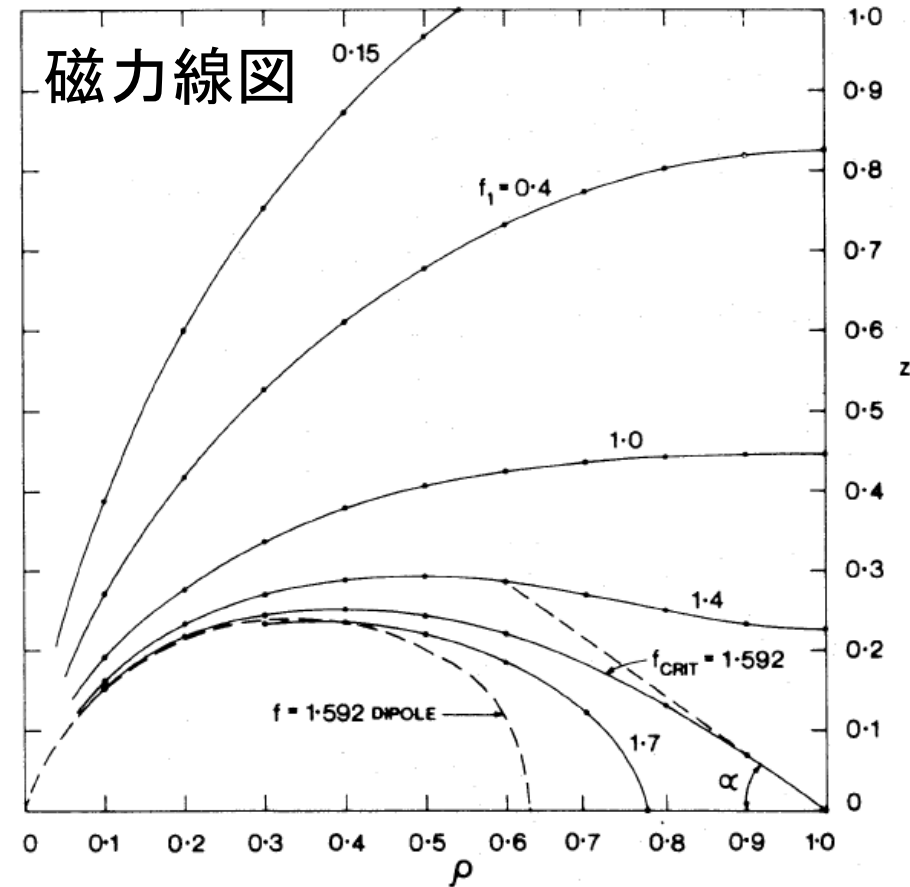
$$(1 - R^2 \Omega_F^2) \left(\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) - 2R \Omega_F^2 \partial_R \Psi + 16\pi^2 I_P I'_P = 0$$

- 非線形な楕円型偏微分方程式。
- ポロイダル電流 $I_P(\Psi)$ は $\Psi(R, z)$ の任意関数。
- 境界値問題。
- Light Cylinder ($R\Omega_F = 1$) が特異面。

パルサー方程式の解①

ダイポールのな解。(Michel, 1973)

- ・ポロイダル電流ゼロ。
→ パルサー方程式の変数分離解を構成。
- ・LCで境界条件を付ける。
→ LCの外は解いてない。



パルサー方程式の解②

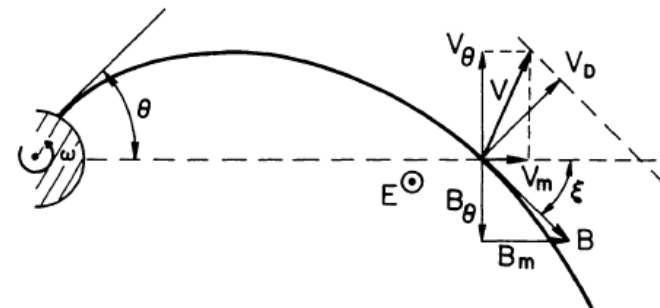
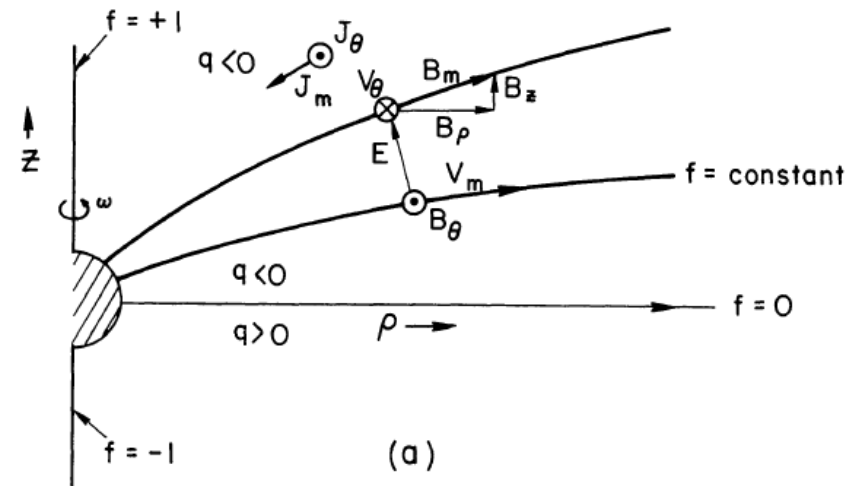
回転モノポール解。(Michel, 1973)

- ・ポロイダル電流あり。
- ・パルサー方程式の厳密解。
- ・LCを越えて滑らか。
- ・磁荷を持っている。

$$\Psi = C(1 - \cos \theta),$$

$$4\pi I_P = -\Omega_F \Psi \left(2 - \frac{\Psi}{C} \right)$$

磁力線図



目次

- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- パルサー方程式の別の解き方
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

CKF法の概要

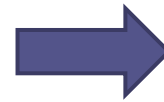
(Contopoulos, Kazanas, & Fendt, 1999)

LC上の条件

$$\underline{-2R\Omega_F^2 \partial_R \Psi + 16\pi^2 I_P I'_P = 0 \text{ at } R\Omega_F = 1}$$

$I_P I'_P$ を決める式と思う。

試験 I_P を与えてパルサー
方程式をLCの両側で別々に
解く。

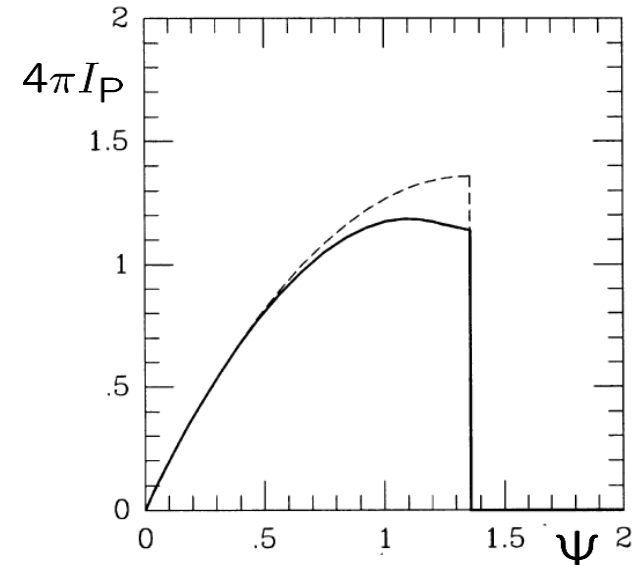
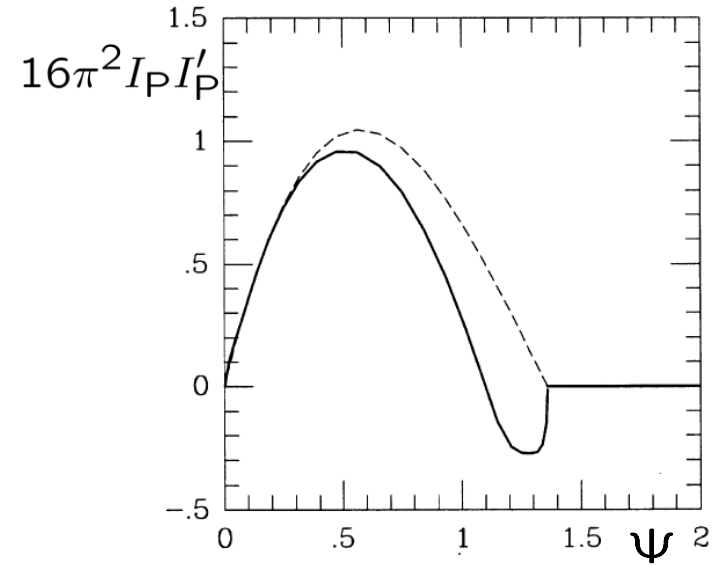
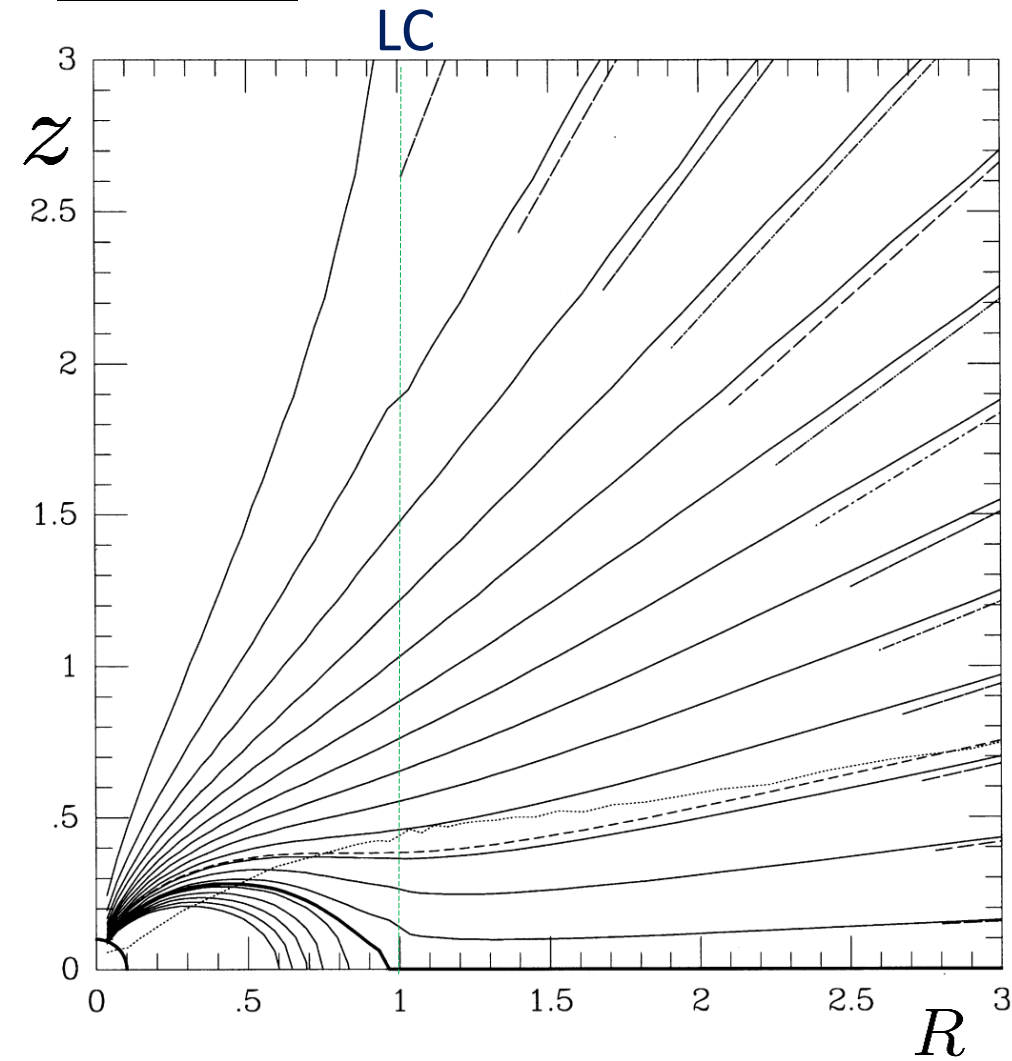


LCの両側で得られた Ψ を
用いてLC条件から新しい
 I_P を得る。



LCの両側で求めた Ψ が滑らかに接続されるまで続ける。

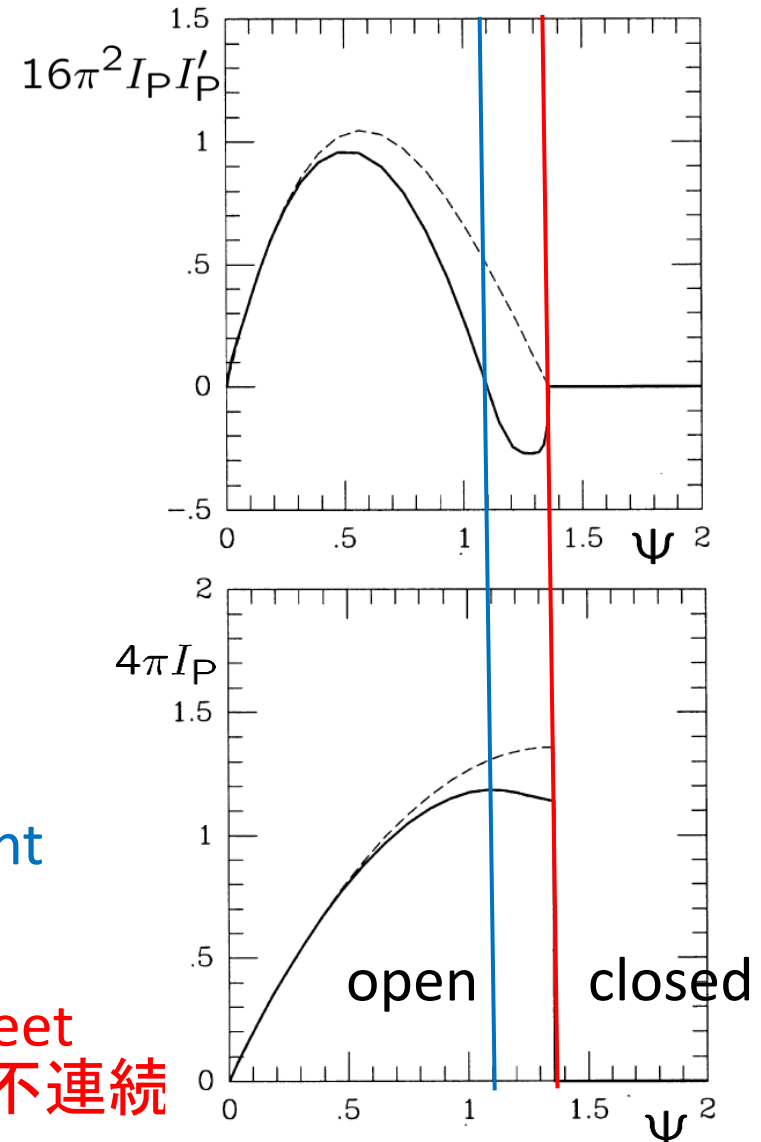
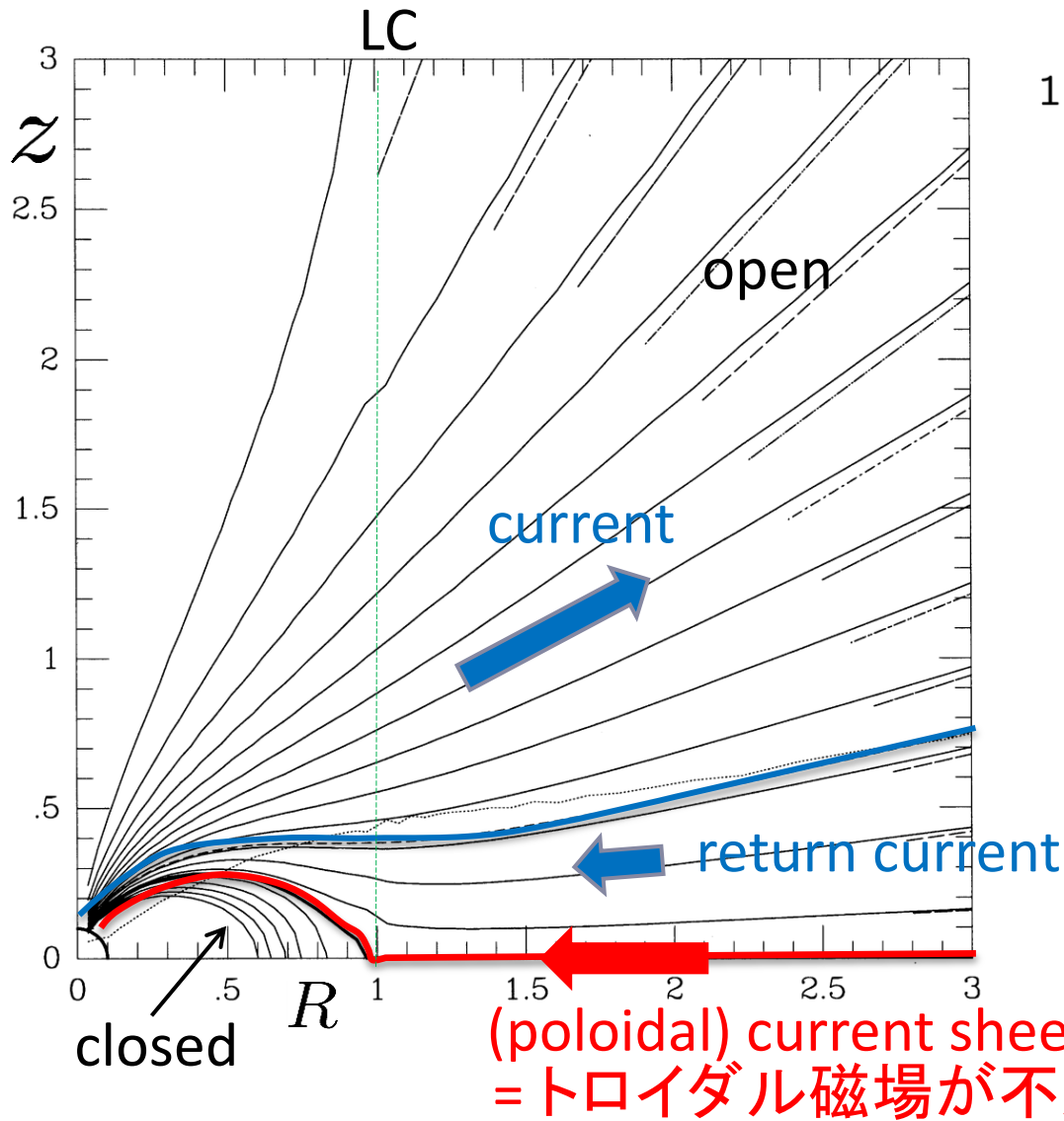
CKF解



CKF解

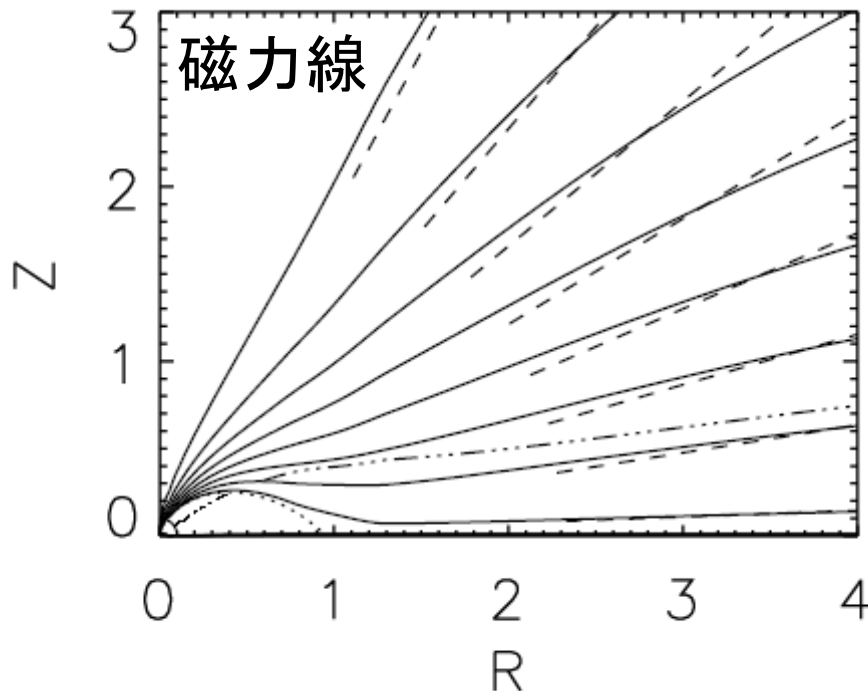
関西相対論・宇宙論合同セミナー
@京大基礎研

2012/6/23

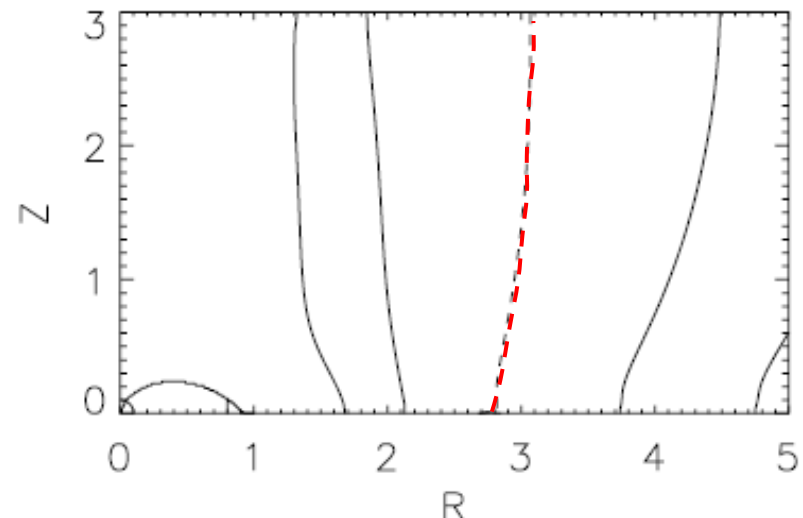


CKF解その後①

より高解像度。ドリフト速度の計算。Ogura & Kojima(2003)



$$v_d = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{B^2} : \text{ドリフト速度}$$

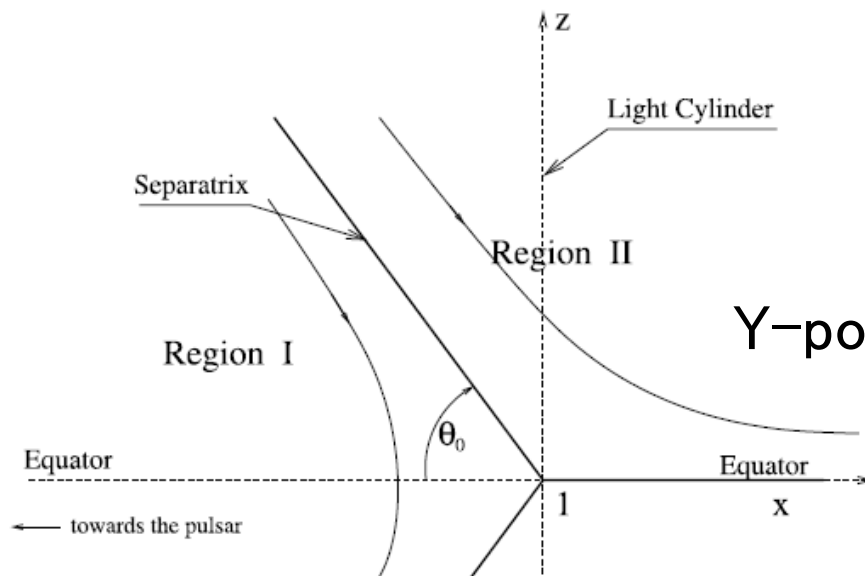


ドリフト速度は遠方で光速を
 超える。(force-freeが破れる)
 CKFは超えてないと言っている。
 (たぶん境界条件の違い。)

CKF解その後②

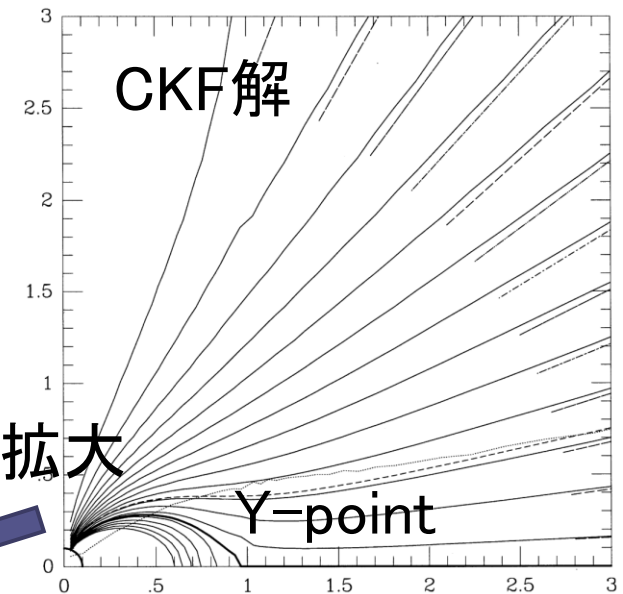
Y-pointがLC上にあつてcurrent sheetのある解は非物理的。

Uzdensky(2003)



$$(B^2 - E^2)^I = (B^2 - E^2)^{II} .$$

FIG. 1.—Schematic drawing of the Y-type separatrix intersection point in the case $x_0 = 1$.



電磁場のMaxwellストレスが separatrixで連続であると課す。Y-pointがLC上にある場合、separatrix上にcurrentがあるとY-pointで磁場が発散する。

CKF解その後③

Y-pointの位置を変えて計算。Timokhin(2006)

電磁場のエネルギー

$$\varepsilon = \int \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) dV$$

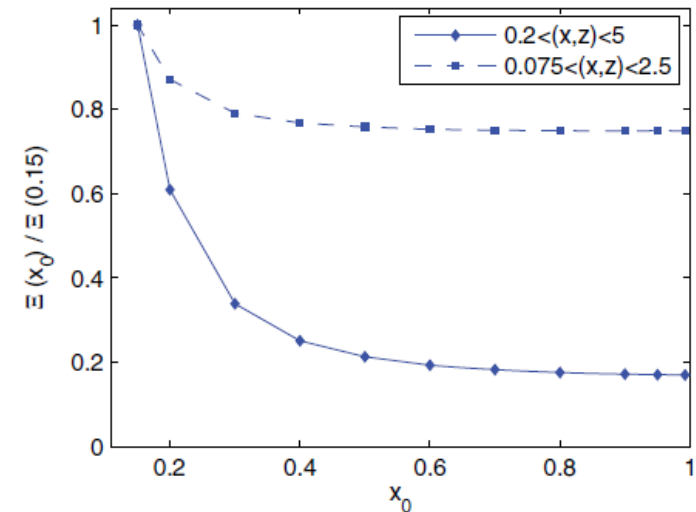
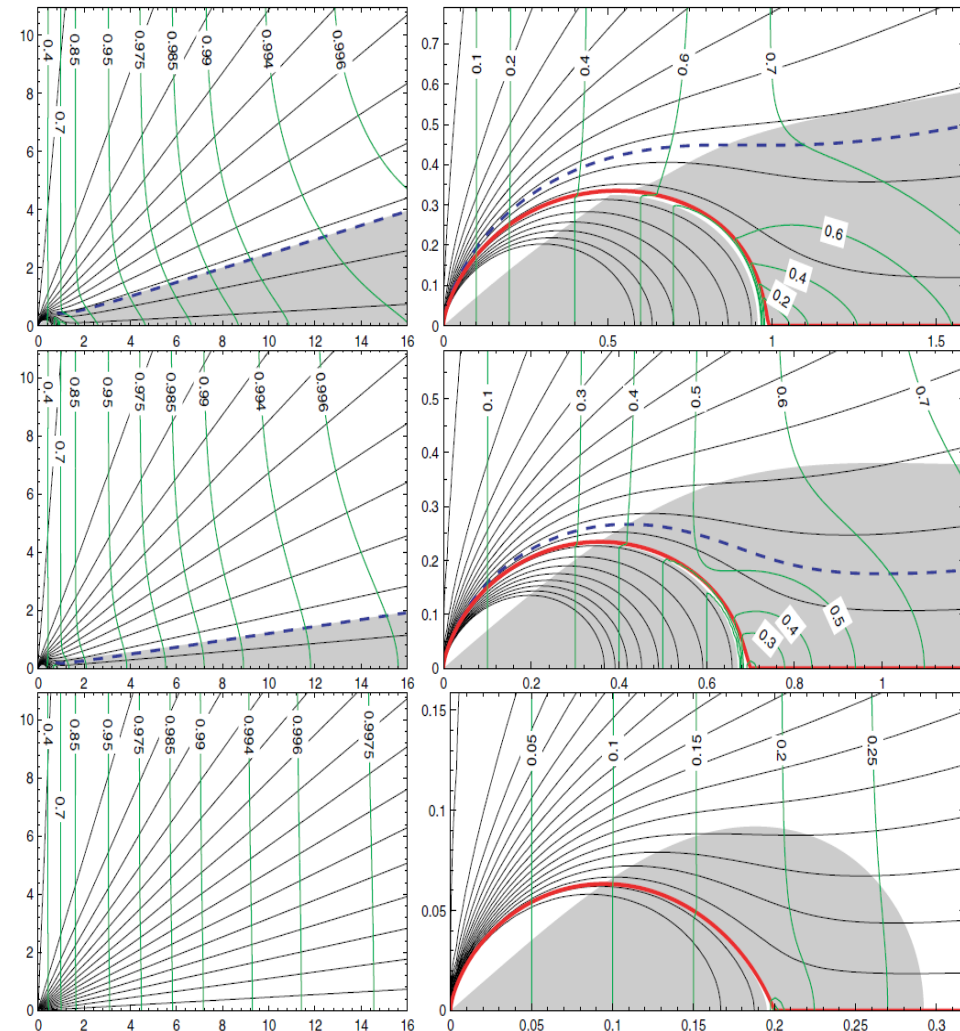


Figure 10. Total energy of electromagnetic field in two different volumes of fixed sizes as a function of x_0 . Ξ is normalized to the corresponding value of $\Xi(x_0 = 0.15)$.

Y-pointがLCに近い方が
エネルギーは小さい。



CKF解その後④

ダイナミカルシミュレーション(MHD, FF)でCKF解(らしきもの)ができた。Komissarov(2006), McKinney(2006)

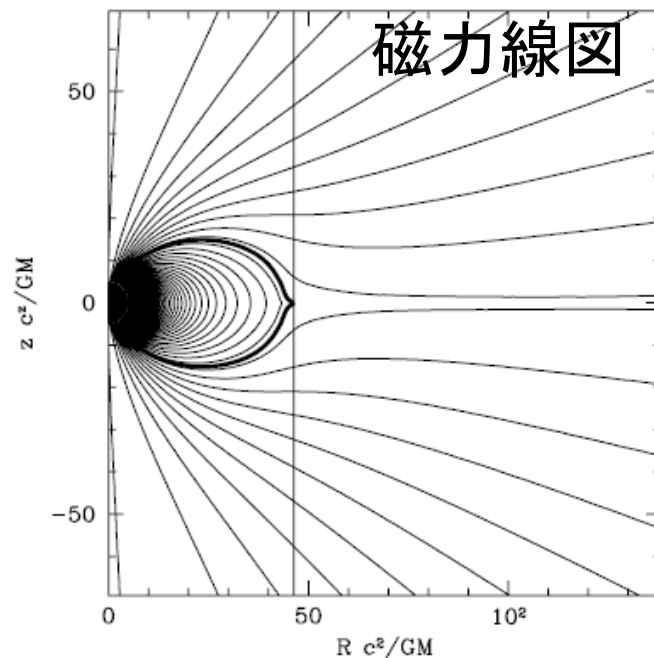


Figure 2. Flux function A_ϕ in a box of size $3R_L \times 3R_L$ (R_L is light cylinder), as in fig. 3 (upper left-hand panel) of Komissarov (2006). There are 80 contours from $A_\phi = 0$ (polar axis) to $A_\phi = \mu/R_\star = 9.57\mu\Omega_\star/c$ (equator on star). A single thick solid contour has been added for the closed field line that touches the theoretical light cylinder. The vertical solid line is the theoretical light cylinder R_L .

ポロイダル電流

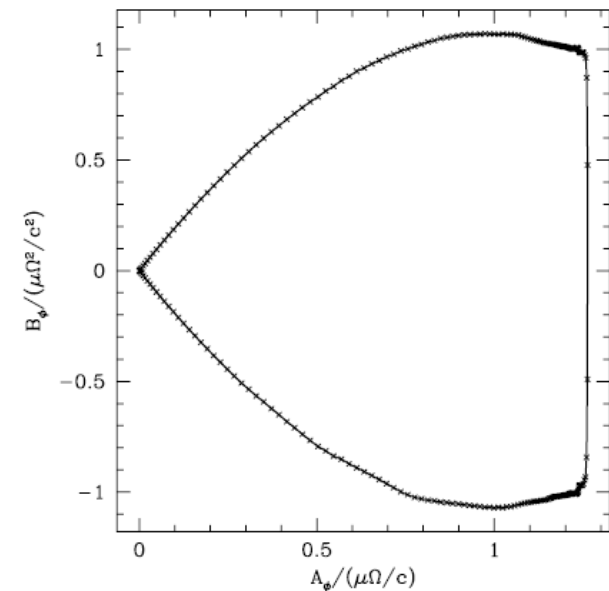


Figure 5. Current function B_ϕ versus flux function $\Psi = A_\phi$.

赤道面にcurrent sheetあり。
無理に抑えてる？

CKF解まとめ

- CKF法でLCを越えて滑らかな解が求められる。
- CKF解にはcurrent sheetがある。必要か？
Ogura & Kojima(2003), Gruzinov(2005), Timokhin(2006)
- Y-pointがLC上にある場合、current sheetがあると磁場が発散。
Uzdensky(2003)
- Y-pointはLCに近い方が電磁場の全エネルギーが小さい。
Timokhin(2006) Uzdensky(2003)との関係は？
- ダイナミカルシミュレーションで、CKF解(らしきもの)ができた。
CKF解は唯一解？ current sheetの存在はどう思っている？
Komisarrov(2006), McKinney(2006)

目次

- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- **パルサー方程式の別の解き方**
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

- **current sheetがない解はつukれないのか？**
- **CKF解が唯一解か？**
- **CKF法以外で解を探索したい。**

パルサー方程式の別の解き方

Numerical Study of Stationary Pulsar Magnetospheres with Fixed Poloidal Current

YT, H. Okawa, M. Takamoto, Y. Suwa(2012) in prep.

- ポロイダル電流 $I_P(\Psi)$ を固定し、LCで滑らかな解を得る数値計算手法を考案した。
- その手法を用いて、current sheet無しの解も構成することができた。
- 得られた解についてその性質を調べた。

パルサー方程式の分解

パルサー方程式をAmpereの法則とforce-free条件に分解。

$$\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi = -8\pi^2 R J_T$$

$$R^2 \Omega_F^2 \left(\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) + 2R \Omega_F^2 \partial_R \Psi - 16\pi^2 I_P I_P' = -8\pi^2 R J_T$$

- ・ 2つの独立な楕円型方程式があると見ることができる。
- ・ 「2つの楕円型方程式を同時に満たす (Ψ, J_T) の組を見つける」という問題ととらえる。

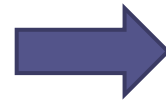
$I_P(\Psi)$ が固定できる！

イテレーションの概要

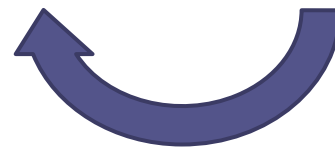
$$\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi = -8\pi^2 R J_T$$

$$R^2 \Omega_F^2 \left(\partial_R^2 \Psi - \frac{1}{R} \partial_R \Psi + \partial_z^2 \Psi \right) + 2R \Omega_F^2 \partial_R \Psi - 16\pi^2 I_P I'_P = -8\pi^2 R J_T$$

試験トロイダル電流
 $J_{T\text{trial}}(R, z)$ を与え
Ampereの法則を解き
 $\Psi(R, z)$ を得る。



得られた $\Psi(R, z)$ とforce-free
条件を使って新しい試験電流
 $J_{T\text{new}}(R, z)$ を作る。



Ampereの法則とforce-free条件が同時に
満たされるまで続ける。

試験トロイダル電流の与え方

イテレーションを収束させるようにトロイダル電流を与える。

$$J_{T\text{new}} = \left\{ \frac{1 + \tanh(\eta D)}{2} J_{T\text{in}} + \frac{1 - \tanh(\eta D)}{2} J_{T\text{out}} \right\} \left\{ 1 - e^{-D^2/(2\sigma^2)} \right\} + J_{TLC} e^{-D^2/(2\sigma^2)}$$

$$J_{\text{in}}(R, z) = \frac{8\pi^2(1 + R^2\Omega_F^2)J_{T\text{trial}} - 2\Omega_F^2\partial_R\Psi + 16\pi^2R^{-1}I_P I'_P}{16\pi^2}$$

$$J_{\text{out}}(R, z) = \frac{16\pi^2J_{T\text{trial}} + 2\Omega_F^2\partial_R\Psi - 16\pi^2I_P I'_P}{8\pi^2(1 + R^2\Omega_F^2)}$$

$$J_{TLC}(R, z) = \frac{-2\Omega_F^2\partial_R^2\Psi + 16\pi^2R^{-2}\{R(I_P'^2 + I_P I_P'')\}\partial_R\Psi - I_P I_P'}{-16\pi^2R\Omega_F^2}$$

$$D = 1 - R^2\Omega_F^2$$

- ・ LCを境にトロイダル電流の与え方を変える。(双曲線関数を使用)
- ・ LC上はLC上のトロイダル電流を与える。(ガウス関数を使用)
- ・ 定数 η , σ で切り替え位置の調整。

ポロイダル電流の与え方①

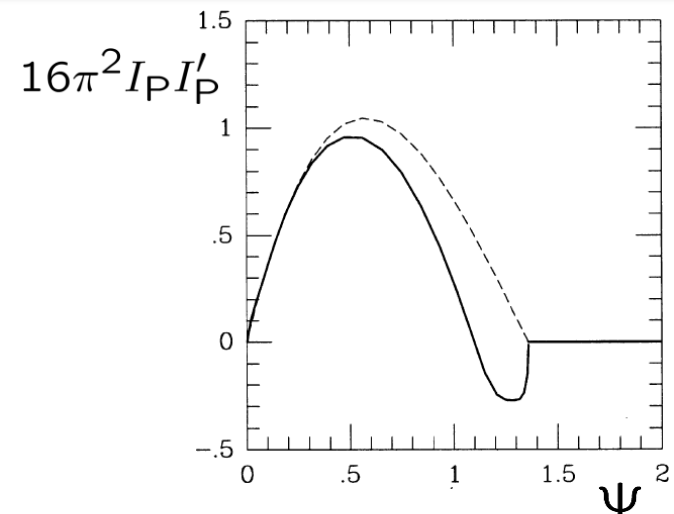
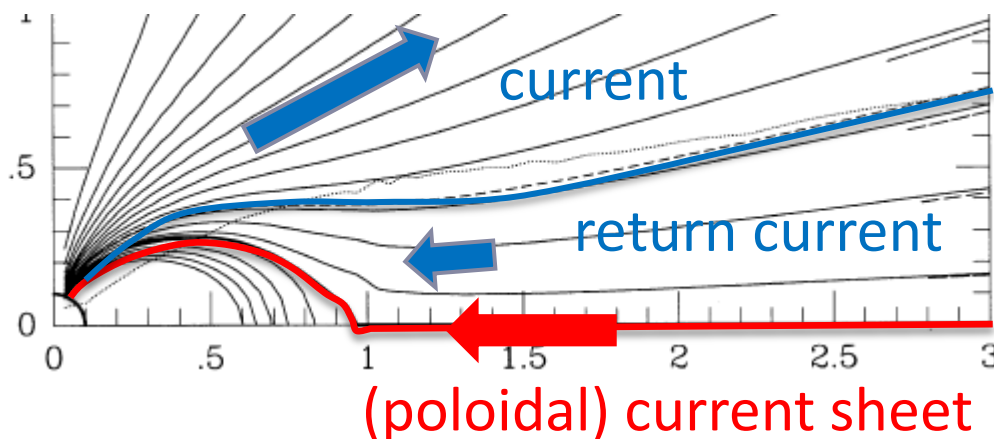
ポロイダル電流は3次関数を用いて与える。

$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A^2 \Psi (\Psi - \Psi_{\text{ret}}) (\Psi - \Psi_{\text{op}})$$

for $0 \leq \Psi \leq \Psi_{\text{op}}$

$$= 0 \text{ for } \Psi > \Psi_{\text{op}}$$

こちらが与える定数は3つ。(A, Ψ_{ret} , Ψ_{op})



ポロイダル電流の与え方②

$$\begin{aligned} 16\pi^2 I_P I'_P &= 16\pi^2 A^2 \Psi (\Psi - \Psi_{\text{ret}}) (\Psi - \Psi_{\text{op}}) \\ &\quad \text{for } 0 \leq \Psi \leq \Psi_{\text{op}} \\ &= 0 \quad \text{for } \Psi > \Psi_{\text{op}} \end{aligned}$$

current sheetのコントロール $r = \frac{\Psi_{\text{ret}}}{\Psi_{\text{op}}}$

$r = 0.5$: no sheet

$r = 0.8$: CKF

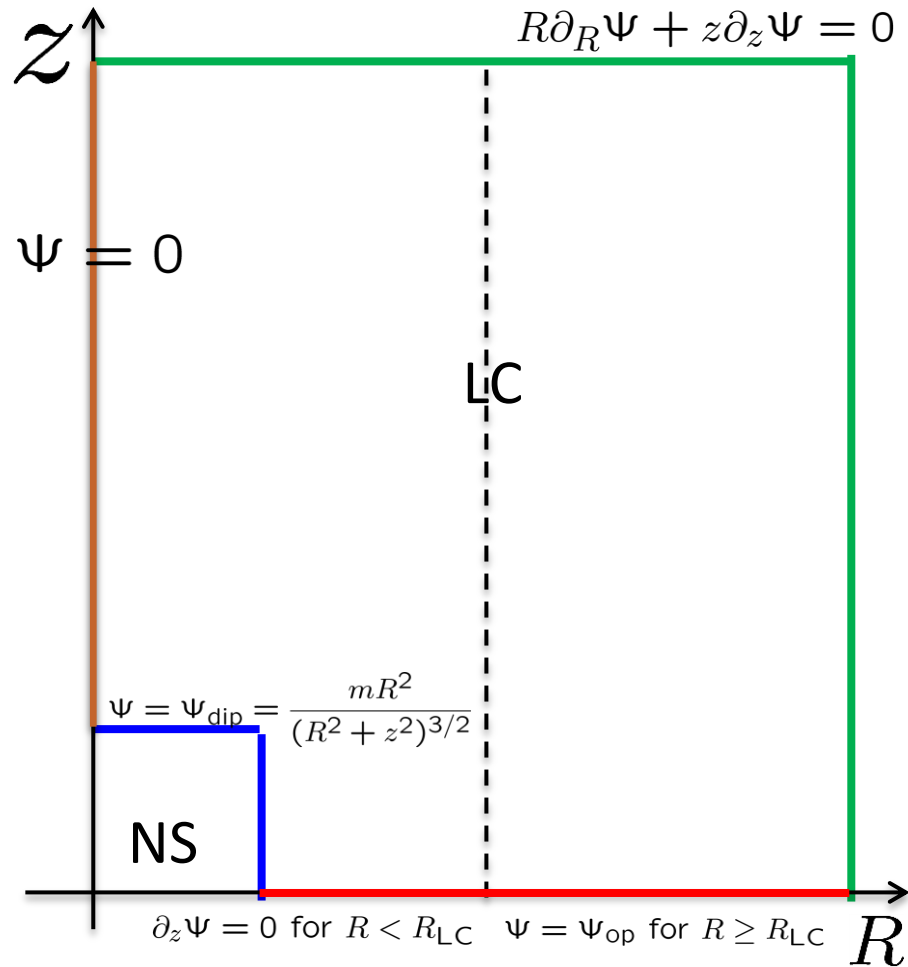
$r = 1.0$: no return

- ・ 実際の計算では Ψ_{op} の値をいろいろ与えて行う。
- ・ ただし、 $r = \Psi_{\text{ret}}/\Psi_{\text{op}}$ の値は固定する。

目次

- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- パルサー方程式の別の解き方
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

境界条件



- 軸

$$\Psi = 0$$

- 星表面

$$\Psi = \Psi_{\text{dip}} = \frac{mR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

m : ダイポールモーメント

- 遠方 (有限領域)

$$R\partial_R\Psi + z\partial_z\Psi = 0$$

- 赤道

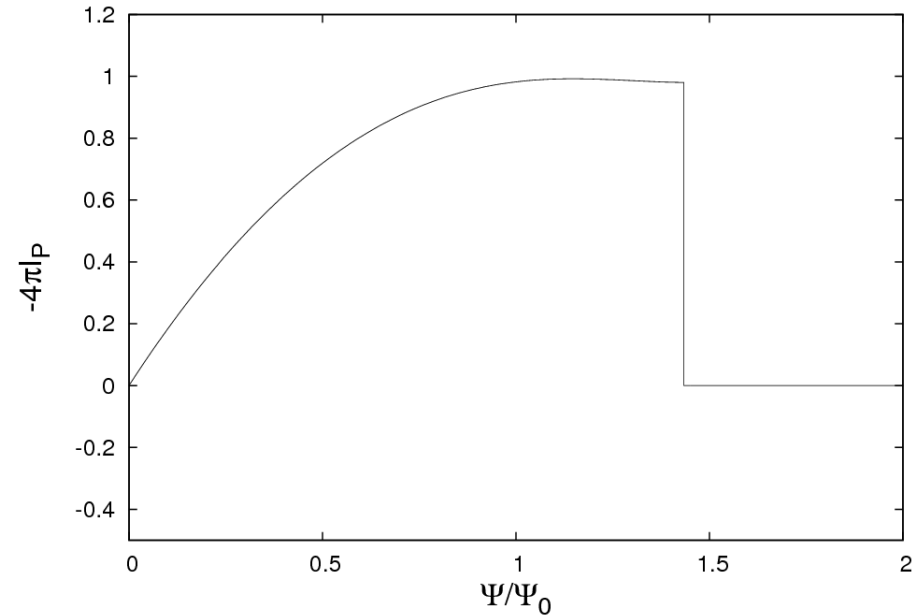
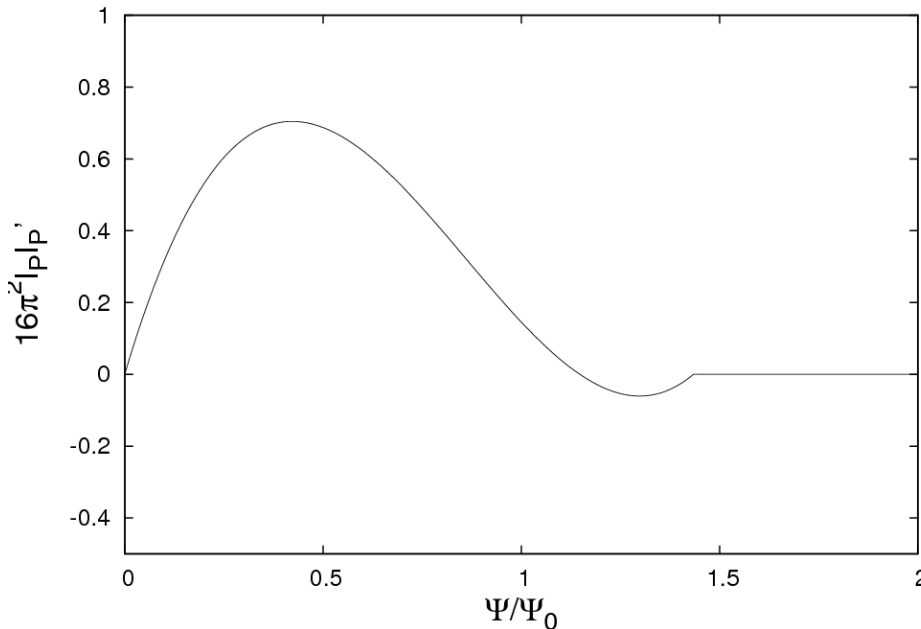
$$\partial_z\Psi = 0 \text{ for } R < R_{\text{LC}}$$

$$\Psi = \Psi_{\text{op}} \text{ for } R \geq R_{\text{LC}}$$

Current sheetあり(パラメータ)

$$16\pi^2 I_P I'_P$$

$$-4\pi I_P$$



$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A \Psi (\Psi - \Psi_{\text{ret}}) (\Psi - \Psi_{\text{op}})$$

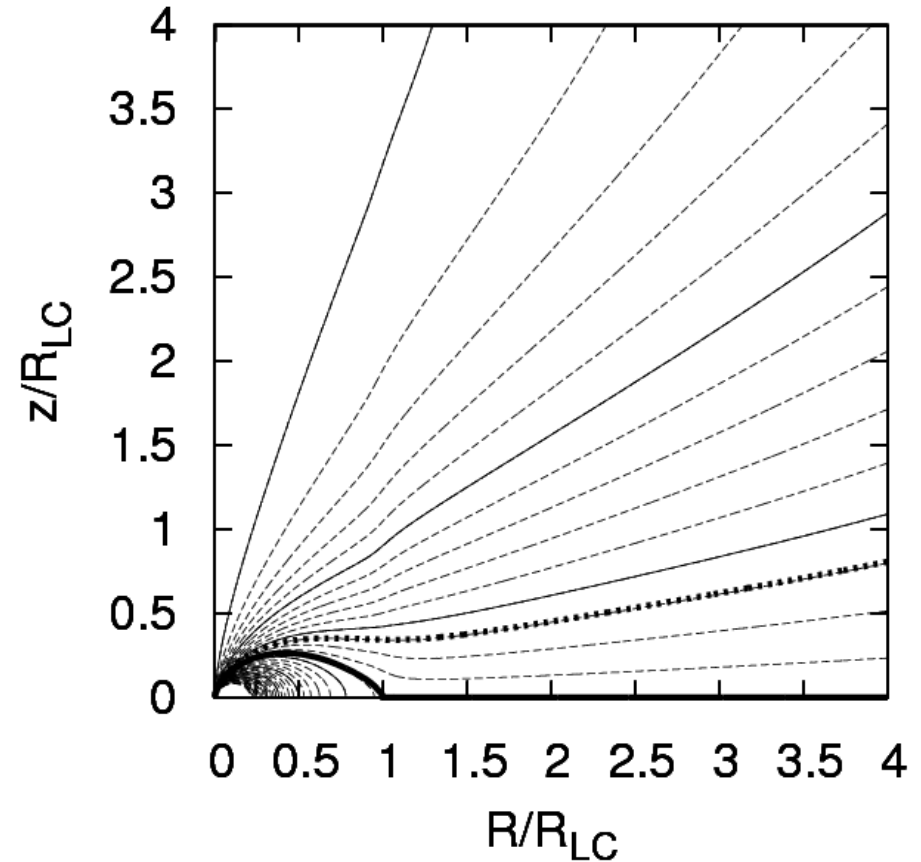
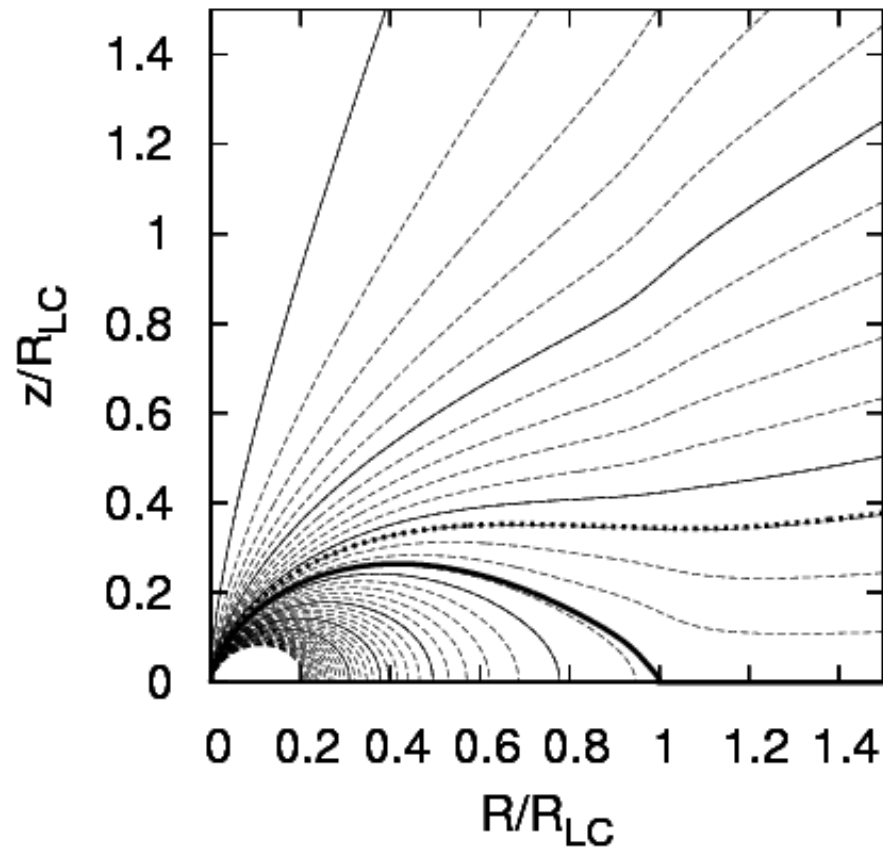
$$A = 0.12 \Omega_F \Psi_0^{-1}, \quad \Psi_{\text{op}} = 1.434 \Psi_0, \quad r = \Psi_{\text{ret}} / \Psi_{\text{op}} = 0.8$$

- A , r はTimokhin(2006)を参考。
- A , r は固定し「数値計算が収束」+「非物理的な解をさける」ように Ψ_{op} を決定。

Current sheetあり(磁力線)

$4R_{LC} \times 4R_{LC}$ with 400×400 grids

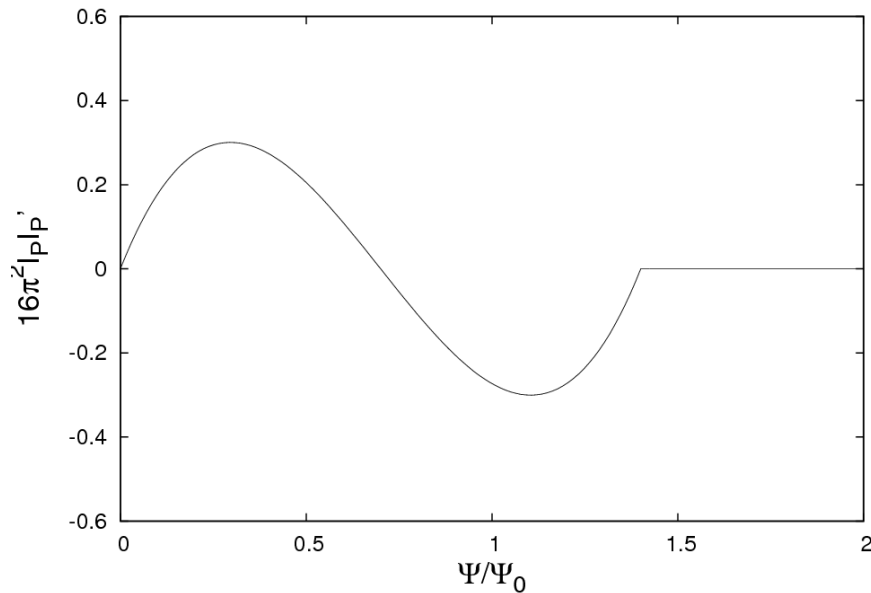
$(R_S, z_S) = (0.05R_{LC}, 0.05R_{LC})$



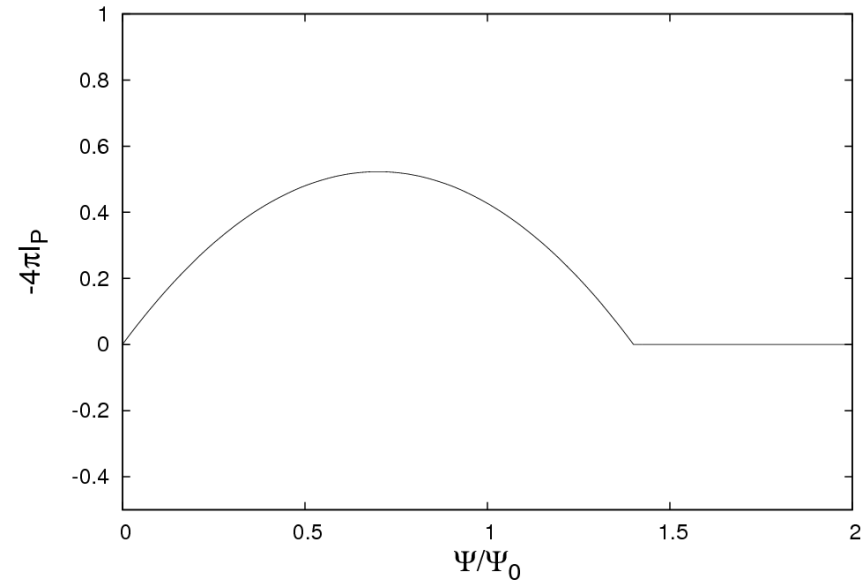
CKF解の構造とあまり変わらない。

Current sheetなし(パラメータ)

$$16\pi^2 I_P I'_P$$



$$-4\pi I_P$$



$$16\pi^2 I_P I'_P = 16\pi^2 A \Psi (\Psi - \Psi_{\text{ret}}) (\Psi - \Psi_{\text{op}})$$

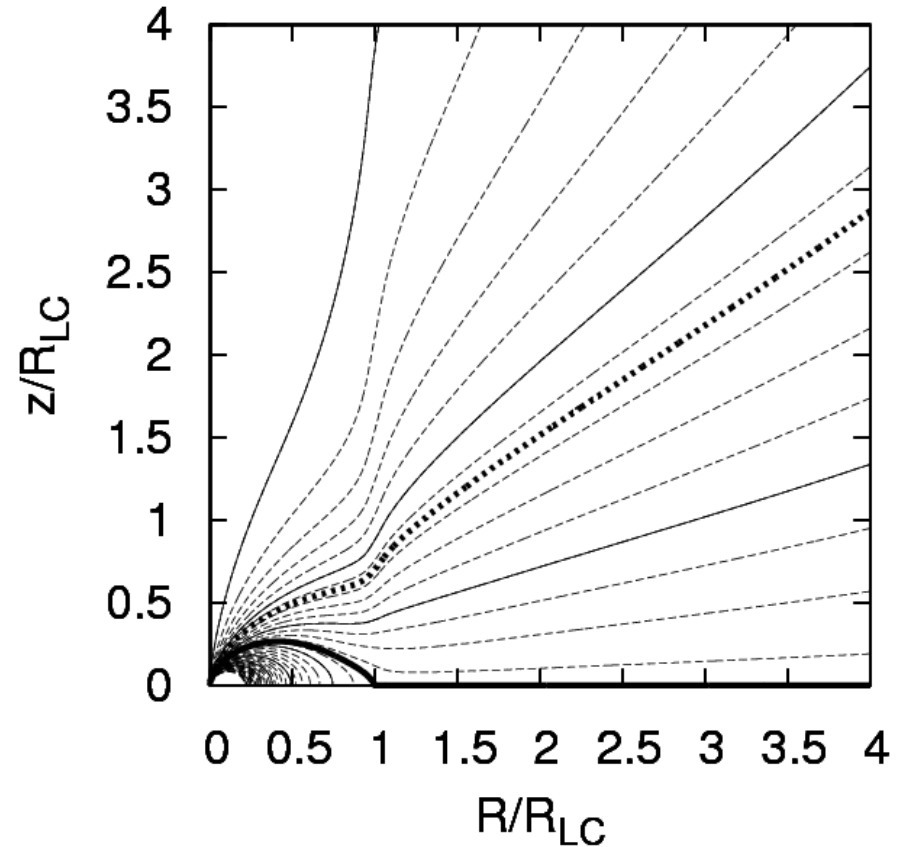
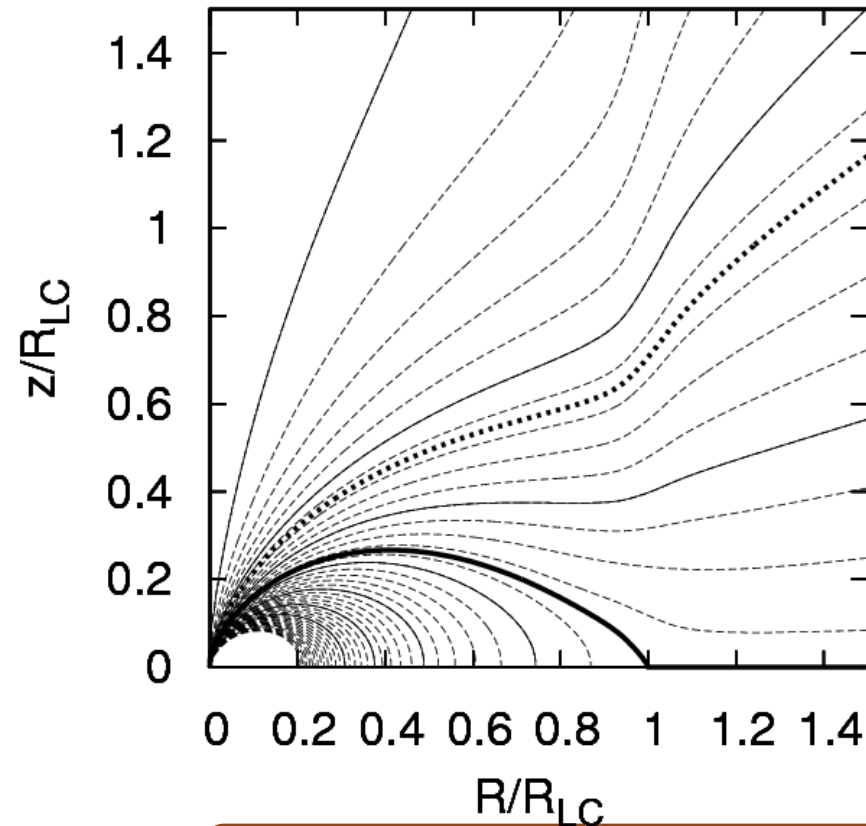
$$A = 0.12 \Omega_F \Psi_0^{-1}, \quad \Psi_{\text{op}} = 1.4004 \Psi_0, \quad r = \Psi_{\text{ret}} / \Psi_{\text{op}} = 0.5$$

current sheetなし

Current sheetなし(磁力線)

$4R_{LC} \times 4R_{LC}$ with 400×400 grids

$(R_S, z_S) = (0.05R_{LC}, 0.05R_{LC})$



current sheetありの解と磁場の構造はあまり変わらない。

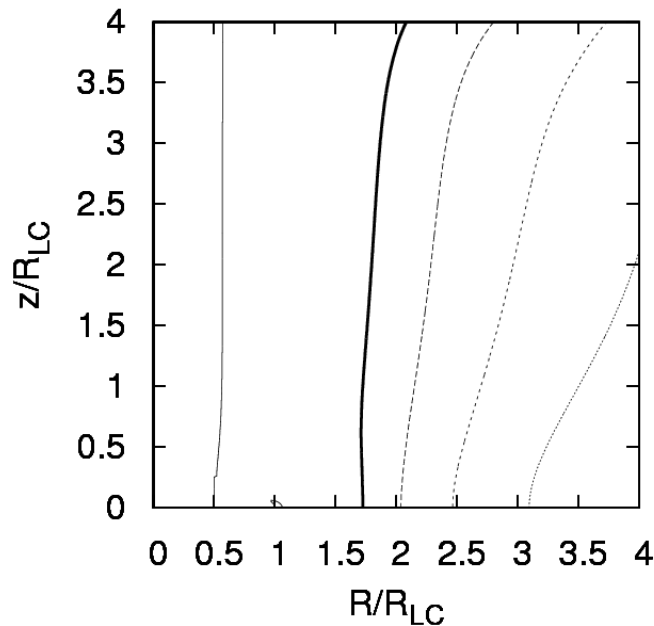
数値計算のまとめ

- ポロイダル電流を3次関数でモデル化しcurrent sheetを制御。
- current sheetの有無に限らず数値解は作れる。
- どんな $(A, \Psi_{\text{ret}}, \Psi_{\text{op}})$ を与えても計算が収束するわけではない。
- 収束したとしても物理的な解がいつでも得られるわけではない。
ex.) LCを超える閉じた磁力線を持つ解
- 遠方の境界条件を変えても星付近の磁力線の構造はさほど変わらない。(CKF1999とOK2003は遠方の境界条件が違うが磁場構造はさほど変わらなかった。)

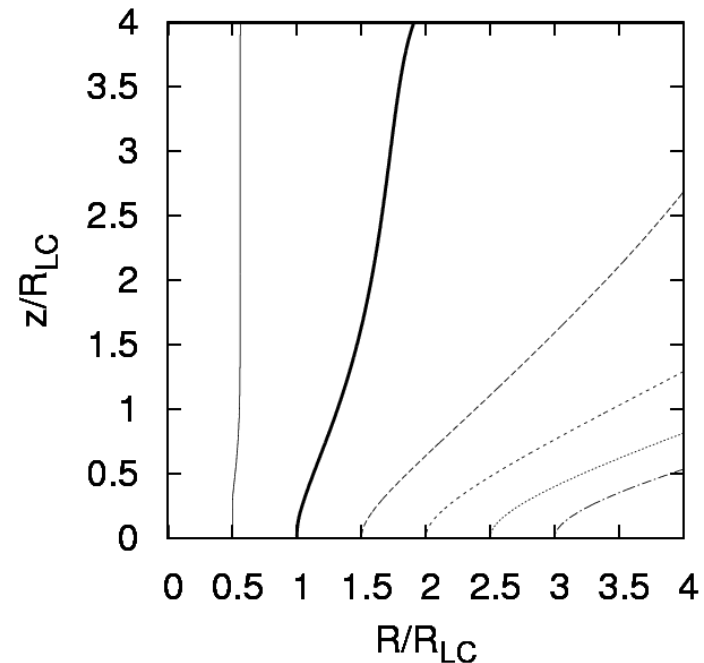
解の性質(ドリフト速度①)

$$v_d = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{B^2} \quad \text{:ドリフト速度}$$

current sheetあり



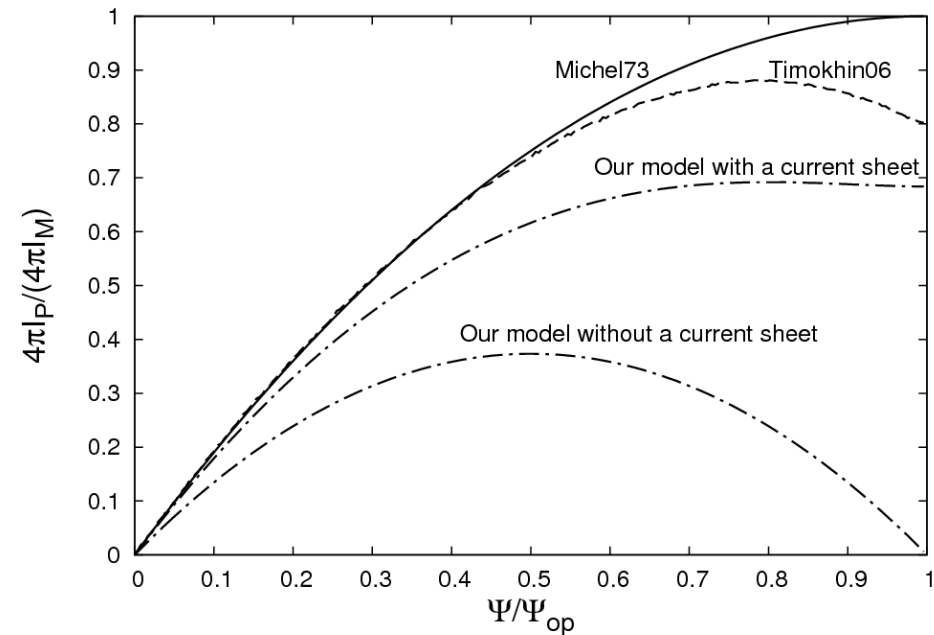
current sheetなし



current sheetあり・なしどちらもドリフト速度はLCより外で光速を超える。(force-free近似が破れる)

解の性質(ドリフト速度②)

- current sheetあり
CKF解と矛盾? → NO.
CKF解とずれた理由は
ポロイダル電流が違うから。
- current sheetなし
Uzdensky (2003)でも指摘されて
いる通りcurrent sheetがない場合
は赤道面上のLCで必ず光速を
超える。



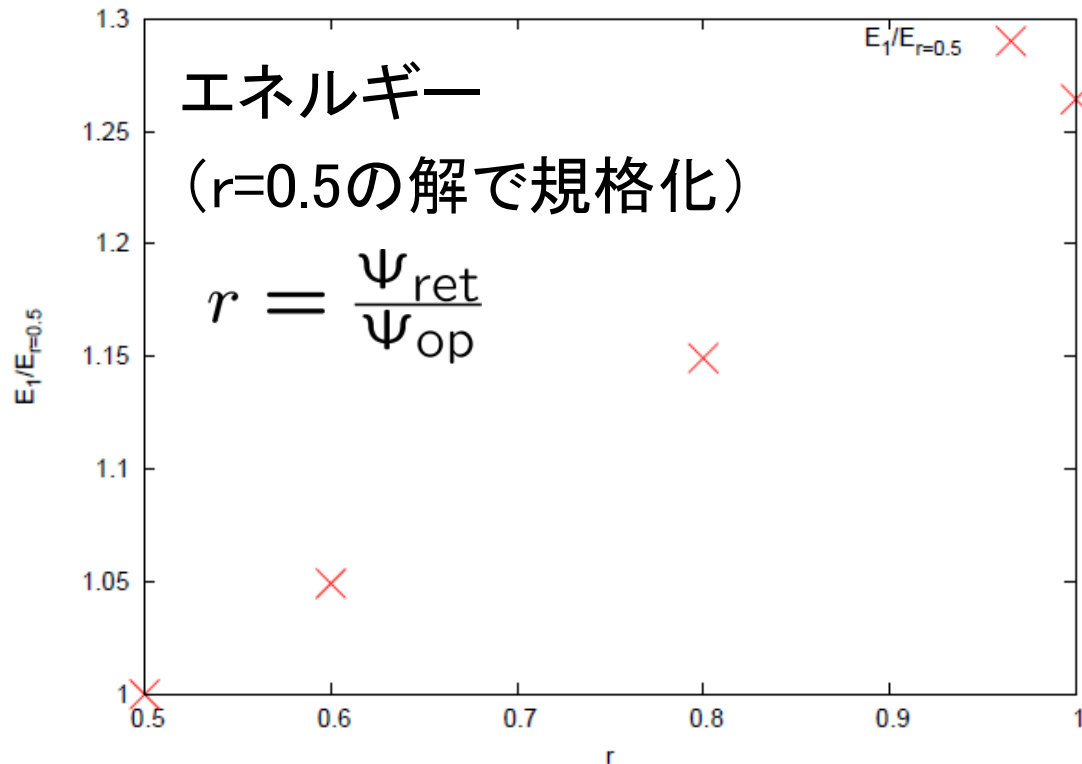
ドリフト速度

$$v_d = \frac{R\Omega_F}{\sqrt{1 + \frac{(4\pi I_P)^2}{(\partial_R \Psi)^2 + (\partial_z \Psi)^2}}}$$

$I_P = 0$ の場所はLCより外
で必ず光速を超える。

解の性質(エネルギー)

$A = 0.12\Omega_F\Psi_0^{-1}$ で固定。 $0.2R_{LC} < (R, z) < 4R_{LC}$ の領域で積分。

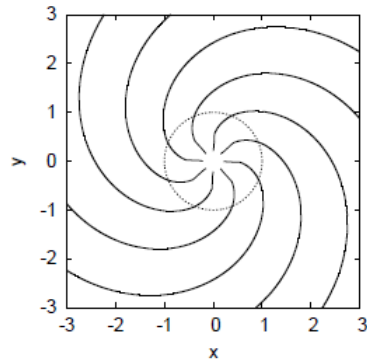


current sheetなしがエネルギー最小。

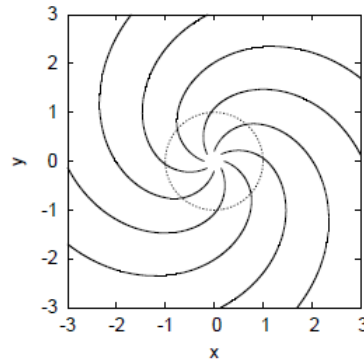
解の性質 (3次元図①)

z 一定面で切った磁力線図。

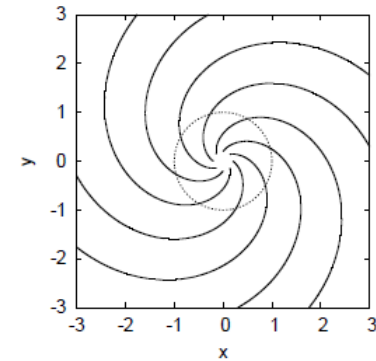
current sheetあり



(a) $z = 0.25 R_{LC}$

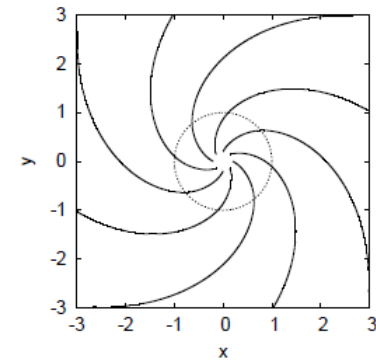
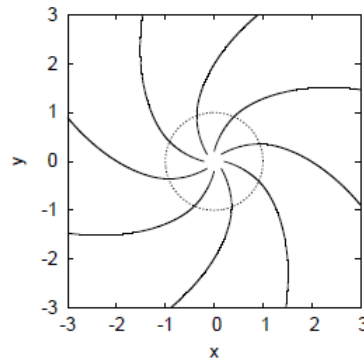
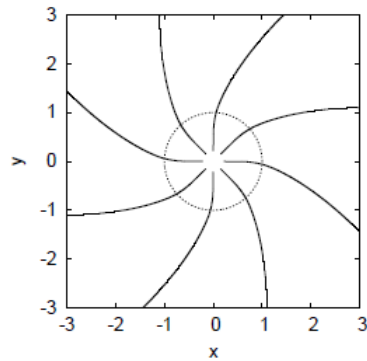


(b) $z = 0.5 R_{LC}$



(c) $z = 1.0 R_{LC}$

current sheetなし

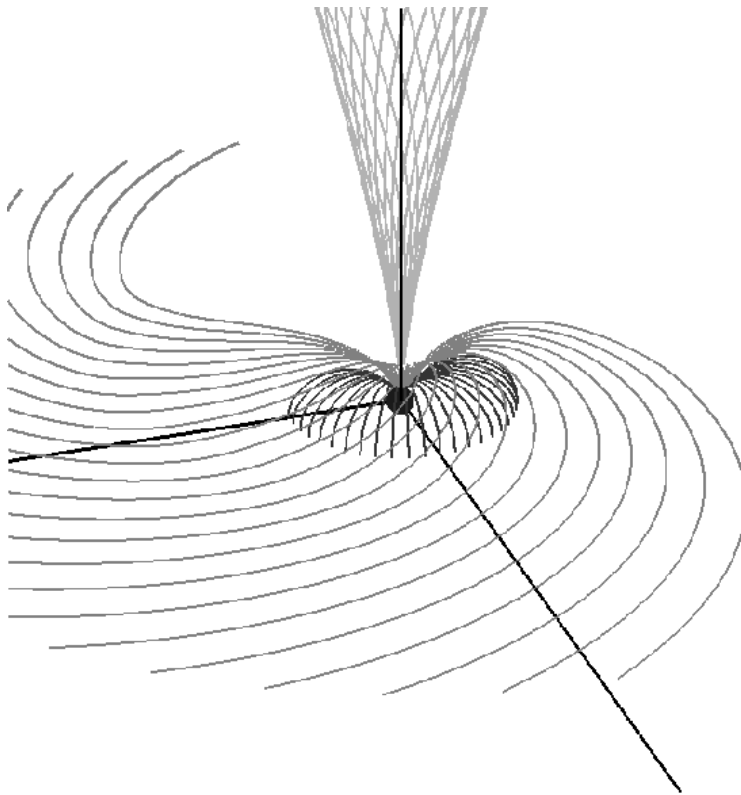


解の性質(3次元図②)

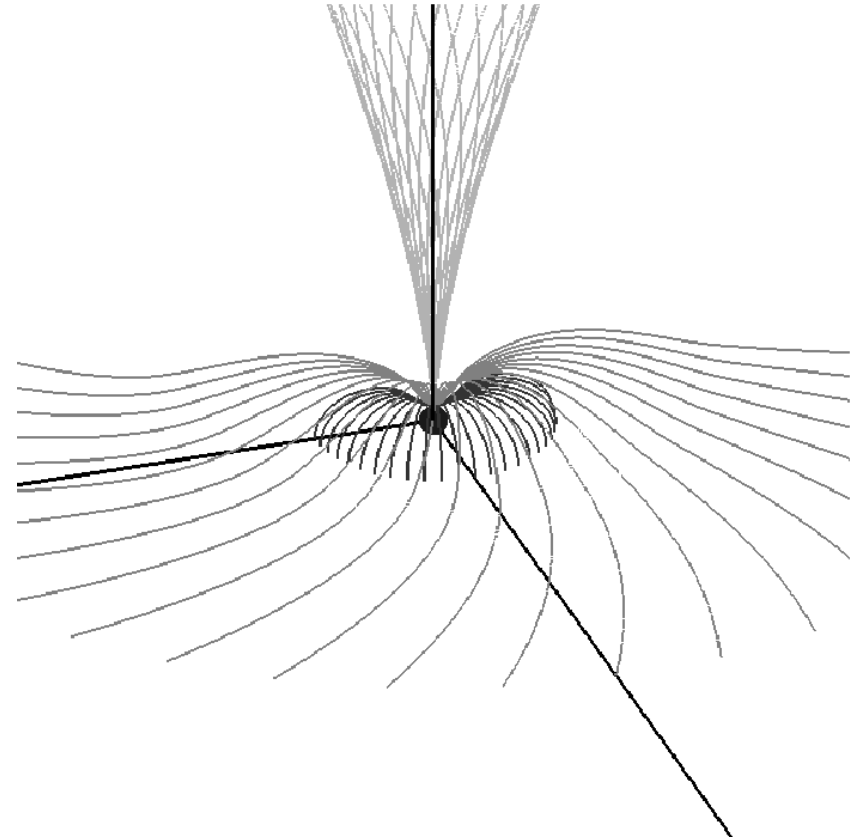
関西相対論・宇宙論合同セミナー
@京大基礎研

2012/6/23

current sheetあり



current sheetなし

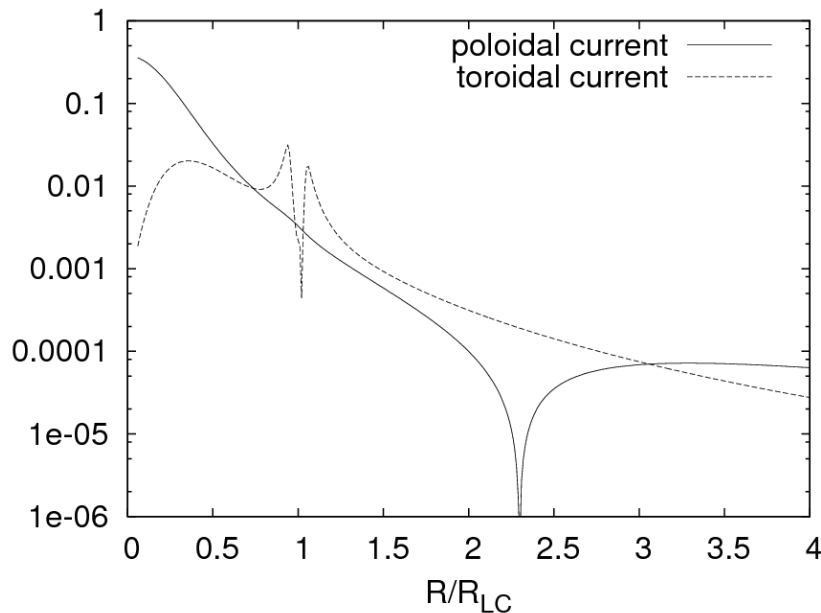


current sheetがないと赤道面付近で磁力線はあまり曲がらない。

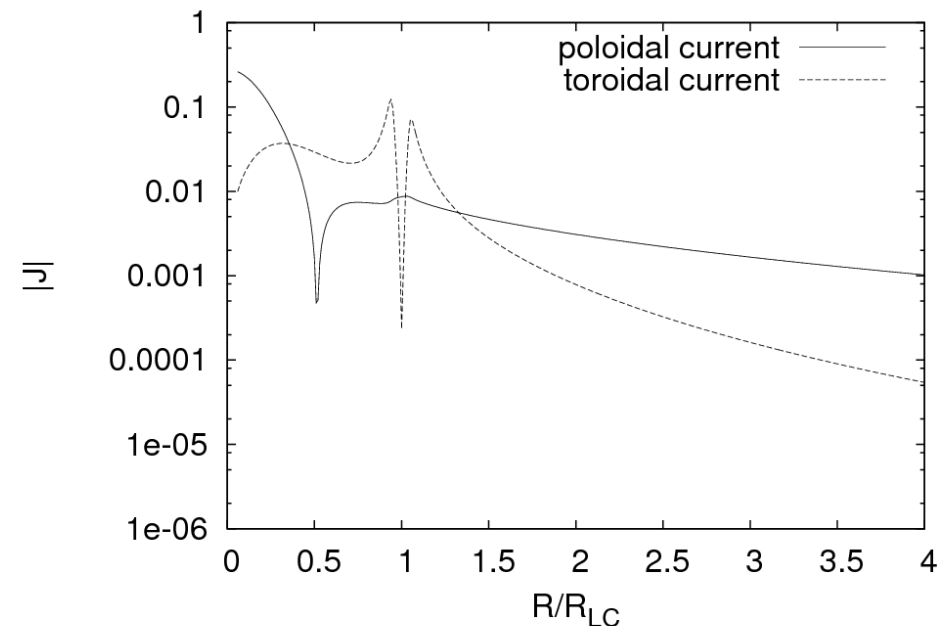
解の性質 (トロイダル電流)

ポロイダル電流と z -一定面で大きさを比較。

current sheetあり



current sheetなし



($z = 0.5R_{LC}$)

- だいたいポロイダル優勢。
- current sheetありの方がトロイダル電流がやや強い。

目次

- 導入
- パルサー方程式
- CKF法
- パルサー方程式の別の解き方
- CKF-type solution with/without a current sheet
- まとめ

まとめと今後の課題

- ポロイダル電流を固定して、定常パルサー磁気圏を構成する数値手法を開発した。
- この手法でパルサー方程式の(poloidal) current sheetのない解を構成することができた。
- current sheetあり/なしで、 Ψ に関する境界条件は同じ。
→ LCを滑らかに通す I_p は任意ではないが一つではない。
- 得られた解の性質を調べた。(ドリフト速度、エネルギー、etc)
current sheetなしの解の方がエネルギーが小さい。
→ current sheetなしがもっともらしそう。
- プラズマの運動入りへ拡張(MHDとか)。
- 磁場の角速度一定をはずす。(BH磁気圏への応用)