2 次流体力学方程式に現れる曲率項の微視的起源

岡村 隆

関西学院大学

関西相対論合同セミナー
2014 年 6 月 29 日

はじめに

relativistic viscous hydrodynamics,
second-order hydrodynamics,
(relativistic) causal hydrodynamics,

$\cdots$

= 相対論的因果律を満たす粘性流体力学

$\not\ni$ **Navier-Stokes eqn. (放物型)**

$\Downarrow$

- **流体力学は低エネルギー・長波長極限の有効理論**
  - **有効理論には適用限界がある**
  - **その適用限界はより高次の理論の予想があって分かる**
- **"速い" タイムスケールの散逸現象では** Navier-Stokes eqn. **は破綻**
  - QGP（Quark-Gluon Plasma）fireball **の進化**
  - **宇宙物理では？**

はじめに
今日のテーマ

- 〜 '80： Israel-Stewart **理論**
  - **エントロピー原理に基づく** 2 **次流体力学の現象論的導出**
  - Grad **法による** 2 **次流体力学の運動論的導出**
- 2007： Baier, et.al.
  - **微分展開に基づく** 2 **次流体力学の整備**
  - **ゲージ／重力対応による輸送係数の評価**

    $\Rightarrow$ Israel-Stewart **に無い項があり得ると指摘** eg **曲率依存項**
  - **相対論的** Boltzmann **方程式は曲率依存項を導かない**

$$\Downarrow$$

Q. **ゲージ／重力対応が正しくないのか？**

Q. **なぜ** Boltzmann **方程式は曲率依存項を導かないのか？**

Q. **微視的に曲率依存項を導く方法はあるか？**

参考文献

(P)　現象論的　　(K)　運動論的（Boltzmann eqn. $\rightarrow$ hydro.）

- **相対論的粘性流体力学**
  - Israel-Stewart **理論**
    - ★ (P) Israel　Ann. Phys. **100** (1976) 310
    - ★ (K) Israel and Stewart　Ann. Phys. **118** (1979) 341
  - **ゲージ／重力対応**
    - ★ Baier, Romatschke, Son, Starinets, & Stephanov (BRS^3)　0712.2451
    - ★ Romatschke　0906.4787
    - ★ Natsuume & TO　0712.2916
- **曲率項の導出に向けて**
  - Hamiltonian **から直接** hydro. **へ**
    - ★ **佐々**　1306.4880
  - **非局所効果をとり入れた衝突項**
    - ★ Jaiswal, Bhalerao, & Pal　1204.3779

目次

目次

2 次流体力学〜現象論

何が問題か？

eg) **粒子の拡散**　　粒子数密度： $n(t,\vec{x})$,　粒子流束： $\vec{J}(t,\vec{x})$

$$\partial_t\, n(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}(t,\vec{x}) = 0 \qquad \text{（保存則）}$$

$$\vec{J}(t,\vec{x}) = -\,D\,\vec{\nabla} n(t,\vec{x}) \qquad \text{（現象論：構成方程式）}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t\, n(t,\vec{x}) - D\,\triangle\, n(t,\vec{x}) = 0 \qquad \text{（拡散方程式）}$$

- 拡散方程式　＝　**放物型！**　$\neq$　双曲型

- 1 次元解：　初期条件　$n(t=0,x) = \delta(x)$

$$n(t,x) = \theta(t)\,\frac{\exp\left(-x^2/4Dt\right)}{\sqrt{2Dt}}$$

- 無限の伝播速度　$\longrightarrow$　**相対論的因果律を満たさない**
  - 双曲型にどのように改めるか？　$\longrightarrow$　保存則は基本的要請
    $\Longrightarrow$　現象論の構成方程式を改良

2 次流体力学〜現象論

どうするか 〜 「流れ」に緩和を導入

eg) **粒子の拡散**　　**粒子数密度：** $n(t,\vec{x})$,　**粒子流束：** $\vec{J}(t,\vec{x})$

- $\partial_t n - D \triangle n = 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{cases} \partial_t n + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 & \text{(保存則)} \\ \vec{J}(t,\vec{x}) = -D\,\vec{\nabla} n(t,\vec{x}) & \text{(現象論)} \end{cases}$

★ **相対論的因果律の破れの原因**

- **密度勾配が与えられた瞬間に流れを生む**　$\Rightarrow$　**無限の伝播速度**
- **物理的には遅延効果がある**　$\Rightarrow$　**緩和時間を導入**

$$\tau_J\,\partial_t\vec{J} + \vec{J} = -D\,\vec{\nabla} n$$

★ **双曲型拡散方程式**

$$0 = \tau_J\,\partial_t^2 n + \partial_t n - D\triangle n \qquad \leftarrow \qquad \text{(保存則)+(新構成方程式)}$$

- **伝播速度：** $v = \sqrt{D/\tau_J} < \infty$

2 次流体力学〜現象論

Israel-Stewart 理論 (1/9)

Q　緩和時間を手で導入するのでなく導出するには？

- 流体はマクロ系の非平衡現象で散逸を伴う（粘性，熱伝導，etc.）

$\rightarrow$　時間の矢　　　熱力学第 2 法則

A　流体は $\Delta S \geq 0$ を満たすように運動　　（熱力学的力が駆動力）

変化の向き　〜　示強量が等しくなるように

孤立系 (A + B)：　$dS = dS_A + dS_B \geq 0$

熱力学第 1 法則：　$T\,dS = dE + p\,dV - \mu\,dN$

N 交換：　$dS = -\left(\frac{\mu_A}{T_A} - \frac{\mu_B}{T_B}\right) dN_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{T} \searrow$

E 交換：　$dS = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right) dE_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} \nearrow$

- IS アプローチ：　局所平衡　&　$\Delta S \geq 0$

Israel-Stewart 理論 (2/9)

- **熱力学量**　局所量を扱うので示量変数 (E, N, V) の代わりに密度量を使う
  - **密度量：** $\epsilon, \quad n, \quad s(\epsilon, n)$
  - **示強変数：** $T, \quad \mu, \quad p$

熱力学第 1 法則

- $ds = \dfrac{1}{T}\, d\epsilon - \dfrac{\mu}{T}\, dn \quad \Rightarrow \quad s(\epsilon, n), \qquad \dfrac{1}{T} := \dfrac{\partial s}{\partial \epsilon}, \qquad \dfrac{\mu}{T} := \dfrac{\partial s}{\partial n}$
- $p = -\epsilon + T\, s + \mu\, n$

熱力学第 2 法則

$$dS - dQ_{\text{入}}/T \geq 0 \qquad (dQ_{\text{入}} > 0\,;\ \text{熱の流入})$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t\, s + \vec{\nabla} \cdot \vec{s} \geq 0 \qquad \vec{s} \sim s\,\vec{v} + \vec{q}_{\text{出}}/T + \cdots$$

2 次流体力学〜現象論

Israel-Stewart 理論 (3/9)

局所平衡

- 各部分系は, 熱平衡状態にある $(\tau_{\text{micro.}} \ll \tau_{\text{macro.}})$
- 各部分系間の相互作用は小さい $(\ell_{\text{micro.}} \ll \ell_{\text{macro.}})$

$\Rightarrow$ master variables : 空間的一様性と時間的一様性を両立

$\Rightarrow$ **局所保存量** $\nabla_\mu n^\mu = 0 \qquad \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$

マクロ物理量 〜 局所熱力学的量 + “ 流れ ”

示強変数：	$T(t,\vec{x})$	$\mu(t,\vec{x})$	$p(t,\vec{x})$		$\vec{P}_\perp(t,\vec{x})$
密度量：	$\epsilon(t,\vec{x})$	$n(t,\vec{x})$		$s(t,\vec{x})$	
$\rightarrow$ 流れ：	$\vec{P}_\perp(t,\vec{x})$	$\vec{j}_\perp(t,\vec{x})$		$\vec{s}(t,\vec{x})$	$T_{ij}(t,\vec{x})$

$\Rightarrow$ master variables (**局所保存量**)： $n^\mu(x)$, $T^{\mu\nu}(x)$

時間の矢： $s^\mu(x)$

Israel-Stewart 理論 (4/9)

仮定

- 局所平衡
- s^μ は, n^μ, $T^{\mu\nu}$ のみに依存（微分は含まない）
- $\nabla_\mu s^\mu \geq 0$ を満たすように時間発展

  $\Rightarrow$ 構成方程式へ　　(s^μ の具体形が重要)

熱平衡状態の s^μ　　u^μ： 流体静止系

- $T_{\text{th}}\, s_{\text{th}} = p_{\text{th}} + \epsilon - \mu_{\text{th}}\, n$ (Euler rel.)
- $\Leftrightarrow\ s_{\text{th}} = -u_\mu\, s^\mu_{\text{th}}$

  $s^\mu_{\text{th}} := p_{\text{th}}\, u^\mu - u_\nu\, T^{\mu\nu} - \mu_{\text{th}}\, n^\mu$ (共変化)

2 次流体力学〜現象論

Israel-Stewart 理論 (5/9)

- $T_{\rm th}\, s_{\rm th} = p_{\rm th} + \epsilon - \mu_{\rm th}\, n$ (Euler rel.)
- $\Rightarrow \quad s_{\rm th} = -u_\mu\, s^\mu_{\rm th}\,, \qquad s^\mu_{\rm th} := p_{\rm th}\, u^\mu - u_\nu\, T^{\mu\nu} - \mu_{\rm th}\, n^\mu$

非平衡状態の s^μ 〜 平衡状態の s^μ からの類推で定義

- $$s^\mu := \frac{p_{\rm th}\, u^\mu - u_\nu\, T^{\mu\nu} - \mu_{\rm th}\, n^\mu}{T_{\rm th}} = s_{\rm th}\, u^\mu + \frac{P^\mu_\perp}{T_{\rm th}} - \frac{\mu_{\rm th}}{T_{\rm th}}\, j^\mu_\perp$$
  - $T^{\mu\nu} = \epsilon\, u^\mu u^\nu + 2\, P^{(\mu}_\perp\, u^{\nu)} + (p_{\rm th} + \Pi)\, h^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$
  - $n^\mu = n\, u^\mu + j^\mu_\perp$
  - $p_{\rm th}$, $T_{\rm th}$, $\mu_{\rm th}$ は熱平衡状態での $s_{\rm th}(\epsilon, n)$ より **定義** される熱力学量

★ **非平衡状態では自然な流体静止系なし $\to$ u^μ は "ゲージ自由度"**

代表的な "ゲージ固定" 法

- Landau-Lifshitz frame (E-frame)： $P^\mu_\perp = 0$
- Eckart frame (N-frame)： $j^\mu_\perp = 0$

2 次流体力学〜現象論

Israel-Stewart 理論 (6/9)

- frame u^μ (ゲージ) 不変な理論形式可能だが LL-frame がシンプル
- EOM をもちいて $\nabla\cdot s$ を計算すると $\cdots$

$$\Rightarrow\ \nabla_\mu s^\mu = -j_\perp^\mu D_\mu \frac{\mu_{\text{th}}}{T_{\text{th}}} - \frac{\Pi\theta}{T_{\text{th}}} - \frac{\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{T_{\text{th}}}$$

- $D_\mu := h_\mu^\nu \nabla_\nu$　　$h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$
- $\theta := \nabla\cdot u$　　$\sigma_{\mu\nu} := \nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle}$　　$\Omega_{\mu\nu} := h_\mu^\rho h_\nu^\sigma \nabla_{[\rho} u_{\sigma]}$
- $A^{\langle\mu\nu\rangle} := \left(h_\rho^{(\mu} h_\sigma^{\nu)} - h^{\mu\nu} h_{\rho\sigma}/\mathrm{d}\right) A^{\rho\sigma}$　　(d： 空間次元)

構成方程式 (1st order @ LL-frame) 〜 $\nabla\cdot s \geq 0$ を保証するように

$$j_\perp^\mu = -\mathcal{D}\, D^\mu \frac{\mu_{\text{th}}}{T_{\text{th}}}\,,\qquad \Pi = -\zeta\,\theta\,,\qquad \pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow\quad \nabla\cdot s = \frac{j_\perp\cdot j_\perp}{\mathcal{D}} + \frac{\Pi^2}{\zeta\, T_{\text{th}}} + \frac{\pi\cdot\pi}{2\,\eta\, T_{\text{th}}} > 0 \qquad (\mathcal{D},\ \zeta,\ \eta > 0)$$

2 次流体力学〜現象論
Israel-Stewart 理論 (7/9)

$$\nabla_\mu s^\mu = -j^\mu_\perp D_\mu \frac{\mu_{\text{th}}}{T_{\text{th}}} - \frac{\Pi\theta}{T_{\text{th}}} - \frac{\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{T_{\text{th}}}$$

疑問・問題点　平衡からのズレを δ とする： $|\, u^\mu - u^\mu_{\text{eq}} \,| = O(\delta)$

- $s^\mu_{\text{真}} = (p_{\text{th}}\, u^\mu - u_\nu\, T^{\mu\nu} - \mu_{\text{th}}\, n^\mu)/T_{\text{th}} + O(\delta^2)$

  $\leftarrow O(\delta)$ まで取り入れた s^μ を定義したつもり
  - $|\, u^\mu - u^\mu_{\text{eq}} \,| = O(\delta)$,　　Π, $\pi^{\mu\nu}$, $j^\mu_\perp = O(\delta)$
- しかし 上式より $\nabla \cdot s = O(\delta^2)$

$\Rightarrow$ そもそも $O(\delta^2)$ を無視した s^μ で得た $\nabla \cdot s = O(\delta^2)$ から物理的な結論は導けない

- overdetermined? 系　Instability　(Hiscock & Lindblom '85)
- LL-frame だと（偶然？）OK

$O(\delta^2)$ まで frame inv. な $s^\mu(n,\epsilon,\cdots)$ @ LL-frame

- $$s^\mu = s_{\rm th}\, u^\mu - \frac{\mu_{\rm th}}{T_{\rm th}}\, j_\perp^\mu - \frac{1}{T_{\rm th}}\left(\alpha_0\, \Pi\, j_\perp^\mu + \alpha_1\, \pi^{\mu\lambda}\, j_{\perp\lambda}\right)$$
$$-\frac{u^\mu}{2\, T_{\rm th}}\left(\beta_0\, \Pi^2 + \beta_1\, j_\perp \cdot j_\perp + \beta_2\, \pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}\right)$$
$$-\frac{1}{T_{\rm th}\,(\epsilon + p_{\rm th})}\left(\pi^{\mu\lambda}\, P_{\perp,\lambda} + \Pi\, P_\perp^\mu + \frac{u^\mu}{2}\, P_\perp \cdot P_\perp\right)$$
- **新現象論的パラメータ** $\alpha_{0,1}$: cross term $\beta_{0,1,2}$: 2 乗

- $$\nabla_\mu s^\mu = -\frac{\pi_{\mu\nu}}{T_{\rm th}}\left(\sigma^{\mu\nu} + \beta_2\, \nabla_u\, \pi^{\mu\nu} + \alpha_1\, \nabla^\mu j_\perp^\nu\right)$$
$$-\frac{\Pi}{T_{\rm th}}\left(\theta + \beta_0\, \nabla_u\, \Pi + \alpha_0\, \nabla \cdot j_\perp\right)$$
$$-\frac{j_\perp^\mu}{T_{\rm th}}\left(T_{\rm th}\, D_\mu\, \frac{\mu_{\rm th}}{T_{\rm th}} + \beta_1\, \nabla_u\, j_{\perp,\mu} + \alpha_0\, \nabla_\mu \Pi + \alpha_1\, \nabla^\nu \pi_{\mu\nu}\right)$$

2 次流体力学〜現象論
Israel-Stewart 理論 (9/9)

構成方程式　〜 一様な熱平衡状態からの展開

- $\tau_\pi {}^{\langle}\nabla_u \pi^{\mu\nu\rangle} + \pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\left(\sigma^{\mu\nu} + \alpha_1\, D^{\langle\mu} j_\perp^{\nu\rangle}\right)$
- $\tau_\Pi\, \nabla_u \Pi + \Pi = -\zeta\left(\theta + \alpha_0\, \nabla\cdot j_\perp\right)$
- $\tau_\nu\, h^\mu_\nu\, \nabla_u\, j^\nu_\perp + j^\mu_\perp$
$$= -\mathcal{D}\left[T_{\text{th}}\, D^\mu \frac{\mu_{\text{th}}}{T_{\text{th}}} + \alpha_0\, D^\mu\, \Pi + \alpha_1\,\left(D_\nu\, \pi^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}\, a_\nu\right)\right]$$
  - $\tau_\nu := \mathcal{D}\,\beta_1,\qquad \tau_\Pi := \zeta\,\beta_0,\qquad \tau_\pi := 2\,\eta\,\beta_2$

- τ_* によって“流れ”に緩和
  - 相対論的因果律 OK　　安定性 OK　　(Hiscock & Lindblom ’83)
- 得られた構成方程式は $\nabla\cdot s \geq 0$ の十分条件だが 必要ではない

eg) $j^\mu_\perp\, \Omega_{[\mu\nu]}\, j^\nu_\perp = \pi_{\mu\lambda}\, \Omega^{[\mu\nu]}\, \pi_\nu{}^\lambda = 0$

$\longrightarrow$ 構成方程式に存在したとしても $\nabla\cdot s$ に効かない項は見えない

組織的な構成方程式のつくり方 (BRS^3) $k = (\omega, \vec{q}\,)$

◎ **流体近似は微分展開** ← **展開** para.： $\epsilon := |\vec{q}|\, l_{\mathrm{mfp}} \ll 1$

$\Rightarrow$ $\vec{J} = -c_1 \vec{\nabla} n + c_2 \vec{\nabla} \triangle n + O(\epsilon^5)$ **輸送係数**： c_1, c_2

よって $0 = \partial_t n - c_1 \triangle n + c_2 \triangle^2 n + O(\epsilon^6)$

$$= \partial_t n - c_1 \triangle n + (c_2/c_1^2)\, \partial_t^2 n + O(\epsilon^6)$$

- $c_1 = D$, $c_2 = \tau_J\, D^2$
- **この方程式も前と同じ有限の伝播速度** $v = \sqrt{D/\tau_J}$ **をもつ**
- **構成方程式は微分展開で** 3rd order $J = c_1\, \partial + c_2\, \partial^3$ **相当**

- **時間微分での展開も保存則経由で取り込まれている**

2 次流体力学〜現象論
微分展開としての 1 次流体力学

★ **流体力学@** LL-frame　　　　(**空間次元：** d)

- hydro. modes： $\varepsilon := T^{uu}$　　$u^\mu \leftrightarrow P^\mu_\perp = 0$　　$\rightarrow$　(d + 1) **コ**
  - $0 = P^\mu_\perp := h^\mu_\nu\, P^\nu$　　$(P^\mu := -T^{\mu\nu}u_\nu \quad h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu)$
- **保存則：** $0 = \nabla_\nu T^{\mu\nu}$　　$\rightarrow$　(d + 1) **コ**
- **構成方程式：** $h^\mu_\rho\, T^{\rho\sigma}\, h^\nu_\sigma$ **を** hydro. modes **で表現** (**微分含む**) **できれば**

  $\Rightarrow$ **閉じた方程式系**

微分展開としての Navier-Stokes @ LL-frame　(**空間次元：** d)

- 0th order： ideal　$T^{\mu\nu} = \varepsilon\, u^\mu u^\nu + p_{\mathrm{th}}\, h^{\mu\nu}$　　$O(\partial^0)$
- 1st order： NS　$T^{\mu\nu} =: \varepsilon\, u^\mu u^\nu + p_{\mathrm{th}}\, h^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}$　　$(\Pi^{\mu\nu}u_\nu = 0)$
  - $\Pi^{\mu\nu} = -2\,\eta(\varepsilon)\,\sigma^{\mu\nu} - \zeta(\varepsilon)\,h^{\mu\nu}\,(\nabla\cdot u)$　　$O(\partial^1)$
  - shear vis.： η,　　bulk vis.： ζ

2 次流体力学〜現象論

微分展開としての 2 次流体力学： conformal fluid

- conformal transform： $g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\omega(x)} g_{\mu\nu}$
  - $u^\mu \to e^\omega u^\mu$ $\qquad \sigma^{\mu\nu} \to e^{3\omega} \sigma^{\mu\nu}$

★ conformal fluid $\qquad$ conf. tr. で action inv.

- $\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \delta S / \delta\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad$ traceless： $T^\mu_\mu = 0$

  $\Rightarrow P(\varepsilon) = \varepsilon/\mathrm{d} \qquad \zeta = 0$
- $\sqrt{-g}\, T_\mu{}^\nu[g] = \sqrt{-\tilde{g}}\, T_\mu{}^\nu[\tilde{g}] \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu} \to e^{(\mathrm{d}+3)\omega} T^{\mu\nu}$

  $\Rightarrow \quad \varepsilon \to e^{(\mathrm{d}+1)\omega} \varepsilon \quad (T \to e^\omega T) \qquad \eta \to e^{\mathrm{d}\omega} \eta$

- conf. fluid の 2nd order hydro. をつくる指針

  $\Pi^{\mu\nu} = -2\, \eta\, \sigma^{\mu\nu} + (\text{2nd order})$
  - covariance $\quad \varepsilon$ (or T), $u \qquad \partial\varepsilon,\ \partial u \sim \sigma,\ \Omega \qquad \partial^2\varepsilon,\ R \sim \partial^2 g$
  - conformal covariance

$\Rightarrow$ 独立な 5 セット@ 2nd： $\sigma\sigma, \quad \sigma\Omega, \quad \Omega\Omega, \quad (u\cdot\nabla)\sigma, \quad R$

微分展開としての 2 次流体力学： conformal fluid（続き）

$$T^{\mu\nu} =: \varepsilon\, u^\mu u^\nu + p_{\mathrm{th}}\, h^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \qquad (h^{\mu\nu} u_\nu = \Pi^{\mu\nu} u_\nu = 0)$$

⋆ 2nd order：

$$\Pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} + 2\,\eta\,\tau_\Pi \left[\langle \nabla_u\, \sigma^{\mu\nu} \rangle + \frac{1}{\mathrm{d}}\, \sigma^{\mu\nu} (\nabla \cdot u) \right]$$

$$+ 2\,\lambda_2\, \sigma^{\langle\mu}{}_\lambda \Omega^{\nu\rangle\lambda} + 4\,\lambda_1\, \sigma^{\langle\mu}{}_\lambda \sigma^{\nu\rangle\lambda}$$

$$+ \lambda_3\, \Omega^{\langle\mu}{}_\lambda \Omega^{\nu\rangle\lambda} + \kappa \left[R^{\langle\mu\nu\rangle} - (\mathrm{d}-1) u_\alpha R^{\alpha\langle\mu\nu\rangle\beta} u_\beta \right]$$

$$\Leftrightarrow\ \Pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} - \tau_\Pi \left[\langle \nabla_u\, \Pi^{\mu\nu} \rangle + \frac{\mathrm{d}+1}{\mathrm{d}}\, \Pi^{\mu\nu} (\nabla \cdot u) \right]$$

$$- \frac{\lambda_2}{\eta}\, \Pi^{\langle\mu}{}_\lambda \Omega^{\nu\rangle\lambda} + \frac{\lambda_1}{\eta^2}\, \Pi^{\langle\mu}{}_\lambda \Pi^{\nu\rangle\lambda}$$

$$+ \lambda_3\, \Omega^{\langle\mu}{}_\lambda \Omega^{\nu\rangle\lambda} + \kappa \left[R^{\langle\mu\nu\rangle} - (\mathrm{d}-1) u_\alpha R^{\alpha\langle\mu\nu\rangle\beta} u_\beta \right]$$

IS 型

目次

ゲージ／重力対応による輸送係数の評価

BRS[3]： 0712.2451

- 2nd order conf. fluid **の輸送係数**
  - 1st order： η
  - 2nd order： τ_Π, λ_1, λ_2, λ_3, κ

★ **空間微分展開** 2 **次までの** $T^{\mu\nu}$ **の計量に対する応答**

- tensor pert.： $\delta g_{xy} \neq 0$, **その他ゼロ** $(\delta u^\mu = 0, \cdots)$
- $$\delta T^{xy} = -p_{\text{th}}\,\delta g_{xy} - \eta\,\partial_t \delta g_{xy} + \eta\,\tau_\Pi\,\partial_t^2 \delta g_{xy} - \frac{\kappa}{2}\left[(\mathrm{d}-2)\,\partial_t^2 \delta g_{xy} + \partial_z^2 \delta g_{xy}\right]$$

$$\Rightarrow\ \delta T^{xy} = -\left[p_{\text{th}} - i\,\omega\,\eta + \omega^2\left\{\eta\,\tau_\Pi - \frac{\kappa}{2}(\mathrm{d}-2)\right\} - \frac{\kappa}{2}\,q^2\right]\delta g_{xy}$$

★ BRS[3]： **有限温度** SYM_4 $(\mathrm{d}=3)$ $\Leftrightarrow$ SAdS_5

- **ゲージ／重力対応で** δg_{xy} **に対する** δT^{xy} **の応答を評価**

  $\Rightarrow$ τ_Π, κ **が得られる**（もちろん P, η も）

ゲージ／重力対応による輸送係数の評価

BRS^3： 0712.2451

★ BRS^3： **有限温度** SYM$_4$ (d $= 3$) $\Leftrightarrow$ SAdS$_5$

- $$\delta T^{xy} = -\left[p_{\rm th} - i\,\omega\,\eta + \omega^2\left(\eta\,\tau_\Pi - \frac{3\,\kappa}{2}\right) - \frac{\kappa}{2}\,q^2\right]\delta g_{xy}$$

ゲージ／重力対応による結果

- $$\delta T^{xy} = -\frac{\pi^2 N^2 T^4}{8}\left[1 - \frac{i\,\omega}{\pi\,T} + \omega^2\,\frac{1-\ln 2}{2\pi^2\,T^2} - \frac{q^2}{2\pi^2\,T^2}\right]\delta g_{xy}$$

$\Rightarrow$ $p_{\rm th} = \pi^2 N^2 T^4/8$ $\qquad$ $\eta = \pi N^2 T^3/8$

$\kappa = N^2 T^2/8 = \eta/\pi T \neq 0$ $\qquad$ $\tau_\Pi = (2 - \ln 2)/2\pi T$

- scalar pert.： τ_Π **が寄与** $\to$ tensor pert. **の予言と同じ値**
- Bjorken flow： $\lambda_1 = \eta/2\pi T$

$\Rightarrow$ **曲率依存項** $R^{\langle\mu\nu\rangle} - (\mathrm{d}-1)u_\alpha R^{\alpha\langle\mu\nu\rangle\beta}u_\beta$ **が存在**

ゲージ／重力対応による輸送係数の評価

曲率依存項の意味

$$T^{\mu\nu} =: \varepsilon\, u^\mu u^\nu + p_{\rm th}\, h^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}$$

$$\Pi^{\mu\nu} \supset -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} + \kappa\left[R^{\langle\mu\nu\rangle} - (\mathrm{d}-1)u_\alpha R^{\alpha\langle\mu\nu\rangle\beta}u_\beta\right]$$

- **速度差：** $\sigma_{\mu\nu} = \nabla_{\langle\mu}u_{\nu\rangle}$

  cf) deformation　$0 = \nabla_u\, u^\mu$　$0 = \mathcal{L}_u\,\eta^\mu = u\cdot\eta$

  $$\frac{d\eta^\mu}{d\tau} = \nabla_u\,\eta^\mu = (\nabla^\nu u^\mu)\,\eta_\nu = \left(\sigma^{\mu\nu} - \omega^{\mu\nu} + \frac{\theta}{\mathrm{d}}\,h^{\mu\nu}\right)\eta_\nu$$

- **（外力による）加速度差？：** $\kappa\left[R^{\langle\mu\nu\rangle} - (\mathrm{d}-1)u_\alpha R^{\alpha\langle\mu\nu\rangle\beta}u_\beta\right]$

  cf) geod. deviation　$0 = \nabla_u\, u^\mu$　$0 = \mathcal{L}_u\,\eta^\mu = u\cdot\eta$

  $$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2} = \nabla_u\nabla_u\,\eta^\mu = (u_\alpha R^{\alpha\mu\nu\beta}u_\beta)\,\eta_\nu$$

★ **要は（外力による）加速度差が** stress tensor **に影響する !?　だとすれば . . .**

- **重力に限らない** だろう
- **（外力さえあれば）非相対論的でも現れる** だろう

目次

2 次流体力学〜運動論
運動論的アプローチ

- 1 **粒子** DF $f(x,p)$： 1 **粒子相空間** $(x^\mu,\, p^\nu)$ **上に** N **個の粒子が分布**
  - **不変測度**： $d^{\mathrm{d}+1}x\,|\,g\,|^{\frac{1}{2}} \times d^{\mathrm{d}+1}p\,|\,g\,|^{\frac{1}{2}}$
  - onshell **運動量測度**： $d^{\mathrm{d}}\omega := d^{\mathrm{d}+1}p\,|\,g\,|^{\frac{1}{2}}\ \delta(m^2+p^2)\,\theta(p^0)$

cf) **時空上に** N **個の電荷が分布**： $\rho(t,\vec{x}\,)$ **不変測度**： $d^{\mathrm{d}+1}x\,|\,g\,|^{\frac{1}{2}}$

current： $j^\mu := \rho\, u^\mu$ $\qquad N = \int d\Sigma_\mu\, j^\mu$

- Boltzmann eqn.： 1 **粒子分布関数** $f(x,p)$ **の発展方程式**
  - **相空間上の速度場**： $u^A = (dx^\mu/d\tau,\, dp^\nu/d\tau)$
  - Liouville： $0 = \nabla_A u^A \qquad \leftarrow \qquad dp^\mu/d\tau = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}p^\nu p^\lambda/m$
  - **保存則**： $\mathcal{C} = \nabla_A(f\,u^A) = u^A\partial_A f = (p^\mu/m)\partial_\mu f + \dot{p}^\mu(\partial f/\partial p^\mu)$

- **流体力学**： 1 **粒子分布関数** $f(x,p)$ **が** x, p **間に相関をもつ**
  - **平均速度場が意味をもつ**
  - Boltz. eqn. **を** p **方向に粗視化** $\quad\Rightarrow\quad$ **流体 の** EOM

Boltzmann eqn. & moment eqn.

1 粒子 DF $f(x,p)$　　**不変測度：** $d\omega = d^4p\,|\,g\,|^{\frac{1}{2}}\,\delta(m^2+p^2)\,\theta(p^0)$

- Boltz. eqn： $\mathcal{C}[\,f\,] = p^\mu \mathcal{D}_\mu f := p^\mu \left(\nabla_\mu - p^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dfrac{\partial}{\partial p^\lambda}\right) f$
- moment： $X^{\mu\cdots}(x) := \displaystyle\int d\omega\ p^\mu\, p^{\cdots}\ f(x,p)$
- mom. eqn： $\nabla_\mu X^{\mu\cdots} = \displaystyle\int d\omega\ p^{\cdots}\ \mathcal{C}[f]$　$\Leftarrow$ Boltz. eqn & $\mathcal{D}_\mu p^\nu = 0$
  - $n^\mu = \int d\omega\ p^\mu f \quad \to \quad \nabla_\mu n^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d\omega\ \mathcal{C}[f] = 0$
  - $T^{\mu\nu} = \int d\omega\ p^\mu p^\nu f \quad \to \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d\omega\ p^\nu \mathcal{C}[f] = 0$
  - $X^{\mu\nu\lambda} = \int d\omega\ p^\mu p^\nu p^\lambda f \quad \to \quad \nabla_\mu X^{\mu\nu\lambda} = I^{\nu\lambda} := \int d\omega\, p^\nu p^\lambda \mathcal{C}[f]$

- Boltz. eqn. と moment eqn. **は等価**

2 次流体力学〜運動論

Grad の方法（moment 法）

- 局所静止系として LL-frame を採用．つまり $\Pi^{\mu\nu} := T^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}_{\rm eq}$ として
  - $\Pi^{\mu\nu}\, u_\nu = 0 \qquad \leftarrow \qquad \varepsilon = \varepsilon_{\rm eq} \qquad h^\mu_\rho\, \Pi^{\rho\nu}\, u_\nu = 0$
- $f(x,p) = f_{\rm eq}(\theta)\{1 + \delta f(x,p)\}\,, \qquad \theta := -u(x)\cdot p/T(x)$
  - 局所平衡分布 $f_{\rm eq}$ の温度 $T(x)$ は $\varepsilon = \varepsilon_{\rm eq}$ を満たすように
  - $\Pi^{\mu\nu} = \int d\omega\, p^\mu p^\nu\, f_{\rm eq}(x,p)\, \delta f(x,p)$

moment approximation 〜 δf を $\Pi_{\mu\nu}$ で表現

- $\delta f = f^{(0)}(\theta) + f^{(1)}_\mu(\theta)\, p^\mu + f^{(2)}_{\mu\nu}(\theta)\, p^\mu p^\nu + \cdots \qquad (f^{(2)\,\mu}_\mu = f^{(2)}_{\mu\nu} u^\nu = 0)$

仮定 1： 準熱平衡状態 $|\delta f| \ll 1$ $\quad\rightarrow\quad$ 衝突項や I は δf の 1 次

仮定 2： δf の 3 次以上のモーメントは無視 $\quad\rightarrow\quad$ $f^{(0,1,2)}_{\mu\nu\lambda} \sim 0 \ \cdots$

$\Rightarrow$ eg) 4D-conformal fluid の場合： $\Pi_{\mu\nu}$ 5 成分 $\leftrightarrow$ $f^{(2)}_{\mu\nu}$ 5 成分

- $\delta f \sim T^{-6}(x)\, \Pi_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu + O(\Pi^2) \qquad (f^{(0)} = f^{(1)}_\mu = 0)$

$\Rightarrow\ X^{\mu\nu\lambda} - X^{\mu\nu\lambda}_{\rm eq} \sim T(x)\, \Pi^{(\mu\nu} u^{\lambda)} \qquad \& \qquad I^{\langle\nu\lambda\rangle} \sim T^2(x)\, \Pi^{\nu\lambda}$

2 次流体力学〜運動論

Grad の方法（moment 法）

moment approximation 〜 δf を $\Pi_{\mu\nu}$ で表現

- $\delta f = f^{(0)}(\theta) + f^{(1)}_\mu(\theta)\, p^\mu + f^{(2)}_{\mu\nu}(\theta)\, p^\mu p^\nu + \cdots$ $\quad (f^{(2)\,\mu}_\mu = f^{(2)}_{\mu\nu}\, u^\nu = 0)$

仮定 1： 準熱平衡状態 $|\delta f| \ll 1$ $\quad\rightarrow\quad$ collision term は δf の 1 次

仮定 2： δf の 3 次以上のモーメントは無視 $\quad\rightarrow\quad$ $f^{(3)}_{\mu\nu\lambda} \sim 0 \;\cdots$

$\Rightarrow$ eg) 4D-conformal fluid の場合： $\Pi_{\mu\nu}$ 5 成分 $\leftrightarrow$ $f^{(2)}_{\mu\nu}$ 5 成分

- $\delta f \sim T^{-6}(x)\, \Pi_{\mu\nu}\, p^\mu p^\nu + O(\Pi^2)$ $\quad (f^{(0)} = f^{(1)}_\mu = 0)$

$\Rightarrow$ $X^{\mu\nu\lambda} - X^{\mu\nu\lambda}_{\text{eq}} \sim T(x)\, \Pi^{(\mu\nu} u^{\lambda)}$ $\quad$ & $\quad$ $I^{\langle\nu\lambda\rangle} \sim T^2(x)\, \Pi^{\nu\lambda}$

$\Rightarrow$ $I^{\nu\lambda}(u, T, \Pi) \sim \nabla_\mu\, X^{\mu\nu\lambda}(u, T, \Pi)$ $\quad$ 構成方程式!

- $$\Pi^{\mu\nu} = -2\,\eta\,\sigma^{\mu\nu} - \tau_\Pi \left[{}^\langle \nabla_u \Pi^{\mu\nu\rangle} + \frac{4}{3}\Pi^{\mu\nu}(\nabla\cdot u) \right] + 2\,\tau_\Pi\, \Pi^{\lambda(\mu}\Omega^{\nu)}{}_\lambda + \frac{\lambda_1}{\eta}\,\Pi^{\lambda\langle\mu}\Pi^{\nu\rangle}{}_\lambda + O(\Pi^3)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_2 = -2\,\tau_\Pi\,\eta,$ $\quad\quad$ $\lambda_3 = \kappa = 0$

2 次流体力学〜運動論

Chapman-Enskog 法

⋆ **一般に局所平衡分布 $f_{\rm eq}$ は** Boltz.eqn $p^\mu \mathcal{D}_\mu f = \mathcal{C}[\,f\,]$ **を満たさない**

- $\mathcal{C}[\,f_{\rm eq}\,] = 0$ **だが** $p^\mu \mathcal{D}_\mu f_{\rm eq} \neq 0$
- $0 = \mathcal{C}[\,f_{\rm eq}\,] = p^\mu \mathcal{D}_\mu f_{\rm eq}$ **を満たす状態は真の熱平衡状態**

$\Rightarrow$ ∃ timelike Killing ξ^μ & $T(x) = T_0/|\,\xi(x)\,|$

- Boltz. eqn **の衝突項を簡略化**
  - $p^\mu \mathcal{D}_\mu f := p^\mu \left(\nabla_\mu - p^\nu \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \dfrac{\partial}{\partial p^\lambda}\right) f = \mathcal{C}[\,f\,] \to \dfrac{u \cdot p}{\tau_\Pi}\,(f - f_{\rm eq})$
  - $f(x,p) = f_{\rm eq}(\xi)\big(1 + f_1 + f_2 + \cdots\big)$ $\big(f_n = O(\partial^n)\big)$

$$\Rightarrow \frac{(u\cdot p)\,f_{\rm eq}}{\tau_\Pi}\,(f_1 + f_2 + \cdots) = p^\mu \mathcal{D}_\mu f_{\rm eq} + p^\mu \mathcal{D}_\mu (f_{\rm eq}\, f_1) + \cdots$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{\tau_\Pi}{u\cdot p}\,\frac{f'_{\rm eq}}{f_{\rm eq}}\,p^\mu \mathcal{D}_\mu \theta = \frac{\tau_\Pi}{|\,u\cdot p\,|}\,\frac{f'_{\rm eq}}{f_{\rm eq}}\,p^\mu p^\nu \nabla_\mu \frac{u_\nu}{T}$$

$$f_2 = \frac{\tau_\Pi}{u\cdot p}\,p^\mu \mathcal{D}_\mu f_1 + {f_1}^2$$

$\Rightarrow$ $\Pi_{\mu\nu}$ **に** Ω **を含む項や曲率依存項は現れない（らしい）**

目次

曲率項の微視的導出

なぜ Boltzmann 方程式は曲率依存項を導かないのか？

- Boltzmann eqn は hydro より微視的だがあくまでも有効理論
  - ▶ BBGKY 階層方程式で 3 次以上の相関を無視して導かれる
  - $\Rightarrow$ 得られる衝突項は運動量だけでなく**配位空間についても非局所**
    - ★ 通常局所近似する $\longrightarrow$ Lenard-Balescu 方程式, Landau 方程式
  - ▶ 非局所性をもつ衝突項 $\sim$ 衝突項に高階微分項
  - ▶ Boltz. eqn は衝突項の微分項を無視
  - $\Rightarrow$ $R_{....} \sim \partial^2$ などの高階微分項がいくつか見えなくても不思議はない？

$$\Downarrow$$

構成方程式に現れる曲率依存項を微視的に導くには

- 修正 Boltzmann 方程式から流体方程式を導く
  - ▶ 衝突項に配位空間についての非局所性を反映 　　Jaiswal, etal 1204.3779
- **多体 Hamiltonian から直接, 流体方程式を導く** 　　佐々 1306.4880

曲率項の微視的導出

佐々の方法 〜 Hamiltonian から流体へ (アイディア 1/7)

- N **粒子系相空間：** $\Gamma = (q_A,\ p_A)$ $\quad (A = 1, 2, \cdots, N)$
- $H = \sum_A \left(\frac{p_A^2}{2m} + \Phi_A(q_A) + \frac{1}{2} \sum_{B(\neq A)} V(q_{AB}) \right)$ $\quad (q_{AB} := q_A - q_B)$
- **時間発展：** $\Gamma_t = e^{-t\{H,\cdot\}}\,\Gamma$ $\quad$ **初期状態 Γ から t 経過後の状態**
  - $\Gamma_{t+s} = (\Gamma_t)_s = (\Gamma_s)_t$
- **マクロ量：** $\hat{C}^\alpha = \left(\hat{h},\ \hat{\pi}^i,\ \hat{\rho}\right)$ $\quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4)$
  - $\hat{h}(r\,;\,\Gamma) := \sum_A \delta(r - q_A) \left(\frac{p_A^2}{2m} + \Phi_A(q_A) + \frac{1}{2} \sum_{B(\neq A)} V(q_{AB}) \right)$
  - $\hat{\pi}^i(r\,;\,\Gamma) := \sum_A p_A^i\,\delta(r - q_A)$
  - $\hat{\rho}(r\,;\,\Gamma) := \sum_A m\,\delta(r - q_A)$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 〜 Hamiltonian から流体へ (アイディア 2/7)

- **保存則：** $\partial_t \hat{C}^{\alpha}(r\,;\,\Gamma_t) + \partial_j \hat{J}^{\alpha\, j}(r\,;\,\Gamma_t) = 0$
  - $\hat{J}^{\alpha\, j}$ **は実際に構成可能**

eg) $\hat{J}^{4\, j}(r\,;\,\Gamma) = \hat{\pi}^{j}(r\,;\,\Gamma_t)$

eg) $\hat{J}^{ij}(r\,;\,\Gamma) = \sum_A \left(\frac{p_A^i\, p_A^j}{m} + \delta^{ij}\, \Phi_A(q_A) \right) \delta(r - q_A) + \cdots$

- **期待値：** $A_t(r) := \left\langle\, \hat{A}(r\,;\,\Gamma_t)\, \right\rangle_0 := \int d\Gamma\, P_0(\Gamma)\, \hat{A}(r\,;\,\Gamma_t)$
  - Liouville $\left| \partial\Gamma_t / \partial\Gamma \right| = 1$ **と** $P_t(\Gamma) := P_0(\Gamma_{-t})$ **を用いて**

$$A_t(r) = \left\langle\, \hat{A}(r)\, \right\rangle_t := \int d\Gamma\, P_t(\Gamma)\, \hat{A}(r\,;\,\Gamma)$$

- **目標：** $J_t^{\alpha\, j}(r) = \left\langle\, \hat{J}^{\alpha\, j}(r)\, \right\rangle_t$ **をマクロ量** $C_t^{\alpha}(r)$ **で表す** (微分含む)
  - **期待値の保存則** $\partial_t C_t^{\alpha}(r) + \partial_j J_t^{\alpha\, j}(r) = 0$ **が閉じる** $\longrightarrow$ **流体**

以下では $f \cdot g := \int d^3r\, f(r)\, g(r)$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ～ Hamiltonian から流体へ (アイディア 3/7)

- moving frame： 速度 $u(r)$ で運動する観測者の静止系
  - moving frame で自然に定義される量 $\hat{A}'(\Gamma)$ は次で得られる

$$\hat{A}'(\Gamma) = \hat{A}(\Gamma') \qquad \Gamma = (q_A, p_A) \mapsto \Gamma' = \Big(q_A,\, p_A - m\, u(q_A)\Big)$$

eg) $\hat{\pi}'^{i}(r\,;\Gamma) := \hat{\pi}^{i}(r\,;\Gamma') = \hat{\pi}^{i}(r\,;\Gamma) - \hat{\rho}(r\,;\Gamma)\, u^{i}(r)$

- Landau-Lifshitz frame： $\pi'^{\,i}_{t}(r) = \langle\, \hat{\pi}'^{\,i}(r)\,\rangle_t = 0$
  - LL-frame の速度場 $u^i(r)$ を用いて必ず

$$\pi^i_t = \rho_t\, u^i_t \qquad\qquad J^{ij}_t = J'^{\,ij}_t + \rho_t\, u^i_t\, u^j_t$$

- 期待値の保存則 $\partial_t C^{\alpha}_t(r) + \partial_j J^{\alpha\, j}_t(r) = 0 \;\; (\alpha = 1 \sim 4)$ は
  - $\rho_t\, D_t u^i_t = -\partial_j \left(J^{ij}_t - \rho_t\, u^i_t\, u^j_t \right) = -\partial_j J'^{\,ij}_t$
  - $D_t \rho_t = -\rho_t\, \partial_j u^j_t$

ここで D_t は Lagrange 微分 $D_t := \partial_t + u^j \partial_j$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ～ Hamiltonian から流体へ (アイディア 4/7)

仮定 1 初期分布は Local Gibbs 分布 $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda) = e^{-\Psi(\lambda)-\lambda^\alpha\cdot\hat{C}^\alpha(\Gamma)}$

- $\lambda^\alpha\cdot\hat{C}^\alpha(\Gamma) = \lambda'^\alpha\cdot\hat{C}'^\alpha(\Gamma)$ プライム付きは LL-frame での量
- (局所) 熱平衡状態@ LL-frame $\Leftrightarrow$ $\lambda'^0\sim\beta_{\mathrm{th}},\ \lambda'^4\sim\beta_{\mathrm{th}}\,\mu_{\mathrm{th}},\ \vec{\lambda}'=0$
  Ψ は Mathieu 関数 $\Psi/V\sim\beta\,p_{\mathrm{th}}$

仮定 2 ミクロ vs マクロの階層が存在 $\epsilon := \xi_{\mathrm{micro}}/\xi_{\mathrm{macro}} \ll 1$

$\Rightarrow$ 後の時刻での分布 $P_t(\Gamma)$ も LG 分布が良い近似

$\Downarrow$

- 物理的な C_t^α を再現する LG 分布 $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t)$ を定義
  - つまり $C_t^\alpha(r) = \langle\,\hat{C}^\alpha(r)\,\rangle_t = \langle\,\hat{C}^\alpha(r)\,\rangle_{\lambda_t}^{\mathrm{LG}}$ を満たすよう $\lambda_t^\alpha(r)$ を調節
  - $\langle\ \rangle_\lambda^{\mathrm{LG}}$ は $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda)$ 期待値 $\langle\,\hat{A}(r)\,\rangle_\lambda^{\mathrm{LG}} := \int d\Gamma\,P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda)\,\hat{A}(r\,;\,\Gamma)$
- $P_t(\Gamma) = P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t)\,e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)}$ $\rightarrow$ P_t を LG 分布とズレ $\hat{\Sigma}_t$ で表現
  - $\hat{\Sigma}_t(\Gamma) := \ln P_t(\Gamma)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t) = \ln P_{\mathrm{LG}}(\Gamma_{-t}\,;\,\lambda)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t)$
  - $\langle\,\hat{A}(r)\,\rangle_t = \langle\,\hat{A}(r)\,e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)}\,\rangle_{\lambda_t}^{\mathrm{LG}}$

$\Rightarrow$ LG 分布をもとに理解できるよう恒等的な書換え

曲率項の微視的導出

佐々の方法 〜 Hamiltonian から流体へ (アイディア 5/7)

- 物理的な C_t^α を再現する LG 分布 $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\boldsymbol{\lambda}_t)$ を定義
  - $C_t^\alpha(\boldsymbol{r}) = \langle\, \hat{C}^\alpha(\boldsymbol{r})\,\rangle_t = \langle\, \hat{C}^\alpha(\boldsymbol{r})\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}}$ を満たすよう $\boldsymbol{\lambda}_t^\alpha(\boldsymbol{r})$ を調節
  - $P_t(\Gamma) = P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\boldsymbol{\lambda}_t)\, e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)} \quad \rightarrow \quad P_t$ を LG 分布とズレ $\hat{\Sigma}_t$ で表現

    $\hat{\Sigma}_t(\Gamma) := \ln P_t(\Gamma)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\boldsymbol{\lambda}_t) = \ln P_{\mathrm{LG}}(\Gamma_{-t}\,;\,\lambda)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\boldsymbol{\lambda}_t)$

$\Rightarrow \langle\, \hat{A}(\boldsymbol{r})\,\rangle_t = \langle\, \hat{A}(\boldsymbol{r})\, e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)}\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}}$

- つまり λ_t^α は C_t^α の (汎) 関数なので $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma; \boldsymbol{\lambda}_t)$ も C_t^α の (汎) 関数
  - $\langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}}$ であれば C_t^α で表せる
  - しかし欲しいのは $\langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\,\rangle_t = \langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\, e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)}\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}}$
- 幸いにも $\hat{\Sigma}_t(\Gamma)$ は C_t^α や λ_t^α の微分で表される
  - $\partial C_t^\alpha = \partial \boldsymbol{\lambda}_t^\alpha = O(\epsilon) = \hat{\Sigma}_t \qquad \epsilon := \xi_{\mathrm{micro}}/\xi_{\mathrm{macro}} \ll 1$
  - $\langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\,\rangle_t = \langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}} + \langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\, \hat{\Sigma}_t^{(1)}(\Gamma)\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathrm{LG}} + \cdots$

$\Rightarrow$ ϵ - 展開で $\langle\, \hat{J}_t^{\alpha\,j}(\boldsymbol{r})\,\rangle_t$ を C_t^α とその微分で表現可

曲率項の微視的導出

佐々の方法 〜 Hamiltonian から流体へ (アイディア 6/7)

- 0 次

eg) $$\rho_t\, D_t u_t^i = -\partial_j \left(J_t^{ij} - \rho_t\, u_t^i\, u_t^j \right) = -\partial_j J'^{\,ij}_t$$

$$J'^{\,ij}_{(0)t}(r) = \langle\, \hat{J}'^{\,ij}(r)\, \rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} = \{p_t(r) + \Phi_t(r)\}\delta^{ij}$$

- $$\Phi_t(r) := \langle\, \sum_A \delta(r - q_A)\, \Phi_A(q_A)\, \rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$$
- $$\hat{J}'^{\,ij}(r\,;\Gamma) = \sum_A \left(\frac{p'^{\,i}_A\, p'^{\,j}_A}{m} + \delta^{ij}\, \Phi_A(q_A) \right) \delta(r - q_A) + \frac{1}{2} \sum_{A \neq B} F^i_{AB}(q_{AB})\, (q^j_A - q^j_B)\, D(r\,;q_A, q_B)$$

に対してビリアル定理を適用すると得られる はず . . .

$$\Rightarrow \quad \rho_t\, D_t u_t^i = -\partial_i p_t + F_t^i + O(\epsilon)$$

同様にして $\partial_t h_t + \partial_j J^{0\,j}_t = 0 \qquad J^{0\,j}_t = (h_t + p_t)\, u_t^i + O(\epsilon)$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ～ Hamiltonian から流体へ (アイディア 7/7)

いくつかの有用な関係式

- $0 = (\partial_j \lambda^\alpha) \cdot \langle \hat{j}^{\alpha j} \rangle_\lambda^{\mathrm{LG}}$
- C_t^α は LG 分布 $P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t)$ で再現されるので簡単な関係式を満たす
  - $C_t^\alpha(r) = -\delta\Psi(\lambda)/\delta\lambda^\alpha(r)\,\big|_{\lambda=\lambda_t}$
  - Legendre tr. $\mathcal{S}(C) := \Psi(\lambda) + \lambda^\alpha \cdot C^\alpha$

    $\Rightarrow \quad \lambda_t^\alpha(r) = \delta\mathcal{S}(C)/\delta C^\alpha(r)\,\big|_{C=C_t}$
- $\hat{\Sigma}_t(\Gamma) := \ln P_t(\Gamma)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t) = \ln P_{\mathrm{LG}}(\Gamma_{-t}\,;\,\lambda)/P_{\mathrm{LG}}(\Gamma\,;\,\lambda_t)$

$$= \Psi(\lambda_t) - \Psi(\lambda) + \lambda_t^\alpha \cdot \hat{C}^\alpha(\Gamma) - \lambda^\alpha \cdot \hat{C}^\alpha(\Gamma_{-t})$$

$$= \int_0^t ds\,\frac{d}{ds}\Big[\Psi(\lambda_s) + \lambda_s^\alpha \cdot \hat{C}^\alpha(\Gamma_{s-t})\Big] \qquad \to O(\partial)$$

  - $1 - \langle \hat{\Sigma}_t(\Gamma) \rangle_t \le \langle e^{-\hat{\Sigma}_t(\Gamma)} \rangle_t = \langle e^{-\hat{\Sigma}_t(\Gamma)}\, e^{\hat{\Sigma}_t(\Gamma)} \rangle_{\lambda_t}^{\mathrm{LG}} = 1$

$\Rightarrow \quad 0 \le \langle \hat{\Sigma}_t(\Gamma) \rangle_t = \mathcal{S}(C_t) - \mathcal{S}(C_0)$ 　　2nd law !?

曲率項の微視的導出

佐々の方法 〜 Hamiltonian から流体へ (計算 1/6)

- $\hat{\Sigma}_t$ の書換え (時間微分を空間微分へ)

$$\hat{\Sigma}_t(\Gamma) = \int_0^t ds \left[(\partial_s \lambda_s^\alpha) \cdot \left(\hat{C}^\alpha(\Gamma_{s-t}) + \frac{\delta\Psi}{\delta\lambda_s^\alpha} \right) + \lambda_s^\alpha \cdot \partial_s \hat{C}^\alpha(\Gamma_{s-t}) \right]$$

$$= \int_0^t ds \left[(\partial_s \lambda_s^\alpha) \cdot \delta\hat{C}_s^\alpha + (\partial_j \lambda_s^\alpha) \cdot \delta\hat{J}_s^{\alpha\, j} \right]$$

$$= \int_0^t ds \left[(D_s \lambda_s^\alpha) \cdot \delta\hat{C}_s^\alpha + (\partial_j \lambda_s^\alpha) \cdot \left(\delta\hat{J}_s^{\alpha\, j} - \delta\hat{C}_s^\alpha\, u^j \right) \right] \quad \leftarrow \; O(\partial)$$

  - $\delta\hat{A}_s := \hat{A}(\Gamma_{s-t}) - \langle\, \hat{A} \,\rangle_{\lambda_s}^{\mathrm{LG}}$
  - $\langle\, \delta A_s \,\rangle_t = \langle\, \hat{A}(\Gamma_{s-t}) \,\rangle_t - \langle\, \hat{A} \,\rangle_{\lambda_s}^{\mathrm{LG}} = \langle\, \hat{A} \,\rangle_s - \langle\, \hat{A} \,\rangle_{\lambda_s}^{\mathrm{LG}}$
  - $D_s := \partial_s + u^j \partial_j$

    eg) $\rho_s D_s u^i = -\partial_j J'^{\,ij}_s$ ← 空間微分

    eg) $D_t \rho_t = -\rho_t\, \partial_j u_t^j$ ← 空間微分

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ∼ Hamiltonian から流体へ (計算 2/6)

- $\hat{\Sigma}_t$ の書換え@ LL-frame

$$\hat{\Sigma}_t(\Gamma) = \int_0^t ds \Bigg[(\partial_j \lambda'^0_s) \cdot (\delta \hat{J}'^{\,0\,j}_s - \delta \hat{\Delta}^j_s) + \Big(\partial_i \lambda'^4_s + \lambda'^0_s \frac{\partial_j J'^{\,ij}_s}{\rho_s} \Big) \cdot \delta \hat{\pi}'^{\,i}_s - \lambda'^0_s \Big\{ (\partial_j u_k) \cdot \delta \hat{J}'^{\,jk}_s - \frac{D_s \lambda'^0_s}{\lambda'^0_s} \cdot \delta \hat{h}'_s - \frac{D_s \lambda'^4_s}{\lambda'^0_s} \cdot \delta \hat{\rho}'_s \Big\} \Bigg]$$

- λ'^{α}_s とマクロ量の関係

  h', ρ から熱力学的に導かれる β, μ とゼロ次で一致
  - $\lambda'^0_s = \beta_s + O(\epsilon)$
  - $\lambda'^4_s = -\beta_s\, \mu_s + O(\epsilon) = -\nu_s + O(\epsilon)$
  - $\beta\, p = s_{\mathrm{th}}(h', \rho) - \beta\, h' + \beta\, \mu\, \rho$
  - $J'^{\,ij}(r) = \{ p(r) + \Phi(r) \}\, \delta^{ij} + O(\epsilon) \qquad \Phi(r) := \langle \sum_A \delta(r - q_A)\, \Phi_A(q_A) \rangle$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ～ Hamiltonian から流体へ (計算 3/6)

★ $O(\epsilon)$ までの $\hat{\Sigma}_t$

- $$\hat{\Sigma}_t(\Gamma) = \int_0^t ds \left[(\partial_k \beta_s)\cdot \delta \hat{q}_s^k - \{\beta_s\,(\partial_k u_s^\ell)\}\cdot \hat{\tau}_s^{k\ell} + \frac{\beta_s}{\rho_s}(\partial_k \Phi_s)\cdot \delta \hat{\pi}'^{\,k}_s \right] + O(\epsilon^2)$$
    - $$\hat{q}^k := \hat{J}'^{\,0\,k} - \frac{h'+p}{\rho}\,\hat{\pi}'^{\,k} - \hat{\Delta}^k$$
    - $$\hat{\tau}^{k\ell} := \delta \hat{J}'^{\,k\ell} - \delta^{k\ell}\left(\frac{\partial p}{\partial h'}\,\delta \hat{h}' + \frac{\partial p}{\partial \rho}\,\delta \hat{\rho}'\right)$$
    - $$\langle\, \hat{\tau}_s^{k\ell} \,\rangle_t = \langle\, \delta \hat{J}'^{\,k\ell}_s \,\rangle_t - \delta^{k\ell}\left(\frac{\partial p}{\partial h'}\langle\, \delta \hat{h}'_s \,\rangle_t + \frac{\partial p}{\partial \rho}\langle\, \delta \hat{\rho}'_s \,\rangle_t\right) = \langle\, \hat{J}'^{\,k\ell} \,\rangle_s - \langle\, \hat{J}'^{\,k\ell} \,\rangle^{\mathsf{LG}}_{\lambda_s}$$

$\Rightarrow$ $\langle\, \hat{J}'^{\,k\ell} \,\rangle_t$ の LG 期待値からのズレは $\langle\, \hat{\tau}^{\,k\ell} \,\rangle_t$ を評価すればよい

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ∼ Hamiltonian から流体へ (計算 4/6)

⋆ 1 次まで

eg) $\rho_t\, D_t u_t^i = -\partial_j J_t'^{\,ij} = -\partial_j J_{(0)t}'^{\,ij} - \partial_j J_{(1)t}'^{\,ij}$

- $J_{(0)t}'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) = \langle\, \hat{J}'^{\,ij}(\boldsymbol{r})\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathsf{LG}} = \{p_t(\boldsymbol{r}) + \Phi_t(\boldsymbol{r})\}\delta^{ij}$
- $J_t'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) - J_{(0)t}'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) = \langle\, \hat{\tau}^{\,ij}(\boldsymbol{r})\,\rangle_t = \langle\, \hat{\tau}^{\,ij}(\boldsymbol{r})\, e^{\hat{\Sigma}_t}\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathsf{LG}}$ (full order)

- $J_{(1)t}'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) = \tau_{(1)t}^{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle\, \hat{\tau}^{\,ij}(\boldsymbol{r})\, \hat{\Sigma}_t^{(1)}(\boldsymbol{\Gamma})\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathsf{LG}}$
  - $\hat{\Sigma}_t^{(1)}(\boldsymbol{\Gamma}) = \int_0^t ds \left[(\partial_k \beta_s)\cdot \delta\hat{q}_s^k - \{\beta_s\,(\partial_k u_s^\ell)\}\cdot \hat{\tau}_s{}^{k\ell} + \cdots \right]$

- $J_{(1)t}'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) \supset -\int_0^t ds \int d\boldsymbol{r}'\, \{\beta_s(\boldsymbol{r}')\,\partial_k u_s^\ell(\boldsymbol{r}')\}\, \langle\, \hat{\tau}^{\,ij}(\boldsymbol{r})\, \hat{\tau}_s{}^{k\ell}(\boldsymbol{r}')\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathsf{LG}}$

$$\sim -\{\beta_t(\boldsymbol{r})\,\partial_k u_t^\ell(\boldsymbol{r})\} \int_0^t ds \int d\boldsymbol{r}'\, \langle\, \hat{\tau}^{\,ij}(\boldsymbol{r})\, \hat{\tau}_s{}^{k\ell}(\boldsymbol{r}')\,\rangle_{\boldsymbol{\lambda}_t}^{\mathsf{LG}}$$

$\Rightarrow\ J_{(1)t}'^{\,ij}(\boldsymbol{r}) \sim -2\,\eta\,\sigma_t^{ij} - \left(\zeta - 2\,\eta/3\right)\delta^{ij}\,\theta_t$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ～ Hamiltonian から流体へ (計算 5/6)

- $\hat{\Sigma}_t$ **の書換え@** LL-frame (**その** 2)

$$\hat{\Sigma}_t(\Gamma) = \int_0^t ds \Big[(\partial_j \lambda'^0_s) \cdot \delta\hat{q}^j_s - (\lambda'^0_s \, \partial_j u_k) \cdot \hat{\tau}^{jk}_s + \frac{\beta_s}{\rho_s} \left\{ \frac{\lambda'^0_s}{\beta_s} \partial_j J'^{ij}_s - \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \partial_i \lambda'^0_s - \frac{\partial p}{\partial(\beta\mu)} \partial_i \lambda'^4_s \right) \right\} \cdot \delta\hat{\pi}'^i_s + \left\{ D_s \lambda'^0_s - \lambda'^0_s (\partial \cdot u_s) \frac{\partial p}{\partial h'} \right\} \cdot \delta\hat{h}'_s + \left\{ D_s \lambda'^4_s - \lambda'^0_s (\partial \cdot u_s) \frac{\partial p}{\partial \rho} \right\} \cdot \delta\hat{\rho}'_s \Big]$$

  - $\hat{q}^j := \hat{J}'^{0j} - \dfrac{h' + p}{\rho} \hat{\pi}'^j - \hat{\Delta}^j$
  - $\hat{\tau}^{ij} := \delta \hat{J}'^{ij} - \delta^{ij} \left(\dfrac{\partial p}{\partial h'} \delta\hat{h}' + \dfrac{\partial p}{\partial \rho} \delta\hat{\rho}' \right)$

曲率項の微視的導出

佐々の方法 ∼ Hamiltonian から流体へ (計算 6/6)

⋆ 2 次まで

- $J'^{ij}_{(2)t}(r) = \langle\, \hat\tau^{ij}(r)\,\{\hat\Sigma^{(2)}_t(\Gamma) + \big(\hat\Sigma^{(1)}_t(\Gamma)\big)^2/2\}\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$
- $\hat\Sigma^{(1)}_t(\Gamma) = \int_0^t ds\left[(\partial_k\beta_s)\cdot\delta\hat q^k_s - \beta_s\,(\partial_k u^\ell_s)\cdot\hat\tau^{k\ell}_s + \frac{\beta_s}{\rho_s}\,\partial_k\Phi_s\cdot\delta\hat\pi'^k_s\right]$
  - $\hat\Sigma^{(1)}_t$ には力 $\partial\Phi$ のみ $\rightarrow$ 加速度差 $\partial^2\Phi$ が出るなら $\hat\Sigma^{(2)}_t$ から
  - $J'^{ij}_{(1)t} \sim (\mathrm{NS}) + \frac{\beta_t}{\rho_t}\,\partial_k\Phi_t\int_0^t ds\,dr'\,\langle\,\hat\tau^{ij}(r)\,\delta\hat\pi'^k_s(r')\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$
  - $\hat\Sigma_t(\Gamma) \supset \int_0^t ds\,\left(\frac{\lambda'^0_s}{\rho_s}\,\partial_\ell J'^{k\ell}_s\right)\cdot\delta\hat\pi'^k_s$
- $\hat\Sigma^{(2)}_t(\Gamma) \supset \int_0^t ds\,\left(\frac{\beta_s}{\rho_s}\,\partial_\ell J'^{k\ell}_{(1)s}\right)\cdot\delta\hat\pi'^i_s + \left(\frac{\beta^{(1)}_s}{\rho_s}\,\partial_\ell J'^{k\ell}_{(0)s}\right)\cdot\delta\hat\pi'^k_s$
- $J'^{ij}_{(2)t}(r) \supset \langle\,\hat\tau^{ij}(r)\,\hat\Sigma^{(2)}_t(\Gamma)\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t} \sim \left(\frac{\beta_t}{\rho_t}\,\partial_\ell J'^{k\ell}_{(1)t}\right)\int_0^t ds\,dr'\,\langle\,\hat\tau^{ij}\delta\hat\pi'^k_s\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}$

  $\sim \langle\,\hat\tau^{ij}\delta\hat\pi'^k_s\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}\,\langle\,\hat\tau^{k\ell}\,\delta\hat\pi'^m_s\,\rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda_t}\,(\partial_\ell\partial_m\Phi_t) \quad \leftarrow \quad$ 潮汐力が寄与？

目次

まとめと今後

相対論的因果律を満たす散逸流体力学の問題点

- Israel-Stewart 理論 非平衡エントロピーから流体力学を導く
- BRS^3 微分展開として流体力学を整理 (BRS^3 $\supset$ IS)
- ゲージ／重力対応は IS に現れない項の存在を予言（特に曲率依存項）
- Boltzmann eqn は曲率依存項を導かない ($\because$ 既に低階微分の有効理論)

曲率依存項の微視的導出に向けて

- 修正 Boltzmann 方程式 衝突項に配位空間の非局所性を反映
- 多体 Hamiltonian から直接，流体方程式を導く佐々の方法

  Q. J^{ij} に加速度差 $\sim$ 曲率依存項が現れるか？ cf) 速度差 $\sim$ ずり粘性

  A. 外力による加速度差は J^{ij} に寄与する @ Newtonian かも ...

  ただし $\langle \hat{\tau}^{ij} \delta \hat{\pi}'^{k}_{s} \rangle^{\mathrm{LG}}_{\lambda} \neq 0$ なら $\longrightarrow$ ちょっと厳しい？ 全体通して要チェック

今後

- 曲った時空へ相対論的拡張
  - formal な部分は出来ている．あとはミクロ／マクロ展開をするだけ

Appendix

ゼロ温度 AdS/CFT 対応

(d + 1)-dim. sQFT	$\Longleftrightarrow$	(d + 2)-dim. AdS 重力
AdS flat bdy 上 $(u = 0)$	$\longleftrightarrow$	$ds^2_{d+2} = \frac{L^2}{u^2}(-dt^2 + dx^2_d + du^2)$
eg) $\mathcal{N} = 4$ SYM$_4$	$\Longleftrightarrow$	5-dim. AdS（古典）重力
g^2_{YM}	$\longleftrightarrow$	$g_s \ll 1$
$\lambda := g^2_{\mathrm{YM}} N$	$\longleftrightarrow$	$(L/l_s)^4 \gg 1$

- 強結合 $(\lambda \gg 1)$ の量子物理を古典重力 $(l_s/L \ll 1)$ で解析
- $(\mathcal{N} = 4)$ SYM$_4 \neq$ QCD だが定量的にも有用な知見が得られている
  - 閉じ込め　　グルーオン放射問題

$\Rightarrow$ 一種の可解模型的な役割

- この対応はまだ証明されていないが，この予想の背景には超弦理論のある配位 (D-brane) の性質がある．
  それを仲介して sQFT$_{d+1}$ と AdS$_{d+2}$ 重力 との対応が付けられる

ゲージ／重力対応 ⊃ 有限温度 AdS/CFT 対応

$(\mathrm{d}+1)$-dim. sQFT	$\Longleftrightarrow$	$(\mathrm{d}+2)$-dim. AdS BH
AdS flat bdy 上 $(u=0)$	$\longleftrightarrow$	$ds^2_{\mathrm{d}+2} = \frac{L^2}{u^2}\left(-f dt^2 + dx_{\mathrm{d}}^2 + \frac{du^2}{f(u)}\right)$
eg) $\mathcal{N}=4$ SYM_4	$\Longleftrightarrow$	5-dim. AdS（古典）BH
g^2_{YM}	$\longleftrightarrow$	$g_s \ll 1$
$\lambda := g^2_{\mathrm{YM}} N$	$\longleftrightarrow$	$(L/l_s)^4 \gg 1$
T	$\longleftrightarrow$	T_{BH}
s	$\longleftrightarrow$	S_{BH}/V
ρ	$\longleftrightarrow$	Q_{BH}/V

- $(\mathcal{N}=4)$ $\mathrm{SYM}_4 \neq$ QCD だが定量的にも有用な知見が得られている
  - viscosity bound $(\eta/s \geq \hbar/4\pi k_{\mathrm{B}})$
  - expanding plasma（熱化過程） Jet quenching J/Ψ 抑制
- 特に動的過程に強い

ゲージ／重力対応（拡大解釈版）

(d + 1)-dim. sQFT	$\Longleftrightarrow$	(d + 2)-dim. AdS BH $+\,\alpha$
?	$\Longleftrightarrow$	5-dim. AdS（古典）BH $+\,\alpha$
?	$\longleftrightarrow$	$g_s \ll 1$
?	$\longleftrightarrow$	$(L/l_s)^4 \gg 1$
T	$\longleftrightarrow$	T_{BH}
s	$\longleftrightarrow$	S_{BH}/V
μ	$\longleftrightarrow$	Φ_{BH}
ρ	$\longleftrightarrow$	Q_{BH}/V

- **拡大解釈版は** ctrl para.(eg. μ) **や可観測量** (eg. ρ) **は分かるが背後の理論** (Lagrangian, Hamiltonian) **は不明**

$\Rightarrow$ **“新規材料”** $\Leftrightarrow$ AdS BH $+\alpha$

“新規材料” の実験測定 $\Leftrightarrow$ AdS BH $+\alpha$ **の解析**

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(old) membrane paradigm

拡大解釈版のゲージ／重力対応は何だか怪しげ
しかし, BH を何かの "物質" と解釈する考えには歴史がある

- BH membrane paradigm $\longrightarrow$ (old) membrane paradigm
  - **拡大解釈版ゲージ／重力対応** $\rightarrow$ (new) membrane paradigm？

Black Hole Membrane Paradigm ～ 漸近 obs. から見た BH の特徴

- **無限遠の** obs. **による** BH **の表現**
- **境界条件** (horizon **の** "**一方通行性**") **が** "**物性**" **を導く**
  - **無限の重力赤方偏移**
  - horizon ingoing = horizon regularity for FF obs.

$\Rightarrow$ **普遍的性質**

- membrane **の** electric conductivity： $\sigma_{\rm mem} = 1/g_{\rm eff}^2$
- membrane **の** (shear viscosity)/(entropy density)： $\eta/s = 1/4\pi$
- **物理解釈上の難点**： (energy density) < 0, (bulk viscosity) < 0
- membrane **の応答が局所的**

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(old) black hole membrane paradigm

eg) **静電ポテンシャルの鏡像法** $\quad S = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[(\nabla\phi)^2/2 - \rho\phi\right]$

★ **全域の静電ポテンシャル問題を $x > 0$ だけで考えたい**

$$S_> := \int_{x>0}(\cdots) \quad \Rightarrow \quad \delta S_> = -\int_{x=0+} dydz\ \delta\phi\,\partial_x\phi + (\mathrm{EOM})$$

- $0 = \delta S_> \;\not\Rightarrow\; \triangle\phi = -\rho \qquad \because\ \delta\phi\big|_{x=0+} = 0$ **は課されていない**

$\Rightarrow$ surf. action S_{surf} **を加えた** $\bar{S}_> := S_> + S_{\mathrm{surf}}$ **の変分問題にしてクリア**

- $\delta S_{\mathrm{surf}} = +\int_{x=0+} dydz\,\delta\phi\,\partial_x\phi$ **を要請** $\leftarrow$ **表面項を打ち消す**
- **一方** $\delta S_{\mathrm{surf}} =: -\int_{x=0+} dydz\ \delta\phi\,\sigma \leftarrow$ **面電荷密度の定義**

$\Rightarrow \triangle\phi = -\rho, \qquad \sigma = -\partial_x\phi$

- σ **は $x = 0$ を通過する電気力線を湧き出す（吸い込む）面電荷密度**

$\Rightarrow$ **全域の問題を部分領域のみで扱うと境界にモノがあるように見える**

(old) black hole membrane paradigm

一般的手続き：　外部領域 (ext) & boundary $\mathcal{S}$ (= membrane)

- **考えたい外部問題**　S_{ext}
  - $\delta S_{\text{ext}} = (\text{EOM}) + \delta S_{\text{ext}}\,|_{\mathcal{S}} + \cdots$
- $S_{\text{ext}} \quad \to \quad \bar{S}_{\text{ext}} := S_{\text{ext}} + S_{\text{mem}}$
  - $\delta \bar{S}_{\text{ext}} = (\text{EOM})$ **としたい**

$\Rightarrow$ $\delta S_{\text{mem}} := -\delta S_{\text{ext}}\,|_{\mathcal{S}}$

- $\delta S_{\text{ext}}\,|_{\mathcal{S}} =$ (Hamilton-Jacobi **の表面項**) = (**運動量**) $\times$ δ(**表面配位**)

★ $\delta S_{\text{mem}} =$ (**応答**) $\times$ δ(**表面配位**)

$= -$ (**運動量**) $\times$ δ(**表面配位**)

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(old) black hole membrane paradigm

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{F^2}{4g_{\text{eff}}^2} + J^M A_M, \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_N \left(g_{\text{eff}}^{-2} F^{MN} \right) = J^M$$

- $\delta S_{EM,\text{mem}} = -\delta S_{EM,\text{ext}}|_{\mathcal{S}} = -\int_{\mathcal{S}} d\Sigma \; g_{\text{eff}}^{-2} \; n_M F^{MN} \delta A_N$

$\Rightarrow$ $\delta S_{EM,\text{mem}} =: \int_{\mathcal{S}} d\Sigma \; j^\mu \, \delta A_\mu \qquad \Rightarrow \qquad j^\mu = -g_{\text{eff}}^{-2} \; n_M F^{M\mu}$

- **あらゆる場は** horizon in-going **@** horizon **近傍：** $\Phi(t, r) \to \Phi(t + r)$
  - $ds_D^2 = -\alpha^2 dt^2 + dr^2/\alpha^2 + \cdots, \quad n_M = (dr)_M/\alpha \quad d\tau = \alpha dt$
  - $0 \sim \partial_u \Phi \propto (\alpha \, dt - dr/\alpha) \cdot \nabla\Phi \qquad \to \qquad n \cdot \nabla\Phi \sim \partial_\tau \Phi$

  $\Rightarrow$ $j^\mu \sim g_{\text{eff}}^{-2} \, n^M F^\mu{}_M = g_{\text{eff}}^{-2} \, F^\mu{}_\tau \qquad \Rightarrow \qquad \vec{j}_{||} = g_{\text{eff}}^{-2} \, \vec{E}_{||}$

$\Rightarrow$ Ohm's law $\to$ membrane **の** electric conductivity**：** $\sigma_{\text{mem}} = 1/g_{\text{eff}}^2$

★ **一般に** Ohm's law **は非局所：** $\vec{j}(x) = \int dx \; \sigma(x - x') \, \vec{E}(x')$

  - membrane **の（電磁）応答は局所的**

(拡大解釈) ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(old) black hole membrane paradigm

$$S_{\rm ext} = \int d^D X \sqrt{-G}\, \frac{R[G]}{2\,\kappa_0^2} + \int_S d\Sigma\, \frac{K}{\kappa_0^2}, \qquad K_{MN} := g_M{}^L \nabla_L n_N$$

- $\delta S_{\rm mem} = -\delta S_{\rm ext}|_S = \dfrac{1}{2\kappa_0^2} \displaystyle\int_S d\Sigma\, \delta g_{MN} \left(K g^{MN} - K^{MN}\right)$

$\Rightarrow$ $\delta S_{\rm mem} =: \dfrac{1}{2} \displaystyle\int d\Sigma\, t^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \qquad \Rightarrow \qquad t^{\mu\nu} = \dfrac{1}{\kappa_0^2}\left(K\, g^{\mu\nu} - K^{\mu\nu}\right)$

- $K_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}_n g_{\mu\nu} \sim \dfrac{1}{2}(n\cdot\nabla) g_{\mu\nu} \sim -\dfrac{1}{2}(U\cdot\nabla) g_{\mu\nu}$

$\Rightarrow$ $t_{\mu\nu} = \dfrac{1}{\kappa_0^2}\left\{-\theta\, U_\mu U_\nu + \left(g + \dfrac{D-3}{D-2}\,\theta\right)\gamma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\right\}$ (g: U の acc.)

cf) $t_{\mu\nu} = \epsilon\, u_\mu u_\nu + P\,\gamma_{\mu\nu} - 2\,\eta\,\sigma_{\mu\nu} - \zeta\,\theta\,\gamma_{\mu\nu}$

$\Rightarrow$ $\epsilon = -\theta/\kappa_0^2, \qquad P = g/\kappa_0^2, \qquad \eta = 1/2\kappa_0^2, \qquad \zeta = -1/2\kappa_0^2$

$\Rightarrow$ $\eta/s = 1/4\pi$ $\quad\leftarrow\quad$ entropy density $s = S/A = 4\pi/2\kappa_0^2$

- **物理解釈上の難点：** $\epsilon < 0,\ \zeta < 0$
- **力学的応答も局所的**

(拡大解釈) ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

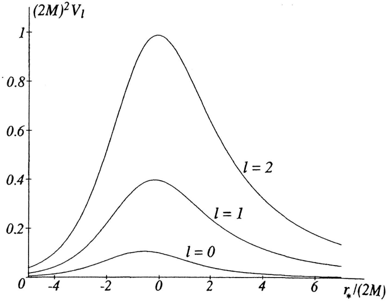
(new) membrane paradigm?

- horizon そのものは無限遠 obs. から見えない

⇒ 無限遠 obs. がアクセスできるところに
BH "物性" があるとした方が良いのでは？

Q. どこに？

A. BH 時空が外部につくるポテンシャル障壁の最も高いところ



(b)

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(new) membrane paradigm?

$$ds_{d+1}^2 = -f(r)\, dt^2 + dr^2/f(r) + r^2\, d\Omega_{d-1}^2$$

scalar field (S-wave)： $0 = (\Box - m^2)\ \Phi$, $\quad \Phi = e^{-i\omega t}\, \phi(r)/r^{(d-1)/2}$

$$\omega^2\, \phi = \left(-\partial_{r_*}^2 + V(r)\right) \phi\,, \qquad r_* := \int \frac{dr}{f}$$

$$V(r) := f\left[m^2 + \frac{d-1}{2\, r^{(d-1)/2}}\, \frac{d}{dr}\left(r^{(d-3)/2} f\right)\right]$$

- potential **の特徴**
  - non-extremal： r_* **に関して急速な立ち上がり** (near $\mathcal{H}$)
  - extremal： r_* **について巾的振る舞い**
  - WKB **透過率**： $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dr_*\, \sqrt{V(r)} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{f}\, \sqrt{V(r)} \sim \int_{r_0} \frac{dr}{\sqrt{f}}$

$$\sim \int_{r_0} dr \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{r-r_0}} & \text{for non-extremal} \\ \dfrac{1}{r-r_0} & \text{for extremal} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ extremal **の方が強い** pot. **障壁**

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(new) membrane paradigm?

ex) 4D RNBH： $f(r) = g(r) = (r - r_+)(r - r_-)/r^2$

$$f(r) = \left(\frac{r_+}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)\left(\frac{r}{r_+} - 1 + \epsilon\right), \qquad \epsilon := 1 - \frac{r_-}{r_+}$$

- near extremal RN ($\epsilon \ll 1$) $\rightarrow$ $\epsilon \ll \frac{r}{r_+} - 1 \ll 1$ を満たす領域が存在

$$\Rightarrow\ ds_4^2 \sim r_+^2 \frac{-dt^2 + du^2}{u^2} + r_+^2\, d\Omega_2^2\,, \qquad \left(u := \frac{r_+^2}{r - r_+}\right) \qquad \mathrm{AdS}_2 \times \mathrm{S}^2$$

ex) 一般の near horizon： $f(r) = g(r)$ ($r = r_0$ @ horizon)

$$f(r) = \frac{r_0^2\, f''(r_0)}{2}\left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\left(\frac{r}{r_0} - 1 + \frac{2\, f'(r_0)}{r_0\, f''(r_0)}\right) + \cdots$$

- near extremal： $\frac{f_0'}{r_0\, f_0''} \ll 1$ $\rightarrow$ $\frac{f_0'}{r_0\, f_0''} \ll \frac{r}{r_0} - 1 \ll 1$

$$\Rightarrow\ ds_D^2 \sim \frac{2}{f_0''}\, \frac{-dt^2 + du^2}{u^2} + r_0^2\, d\Omega_{D-2}^2\,, \qquad \left(u := \frac{2}{r_0^2\, f_0''}\, \frac{r_0^2}{r - r_0}\right)$$

（拡大解釈）ゲージ／重力対応と BH membrane paradigm

(new) membrane paradigm?

- BH membrane paradigm (horizon = null 面)
  - 普遍的性質を有するが 非物理的解釈も要求
  - 真の horizon は漸近 obs. から見えない

⇒ 新たな特徴付けによる BH “物性” はできないか？

漸近的 AdS 〜 BH “物性” の新たな特徴付け

- near extremal BH の “物性” ∼ 漸近的 AdS BH
  - near horizon 領域と平坦な漸近領域との間に AdS 領域をもつ
  - pot. 障壁により これら 2 つの領域は decouple @ low-E
  - 漸近 obs. にとって near horizon 領域の “界面” は AdS 領域

⇒ 漸近 obs. にとって BH “物性” は AdS 領域
（near horizon 領域の “無限遠”）に encode される

⇒ AdS 領域に “membrane” があると思い BH membrane 処方を施せ
（Hamilton-Jacobi 処方を施せ）

(new) membrane paradigm?

具体的な処方箋

- BH "物性" を担う near horizon (AdS 領域) をはじめから扱い
  無限遠 obs. との "界面" となるポテンシャル障壁の頂上
  つまり AdS 領域の無限遠に "物性" 情報があると考える
  - $S_{\text{ext}} = S_{\text{near}\mathcal{H}} + S_{\text{aympt}} + \cancel{S}_{\text{int}} \quad \leftarrow \quad S_{\text{near}\mathcal{H}}$ に near $\mathcal{H}$ の情報
    一般に漸近領域と結合するが near-ext. では near $\mathcal{H}$ **のみ** 抽出可
  - bc @ $\mathcal{H}$ ： horizon in-going for timelike, regular for spacelike
    @ AdS ： (Min.) 漸近領域の obs. が課したい条件 ex) 正準？ 大正準？ …
  - on-shell で $S_{\text{near}\mathcal{H}}$ は bdy data **のみの関数** (bdy $= \mathcal{H} \cup$ [AdS 領域])

$\rightarrow$ $S^{\text{on-shell}}_{\text{near}\mathcal{H}}$ の AdS 側 bdy term に near $\mathcal{H}$ の情報が投影されている

$$j^{\mu}_{\text{mem}} \overset{?}{\sim} \left.\frac{\delta S^{\text{on-shell}}_{\text{near}\mathcal{H}}}{\delta A_{\mu}}\right|_{\text{AdS bdy}}, \qquad T^{\mu\nu}_{\text{mem}} \overset{?}{\sim} \left.\frac{\delta S^{\text{on-shell}}_{\text{near}\mathcal{H}}}{\delta g_{\mu\nu}}\right|_{\text{AdS bdy}} \qquad \cdots \qquad \text{(HJ)}$$

⋆ AdS radius 方向に foliate したときの**正準共役運動量**@ AdS 無限遠
$=$ horizon **物性の** elemag. current, energy-mom. tensor

BH "物性" の読み取り

bulk action： $S_{d+2} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^{d+2}X\,\sqrt{-G}\,\left(R[G] - 2\Lambda - \frac{1}{4}F^2 + \cdots\right)$

- EOM を解く
  - bc @ $\mathcal{H}$： horizon in-going for timelike or regularity for spacelike
  - bc @ AdS bdy： $G_{\mu\nu}(x,u) \sim (L/u)^2\, g_{\mu\nu}(x) + \cdots$

    $A_\mu(x,u) \sim \mathcal{A}_\mu(x) + \cdots$

- on-shell action を評価し
  - $T^{\mu\nu}_{\text{mem}}(x) := \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_D^{\text{on-shell}}}{\delta g_{\mu\nu}(x)}\Big|_{\text{AdS bdy}}$, $j^\mu_{\text{mem}}(x) := \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_D^{\text{on-shell}}}{\delta \mathcal{A}_\mu(x)}\Big|_{\text{AdS bdy}}$
  - もしくは $G_{\mu\nu}$, A_μ の正準共役運動量 $\pi^{\mu\nu}$, π^μ から L/u の巾を適当に換算して求めても良い