部屋とWeyl群とわたし（β 版）

橋本 義武

2005/07/11–15　中大集中講義より

1　ルート系

1.1　ルート系

□　V を有限次元 実ベクトル空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を V 上の正定値対称双線型形式とし，対応する norm を $\|\cdot\|$ とする．

$\alpha\in V\setminus\{0\}$ に対し，α に直交する超平面 H_α に関する **鏡映** $s_\alpha : V\to V$ は，

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle\alpha,\, x\rangle}{\langle\alpha,\, \alpha\rangle}\alpha$$

と書ける．

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle\alpha,\,\alpha\rangle}$$

とおくと，

$$s_\alpha(x) = x - \langle\alpha^\vee,\, x\rangle\alpha.$$

定義　V を張る有限部分集合 $R\subset V\setminus\{0\}$ が **ルート系** であるとは，

1. 任意の $\alpha\in R$ に対し，$s_\alpha(R)\subset R$
2. 任意の $\alpha,\beta\in R$ に対し，$\langle\alpha^\vee,\,\beta\rangle\in\mathbb{Z}$

をみたすこと．R の元を **ルート** と言う．

□　$\alpha\in R$ に対し，$-\alpha = s_\alpha(\alpha)\in R$,　$s_{-\alpha} = s_\alpha$.

□　$\alpha,\beta\in R$ に対し，$s_{s_\alpha(\beta)}s_\alpha = s_\alpha s_\beta$.

1.2　Weyl 群

定義　ルート系 R に対し，$T=\{s_\alpha\mid\alpha\in R\}$ の生成する $GL(V)$ の部分群 $W=W(R)$ を R の **Weyl 群** と言う．

□　W は R に作用する．R は V を張る有限集合なので，W は有限群である．

1.3　幾何学的量子化との類似

■　$T\subset W$ は $R/\{\pm1\}$ と同一視される．W は adjoint により T に作用する．W の R への作用はその持ち上げである．

■ W を Lie 群，T を coadjoint orbit，R をその上の $U(1)$ 主束に見立てると，幾何学的量子化の状況に似ている．

1.4 部屋

定義 ルート系 R に対し，$V \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_\alpha$ の連結成分を **部屋** と言う．

定義 部屋 C に対し，$\overline{C} \cap H_\alpha$ の張る部分ベクトル空間が H_α であるとき，H_α を C の **壁** と言う．

定義 直交する超平面 H_α が C の壁であって，$x \in C$ に対し $\langle \alpha, x \rangle > 0$ となるようなルート α を **単純ルート** と言う．部屋 C に対する単純ルート全体の集合を $B(C)$ と書く．このとき，

$$C = \bigcap_{\alpha \in B(C)} \{x \in V \mid \langle \alpha, x \rangle > 0\}.$$

1.5

定義 部屋 C を固定し，

$$S = \{s_\alpha \in W \mid H_\alpha : C \text{ の壁 } \} = \{s_\alpha \in W \mid \alpha \in B(C)\}$$

とおく．

□ 任意の点 $x \in V$ に対し，S の元の積 w があって，$w(x) \in \overline{C}$.

$\because$) $a \in C$ を固定する．$x \notin \overline{C}$ ならば，ある $\alpha \in B(C)$ に対し

$$\|s_\alpha(x) - a\| < \|x - a\|.$$

一方 W は有限群なので，作用の orbit も有限個． □

□ もう 1 つの部屋 C' に対し，S の元の積 w があって，$w(C') = C$.

$\because$) $x \in C'$ に対し，S の元の積 w があって，$w(x) \in \overline{C}$. このとき $w(C') = C$. □

□ 任意の $\alpha \in R$ に対し，H_α は ある部屋の壁である．

$\because$) $x \in H_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \in R,\, \beta \neq \pm\alpha} H_\beta$ はある部屋 C' の閉包に属する．このとき H_α は C' の壁である． □

定理　S は W を生成する.

$\because$) 任意の $\alpha \in R$ に対し，s_α が S の元の積で書ければよい.

　超平面 H_α は ある部屋 C' の壁であり，S の元の積 w があって $w(C') = C$. よって s_α は S の元の積で書ける. $\square$

定理　部屋 C の壁 H に関する鏡映 $s \in S$ に対し，$w \in W$ であって $w(C)$ が H について C と同じ側にあるようなもの全体の集合を P_s とおくと，

1. $1 \in P_s$
2. $w \in P_s$ ならば $sw \notin P_s$.
3. $w \in P_s$, $ws' \notin P_s$ $(s' \in S)$ ならば $sw = ws'$.

$\because$) 1, 2 は明らか. 3 を示す.

s, s' が C の壁 H, H' に関する鏡映だとする.

仮定より，$w(C), ws'(C)$ は H について反対側にある.

よって $C, s'(C)$ は $w^{-1}(H)$ について反対側にある.

このとき $H' = w^{-1}(H)$. よって $sw = ws'$. $\square$

2　Coxeter 系

2.1　設定

□　以下，W を部分集合 S で生成される群とし，S の元の位数はすべて 2 であるとする．

□　$w \in W$ の位数，S に関する長さをそれぞれ

$$\mathrm{ord}(w) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \qquad l(w) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

と書く．

■　$s \in S,\ w \in W$ に対し，$|l(sw) - l(w)| \leq 1,\ |l(ws) - l(w)| \leq 1$

2.2　Coxeter 系

定義　(W, S) で次の条件 (P) をみたすものを **Coxeter 系** と言い，特に W を **Coxeter 群** と言う．

(P)　W の部分集合の族 $(P_s)_{s \in S}$ があって，

1. $1 \in P_s$
2. $w \in P_s$ ならば $sw \notin P_s$.
3. $w \in P_s,\ ws' \notin P_s\ (s' \in S)$ ならば $sw = ws'$.

■　ルート系の Weyl 群は Coxeter 群．

2.3　長さの条件

□　(W, S) を Coxeter 系とする．

命題　任意の $w \in W,\ s \in S$ に対し $l(sw) \neq l(w)$ であり，定義の $(P_s)_{s \in S}$ は，

$$P_s = \{w \in W \mid l(sw) > l(w)\}.$$

$\because$)　$w \notin P_s$ の場合，$w = s_1 \cdots s_n\ (s_1, \ldots, s_n \in S)$ に対し，

$$w_0 = 1, \qquad w_j = s_1 \cdots s_j$$

とおく．$w_0 = 1 \in P_s,\ w_n = w \notin P_s$ ゆえ，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$w_{j-1} \in P_s, \qquad w_j = w_{j-1} s_j \notin P_s.$$

よって定義より $sw_{j-1} = w_{j-1} s_j$. すなわち

$$s s_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

ゆえに $sw = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n$. 特に $l(sw) < l(w)$.

　$w \in P_s$ の場合，$sw \notin P_s$. よって第 1 の場合より，$l(w) < l(sw)$.　□

系　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，$l(sw) > l(w),\ l(sws') \leq l(ws')$ ならば $sw = ws'$.

系　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，$l(sws') > l(ws'),\ l(sw) \leq l(w)$ ならば $sw = ws'$.

系　$w \in W,\ s \in S$ に対し，$l(sw) \neq l(w)$.

系　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，$l(sw) = l(ws'), l(sws') = l(w)$ ならば $sw = ws'$.

$\because$) $l(sw) > l(w), l(sw) < l(w)$ のいずれの場合も正しい．　$\square$

2.4　同値な定義

定理　条件 (P) は次に同値：

(P')　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

$$l(sw) > l(w), \qquad l(sws') \leq l(ws')$$

ならば，$sw = ws'$.

(F)　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

$$l(sws') \leq l(sw) = l(ws') = l(w) + 1$$

ならば，$sw = ws'$.

(F')　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

1. $l(sw) \neq l(w)$
2. $l(sw) = l(ws'),\ l(sws') = l(w)$ ならば $sw = ws'$.

(E)　$w \in W,\ s \in S,\ l(sw) \leq l(w) = n$ とすると，最短表示

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1, \ldots, s_n \in S)$$

に対し，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

(E')　$w \in W,\ s \in S,\ l(sw) \leq l(w)$ とすると，

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1, \ldots, s_n \in S)$$

に対し，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

2.5　証明

■　(P) のもとで (P'), (F), (F'), (E') がなりたつことはすでに見た.

■　(E') ⇒ (E), (P') ⇒ (F), (F') ⇒ (F) はあきらか.

□　(P') ⇒ (P)：$P_s = \{w \mid l(sw) > l(w)\}$ とおけばよい.

□　(F) ⇒ (E)：$l(w)$ に関する帰納法.
$l(w) = 0$ の場合はあきらか.
$l(sw) \leq l(w)$ とする．最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$w' = s_1 \cdots s_{n-1}$ も最短表示で,

$$l(sw's_n) \leq l(w's_n) = l(w') + 1.$$

1. $l(sw') \leq l(w')$ の場合，帰納法の仮定より,

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1}s_j \qquad (1 \leq j \leq n-1).$$

2. $l(sw') = l(w') + 1$ の場合，(F) より $sw' = w's_n$. すなわち

$$ss_1 \cdots s_{n-1} = s_1 \cdots s_{n-1}s_n.$$

□　(E) ⇒ (P')：$l(sw) > l(w)$, $l(sws') \leq l(ws')$ とする.
(E) より $l(sws') < l(ws')$.
$|\,l(sw) - l(sws')| \leq 1$ なので，$l(ws') > l(w)$. よって最短表示

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1, \ldots, s_n \in S)$$

に対し,

$$ws' = s_1 \cdots s_n s'$$

も最短．(E) より,

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1}s_j \quad \text{or} \quad ss_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_n s'.$$

前者は $w = s_1 \cdots s_n$ の最短性に反するので，後者が成立，すなわち $sw = ws'$.

3　Bruhat 順序

3.1　最短表示の変形

□　(W, S) を Coxeter 系とする．$w \in W$, $l(w) = n$ に対し，w の最短表示全体の集合

$$\Gamma_0(w) = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_1 \cdots s_n = w\}$$

を考える．

□　$\Gamma_0(w)$ の元を頂点とし，2 点 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathbf{s}' = (s_1', \ldots, s_n') \in \Gamma_0(w)$ で

1. $s_1 = s_1'$ または $s_n = s_n'$
2. $\mathbf{s} = (s, s', s, s', \ldots)$, $\mathbf{s}' = (s', s, s', s, \ldots)$

であるものどうしを結んでグラフ $\Gamma(w)$ をつくる．

定理　$\Gamma(w)$ は連結．

$\because$) $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathbf{s}' = (s_1', \ldots, s_n') \in \Gamma_0(w)$ を第 1 のタイプの辺によってはつながらない 2 点とする．

　このとき $\Gamma_0(w)$ は $(s_1, *, \ldots, *, s_n')$, $(s_1', *, \ldots, *, s_n)$ という形の元をもたない．

　また，$(s_1, \ldots)$, $(s_1', \ldots)$ という形の 2 点は第 1 のタイプの辺によってはつながらない．

　これに注意すると，$l(s_1 w), l(s_1' w) \leq l(w)$ なので，(E) より，

$$s_1' s_1 \cdots s_{n-1} = s_1 \cdots s_{n-1} s_n, \qquad s_1 s_1' \cdots s_{n-1}' = s_1' \cdots s_{n-1}' s_n'.$$

よって

$$(s_1', s_1, \cdots, s_{n-1}), \quad (s_1, s_1', \cdots, s_{n-1}') \in \Gamma_0(w)$$

で，この 2 点も第 1 のタイプの辺によってはつながらない．

　そこで同様の操作をつづけて，$\Gamma_0(w)$ の点

$$\begin{gathered}
(s_1, s_1', s_1, \cdots, s_{n-1}), \quad (s_1', s_1, s_1', \cdots, s_{n-1}'), \\
(s_1', s_1, s_1', s_1, \cdots, s_{n-2}), \quad (s_1, s_1', s_1, s_1', \cdots, s_{n-2}'), \\
\ldots, \quad \ldots, \\
(s_1', s_1, s_1', s_1, s_1', s_1, \cdots), \quad (s_1, s_1', s_1, s_1', s_1, s_1', \cdots)
\end{gathered}$$

がえられ，最後の 2 点が第 2 のタイプの辺で結ばれる．　□

3.2　Coxeter 群の部分群

■　(W, S) を Coxeter 系とする．

□　$w \in W$ の最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，集合 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を考える．この集合は最短表示の取り方によらない．

$\because$) $l(w)$ に関する帰納法．

$(s_1, \ldots, s_n)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) \in \Gamma_0(w)$ に対し，

1. $s_1 = \hat{s}_1$ または $s_n = \hat{s}_n$ の場合は帰納法の仮定より．
2. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots)$ の場合は正しい．

よって $\Gamma(w)$ の連結性より結論がみちびかれる．　□

■　$S_w = \{s_1, \ldots, s_n\}$ とおく．

■　$S_{w^{-1}} = S_w$.

$s \in S$, $w \in W$ に対し

$$\begin{cases} S_{sw} = \{s\} \cup S_w & l(sw) > l(w) \\ S_w = \{s\} \cup S_{sw} & l(sw) < l(w). \end{cases}$$

のいずれかがなりたつ．いずれにしても $S_{sw} \subset \{s\} \cup S_w$.

□　$X \subset S$ によって生成される W の部分群を W_X とすると，

$$W_X = \{w \mid S_w \subset X\}.$$

□　$W_X \cap S = X$. よって写像 $X \longmapsto W_X$ は単射．

□　$w \in W_X$ の X に関する長さは S に関する長さに等しい．

3.3　Bruhat 順序

定義　$x, w \in W$ に対し，最短表示 $x = s'_1 \cdots s'_m$, $w = s_1 \cdots s_n$ があって，$(s'_1, \ldots, s'_m)$ が $(s_1, \ldots, s_n)$ の部分列となるとき，$x \leq w$ と定義する．

定理　この関係は半順序．

$\because$) 推移律のみが非自明．

$(s'_1, \cdots, s'_m) \in \Gamma_0(x)$ が $(s_1, \cdots, s_n) \in \Gamma_0(w)$ の部分列であるとする．このとき $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) \in \Gamma_0(w)$ に対し，部分列 $(s''_1, \cdots, s''_m) \in \Gamma_0(x)$ が存在することを示せばよい．

$l(w)$ に関する帰納法によって証明する．

1. $s_1 = \hat{s}_1$ または $s_n = \hat{s}_n$ の場合は帰納法の仮定より．
2. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots)$ の場合は正しい．

よって $\Gamma(w)$ の連結性より結論がみちびかれる．　□

4　BN 対

4.1　定義

□　G を群，B, N を G の部分群とし，これらが次をみたすとする：

1. G は $B \cup N$ によって生成される．
2. (a) $T = B \cap N$ は N の正規部分群．
   (b) 剰余群 $W = N/T$ は $S \subset W$ によって生成される．
   (c) S の元の位数はすべて 2.
3. $C(w) = BwB$ $(w \in W)$ とおく．
   (a) $s \in S$, $w \in W$ に対し，$C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw)$.
   (b) $s \in S$ に対し，$C(s)C(s) \neq B$.

このとき，(G, B, N, S) を **Tits 系** あるいは **BN 対** と言う．

□　S は B, N から一意にきまる：

$$S = \{w \in W \smallsetminus \{1\} \mid B \cup C(w) \text{ is a subgroup of } G\}.$$

□　(W, S) は Coxeter 系．

4.2

■　$C(w) = BwB$ は次をみたす：

$$C(1) = B, \qquad C(w^{-1}) = C(w)^{-1}, \qquad C(ww') \subset C(w)C(w').$$

　$C(w) \neq C(w')$ ならば $C(w) \cap C(w') = \varnothing$.

■　$C(sw) \subset C(s)C(w)$ および 3(a) より，

$$C(s)C(w) = C(sw) \quad \text{or} \quad C(s)C(w) = C(w) \cup C(sw).$$

$w = s$ のとき，3(b) より第 1 の場合はなく，

$$C(s)C(s) = B \cup C(s).$$

したがって $s^{-1} = s$ に注意にすると，

□　$B \cup C(s) = B\{1, s\}B$ は G の部分群．

■ 3(a) をくりかえし適用すると，$s_1, \ldots, s_n \in S,\ w \in W$ に対し，

$$C(s_1 \cdots s_n)C(w) \subset C(s_1)\cdots C(s_n)C(w) \subset \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{i(1)<\cdots<i(k)} C(s_{i(1)}\cdots s_{i(k)}w).$$

したがって，$X \subset S$ で生成される W の部分群を W_X とすると，

$$P_X \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{w \in W_X} C(w)$$

は G の部分群．B をふくむ．

□ 逆に，B をふくむ G の部分群はこのようなものにかぎる．

4.3 定理

□ $G = \bigsqcup_{w \in W} C(w)$.

∵) $\bigcup_{w \in W} C(w)$ は G の部分群．B, N をふくむので，G に一致する．
よって $w \neq w'$ ならば $C(w) \neq C(w')$ を言えばよい．
$l(w) \geq l(w')$ とする．$n = l(w')$ に関する帰納法によって示す．
$n = 0$ のときは明らか．$w' = 1$ より $C(w') = B$. $C(w) \cap B \neq \varnothing$ ならば $w = 1$.
$n \geq 1$ の場合，$l(sw') = n - 1$ となる $s \in S$ がある．
$w \neq w'$ より $sw \neq sw'$. また，長さが異なるので $w \neq sw'$.
よって帰納法の仮定より，

$$C(w) \cap C(sw') = \varnothing, \qquad C(sw) \cap C(sw') = \varnothing.$$

よって $C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw)$ より，$C(s)C(w) \cap C(sw') = \varnothing$.
一方 $C(sw') \subset C(s)C(w')$ なので，$C(w) \neq C(w')$. □

4.4 定理

□ (W, S) は Coxeter 系．

∵)

$$P_s = \{w \in W \mid C(s)C(w) = C(sw)\}, \qquad s \in S$$

とおく．$(P_s)_{s \in S}$ が条件 (P) をみたすことを言えばよい．

1. $1 \in P_s$ は明らか．

2. $w \in P_s \cap sP_s$ とすると，$C(s)C(w) = C(sw), \quad C(s)C(sw) = C(w)$.

$$\therefore \qquad C(s)C(s)C(w) = C(w).$$

一方 $C(s)C(s) = B \cup C(s)$ より，

$$C(s)C(s)C(w) = C(w) \cup C(s)C(w) = C(w) \cup C(sw).$$

よって $C(sw) = C(w)$. これは定理 4.3 に反する．

ゆえに $P_s \cap sP_s = \varnothing$.

3. $s,\ s' \in S,\ w \in P_s,\ ws' \notin P_s$ とする．

$$C(s)C(w) = C(sw), \qquad C(s)C(ws') = C(ws') \cup C(sws').$$

一方（逆元で考えると）$C(sw)C(s') \subset C(sw) \cup C(sws')$.

$$C(s)C(w)C(s') = C(sw)C(s') \subset C(sw) \cup C(sws').$$

$$C(s)C(w)C(s') \supset C(s)C(ws') = C(ws') \cup C(sws').$$

$$\therefore \qquad C(ws') \cup C(sws') \subset C(sw) \cup C(sws').$$

$ws' \neq sws'$ なので，定理 4.3 より $C(ws') \neq C(sws')$.

よって $C(ws') = C(sw)$. 定理 4.3 より $ws' = sw$.

□

□ **系** $C(s)C(w) = C(sw) \iff l(sw) = l(w) + 1.$

4.5 放物型部分群

□ **補題** P を B をふくむ G の部分群，$w \in W$ とすると，$C(w^{-1})C(w) \subset P$ ならば $C(w) \subset P$.

$\because$) $l(w)$ に関する帰納法.

$l(w) = 0$ の場合，$w = 1$. よって $C(w) = B \subset P$.

$l(w) \geq 0$ の場合，$s \in S$ があって $l(sw) = l(w) - 1$. よって $C(w) = C(s)C(sw)$.

$$\begin{aligned} C(w^{-1})C(w) &= C((sw)^{-1})C(s)C(s)C(sw) \\ &= C((sw)^{-1})C(sw) \cup C((sw)^{-1})C(s)C(sw) \\ &= C((sw)^{-1})C(sw) \cup C((sw)^{-1})C(w). \end{aligned}$$

よって $C((sw)^{-1})C(sw) \subset P$ となり，帰納法の仮定より $C(sw) \subset P$.

$C((sw)^{-1})C(w) \subset P$ より，$C(w) \subset P$. □

□ **系** P を B をふくむ G の部分群とすると，$g^{-1}Pg = P$ ならば $g \in P$.

$\because$) $g \in C(w),\ w \in W$ とすると，仮定より $C(w^{-1})C(w) \subset P$. よって $C(w) \subset P$. ゆえに $g \in P$. □

□　**系**　P を B をふくむ G の部分群とすると，写像

$$G/P \ni [g] \longmapsto gPg^{-1} \in \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$$

は全単射.

□　**定理**　$X \subset S$ に P_X を対応させる写像は，$\mathfrak{P}(S)$ から B をふくむ G の部分群全体の集合への全単射.

$\because$)　定理 4.3 より，$W_X \longmapsto G_X$ は単射.

(W, S) は Coxeter 系なので，$X \longmapsto W_X$ は単射.

よって $X \longmapsto P_X$ は単射.

P を B をふくむ G の部分群とする．P は B-double coset の和.

$$U = \{w \in W \mid C(w) \subset P\}$$

とおくと，定理 4.3 より $P = \bigsqcup_{w \in U} C(w)$.

$$X = U \cap S = \{s \in S \mid C(s) \subset P\}$$

とおく．$P_X \subset P$.

逆に $g \in P$ とする．$w \in U$ があって $g \in C(w) \subset P$.

$w \in W_X$ が言えれば，$C(w) \subset P_X$. ゆえに $g \in P_X$.

したがって $P_X = P$ であり，$X \longmapsto P_X$ が全射であることが言える.

そこで，$w \in W_X$ を $l(w)$ に関する帰納法によって示す.

$l(w) = 0$ の場合は明らか.

$l(w) \geq 1$ とすると，$s \in S$ があって $l(sw) = l(w) - 1$.

このとき $C(s)C(sw) = C(w) \subset P$.

$$\begin{aligned} C(w^{-1})C(sw) &= C((sw)^{-1})C(s)C(sw) \\ &\subset C(w^{-1}s)C(s)C(s)C(sw) = C(w^{-1})C(w) \subset P. \end{aligned}$$

ゆえに $C(sw) \subset P$. よって $C(s) \subset P$.

帰納法の仮定より，$sw \in W_X$. また $s \in X$. よって $w \in W_X$.　□

□　**系**

$$S = \{w \in W \setminus \{1\} \mid B \cup C(w) \text{ is a subgroup of } G\}.$$

$\because$)　$\subset$ はすでに示した．$\supset$ を示す.

$w \neq 1$,　$B \cup C(w)$ が部分群とする.

$X = \{1, w\} \cap S$ とおくと，$P_X = B \cup C(w) \neq B$.

よって $X \neq \varnothing$ なので，$w \in S$.　□

5 Coxeter 行列

5.1 同値な定義 (2)

定理 (W, S) が Coxeter 系であることは，次の諸条件に同値.

(R)

1. $s \in S,\ w \in W$ に対し，$l(sw) = l(w) \pm 1$
2. $w \in W$ に対し，グラフ $\Gamma(w)$ は連結.

(U) 任意の群 G と写像 $f : S \to G$ に対し，

$$(f(s)f(s'))^{\mathrm{ord}(ss')} = 1, \qquad s,\ s' \in S$$

ならば，f は W から G への準同型に拡張される.
(C) 自然な全射準同型

$$\widetilde{W} = \langle S;\ (ss')^{\mathrm{ord}(ss')} = 1\ (s,\ s' \in S,\ \mathrm{ord}(ss') < \infty)\rangle \longrightarrow W$$

が同型.

(A) $T = \bigcup_{w \in W} wSw^{-1},\ R = T \times \{1, -1\}$ とおくと，W の R への作用

$$U_w : R \to R, \qquad w \in W$$

で，任意の $s \in S$ に対し

$$U_s(t, \epsilon) = \begin{cases} (sts^{-1},\ -\epsilon) & s = t \\ (sts^{-1},\ \epsilon) & s \neq t \end{cases}$$

をみたすものが存在する.

(D) $w \in W,\ w = s_1 \cdots s_n\ (s_1, \ldots, s_n \in S),\ n > l(w)$ に対し，$1 \leq i < j \leq n$ があって，

$$w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_n.$$

定義 このとき，$\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に値をとる行列 $(m(s, s'))_{s,\, s' \in S}$ を

$$m(s, s') \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ord}(ss')$$

によって定義し，これを **Coxeter 行列** とよぶ.

■ (C) は Coxeter，(U) は Universality，(A) は Action，(D) は Deletion，(E) は Exchange，(R) は Reduced，(F) は Folding，(P) は Partition から名づけた.

5.2　証明

■　(R) ⇒ (U)：$f: S \to G$ を条件をみたす写像とする．$s \in S$ は位数 2 だから，$f(s)^2 = 1$. 最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$f(s_1) \cdots f(s_n)$ は w のみによる．なぜなら，

1. $n = 1$ のときは明らか.
2. 第 1 のタイプの辺について不変であることは，$n = l(w)$ が 1 つ少ない場合に帰着される.
3. 第 2 のタイプの辺について不変であることは，f の条件からしたがう.

よって $\hat{f}(w) = f(s_1) \cdots f(s_n)$ により f の W への拡張 $\hat{f}: W \to G$ がえられる．これが準同型であることを示せばよい．S は W を生成するので，それには

$$\hat{f}(sw) = f(s)\hat{f}(w), \qquad s \in S,\ w \in W$$

を言えばよい．(R)-1 より次の 2 つの場合がある：

1. $l(sw) > l(w)$ の場合，最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$sw = ss_1 \cdots s_n$ も最短表示. よって，
$$\hat{f}(sw) = f(s)f(s_1) \cdots f(s_n) = f(s)\hat{f}(w).$$
2. $l(sw) < l(w)$ の場合，同様に $\hat{f}(w) = f(s)\hat{f}(sw)$. よって $f(s)^2 = 1$ より結果がしたがう.

■　(U) ⇒ (C)：(U) を $G = \widetilde{W}$ および自然な写像 $S \to \widetilde{W}$ に適用すると，全射準同型 $W \to \widetilde{W}$ がえられる．これと自然な全射準同型 $\widetilde{W} \to W$ の合成 $W \to W$ は，$S \subset W$ 上恒等写像なので恒等写像．よって，$\widetilde{W} \to W$ は同型.

■　(C) ⇒ (U)：$f: S \to G$ は $\widetilde{W}$ 上の準同型に拡張される．これと $\widetilde{W} \to W$ の逆を合成すればよい.

■　(U) ⇒ (A)：$s, s' \in S$ に対し，$m = \mathrm{ord}(ss')$ とおく．$(U_s U_{s'})^m = \mathrm{id}$ を言えばよい．$(ss')^m = 1$ より，

$$(U_s U_{s'})^m(t, \epsilon) = (t, \pm\epsilon).$$

第 2 成分の符号は，

$$\begin{aligned} a =& \sharp\{j \mid s' = (ss')^j t (ss')^{-j},\ 0 \le j < m\} \\ &+ \sharp\{i \mid s = s'(ss')^i t (ss')^{-i} s'^{-1},\ 0 \le i < m\} \end{aligned}$$

とおくとき，$(-1)^a$ であたえられる．

$$t_k = \begin{cases} (ss')^{-j} s' (ss')^j & k = 2j+1 \\ (ss')^{-j} s'^{-1} ss' (ss')^j & k = 2(j+1) \end{cases} \qquad 1 \le k \le 2m$$

とおくと，$a = \sharp\{k \mid t = t_k,\ 1 \le k \le 2m\}$ だが，一方 $t_k = (s's)^{k-1}s'$. よって $t_{k+m} = t_k$ なので，a は偶数で，$(-1)^a = 1$.

■ (A) $\Rightarrow$ (D)：$w \in W$ に対し，

$$T_w = \{t \in T \mid U_w(t,\, 1) = (wtw^{-1},\, -1)\}$$

とおく．表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$t_1, \ldots, t_n \in T$ を

$$t_1 = s_1, \quad t_j s_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j$$

によって定義すると，$T_{w^{-1}} \subset \{t_1, \ldots, t_n\}$. したがって特に，$\sharp T_{w^{-1}} \leq l(w)$.

$t_1, \ldots, t_n$ が相異なるならば，$T_{w^{-1}} = \{t_1, \ldots, t_n\}$. ゆえに $n \leq l(w)$.

したがって，$n > l(w)$ ならば，ある $1 \leq i < j \leq n$ に対し $t_i = t_j$. よって，

$$\begin{aligned}
w &= s_1 \cdots s_j s_{j+1} \cdots s_n \\
&= t_j s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n \\
&= t_i s_1 \cdots s_{i-1} s_i \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n \\
&= s_1 \cdots s_i s_i \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n \\
&= s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_n.
\end{aligned}$$

■ (D) $\Rightarrow$ (E)：最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$l(sw) \leq l(w)$ とすると，

$$sw = s_1 \cdots \hat{s}_j \cdots s_n \quad \text{or} \quad sw = s s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_n.$$

後者は $w = s_1 \cdots s_n$ が最短表示であることに反する．よって前者がなりたち，

$$s s_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

6　鏡映

6.1　Coxeter 行列の実現

□　**定理**　S を集合とし，$(m(s,\, s'))_{s,\, s' \in S}$ を $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に値をとる対称行列 で，

$$m(s,\, s') = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s = s'$$

をみたすものとすると，これはある Coxeter 系の Coxeter 行列になる．

■　これを示すには，次を言えばよい：

$$W = \langle S;\ (ss')^{m(s,\, s')} = 1\ (s,\, s' \in S,\ m(s,\, s') < \infty)\rangle$$

とおくと，自然な写像 $S \to W$ は単射である．$S \subset W$ と思うと，$m(s,\, s')$ は ss' の W における位数に等しい．

6.2　幾何学的実現

■　$\mathbb{R}$ ベクトル空間

$$V = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{R} e_s$$

に対称双線型形式

$$B(e_s,\, e_{s'}) = -\cos \frac{\pi}{m(s,\, s')}$$

をあたえる．

$B(e_s,\, e_s) = -\cos \pi = 1.$

$ss' = s's$ ならば，$m(s,\, s') = 2$ ゆえ $B(e_s,\, e_{s'}) = 0.$

$s \in S$ に対し，線型写像 $\sigma_s : E \to E$ を

$$\sigma_s(u) = u - 2B(u,\, e_s)e_s$$

であたえる．

■　$B(u,\, e_s) = 0$ ならば，$\sigma_s(u) = u.$

$$\begin{aligned}
\sigma_s(e_s) &= e_s - 2e_s = -e_s \\
(\sigma_s)^2(u) &= \sigma_s(u - 2B(u,\, e_s)e_s) \\
&= u - 2B(u,\, e_s)e_s - 2B(u - 2B(u,\, e_s)e_s,\, e_s)e_s \\
&= u - 2B(u,\, e_s)e_s - 2B(u,\, e_s)e_s + 4B(u,\, e_s)e_s = u \\
B(\sigma_s(u),\, \sigma_{s'}(v)) &= B(u - 2B(u,\, e_s)e_s,\, v - 2B(v,\, e_s)e_s) = B(u,\, v).
\end{aligned}$$

■　$s,\, s' \in S,\ s \neq s'$ とする．$m = m(s,\, s')$ とおく．$\sigma_s,\, \sigma_{s'}$ は $V_{s,\, s'} = \mathbb{R}e_s \oplus \mathbb{R}e_{s'}$ を保ち，$V_{s,\, s'}$ の直交補空間上では恒等写像.

■　$m < \infty$ の場合.

B は $V_{s,\,s'}$ 上 正定値．$\sigma_s, \sigma_{s'}$ は $V_{s,\,s'}$ 上でそれぞれ $e_s, e_{s'}$ に垂直な直線に関する鏡映.

$$B(e_s,\, e_{s'}) = -\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{m}\right)$$

より $e_s, e_{s'}$ のなす角は $\left(\pi - \dfrac{\pi}{m}\right)$.

このとき $\sigma_s\sigma_{s'}$ は $\dfrac{2\pi}{m}$ の回転．よって位数は m.

■　$m = \infty$ の場合.

$e_0 = e_s + e_{s'}$ とおくと，$B(e_0,\, e_s) = B(e_0,\, e_{s'}) = 0$.

よって $\sigma_s(e_0) = \sigma_{s'}(e_0) = e_0$.

$$\sigma_s\sigma_{s'}(e_s) = \sigma_s(e_s + 2e_{s'}) = \sigma_s(-e_s + 2e_0) = e_s + 2e_0,$$

$$\therefore \qquad (\sigma_s\sigma_{s'})^n(e_s) = e_s + 2ne_0.$$

よって $\sigma_s\sigma_{s'}$ の位数は ∞.

■　したがって $s \longmapsto \sigma_s$ から準同型 $\sigma : W \to O(V)$ がえられる.

$S \to W \to O(V)$ が単射なので $S \to W$ は単射.

$\sigma_s\sigma_{s'}$ の位数が $m(s,\, s')$ なので，$ss' \in W$ の位数も $m(s,\, s')$.　□

□　$\sigma : W \to O(V)$ は単射.

6.3　Tits の定理

■　$\sigma : W \to O(V)$ は $\sigma^* : W \to GL(V^*)$ を誘導する.

$$A_s = \{x^* \in V^* \mid \langle x^*,\, e_s\rangle > 0\}$$
$$C = \bigcap_{s\in S} A_s$$

とおく.

□　**定理（Tits）**　$w \in W$ が $C \cap w(C) \neq \varnothing$ をみたすならば，$w = 1$.

□　**系**　σ^*, σ は単射.

6.4　補題

□　$s, s' \in S,\ s \neq s',\ w \in \langle s,\, s'\rangle \subset W$ に対し，次のいずれか一方がなりたつ：

1. $w(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s$.
2. $w(A_s \cap A_{s'}) \subset sA_s$ かつ $l(sw) = l(w) - 1$.

∵) $S = \{s, s'\}$ の場合に帰着される．

$w \in \langle s, s' \rangle$ の $\{s, s'\}$ に関する長さは S に関する長さに等しいことに注意．

$m = m(s, s')$ とおく．

$e_s, e_{s'} \in V$ の双対基底を $\varepsilon, \varepsilon' \in V^*$ とすると，

$$\sigma_s^*(\varepsilon') = \varepsilon', \qquad \sigma_{s'}^*(\varepsilon) = \varepsilon.$$

1. $m < \infty$ の場合．

$$\begin{aligned} C, s'C, s'sC, s'ss'C, (s's)^2C, \ldots &\subset A_s, \\ sC, ss'C, ss'sC, (ss')^2C, \ldots, -C &\subset sA_s. \end{aligned}$$

2. $m = \infty$ の場合．

$\sigma_s^*, \sigma_{s'}^*$ が $\varepsilon, \varepsilon'$ を通る直線をたもつことに注意．

$$\begin{aligned} C, s'C, s'sC, s'ss'C, (s's)^2C, \ldots &\subset A_s, \\ sC, ss'C, ss'sC, (ss')^2C, \ldots &\subset sA_s. \end{aligned}$$

□

6.5 定理の証明

■ $l(w)$ に関する帰納法．

□ (P_n)：$w \in W,\ l(w) = n$ とする．

$s \in S$ に対し，次のいずれか一方がなりたつ：

1. $w(C) \subset A_s$.
2. $w(C) \subset sA_s$ かつ $l(sw) = l(w) - 1$.

□ (Q_n)：$w \in W,\ l(w) = n$ とする．

$s, s' \in S,\ s \neq s'$ に対し，$u \in \langle s, s' \rangle$ が存在して，

$$w(C) \subset u(A_s \cap A_{s'}), \qquad l(w) = l(u) + l(u^{-1}w).$$

■ (P_0)，(Q_0) は明らか．

■ (P_n) and $(\mathrm{Q}_n) \Rightarrow (\mathrm{P}_{n+1})$：$w \in W,\ l(w) = n + 1,\ s \in S$ とする．

$w = s'w',\ s' \in S,\ l(w') = l(w) - 1 = n$ と書ける．

1. $s' = s$ の場合，(P_n) を w' に適用すると，$w'(C) \subset A_s$.

   よって $w(C) = sw'(C) \subset sA_s,\ l(sw) = l(w') = l(w) - 1$.

2. $s' \neq s$ の場合，(Q_n) を w' に適用すると，$u \in \langle s, s' \rangle$ があって，

$$w'(C) \subset u(A_s \cap A_{s'}), \qquad l(w') = l(u) + l(u^{-1}w').$$

よって，$w(C) = s'w'(C) \subset s'u(A_s \cap A_{s'})$.

補題より，次の 2 つの場合がある：

(a) $s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset A_s$ の場合，$w(C) \subset A_s$.

(b) $s'u(A_s \cap A_{s'}) \subset sA_s$, $l(ss'u) = l(s'u) - 1$ の場合，$w(C) \subset sA_s$.

$$\begin{aligned} l(sw) = l(ss'w') &\leq l(ss'u) + l(u^{-1}w') \\ &= (l(s'u) - 1) + (l(w') - l(u)) \\ &= (l(s'u) - l(u) - 1) + l(w') \\ &\leq l(w') = l(w) - 1. \\ \therefore \qquad l(sw) &= l(w) - 1. \end{aligned}$$

■ (P_{n+1}) and $(\mathrm{Q}_n) \Rightarrow (\mathrm{Q}_{n+1})$：$w \in W$, $l(w) = n + 1$, $s, s' \in S$, $s \neq s'$ とする．

1. $w(C) \subset A_s \cap A_{s'}$ の場合，$u = 1$ とおけばよい．

2. $w(C) \not\subset A_s \cap A_{s'}$ の場合，$w(C) \not\subset A_s$ として一般性をうしなわない．

   (P_{n+1}) を w に適用すると，

$$w(C) \subset sA_s, \qquad l(sw) = l(w) - 1 = n.$$

   (Q_n) を sw に適用すると，$v \in \langle s, s' \rangle$ が存在して，

$$sw(C) \subset v(A_s \cap A_{s'}), \qquad l(sw) = l(v) + l(v^{-1}sw).$$

   よって，$w(C) \subset sv(A_s \cap A_{s'})$.

   $u = sv$ とおくと，

$$\begin{aligned} l(w) &\leq l(u) + l(u^{-1}w) = l(sv) + l(v^{-1}sw) \\ &\leq 1 + l(v) + l(v^{-1}sw) = 1 + l(sw) = l(w). \\ \therefore \qquad l(w) &= l(u) + l(u^{-1}w). \end{aligned}$$

■ $w \in W$, $w \neq 1$ とする．

$w = sw'$, $s \in S$, $w \in W$, $l(w) = l(w') + 1$ と書ける．

(P_n) を w' に適用すると，$w'(C) \subset A_s$.

したがって $w(C) = sw'(C) \subset sA_s$.

$C \subset A_s$, $A_s \cap sA_s = \varnothing$ より，$C \cap w(C) = \varnothing$. □

References

[Bo] ブルバキ，リー群とリー環３，東京図書，1970

[Br] K. S. Brown, *Buildings*, Springer, 1989