# 無限大次元から探る
# 高次元ブラックホール解

鈴木 良拓
（大阪市大 理学研究科）

共同研究者：R. Emparan, 田邉健太朗, 田中貴浩, 白水徹也

関西相対論・宇宙論合同セミナー@YITP、平成26年12月20日

# 高次元ブラックホール

## なぜ高次元重力？

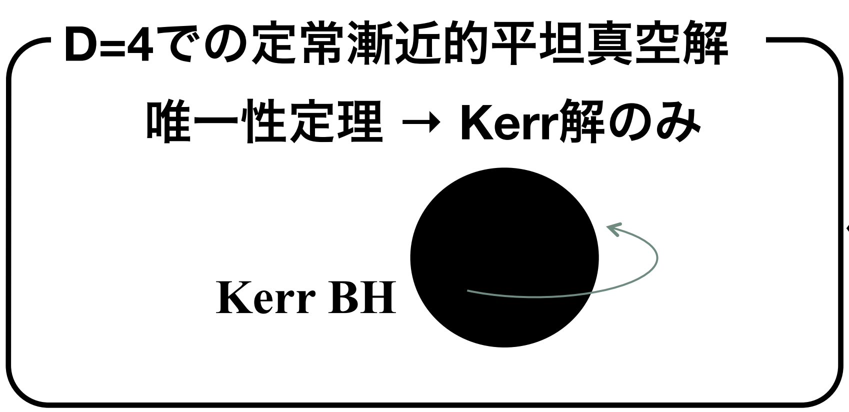
超弦理論による余剰次元の示唆

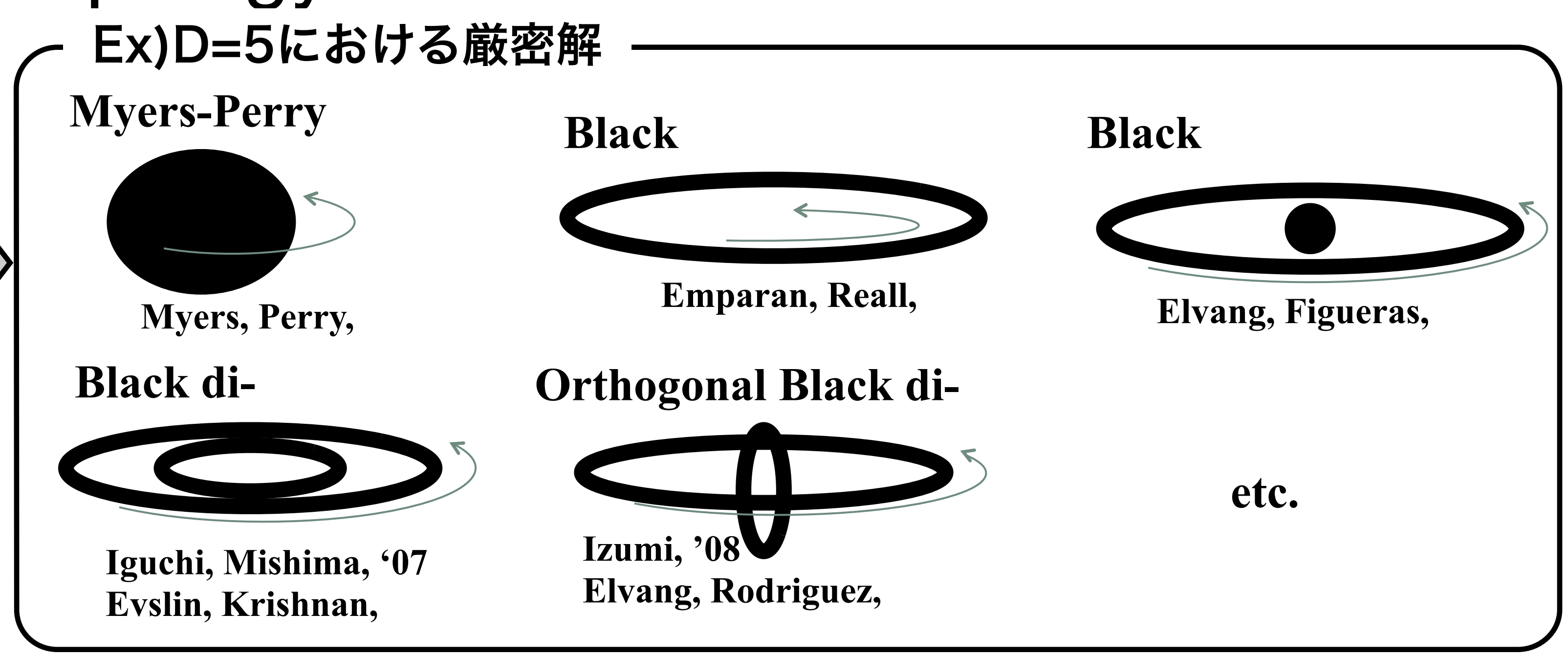
D-brane, Braneworld模型 ⇒ 大きな余剰次元

AdS/CFT対応への応用

## 高次元ブラックホールの多様性

Non-uniqueness, No topology theorem



# 高次元ブラックホール

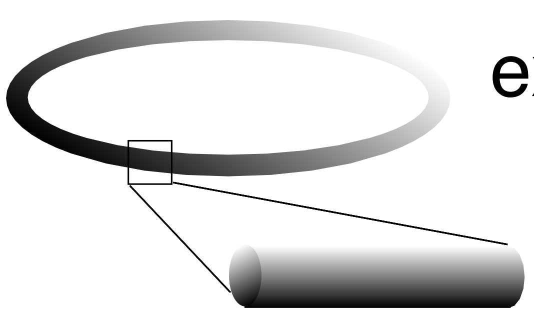
**D>5次元以上では球対称解以外の厳密解は未発見**

**系統的な解析手法が存在しない→ 数値解、近似解**

**有力な近似解法としては**

**Blackfold approach** [Emparan et.al. (2007)]

ホライズン形状のスケールが極端な階層性持つ場合



ex) ブラックリングのthin ring limit

ローカルにはBSで近似

**Black ring, saturn, di-ring, etc.などが構成**

**しかし、一部の解にしか適用できない**

# 高次元におけるBH解

## 近似解

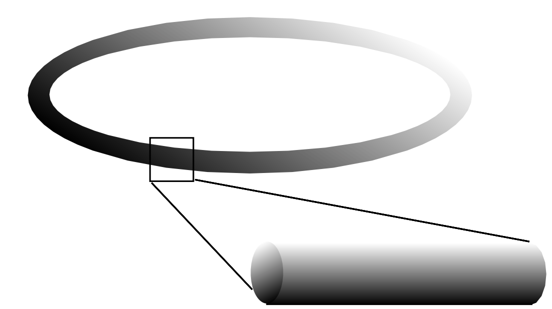
・既知の厳密解からの定常摂動

(一様)Black String解 : Gregory-Laflamme 不安定

⇒ 非一様Black String(NUBS)解

・Blackfold近似：Black Ring in “thin” limit

~ Black Stringを曲げる摂動(dipole)



## 数値解

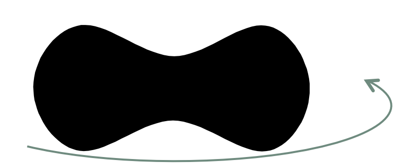
非一様Black String (Wiseman, 2006), ...)

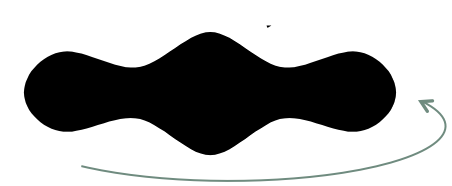
D=6 Black Ring(Kleihaus+,2012)

D=6,7 Lumpy BH (Dias+, 2014)

D=6 Bumpy BH (Emparan+2014)

new!





# Large D 極限

## Vacuum Einstein Eq.

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{or} \quad R_{\mu\nu} = 0$$

**一般に非線形PDE**

→ **まともに解くのは困難。近似が欲しい。**

**動かせる理論パラメータ：Dのみ**

$$S = \int dx^{D} R$$

連続パラメータと
思って極限を取る
$D \to \infty$

$\longrightarrow$ **（D＝∞の理論）＋（1/D 補正）＋・・・**

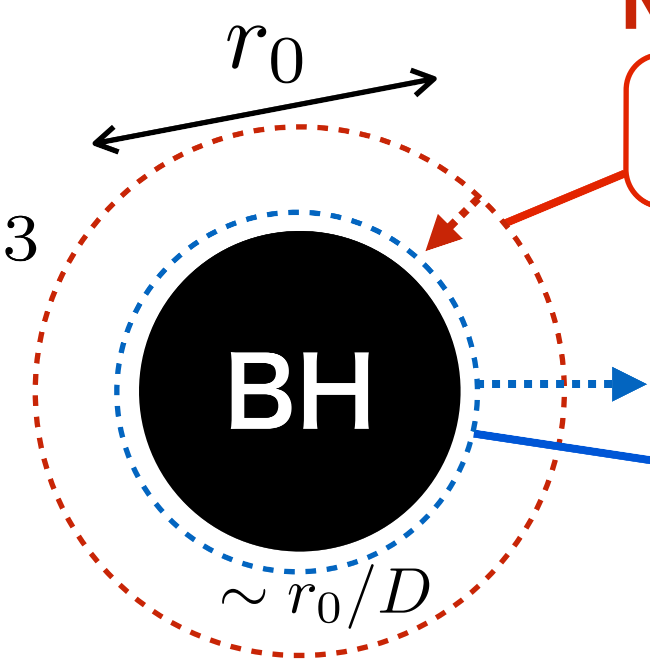
のような形を期待（≈場の理論）

# Large D limitの特長

**新たな階層性**

重力の減衰

$$\Phi \sim \left(\frac{r_0}{r}\right)^{D-3}$$




**Near zone**

$\boxed{r - r_0 \ll r_0}$

**Far zone**

$\boxed{r - r_0 \gg r_0/D}$

→Minkowskiと見なせる

**Overlap zone** $r_0/D \ll r - r_0 \ll r_0$

$\rightarrow$ **解析解同士のマッチングが可能に**

**Einstein方程式の簡単化**

**ex) PDE→ODE、連立方程式がdecoupleなど**

# Large D limit：これまでの研究

## BS/BHの摂動解析

・1/D展開を用いて摂動方程式を解きmode解析を行った、補正を加えると現実的なDにおいても数値計算を良い精度で再現

・decoupled mode(ω~O(1))とnon-decoupled mode(ω~O(D))

・Gregory-Laflamme不安定のしきい波数 **Asnin et.al.(2007)**

・Gregory-Laflamme不安定の分散関係 **Emparan, RS, Tanabe(2013)**

・BH QNM (高周波数モード:ω~O(D)) **Emparan, Tanabe (2013)**

・Holographic Superconductor **Emparan, Tanabe (2014)**

・回転ブラックホールのQNM/不安定 **Emparan, RS, Tanabe (2014)**

・Schw-BHのQNM **Emparan, RS, Tanabe (2014)**

# 研究の動機

Large D極限はこれまで線形摂動の解析においては有力な近似であることが分かってきた。

しかし、線形近似を行った上では意義が弱い。

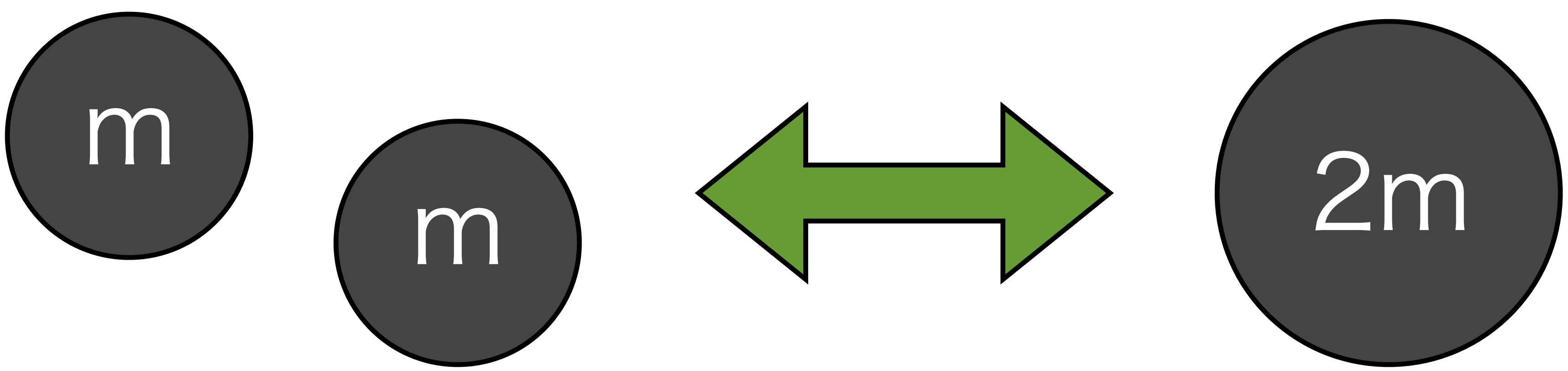
非線形なままのEinstein方程式に対して極限を取りたい

D=∞における解が有限次元の解に(たぶん)接続できるとなら、高次元BH解の発見に有用な解析

# Absence of Interaction

**Entropy ( M:fixed)** **Emparan, RS, Tanabe (2013)**

$$S(M) \sim M^{\frac{D-2}{D-3}} \xrightarrow{D\to\infty} \underbrace{M}_{\text{Additive}} .$$




S=m+m=2m = S=2m

**ホライズンが”ソフト”に**

**→ Leadingでは自由に変形できる？**

# 自己重力による変形スケール


$$G_D\delta M \sim \frac{2\pi^{\frac{D-2}{2}} r_0^{D-3}\lambda}{\Gamma(\frac{D-2}{2})}.$$

**互いに働く重力**

$\longrightarrow$ $$\delta\phi \sim \frac{G_D\delta M}{\lambda^{n+1}} \sim \left(\frac{r_0\sqrt{2\pi e}}{n^{1/2}\lambda}\right)^n$$

**GL不安定など**

**D→∞で有限の力が効くには** $\boxed{\lambda \sim r_0/n^{1/2}}$

**それ以外のスケールの変形では外力の支えが必要？**

Ex) 負の宇宙項、重力、電場、遠心力

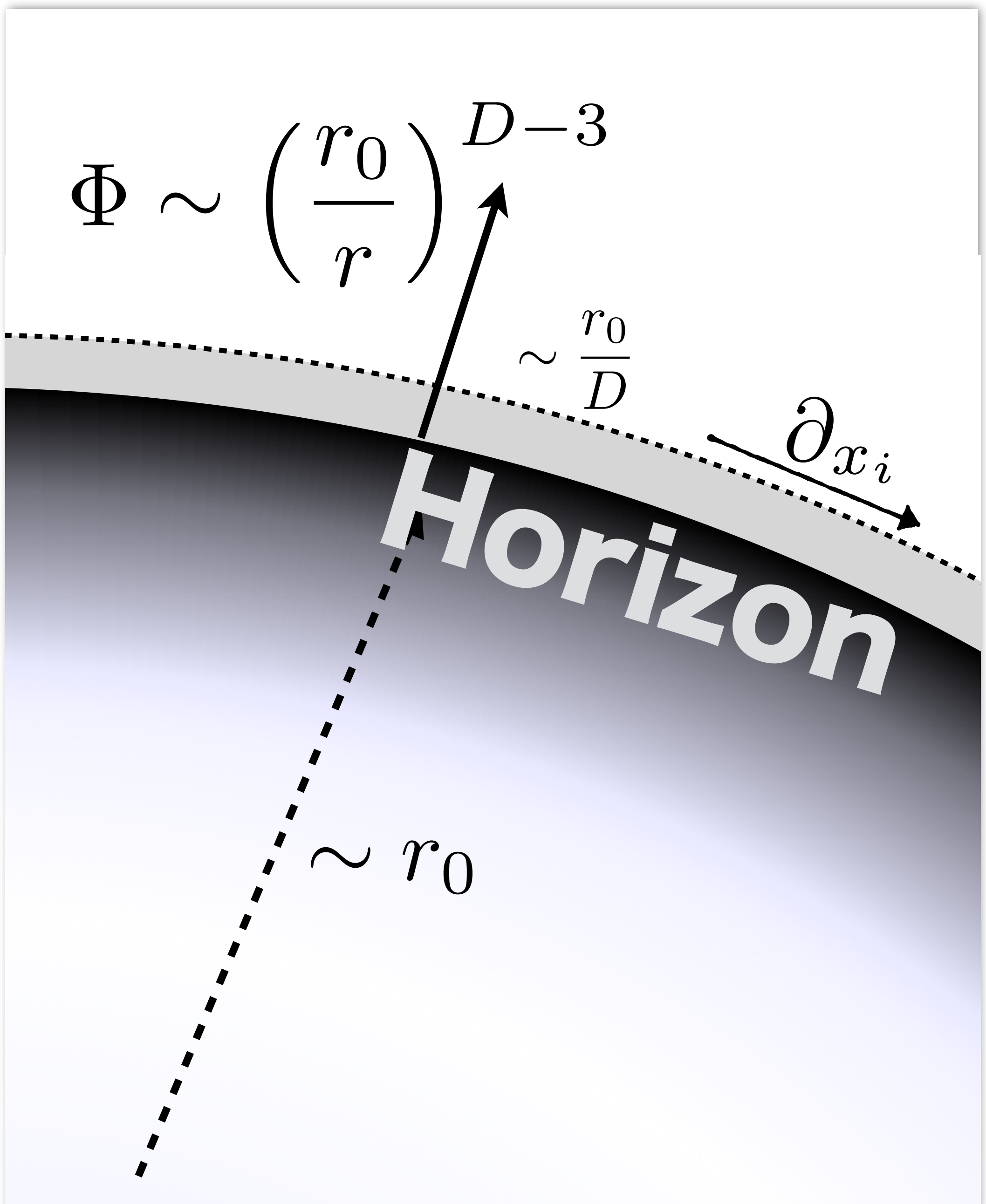
# Outline

1. **Einstein Equation in the large D limit**
2. **Non-Uniform black string**
4. **Thermodynamics of NUBS**
5. **Rotating black holes (imcomplete)**
6. **Summary**

# Outline

1. **Einstein Equation in the large D limit**
2. **Non-Uniform black string**
4. **Thermodynamics of NUBS**
5. **Rotating black holes**
6. **Summary**

# Hierarchy at Large D limit




**Near coordinate**

$$\mathsf{R} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{D-3} \Rightarrow r \simeq r_0 + \frac{r_0}{D} \ln \mathsf{R}$$

**Gravity is localized near H**

$$r - r_0 < r_0/D$$

**Decoupling of Equations**

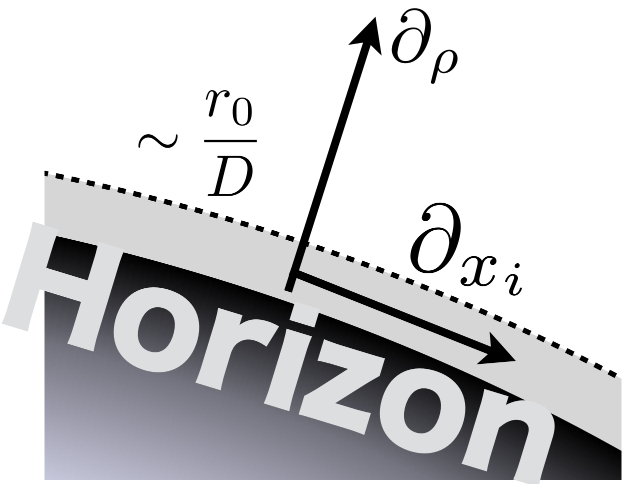
**If** $\partial_r \sim D\partial_{\mathsf{R}} \gg \partial_{x_i}$

**Einstein Eq → ODE(R)+PDE(x)**

# Setup

**d+1 decomposition**

$$ds^2 = N^2(\rho, x)d\rho^2 + g_{\mu\nu}(\rho, x)dx^\mu dx^\nu$$




**Einstein Equation**

$$-R + K^2 - K^\mu{}_\nu K^\nu{}_\mu = \frac{d(d-1)}{\ell^2},$$

$$K^\nu{}_{\mu;\nu} - K_{,\mu} = 0,$$

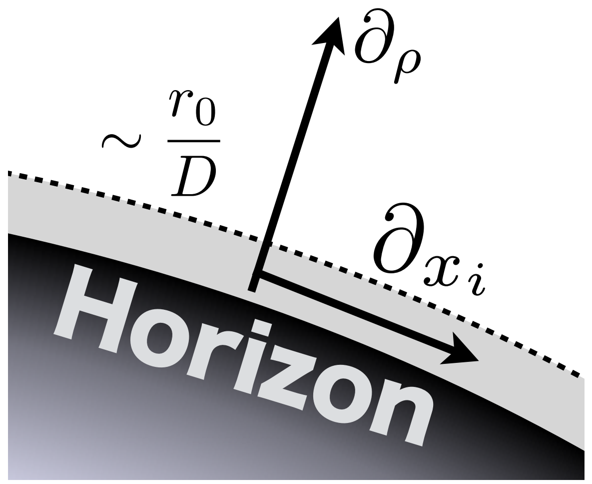
$$\frac{1}{N}\partial_\rho K^\mu{}_\nu = KK^\mu{}_\nu - R^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu \frac{d}{\ell^2} + \frac{1}{N}\nabla^\mu\nabla_\nu N,$$

$$K^\mu{}_\nu = -\frac{1}{2N}g^{\mu\sigma}\partial_\rho g_{\sigma\nu},$$

# Setup

## d+1 decomposition

$$ds^2 = N^2(\rho, x)d\rho^2 + g_{\mu\nu}(\rho, x)dx^\mu dx^\nu$$




## Assumptions

$$N \simeq \frac{N_0(x)}{D} \quad : \quad r \sim r_0 + \frac{\rho}{D}$$

**ex)** $\rho = \ln \mathrm{R}$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{00}dt^2 + \underbrace{g_{ab}dy^a dy^b}_{\sim D^{-1} \text{ or } \sim 1} + \mathcal{R}^2 d\Omega_{n+1}^2$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0(y)e^{\frac{\phi}{n+1}}$$

# Trace of K

## Trace of Evolution Equation

**Leadingではρに依らない**

$$\boxed{\frac{1}{N}\partial_\rho K = K^2} - R - \frac{d^2}{\ell^2} + \frac{1}{N}\nabla^2 N.$$

$\sim \mathcal{O}(D^2)$

$$R \sim \frac{n(n+1)}{\mathcal{R}^2}(1-(D\mathcal{R})^2)$$

$$\frac{1}{\hat{\ell}^2} = \frac{d^2}{\ell^2} + R - \frac{1}{N}\nabla^2 N$$

$$K = -\frac{1}{\hat{\ell}(y)}\coth\left(\frac{N(y)\rho}{\hat{\ell}(y)} - C(y)\right)$$

**ゲージ：** $N = \hat{\ell}$. ホライズンの位置C(x)=0

# Other K

**Non-sphere 成分**

$$\boxed{\frac{1}{N}\partial_\rho K^i{}_j = KK^i{}_j} - R^i{}_i - \delta^i{}_j\frac{D-1}{\ell^2} + \frac{1}{N}\nabla^i\nabla_j N$$

$$\sim \mathcal{O}(D^2) \qquad\qquad \sim \mathcal{O}(D)$$

$$\Rightarrow \quad K^i{}_j = -\frac{k^i{}_j}{\hat{\ell}\sinh\rho} \qquad k^i{}_j = 0 \ (i \neq 0, j \neq 0)$$

**Hamilton Constraint**

$$K^2 \simeq (K^0{}_0)^2 \quad (\rho \to 0) \qquad \Rightarrow k^0{}_0 = 1$$

$K_\Omega$ **の正則性**

$$K - K^0{}_0 - K^i{}_i = (n+1)K_\Omega \qquad K^0{}_0 = -\frac{1}{\hat{\ell}\sinh\rho}$$

# Momentum Constraint

$$K^{\mu}{}_{i;\mu} - K_{,i} = 0$$

$$\underset{\rho \to 0}{\simeq} K\partial_i(\ln\sqrt{-g_{00}}) - K_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\partial_i(\sqrt{g_{00}}K)$$

$$\sqrt{-g_{00}}K|_{\rho=0} = \mathrm{const.}$$

**実はこれだけみたせばOK**

# Metrics

$$\boxed{\begin{array}{c} K=-\frac{1}{\hat{\ell}}\coth\rho \qquad {K^0}_0=-\frac{1}{\hat{\ell}\sinh\rho} \qquad {K^i}_j=0 \\ (n+1)K_\Omega=K-{K^0}_0=-\frac{1}{\hat{\ell}}\tanh\frac{\rho}{2} \end{array}}$$

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}_0(y)e^{\frac{\phi}{n+1}} \qquad \frac{1}{\hat{\ell}(y)^2}=\frac{d^2}{\ell^2}+\frac{n(n+1)}{\mathcal{R}^2}(1-(D\mathcal{R})^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{-g_{00}}=A(y)\tanh\frac{\rho}{2}, \qquad \phi=C(y)+2\ln\cosh\frac{\rho}{2}$$

$$g_{ij}=g_{ij}(y)$$

$$\sqrt{-g_{00}}K|_{\rho=0}=\text{const.} \Rightarrow A_0(y)=C\hat{\ell}(y)$$

実は $C=2\kappa_0$

# NLO

同様にNLOも計算可能

**Momentum C.**

$$\sqrt{-g_{00}}K|_{\rho=0} = \mathrm{const.}$$

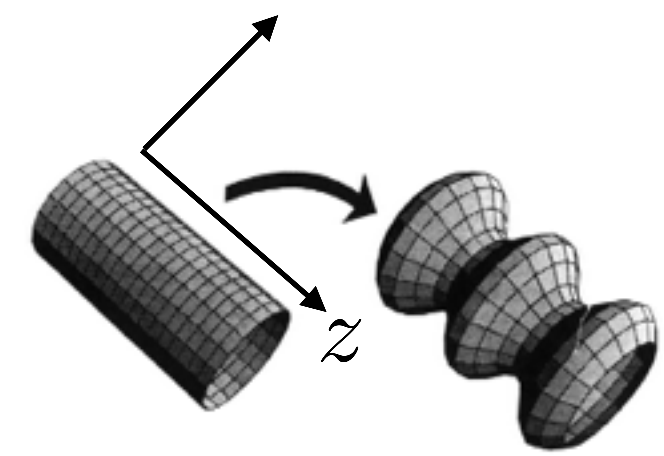
の高次からDeformation方程式

# Outline

1. Einstein Equation in the large D limit
2. **Non-Uniform black string**
4. Thermodynamics of NUBS
5. Rotating black holes
6. Summary

# Non-Uniform Black String

## Ansatz ( Conformal coordinate)




$$ds^2 = -Adt^2 + B\left(dr^2 + dz^2/D\right) + r^2 C d\Omega^2_{D-3}$$

$$r \longrightarrow \mathsf{R} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{D-4}$$

## Leading order

$(\ \rho = \ln \mathsf{R} \quad C = \ln M\ )$

$$ds^2 = -\left(\frac{\mathsf{R} - M_0(z)}{\mathsf{R} + M_0(z)}\right)^2 dt^2 + \cdots$$

**ホライズン：$\mathsf{R} = M_0(z)$**

$M_0(z)$ はLeadingでは任意

(D=∞では相互作用は0)

## Boundary condition:

**Regularity at $\mathsf{R} = M_0(z) + \mathcal{O}(n^{-1})$, a-flatness R→∞**

# Deformation Equation

**Next-to-Leading order (1/D)**

constraint Eq.から

$\sim M_0(z)^{\frac{1}{D-3}}$

局所的なホライズンのサイズ

**ホライズンの決定方程式**

$$\boxed{M_0(z)\ln M_0(z) - M_0(z) + \frac{M_0'(z)^2}{2M_0(z)} = \underline{a}M_0(z) + \underline{b}}$$

- a is a scaling : $a \to 0$ by $M_0(z) \to e^a M_0(z)$ $b \to e^a b$
- match with asymptotic monopoles

$$\mathcal{M}_{\rm ADM} = \frac{D\omega_{n+1}L}{4\pi G}\langle M_0\rangle + \mathcal{O}(D^0) \qquad \mathcal{T}_{\rm ADM} = -\frac{\omega_{n+1}}{4\pi G}b + \mathcal{O}(D^{-1})$$

➡ **tension ~ - b**

$$L(e^{-a}b) = \frac{2}{\sqrt{D}}\int_{M_{\rm min}}^{M_{\rm max}} \frac{dM}{M'}$$

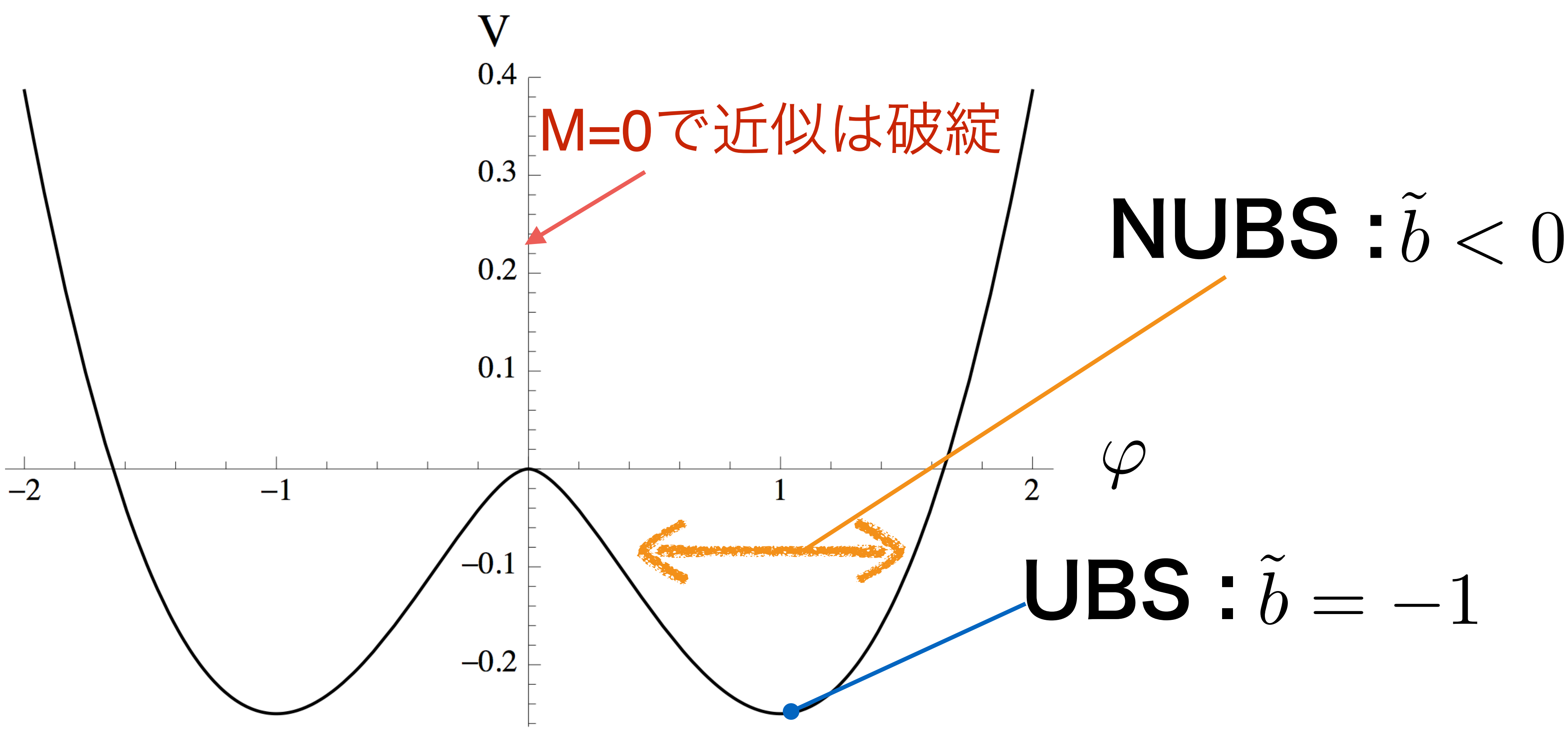
# Potential

## 決定方程式をrescaleして

$$\varphi(z) = e^{\frac{-a}{2}}\sqrt{M(z)}, \quad \tilde{b} = e^{-a} b$$

**ポテンシャル問題に帰着**

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\varphi'^2 = \frac{\tilde{b}}{4} - V(\varphi), \quad \boxed{V(\varphi) = \frac{1}{4}(\varphi^2 \ln \varphi^2 - \varphi^2).}$$



# Leading Solution

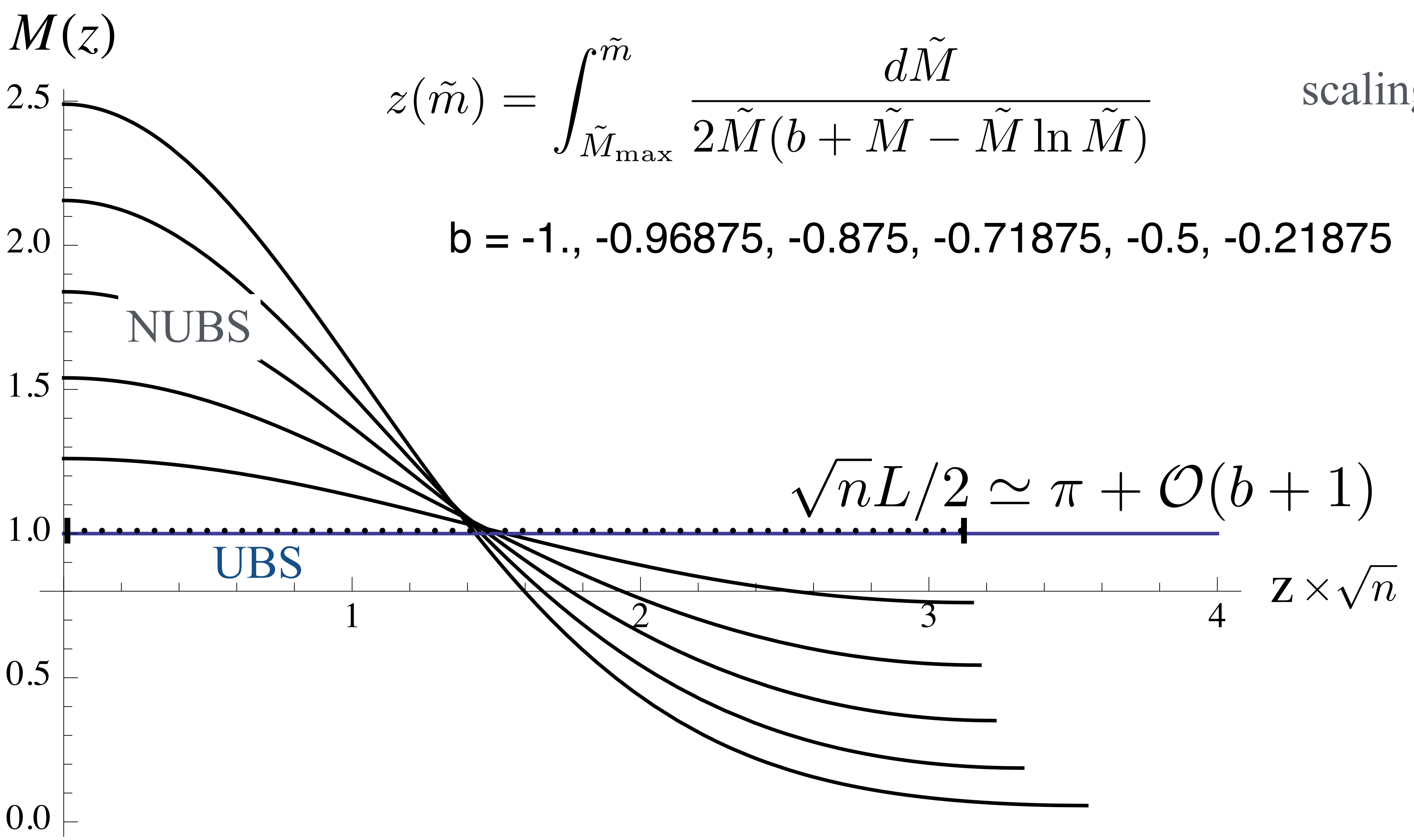
## Sol. for M_max to M_min

$$z(\tilde{m}) = \int_{\tilde{M}_{\max}}^{\tilde{m}} \frac{d\tilde{M}}{2\tilde{M}(b+\tilde{M}-\tilde{M}\ln\tilde{M})}$$

scaling: $a = 0$

b = -1., -0.96875, -0.875, -0.71875, -0.5, -0.21875

$$\sqrt{n}L/2 \simeq \pi + \mathcal{O}(b+1)$$



# Next-to-Leading order 方程式

$$M(z) = M_0(z) + M_1(z)/n$$

$\boxed{\tilde{b} = -1\text{: UBS解}}$ **となるようにrescale**

$$\tilde{M}(z) = e^{-a_0 - a_1/n} M(z),$$
$$\tilde{b} = e^{-a_0 - a_1/n} b, \quad z \to \tilde{z} = (1 - a_0/n) z$$

$$\frac{\tilde{M}'(\tilde{z})^2}{\tilde{M}(\tilde{z})^2} - 2 + 2\ln \tilde{M}(\tilde{z}) + \frac{-3 - 4\ln 2 + 8\ln \tilde{M}(\tilde{z}) - 6\ln \tilde{M}(\tilde{z})^2}{n}$$
$$- \frac{2\tilde{b}}{\tilde{M}(\tilde{z})} \left( 1 - \frac{\zeta(2) - 4 - 4\ln 2 - 2(\zeta(2) - 3)\ln \tilde{M}(\tilde{z})}{n} \right) - \frac{\tilde{b}^2 (2\zeta(2) - 5 - 4\ln 2)}{n\tilde{M}(\tilde{z})^2} = 0$$

# UBS解からの漸近展開

**UBS解** $\tilde{b} = -1$ **から展開する**

$\tilde{b} = -1+\epsilon^2/2$ **として**

$$\delta M(z) = \epsilon\cos(z)$$

$$M(z) = 1 + \epsilon\cos(z/\lambda) + \frac{1}{6}\epsilon^2\cos(2z/\lambda) - \frac{\epsilon^3}{96}\left(\frac{7}{3}\cos(z/\lambda) - \cos(3z/\lambda)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

$z\sin(z)$ **のような永年項を打ち消す**

$$\lambda = 1 + \frac{1}{24}\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$ **周期も同時に展開**

# UBS解からの漸近展開

**NLOまで** $\lambda_0 \to \lambda = \lambda_0 + \lambda_1/n$

**周期L/2π**

$$\lambda = 4^{\frac{1}{n}} \left[ 1 + \frac{1}{2n} + \left( \frac{1}{24} - \frac{17}{48n} \right) \epsilon^2 + \left( \frac{25}{2304} - \frac{443}{4608n} \right) \epsilon^4 \right.$$
$$\left. + \left( \frac{9041}{2488320} - \frac{166189}{4976640n} \right) \epsilon^6 + \left( \frac{1298597}{955514880} - \frac{4917095}{382205952n} \right) \epsilon^8 \right]$$

ε →0でGL modeの波長

**平均（～長さ当りの質量）**

$$\langle \tilde{M}_0 \rangle = 1 - \frac{1}{96}\epsilon^4 - \frac{11}{3456}\epsilon^6 - \frac{7411}{6635520}\epsilon^8.$$

$$\delta \langle \tilde{M} \rangle = \frac{1}{n} \left( 1 - \zeta(2) + \zeta(2)\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^4}{12} + \frac{79\epsilon^6}{3456} + \frac{25657\epsilon^8}{3317760} \right)$$

# Outline

1. Einstein Equation in the large D limit

2. Non-Uniform black string

4. **Thermodynamics of NUBS**

5. Rotating black holes

6. Summary

# NUBSの臨界次元

**d=13,14前後でNUBS相の熱力学的性質が変わる**

Kaluza-Klein BHの相図

**GL点近傍の傾き**

**一次転移　→　二次転移**

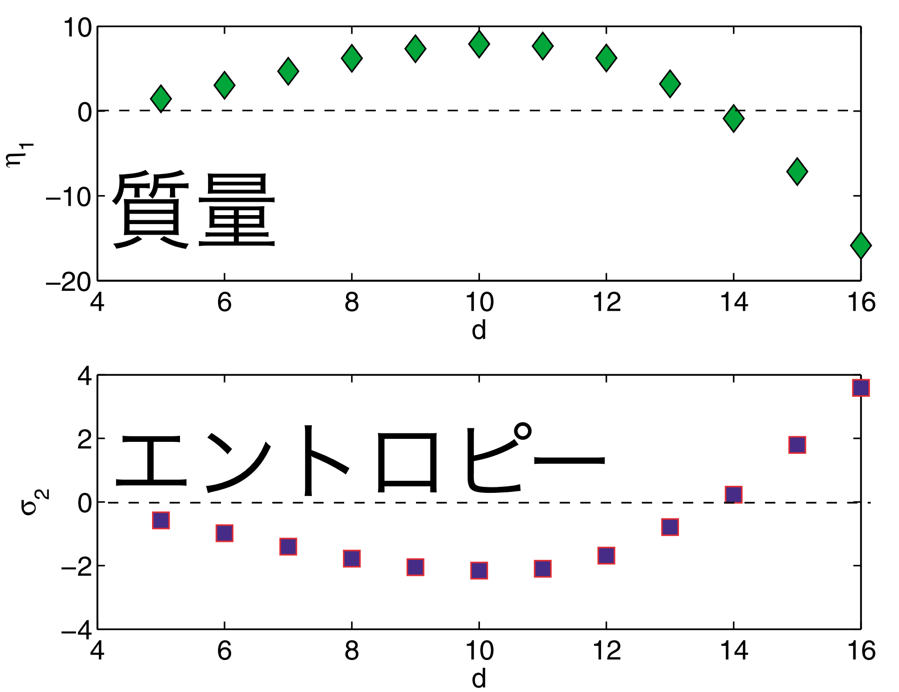
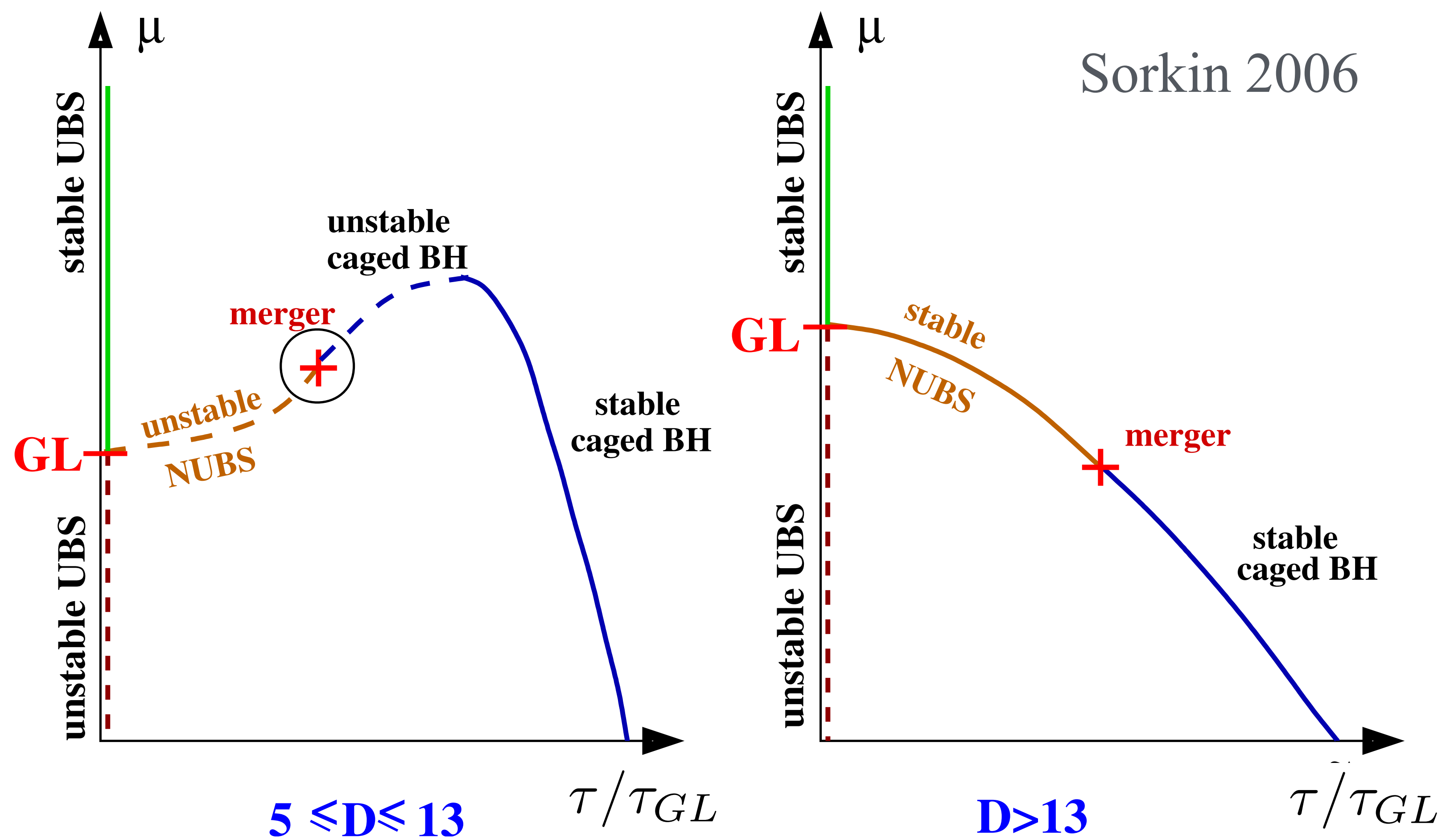



FIG. 2 (color online). The trends in the mass, $\mu_{\mathrm{nonuniform}}/\mu_{\mathrm{uniform}} := 1 + \eta_1 \hat{\lambda}^2 + \cdots$, and the entropy, $S_{\mathrm{nonuniform}}/S_{\mathrm{uniform}} := 1 + \sigma_2 \hat{\lambda}^4 + \cdots$, shifts between uniform and nonuniform black strings. The key result is the sign change of $\eta_1$ and $\sigma_2$ above $d_* = 13$.

Sorkin 2004



# Matching

**Far regionでのMonopole項だけを取り出したい**

$$ds^2 = -(1+\delta A)dt^2 + (1+\delta B)(dr^2 + dz^2/n) + r^2(1+\delta C)d\Omega_{n+1}^2$$

$$\delta A = -\Phi(r,z), \quad \delta B = -\frac{\beta r_0^n}{(n+1)r^n} + \frac{1}{n+1}\Phi(r,z) + \partial_r\left(r^{\frac{n+1}{2}}\Psi(r,z)\right)$$

$$\delta C = \frac{2\beta r_0^n}{(n^2-1)r^n} + \frac{1}{n+1}\Phi(r,z) + r^{\frac{n-1}{2}}\Psi(r,z)$$

$$\nabla^2\Phi(r,z) = \left[\partial_r^2 + \frac{n+1}{r}\partial_r + n\partial_z^2\right]\Phi(r,z) = 0$$

$$\Phi(r,z) = \frac{\alpha r_0^n}{r^n} + \underline{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m r_0^{n/2}}{r^{n/2}}K_{n/2}(m\hat{k}\sqrt{n}r/r_0)\cos(m\hat{k}z/r_0)}$$

zについての平均で消える

→ α,βをマッチする

# ADM quantities

**α、βから質量、テンションが定義(t方向、z方向へのKilling)**

$$h_{tt} = \frac{\alpha r_0^n}{r^n}, \quad h_{rr} = n h_{zz} = \frac{\alpha - \beta}{n+1}\frac{r_0^n}{r^n}, \quad h_{ab} = \left(\frac{2\beta}{n^2-1} + \frac{\alpha}{n+1}\right)\frac{r_0^n}{r^n} r^2 \gamma_{ab}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{M} = \frac{\omega_{n+1} r_0^n L}{16\pi G}\frac{n(n+2)\alpha + \beta}{n+1}, \quad \mathcal{T} = \frac{\omega_{n+1} r_0^n}{16\pi G}\beta$$

HarmarkObers 2004

$$\tau = \frac{L\mathcal{T}}{\mathcal{M}} = \frac{(n+1)\beta}{n(n+2)\alpha + \beta}$$

相対テンション

**Matchすると**

$$\beta = -4b + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad , \alpha = 4\langle M\rangle(b) + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

# 熱力学：Leading order

**余剰次元サイズを固定した相図を考える**

$$M(z) = e^a \tilde{M}(z),\ b = e^a \tilde{b}$$

**relative tension** $\tau = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{-b}{\langle M \rangle} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{-\tilde{b}}{\langle \tilde{M} \rangle}$

**周期** $L(a,b) \quad = \quad 2\displaystyle\int_{z_0}^{z+L/2} \frac{dM}{M'(z)} \equiv L(\tilde{b})$

$\tilde{b}$ のみの関数

**UBSは** $\tilde{b} = -1$ **のみ**

**UBSから伸びる解はrelative tensionがrunningしない（Leadingでは相図が書けない）**

# 熱力学：Next-to-Leading order

**スケーリングでβはfix** $\beta = -4b$

$$\alpha = 4\left(\langle M\rangle + \frac{b - \zeta(2)b + \langle M\rangle}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})\right)$$

$$\tilde{M}(z) = e^{-a_0 - a_1/n} M(z),$$
$$\tilde{b} = e^{-a_0 - a_1/n} b, \quad z \to \tilde{z} = (1 - a_0/n)z$$

**長さスケールは** $e^{a/n}$ **だけ変化**

$$L \longrightarrow e^{a/n} L$$

# 相図

**余剰次元スケールを固定**

$$\tilde{b} = -1 + \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\frac{L}{L_{GL}} = e^{\frac{a}{n}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{24} - \frac{3}{8n} \right) \epsilon^2 + \frac{25\epsilon^4}{2304} + \dots \right]$$ **=1**

$$\epsilon^2 = \frac{2t}{n} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{t}{12} + \left( \frac{3t}{4} - \frac{25}{546} t^2 \right) \frac{1}{n} + \dots$$

$$\frac{M}{M_{GL}} \simeq e^a = e^{-t/12} \left[ 1 + \left( \frac{3t}{4} - \frac{25t^2}{546} \right) \frac{1}{n} + \dots \right]$$

$$\simeq 1 - \frac{t}{12} \left( 1 - \frac{9}{n} \right) + \mathcal{O}(t^2)$$

$$\frac{\tau}{\tau_{GL}} \simeq 1 - \frac{t}{n}$$

$\boxed{n = 9 \ (d = 13)}$ **でNUBSの相図が変化**

# Entropy

**Sorkin 2004と同様、同質量（密度？）当りのエントロピー**

$$\frac{\mathcal{M}}{L} \sim e^{a}\left(1 - \frac{\zeta(2)-1}{n} + \frac{\zeta(2)\epsilon^2}{2n} + \dots\right)$$ **は**

$$a \simeq a_0 - \frac{\zeta(2)\epsilon^2}{2n}$$ **と置けば、fix**

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^L M(z)^{\frac{n+1}{n}} B^{\frac{1}{2}} C^{\frac{n+1}{2}}\Big|_{r=r_H} r_0^{n+1}\omega_{n+1}\frac{r_0 dz}{\sqrt{n}}\sqrt{1+\frac{M'(z)^2}{nM(z)^2}} \\
&= 4\omega_{n+1} r_0^{n+1} 4^{\frac{1}{n}} e^{\frac{a}{n}} L\left(\langle M\rangle + \frac{1}{n}(b + \langle M\rangle - \zeta(2)b)\right)
\end{aligned}$$

$$S \sim e^{a/n}\mathcal{M} = e^{a/n}\frac{\mathcal{M}}{L}L \sim 1 + \frac{\epsilon^2}{24}\left(1 - \frac{9}{n}\right)$$

$$\frac{\tau}{\tau_{GL}} = 1 - (1+\zeta(2)/n)\frac{\epsilon^2}{2}$$ **やはり n=9で相が変化！**

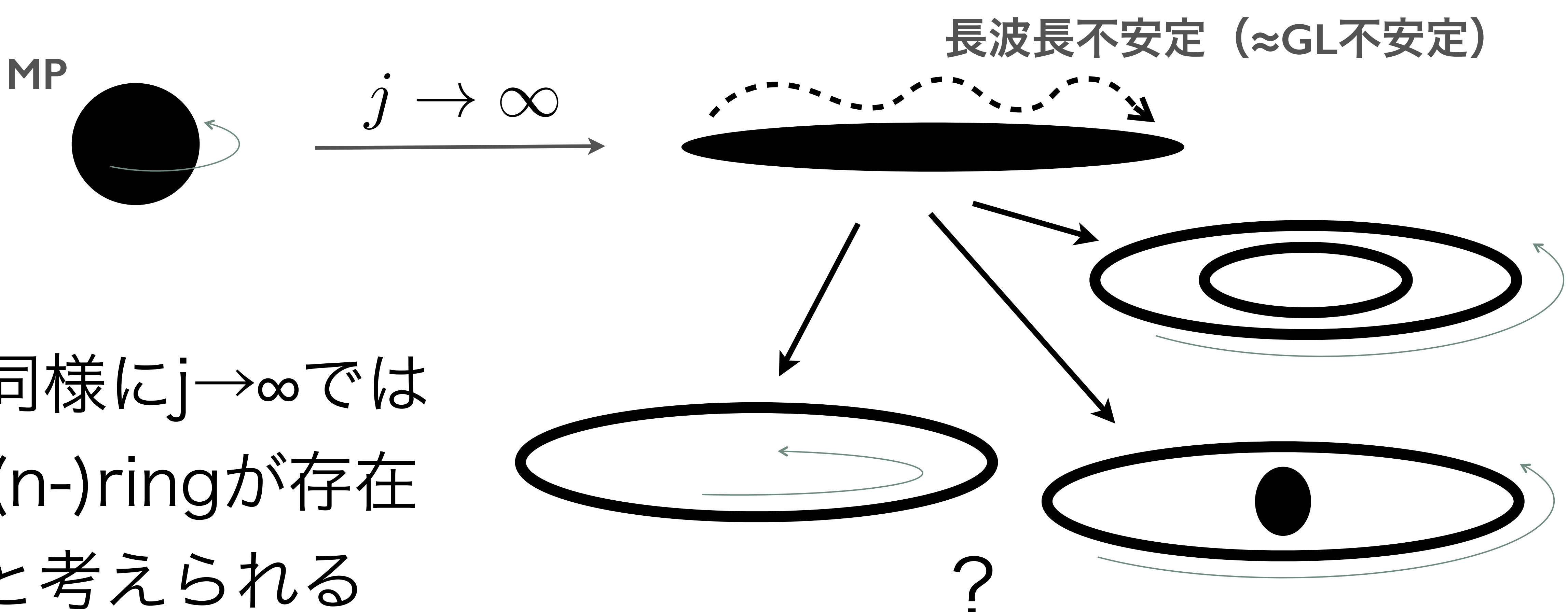
# Outline

1. Einstein Equation in the large D limit
2. Non-Uniform black string
4. Thermodynamics of NUBS
5. **Rotating black holes**
6. Summary

# Myers-Perry BHの不安定性

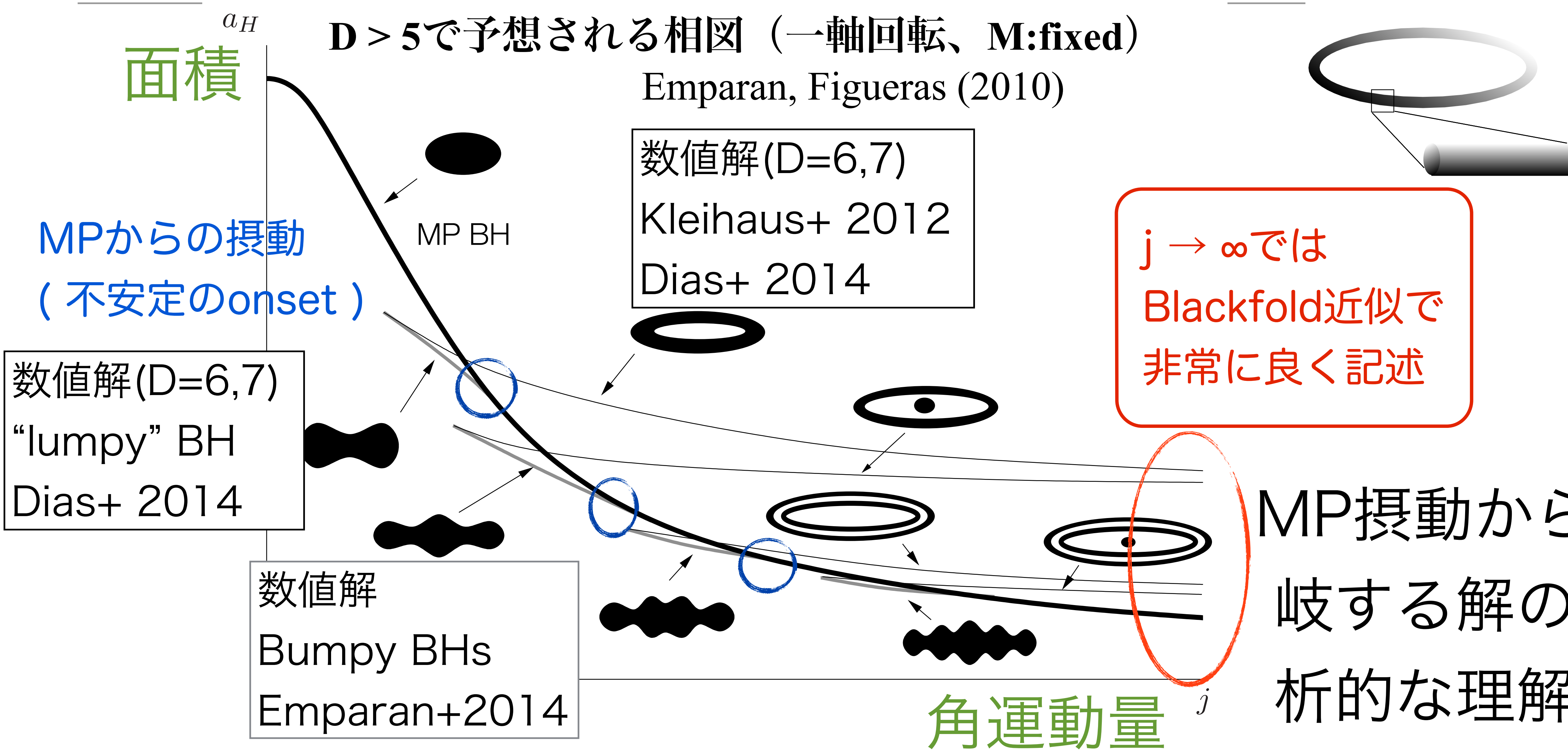
$$\boxed{\textbf{Newton力} \quad \sim \frac{M}{r^{d-3}} \quad \text{v.s} \quad \textbf{遠心力} \quad \sim \frac{J}{r^2}}$$

$\rightarrow$ **d>5ではNewton力はすぐに落ちる**




D=5と同様にj→∞では
Black (n-)ringが存在
すると考えられる

# 定常ブラックホールの相図



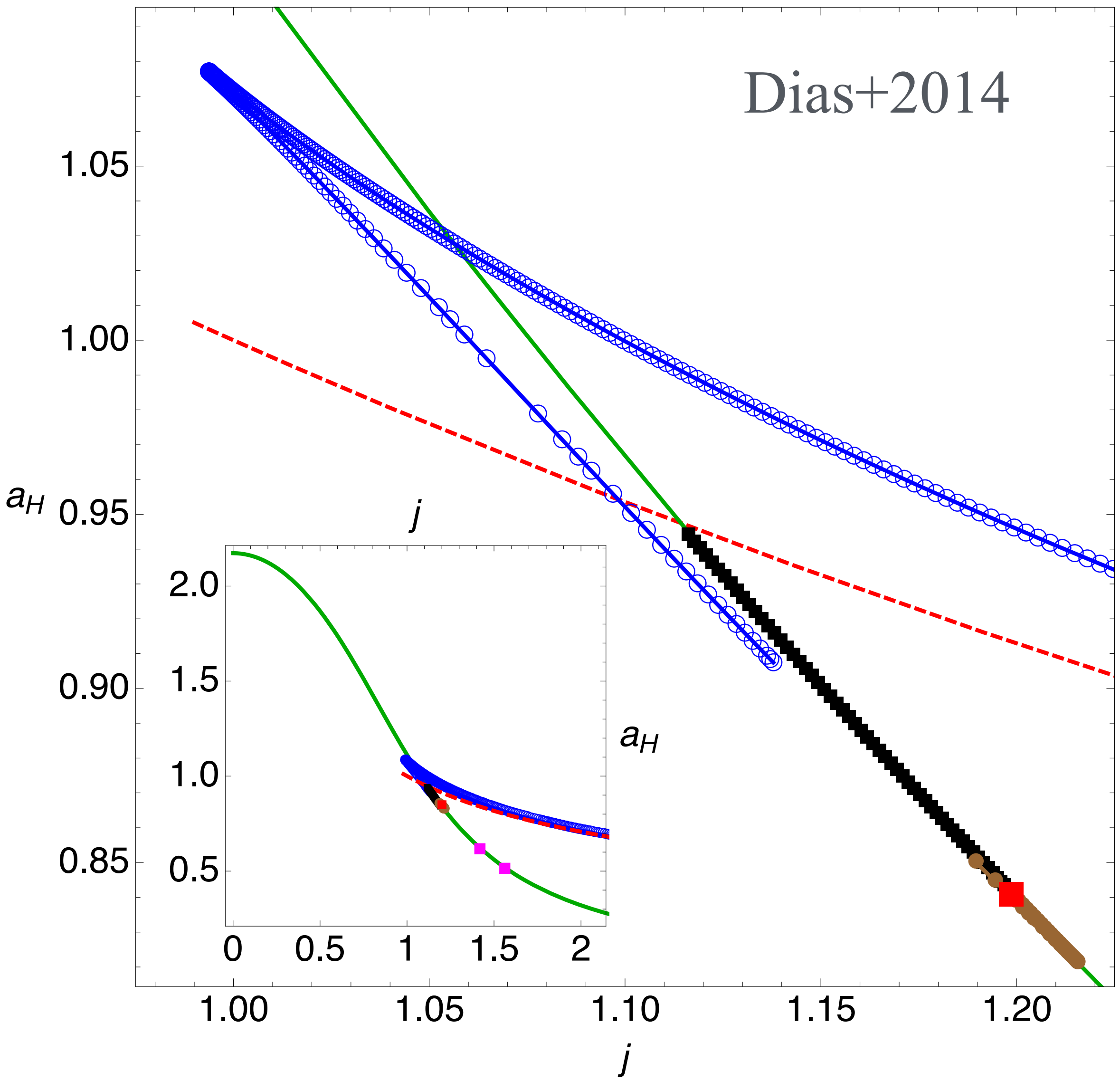

MP摂動から分岐する解の解析的な理解は進んでいない

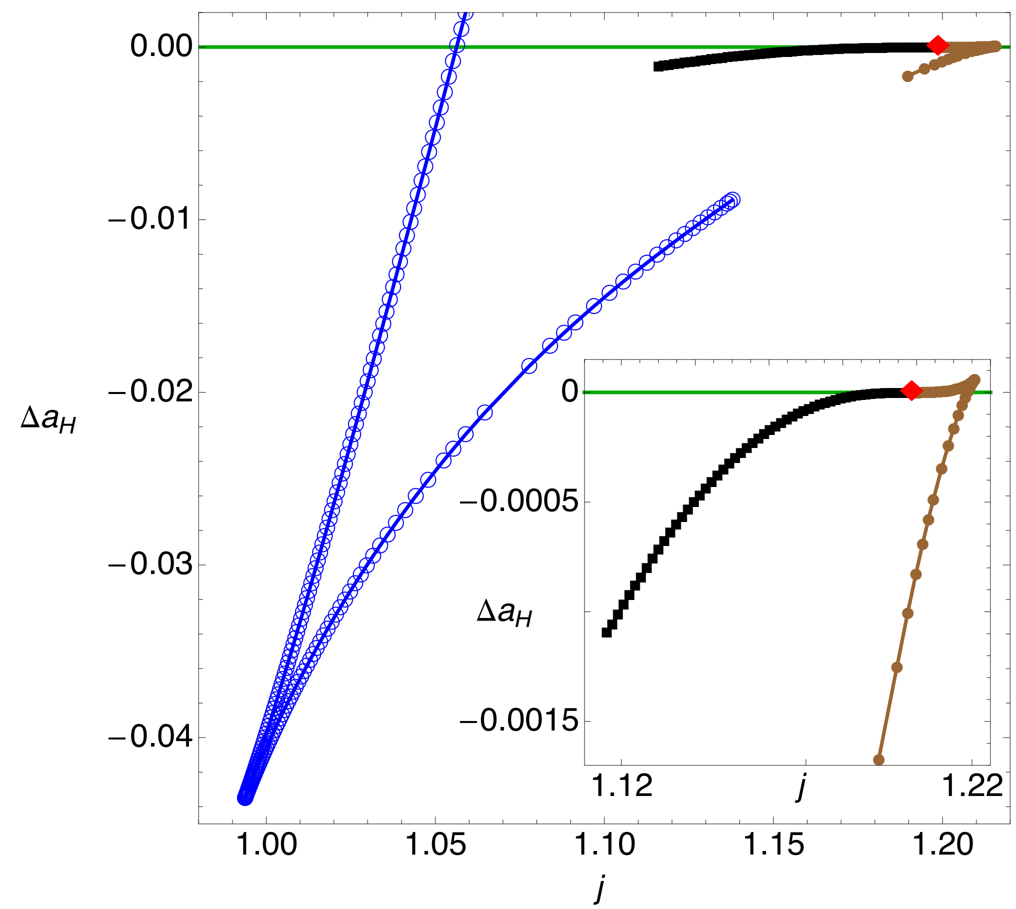
**→要はBlackfold近似くらいしか有力な近似法がない**

# 定常軸対称解

## Lumpy black hole

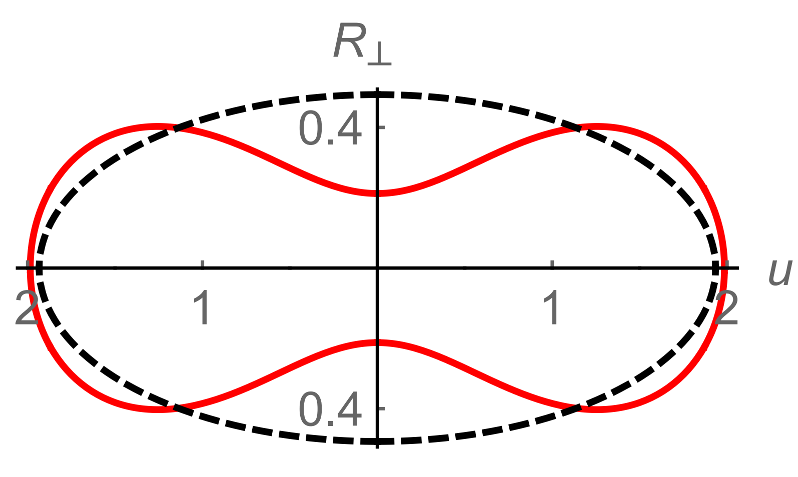
## D=6,7



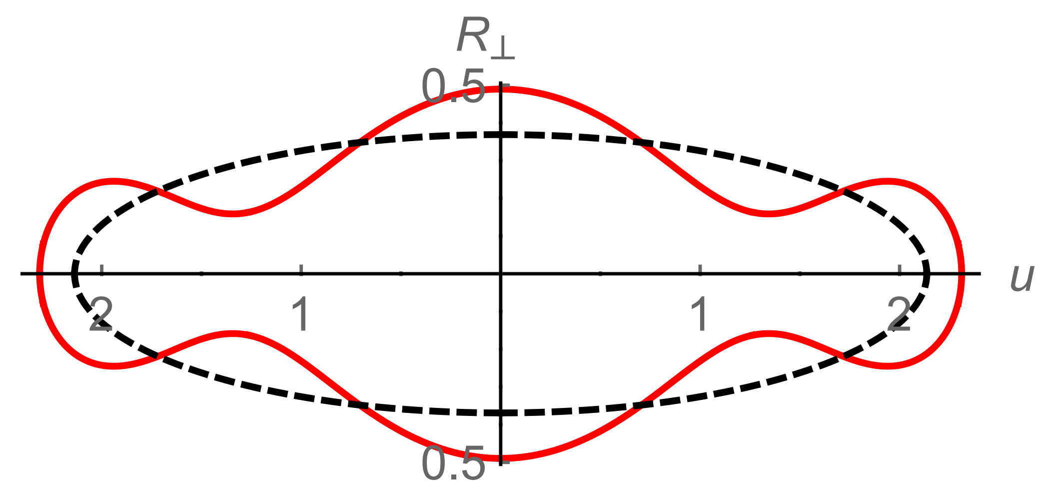



# 定常軸対称解

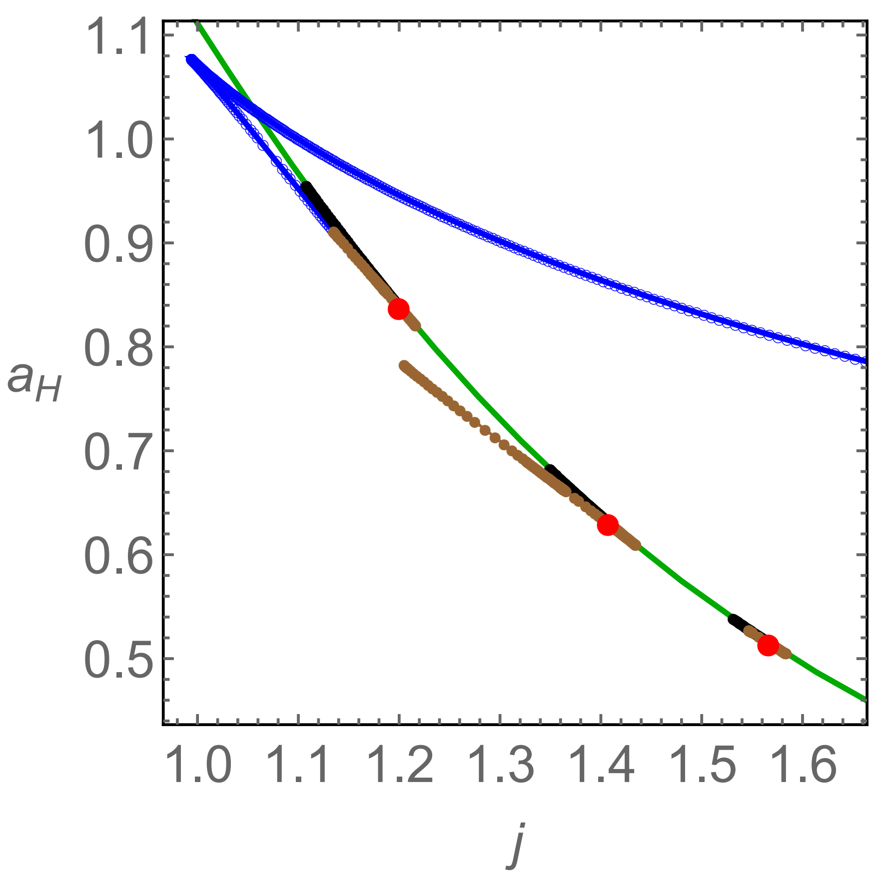
## Bumpy解

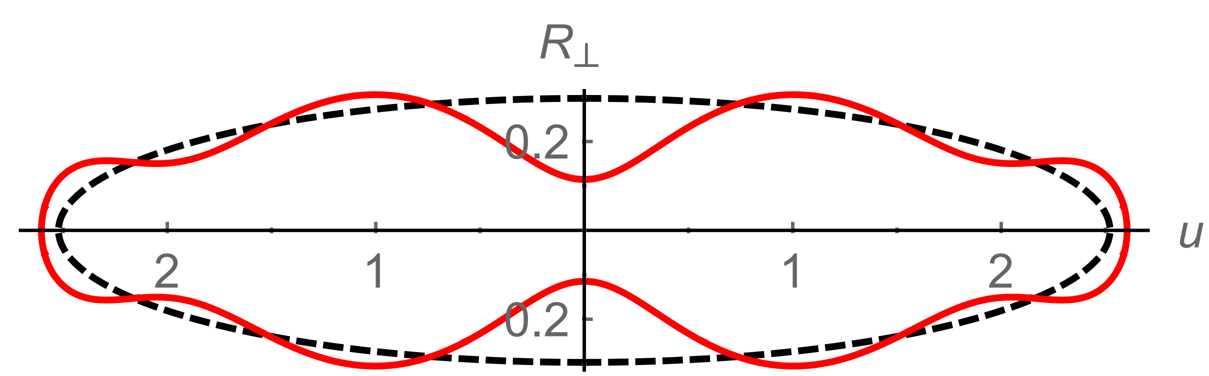



(a) $(+)_1$ black hole at $j = 1.17$.




(b) $(+)_2$ black hole at $j = 1.36$.




(c) $(+)_3$ black hole at $j = 1.56$.

Emparan+ 2014

**D=6**

# 定常ブラックホール(Leadingまで)

$$g_{ij}dx^i dx^j = \mathcal{G}_{AB}(\rho, z)dy^A dy^B + h_{ab}(\rho, z)dz^a dz^b$$

$$\mathcal{G}_{AB}(\rho, z)dy^A dy^B = -A(\rho, z)dt^2 + B(\rho, z)(d\psi - W(\rho, z)dt)^2.$$

Extrinsic curvature $\rightarrow$ $$K^i{}_j{}^{(0)} = -\frac{k^i{}_j(x)}{\ell_0 \sinh\Theta} \qquad \Theta = \rho - M(x)$$

**ここまでは静的な場合と同様**

Regularity $k^t{}_t + k^\psi{}_\psi = 1, \quad {k^t{}_t}^2 + {k^\psi{}_\psi}^2 + 2k^t{}_\psi k^\psi{}_t = 1, \quad k^a{}_b = 0$

$$K^t{}_t = -\frac{1}{2NA}(A' - BWW'), \quad K^t{}_\psi = -\frac{BW'}{2NA}, \quad K^\psi{}_\psi = -\frac{1}{2N}\left(\frac{B'}{B} + \frac{BWW'}{A}\right)$$

$$K^\psi{}_t = -\frac{1}{2N}\left(-\frac{WB'}{B} - W' + \frac{W(A' - BWW')}{A}\right),$$

**A,B,Wが結合**

# 定常ブラックホール：Leading

$$\partial_\Theta \ln \sqrt{W^{(0)}} = \frac{k^t{}_t - k^\psi{}_t {W^{(0)}}^{-1} + k^t{}_\psi W^{(0)} - k^\psi{}_\psi}{\sinh\Theta}$$

$$\partial_\Theta \ln \sqrt{B^{(0)}} = \frac{k^\psi{}_\psi - k^t{}_\psi W^{(0)}}{\sinh\Theta}$$

$$\partial_\Theta \ln \sqrt{A^{(0)}} = \frac{k^t{}_t + k^t{}_\psi W^{(0)}}{\sinh\Theta},$$

$$W^{(0)} = \frac{1 - k^t{}_t + k^t{}_t w \tanh^2\frac{\Theta}{2}}{k^t{}_\psi(z)(1 + w\tanh^2\frac{\Theta}{2})},$$

$$A^{(0)} = \frac{2A_0 \sinh^2\frac{\Theta}{2}}{1 + w + (1-w)\cosh\Theta},$$

$$B^{(0)} = \frac{A_0 {k^t{}_\psi}^2 (1 + w + (1-w)\cosh\Theta)}{2w\cosh^2\frac{\Theta}{2}}$$

**Momentum Const.**

$$K^\mu{}_{a;\mu} - K_{,a} = 0 \quad \longrightarrow \quad \kappa_0^2 = \frac{A_0}{4\hat{\ell}_0^2}$$ = const.

# 定常ブラックホール：Leading

$$\mathcal{G}_{AB}(\rho,z)dy^A dy^B = -A(\rho,z)dt^2 + B(\rho,z)(d\psi - W(\rho,z)dt)^2.$$

$$A^{(0)} = \frac{8\kappa_0^2\hat{\ell}_0^2 \sinh^2\frac{\Theta}{2}}{1+w+(1-w)\cosh\Theta},$$

$$W^{(0)} = \frac{\Omega(1-(1-\alpha+\alpha w)\tanh^2\frac{\Theta}{2})}{1-w\tanh^2\frac{\Theta}{2}},$$

$$B^{(0)} = \frac{2\kappa_0^2\hat{\ell}_0^2 w(1+w+(1-w)\cosh\Theta)}{(1-\alpha)^2(1-w)^2\Omega^2\cosh^2\frac{\Theta}{2}}.$$

**未知関数**　ホライズン $\Theta = \rho - M(x)$

遠方とのマッチ

$\Omega, \alpha = \Omega_\infty/\Omega \quad \mathcal{R}_0(x) \quad \omega(x) \quad \dfrac{1}{\hat{\ell}_0^2} = \dfrac{1}{\ell^2} + \dfrac{1-(\mathcal{D}_A\mathcal{R}_0)^2}{\mathcal{R}_0^2}$

# Ex)Myers-Perry-AdS解 (単軸回転）

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\Sigma}\left(dt - \frac{a\sin^2\theta}{\Xi}d\psi\right)^2 + \frac{\sin^2\theta\Delta_\theta}{\Sigma}\left(\frac{r^2+a^2}{\Xi}d\psi - adt\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r}dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_\theta}d\theta^2 + r^2\cos^2\theta d\Omega_{n+1}^2$$

$$\Delta_r = (r^2+a^2)\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right) - \frac{r_0^{n+2}}{r^n}, \quad \Delta_\theta = 1 - \frac{a^2}{\ell^2}\cos^2\theta, \quad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{\ell^2}$$

$$a = \hat{a}r_0, \ell = \hat{\ell}r_0$$

$$\cosh^2\frac{\rho}{2} = (1+\hat{a}^2)(1+\hat{\ell}^{-2})\frac{r^n}{r_0^n}.$$ と置けば

$$\mathcal{R}_0 = r_0\cos\theta \qquad \hat{\ell}_0^2 = \frac{r_0^2(1+\hat{a}^2\cos^2\theta)}{(1+\hat{a}^2)(1+\hat{\ell}^{-2})}.$$

$$\kappa_0 = \frac{1+\hat{\ell}^{-2}}{2r_0}, \quad w = \frac{\hat{a}^2(1+\hat{\ell}^{-2})\sin^2\theta}{(1+\hat{a}^2)(1-\hat{a}^2/\hat{\ell}^2\cos^2\theta)}$$

$$\Omega = \frac{a\Xi}{r_0(1+\hat{a}^2)}, \quad \alpha = -\frac{1+\hat{a}^2}{\hat{\ell}^2\Xi}, \quad N_0 = \hat{\ell}_0$$

で解を再現

# Summary

- Large D極限においてEinstein方程式が動径方向への常微分方程式とそれ以外への偏微分方程式に分離することを見た。（co-homogeneityが一つ減った）

- 次元無限大極限ではEinstein方程式の解析が容易になる。D=∞におけるすべての解が有限次元の解に接続できるとすれば、解の発見に有用

- 単純な例として非一様ブラックストリング解（NUBS)を調べ、ホライズンの変形方程式を求めた。

- Sorkinの示した臨界次元d*=13.5が見えた？

# 課題

- 高次は多重対数関数（PolyLog）の積分だらけ、現状では積分公式が無くなったところで終わり

- 遠方への接続、保存量の評価（より一般的に）

- AdS解や定常解への拡張は割と簡単 (*Work in progress*)

  Fat ring解, 変形したMP解など

- 時間依存している場合など（重力崩壊、ブラックストリングの時間発展）

# 補遺

# GL不安定@Large D limit

もともと数値計算から示唆 $k_{GL} \simeq \sqrt{D}$ Sorkin (2004)

## しきい値

Asnin et.al.(2007)

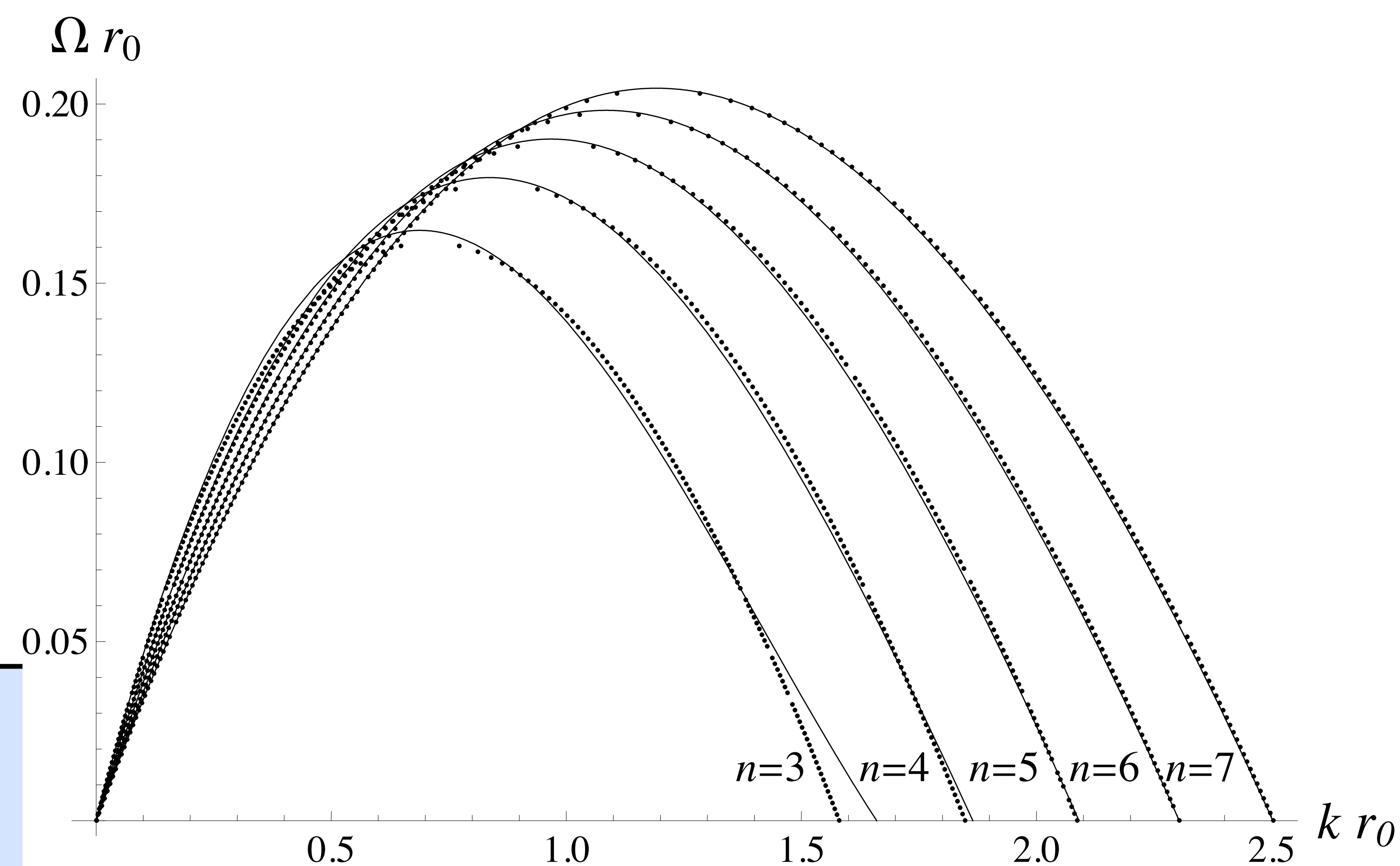
$$k_{GL}^2 r_0^2 = n - 1 + \frac{2}{n}$$

$$n = D - 4$$

Emparan, **RS**, KT(2013)

## 分散関係

$$\hat{k} = \frac{k r_0}{\sqrt{n}}$$




$$\Omega = \hat{k} - \hat{k}^2 - \frac{\hat{k}}{2n}(1 + 2\hat{k} - 2\hat{k}^2) + \frac{\hat{k}}{24n^2}(9 + 24\hat{k} + 12\hat{k}^2 - 8\pi^2\hat{k}^2 + 8\pi^2\hat{k}^3 - 12\hat{k}^4).$$

# ブラックホールQNM 高周波モード

Emparan, Tanabe (2013), [arXiv:1401.1957 [hep-th]]

一般的なブラックホールにおいて

**ω~O(D)** となるQNMが不変的に存在

$$\boxed{\omega_{(\ell,k)}\, r_0 = \frac{D}{2} + \ell - \left( \frac{e^{i\pi}}{2} \left( \frac{D}{2} + \ell \right) \right)^{1/3} a_k}$$

Airy関数のk番目の零点

$$a_k \simeq \left( \frac{3\pi}{8}(4k-1) \right)^{2/3}$$

- ωはホライズン半径のみにしか依らない
- D→∞におけるLeadingの構造のみで決定
- ω∼O(1)のQNMには具体的な時空構造による

Large D limit

# Sch-QNM ω~O(1) MODE

Emparan, RS, Tanabe, to be appear

## Scalar mode

$$\begin{aligned}\omega_\pm \;=\; & \pm\sqrt{l-1} - i(l-1) + \frac{1}{n}\left(\pm(3l/2-2)\sqrt{l-1} - i(l-1)(l-2)\right) \\ & + \frac{1}{n^2}\left(\pm\sqrt{l-1}\left(\frac{7l^2}{8} + \frac{2\pi^2 l}{3} - \frac{9l}{2} - \frac{2\pi^2}{3} + 4\right) - \frac{1}{3}i(l-1)(12 - 9l + (l-2)\pi^2)\right) \\ & + \frac{1}{n^3}\left(\pm\sqrt{l-1}\left(-\frac{5l^3}{16} - l^2\left(6\zeta(3) + \frac{5}{2} - \frac{5\pi^2}{3}\right) - \frac{1}{6}l\left(26\pi^2 - 9(8\zeta(3)+7)\right) - 8\zeta(3) + \frac{8\pi^2}{3} - 8\right)\right. \\ & \left. -\frac{1}{3}i(l-1)\left(2l^2\left(\pi^2 - 6\zeta(3)\right) + l\left(24\zeta(3) + 21 - 9\pi^2\right) + 8\left(\pi^2 - 3(\zeta(3)+1)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

## Vector mode

$$\omega_V = -i\left[l - 1 + \frac{(l-1)^2}{n} + \frac{\left(\pi^2-6\right)(l-1)^2}{3n^2} + \frac{2(l-1)^2\left(-6l\zeta(3) + \pi^2(l-1) + 6\right)}{3n^3}\right]$$

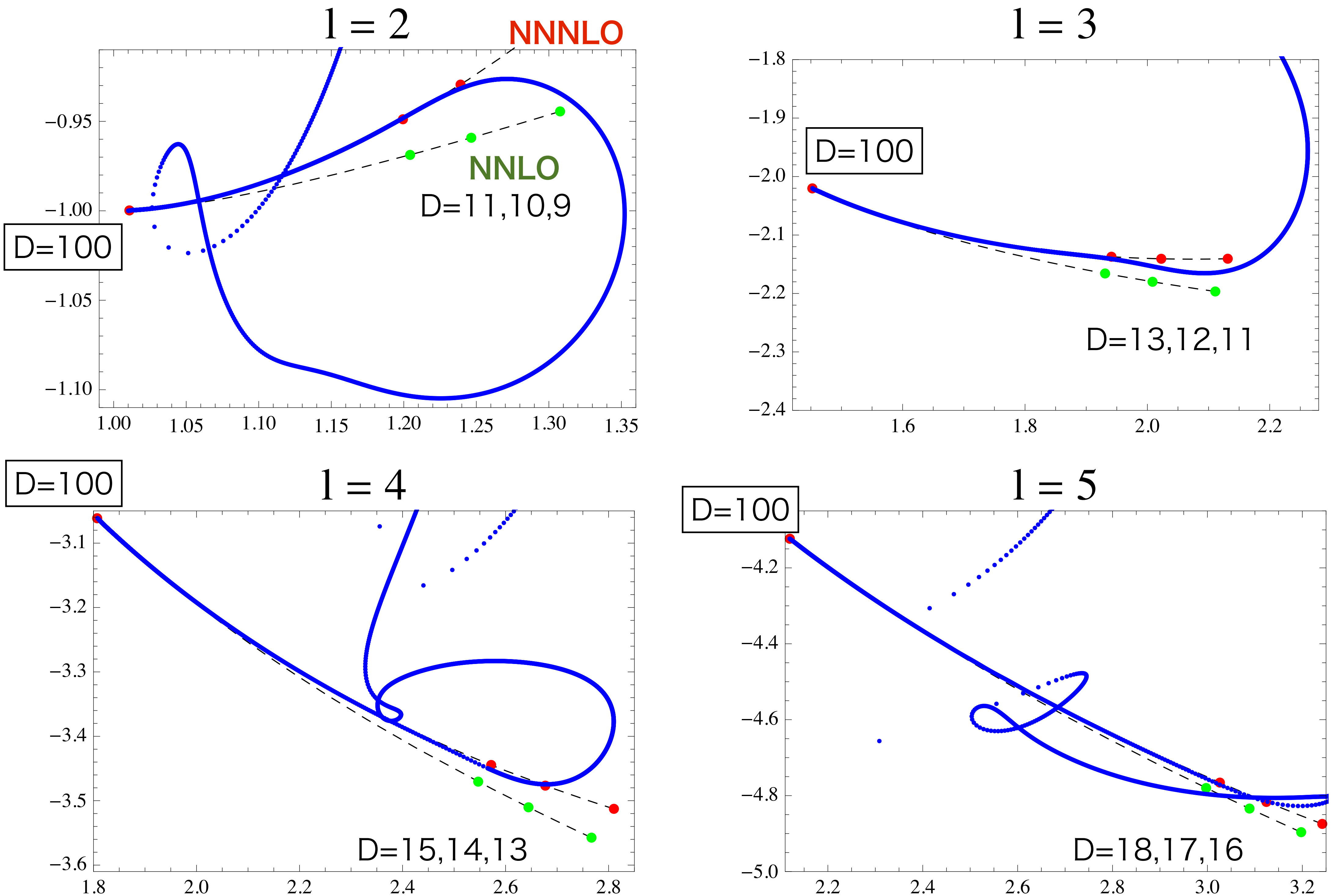
1/n^3まで(NNNLO)

Large D limit

# Sch-QNM ω~O(1) MODE

Data thanks to Dias.et.al. 2014 (arXiv:1402.7047)

Scalar mode、複素プロット



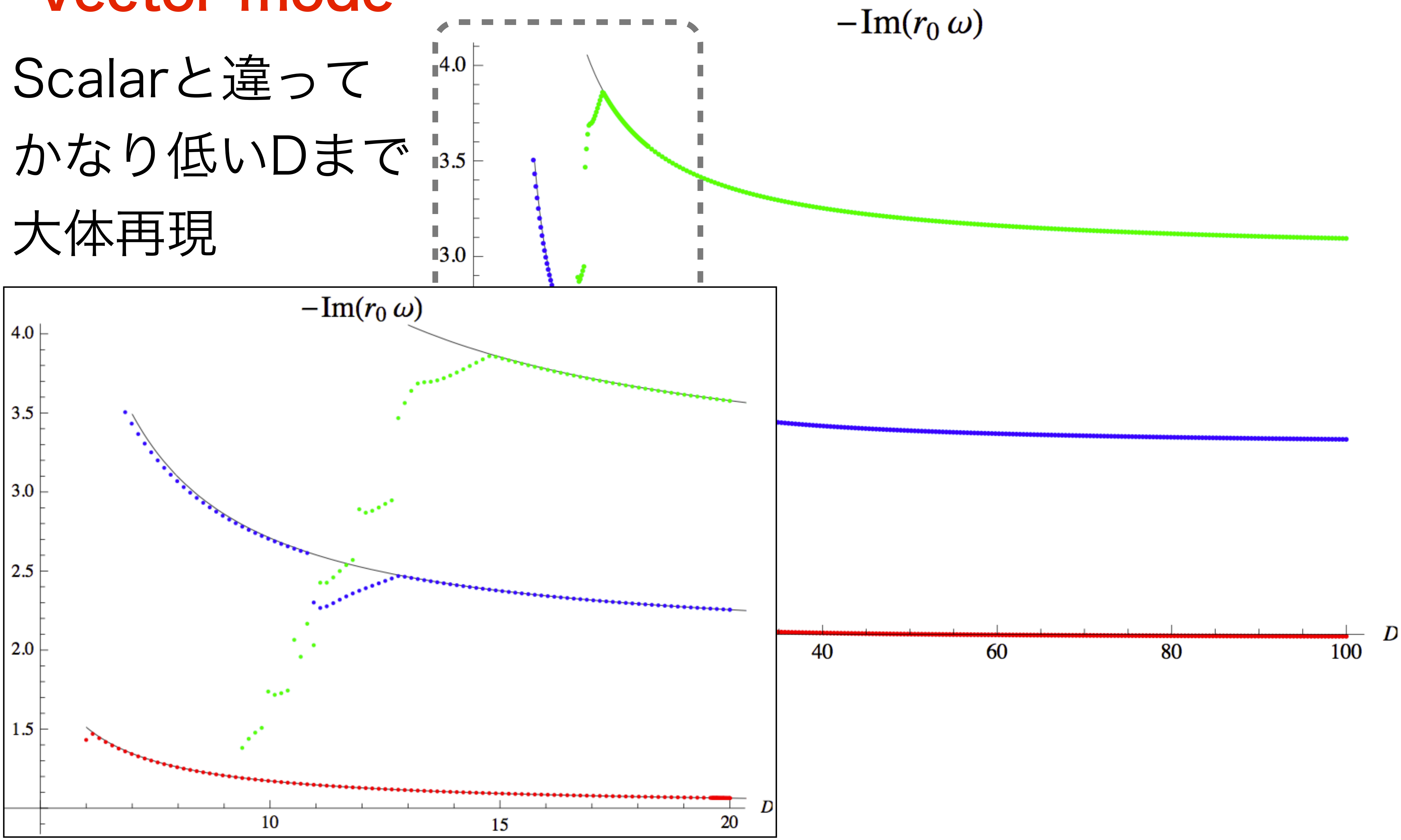
Large D limit

# Sch-QNM ω~O(1) MODE

**Data thanks to Dias.et.al. 2014 (arXiv:1402.7047)**

## Vector mode

Scalarと違って
かなり低いDまで
大体再現



# MP QNM $\omega$~O(1) MODE

(AdS-)Myers-Perry BHのQNMを次元極大展開で導出。
特にω〜O(1)の流体的モードに注目(不安定を見たいので)
簡単のため、奇数次元等角運動量の場合。

MPの摂動方程式は解析的に解けないとされてきたが

- D=∞において摂動方程式はDecouple→解ける
  D=∞でのMPBH ≈ D=∞でのBoosted Sch BH
  Emparan. et.al. (2013)
- 二種類の不安定の存在(定常軸対称、Barモード)
- AdS-MP BHについても定性的に同じ結果

# 漸近UBS解：Leading order

$$
\begin{aligned}
M(z) = &\, 1+\epsilon\cos(z/\lambda)+\frac{1}{6}\epsilon^2\cos(2z/\lambda)+\epsilon^3\left(-\frac{7\cos(z/\lambda)}{288}+\frac{\cos(3z/\lambda)}{96}\right)\\
&+\epsilon^4\left(-\frac{1}{96}+\frac{\cos(2z/\lambda)}{72}+\frac{\cos(4z/\lambda)}{4320}\right)+\epsilon^5\left(-\frac{341\cos(z/\lambda)}{82944}+\frac{\cos(3z/\lambda)}{360}+\frac{\cos(5z/\lambda)}{414720}\right)\\
&+\epsilon^6\left(-\frac{11}{3456}+\frac{8993\cos(2z/\lambda)}{2488320}+\frac{11\cos(4z/\lambda)}{86400}-\frac{\cos(6z/\lambda)}{29030400}\right)\\
&+\epsilon^7\left(-\frac{729281\cos(z/\lambda)}{597196800}+\frac{10631\cos(3z/\lambda)}{11059200}+\frac{\cos(5z/\lambda)}{544320}+\frac{17\cos(7z/\lambda)}{4180377600}\right)\\
&+\epsilon^8\left(-\frac{7411}{6635520}+\frac{530003\cos(2z/\lambda)}{447897600}+\frac{1769\cos(4z/\lambda)}{29030400}-\frac{11\cos(6z/\lambda)}{2438553600}-\frac{19\cos(8z/\lambda)}{43893964800}\right)\\
&+\epsilon^9\left(-\frac{187129907\cos(z/\lambda)}{429981696000}+\frac{147708887\cos(3z/\lambda)}{401316249600}+\frac{7247\cos(5z/\lambda)}{6242697216}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{31\cos(7z/\lambda)}{16721510400}+\frac{229\cos(9z/\lambda)}{4682022912000}\right)
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

$$
\lambda = 1+\frac{1}{24}\epsilon^2-\frac{25}{2304}\epsilon^4+\frac{9041}{2488320}\epsilon^6+\frac{1298597}{955514880}\epsilon^8.
$$

# 漸近UBS解：Next-to-Leading order

$$\tilde{M}_1 = 1 - \zeta(2) + \epsilon\left(\frac{1}{2} + 2\ln 2\right)\cos(z/\lambda) + \frac{\epsilon^2}{2}\left(\zeta(2) + \frac{8\ln 2 - 1}{6}\cos(2z/\lambda)\right)$$
$$+\epsilon^3\left(\frac{1}{576}(71 - 124\ln 2)\cos(z/\lambda) + \frac{1}{192}(36\ln 2 - 25)\cos(3z/\lambda)\right)$$
$$+\frac{\epsilon^4\left(-75\cos(2z/\lambda) + (8\ln 2 - 13)\cos(4z/\lambda) + 90\right)}{1080} + \mathcal{O}(\epsilon^5). \tag{B.9}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + 2\ln 2 + \frac{\epsilon^2}{48}(-17 + 4\ln 2) + \frac{-443 + 100\ln 2}{4608}\epsilon^4$$
$$+\frac{-166189 + 36164\ln 2}{4976640}\epsilon^6 + \frac{-24585475 + 5194388\ln 2}{1911029760}\epsilon^8$$

$$\lambda = 4^{\frac{1}{n}}\left[1 + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{24} - \frac{17}{48n}\right)\epsilon^2 + \left(\frac{25}{2304} - \frac{443}{4608n}\right)\epsilon^4\right.$$
$$\left. + \left(\frac{9041}{2488320} - \frac{166189}{4976640n}\right)\epsilon^6 + \left(\frac{1298597}{955514880} - \frac{4917095}{382205952n}\right)\epsilon^8\right]$$