Iwahori-Hecke 環と Kazhdan-Lusztig 多項式（β版）

橋本 義武

2005/07/11–15　中大集中講義より

1　Coxeter 系

1.1　Coxeter 系

定義　(W, S) で次の条件 (P) をみたすものを **Coxeter 系** と言い，特に W を **Coxeter 群** と言う．

(P)　W の部分集合の族 $(P_s)_{s\in S}$ があって，

1. $1 \in P_s$
2. $w \in P_s$ ならば $sw \notin P_s$.
3. $w \in P_s$, $ws' \notin P_s$ $(s' \in S)$ ならば $sw = ws'$.

1.2　長さの条件

□　(W, S) を Coxeter 系とする．

命題　任意の $w \in W$, $s \in S$ に対し $l(sw) \neq l(w)$ であり，定義の $(P_s)_{s\in S}$ は，

$$P_s = \{w \in W \mid l(sw) > l(w)\}.$$

$\because$) $w \notin P_s$ の場合，$w = s_1 \cdots s_n$ $(s_1, \ldots, s_n \in S)$ に対し，

$$w_0 = 1, \qquad w_j = s_1 \cdots s_j$$

とおく．$w_0 = 1 \in P_s$, $w_n = w \notin P_s$ ゆえ，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$w_{j-1} \in P_s, \qquad w_j = w_{j-1}s_j \notin P_s.$$

よって定義より $sw_{j-1} = w_{j-1}s_j$. すなわち

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1}s_j.$$

ゆえに $sw = s_1 \cdots s_{j-1}s_{j+1} \cdots s_n$. 特に $l(sw) < l(w)$.

$w \in P_s$ の場合，$sw \notin P_s$. よって第 1 の場合より，$l(w) < l(sw)$.　□

系　$w \in W$, s, $s' \in S$ に対し，$l(sw) > l(w)$, $l(sws') \leq l(ws')$ ならば $sw = ws'$.

系　$w \in W$, s, $s' \in S$ に対し，$l(sws') > l(ws')$, $l(sw) \leq l(w)$ ならば $sw = ws'$.

系　$w \in W,\ s \in S$ に対し，$l(sw) \neq l(w)$.

系　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，$l(sw) = l(ws'),\ l(sws') = l(w)$ ならば $sw = ws'$.

$\because$) $l(sw) > l(w),\ l(sw) < l(w)$ のいずれの場合も正しい.　□

1.3　同値な定義

定理　条件 (P) は次に同値：

(P')　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

$$l(sw) > l(w), \qquad l(sws') \leq l(ws')$$

ならば，$sw = ws'$.

(F)　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

$$l(sws') \leq l(sw) = l(ws') = l(w) + 1$$

ならば，$sw = ws'$.

(F')　$w \in W,\ s,\ s' \in S$ に対し，

1. $l(sw) \neq l(w)$
2. $l(sw) = l(ws'),\ l(sws') = l(w)$ ならば $sw = ws'$.

(E)　$w \in W,\ s \in S,\ l(sw) \leq l(w) = n$ とすると，最短表示

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1,\ \ldots,\ s_n \in S)$$

に対し，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

(E')　$w \in W,\ s \in S,\ l(sw) \leq l(w)$ とすると，

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1,\ \ldots,\ s_n \in S)$$

に対し，$1 \leq j \leq n$ があって，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1} s_j.$$

1.4　証明

■　(P) のもとで (P'), (F), (F'), (E') がなりたつことはすでに見た.

■　(E') $\Rightarrow$ (E)，(P') $\Rightarrow$ (F)，(F') $\Rightarrow$ (F) はあきらか.

□　(P') $\Rightarrow$ (P)：$P_s = \{w \mid l(sw) > l(w)\}$ とおけばよい.

□　(F) ⇒ (E)：$l(w)$ に関する帰納法.

$l(w) = 0$ の場合はあきらか.

$l(sw) \leq l(w)$ とする．最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，$w' = s_1 \cdots s_{n-1}$ も最短表示で，

$$l(sw's_n) \leq l(w's_n) = l(w') + 1.$$

1. $l(sw') \leq l(w')$ の場合，帰納法の仮定より，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1}s_j \qquad (1 \leq j \leq n-1).$$

2. $l(sw') = l(w') + 1$ の場合，(F) より $sw' = w's_n$. すなわち

$$ss_1 \cdots s_{n-1} = s_1 \cdots s_{n-1}s_n.$$

□　(E) ⇒ (P')：$l(sw) > l(w)$, $l(sws') \leq l(ws')$ とする.

(E) より $l(sws') < l(ws')$.

$|\, l(sw) - l(sws')| \leq 1$ なので，$l(ws') > l(w)$. よって最短表示

$$w = s_1 \cdots s_n \quad (s_1, \ldots, s_n \in S)$$

に対し，

$$ws' = s_1 \cdots s_n s'$$

も最短．(E) より，

$$ss_1 \cdots s_{j-1} = s_1 \cdots s_{j-1}s_j \quad \text{or} \quad ss_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_n s'.$$

前者は $w = s_1 \cdots s_n$ の最短性に反するので，後者が成立，すなわち $sw = ws'$.

1.5　最短表示の変形

□　(W, S) を Coxeter 系とする．$w \in W$, $l(w) = n$ に対し，w の最短表示全体の集合

$$\Gamma_0(w) = \{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_1 \cdots s_n = w\}$$

を考える.

□　$\Gamma_0(w)$ の元を頂点とし，2 点 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_n) \in \Gamma_0(w)$ で

1. $s_1 = s'_1$ または $s_n = s'_n$

2. $\mathbf{s} = (s, s', s, s', \ldots)$, $\mathbf{s}' = (s', s, s', s, \ldots)$

であるものどうしを結んでグラフ $\Gamma(w)$ をつくる.

定理　$\Gamma(w)$ は連結.

$\because$) $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_n) \in \Gamma_0(w)$ を第 1 のタイプの辺によってはつながらない 2 点とする.

このとき $\Gamma_0(w)$ は $(s_1, *, \ldots, *, s'_n)$, $(s'_1, *, \ldots, *, s_n)$ という形の元をもたない.

また，$(s_1, \ldots)$, $(s'_1, \ldots)$ という形の 2 点は第 1 のタイプの辺によってはつながらない.

これに注意すると，$l(s_1 w), l(s'_1 w) \leq l(w)$ なので，(E) より，

$$s'_1 s_1 \cdots s_{n-1} = s_1 \cdots s_{n-1} s_n, \qquad s_1 s'_1 \cdots s'_{n-1} = s'_1 \cdots s'_{n-1} s'_n.$$

よって

$$(s'_1, s_1, \cdots, s_{n-1}), \quad (s_1, s'_1, \cdots, s'_{n-1}) \in \Gamma_0(w)$$

で，この 2 点も第 1 のタイプの辺によってはつながらない.

そこで同様の操作をつづけて，$\Gamma_0(w)$ の点

$$\begin{gathered}
(s_1, s'_1, s_1, \cdots, s_{n-1}), \quad (s'_1, s_1, s'_1, \cdots, s'_{n-1}), \\
(s'_1, s_1, s'_1, s_1, \cdots, s_{n-2}), \quad (s_1, s'_1, s_1, s'_1, \cdots, s'_{n-2}), \\
\cdots, \quad \cdots, \\
(s'_1, s_1, s'_1, s_1, s'_1, s_1, \cdots), \quad (s_1, s'_1, s_1, s'_1, s_1, s'_1, \cdots)
\end{gathered}$$

がえられ，最後の 2 点が第 2 のタイプの辺で結ばれる.　□

1.6　Bruhat 順序

□　$w \in W$ の最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，集合 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を考える．この集合は最短表示の取り方によらない.

$\because$) $l(w)$ に関する帰納法.

$(s_1, \ldots, s_n)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) \in \Gamma_0(w)$ に対し，

1. $s_1 = \hat{s}_1$ または $s_n = \hat{s}_n$ の場合は帰納法の仮定より.
2. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots)$ の場合は正しい.

よって $\Gamma(w)$ の連結性より結論がみちびかれる.　□

定義　$x, w \in W$ に対し，最短表示 $x = s'_1 \cdots s'_m$, $w = s_1 \cdots s_n$ があって，$(s'_1, \ldots, s'_m)$ が $(s_1, \ldots, s_n)$ の部分列となるとき，$x \leq w$ と定義する.

定理　この関係は半順序.

$\because$) 推移律のみが非自明.

$(s'_1, \cdots, s'_m) \in \Gamma_0(x)$ が $(s_1, \cdots, s_n) \in \Gamma_0(w)$ の部分列であるとする．このとき $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) \in \Gamma_0(w)$ に対し，部分列 $(s''_1, \cdots, s''_m) \in \Gamma_0(x)$ が存在することを示せばよい.

$l(w)$ に関する帰納法によって証明する.

1. $s_1 = \hat{s}_1$ または $s_n = \hat{s}_n$ の場合は帰納法の仮定より.

2. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots)$ の場合は正しい.

よって $\Gamma(w)$ の連結性より結論がみちびかれる. □

□ $w \in W$, $s \in S$ に対し, $w < sw$ または $sw < w$.

2 Iwahori-Hecke 環

2.1 定義

□ Coxeter 系 (W, S) および可換環 $\mathbf{k}$ に対し，$\lambda_s, \mu_s \in \mathbf{k}$ を $s \in S$ の W における共役類に対してさだまる元とする．

□ $\mathbf{k}$ 上 W により生成される自由加群

$$H = \bigoplus_{w \in W} \mathbf{k} T_w$$

を考える．

定理 H 上の $\mathbf{k}$ 代数の構造で，

$$\begin{aligned} T_e T_w &= T_w \\ T_s T_w &= \begin{cases} T_{sw} & l(sw) > l(w) \\ \lambda_s T_w + \mu_s T_{sw} & l(sw) \leq l(w) \end{cases} \qquad (w \in W,\ s \in S) \end{aligned}$$

をみたすものがただ 1 つ存在する．

■ これを Coxeter 系 (W, S) の **Iwahori-Hecke 環** と言う．

2.2 証明

□ 一意性は，$w = s_1 \cdots s_n$ を最短表示とすると，

$$T_w T_{w'} = (T_{s_1} \cdots T_{s_n}) T_{w'} = T_{s_1}(\cdots(T_{s_n} T_{w'}))$$

より積がきまることからわかる．

□ 存在は以下のように示す．

□ $\mathbf{k}$ 準同型 $J : H \to H$ を $J(T_w) = T_{w^{-1}}$ によって定義し，$s \in S$ に対し，$\mathbf{k}$ 準同型

$$L_s,\ R_s : H \to H$$

を

$$\begin{aligned} L_s(T_w) &= \begin{cases} T_{sw} & l(sw) > l(w) \\ \lambda_s T_w + \mu_s T_{sw} & l(sw) \leq l(w) \end{cases} \\ R_s &= J L_s J \end{aligned}$$

によって定義する．

$$\begin{aligned} R_s(T_w) &= J L_s J(T_w) \\ &= J L_s(T_{w^{-1}}) \\ &= \begin{cases} J(T_{sw^{-1}}) & l(sw^{-1}) > l(w^{-1}) \\ J(\lambda_s T_{w^{-1}} + \mu_s T_{sw^{-1}}) & l(sw^{-1}) \leq l(w^{-1}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} T_{ws} & l(ws) > l(w) \\ \lambda_s T_w + \mu_s T_{ws} & l(ws) \leq l(w) \end{cases} \end{aligned}$$

Claim $L_sR_{s'} = R_{s'}L_s$.

$\because$) w, sw, ws', sws' の関係は,

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad l(w) < l(sw) = l(ws') < l(sws') \\
&(2) \quad l(w) > l(sw) = l(ws') > l(sws') \\
&(3) \quad l(ws') < l(w) = l(sws') < l(sw) \\
&(4) \quad l(ws') > l(w) = l(sws') > l(sw) \\
&(5) \quad l(w) = l(sws') < l(sw) = l(ws') \\
&(6) \quad l(w) = l(sws') > l(sw) = l(ws')
\end{aligned}
$$

の 6 通り．(5), (6) の場合，$sw = ws'$.

(1) $l(w) < l(sw) = l(ws') < l(sws')$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(T_{ws'}) = T_{sws'}, \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(T_{sw}) = T_{sws'}.
\end{aligned}
$$

(2) $l(w) > l(sw) = l(ws') > l(sws')$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(\lambda_{s'}T_w + \mu_{s'}T_{ws'}) \\
&= \lambda_{s'}(\lambda_sT_w + \mu_sT_{sw}) + \mu_{s'}(\lambda_sT_{ws'} + \mu_sT_{sws'}), \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(\lambda_sT_w + \mu_sT_{sw}) \\
&= \lambda_s(\lambda_{s'}T_w + \mu_{s'}T_{ws'}) + \mu_s(\lambda_{s'}T_{sw} + \mu_{s'}T_{sws'}).
\end{aligned}
$$

(3) $l(ws') < l(w) = l(sws') < l(sw)$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(\lambda_{s'}T_w + \mu_{s'}T_{ws'}) = \lambda_{s'}T_{sw} + \mu_{s'}T_{sws'}, \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(T_{sw}) = \lambda_{s'}T_{sw} + \mu_{s'}T_{sws'}.
\end{aligned}
$$

(4) $l(ws') > l(w) = l(sws') > l(sw)$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(T_{ws'}) = \lambda_sT_{ws'} + \mu_sT_{sws'}, \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(\lambda_sT_w + \mu_sT_{sw}) = \lambda_sT_{ws'} + \mu_sT_{sws'}.
\end{aligned}
$$

(5) $l(w) = l(sws') < l(sw) = l(ws')$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(T_{ws'}) = \lambda_sT_{ws'} + \mu_sT_{sws'}, \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(T_{sw}) = \lambda_{s'}T_{sw} + \mu_{s'}T_{sws'}.
\end{aligned}
$$

この場合，$sw = ws'$ より，$T_{sw} = T_{ws'}$, $T_{sws'} = T_w$, $\lambda_s = \lambda_{s'}$, $\mu_s = \mu_{s'}$.

(6) $l(w) = l(sws') > l(sw) = l(ws')$ の場合,

$$
\begin{aligned}
L_sR_{s'}(T_w) &= L_s(\lambda_{s'}T_w + \mu_{s'}T_{ws'}) = \lambda_{s'}T_{sw} + \mu_{s'}T_{sws'}, \\
R_{s'}L_s(T_w) &= R_{s'}(\lambda_sT_w + \mu_sT_{sw}) = \lambda_sT_{ws'} + \mu_sT_{sws'}.
\end{aligned}
$$

この場合，$sw = ws'$ より，$T_{sw} = T_{ws'}$, $T_{sws'} = T_w$, $\lambda_s = \lambda_{s'}$, $\mu_s = \mu_{s'}$. $\square$

□　$\{L_s \mid s \in S\}$ の生成する $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H)$ の部分代数を H' とし，$\{R_s \mid s \in S\}$ の生成する $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(H)$ の部分代数を H'' とする．

□　$\mathbf{k}$ 加群の準同型

$$e' : H' \to H, \quad L \mapsto L(T_e),$$
$$e'' : H'' \to H, \quad R \mapsto R(T_e)$$

は全射．

$\because$) $w \in W$ の最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，

$$T_w = L_{s_1} \cdots L_{s_n}(T_e) = R_{s_n} \cdots R_{s_1}(T_e).$$

□

□　e' は単射．

$\because$) $L \in H'$, $L(T_e) = 0$ とすると，任意の $R \in H''$ に対し，

$$L(R(T_e)) = R(L(T_e)) = 0.$$

e'' が全射なので，$L = 0$. よって e' は単射．　□

□　同型 $e' : H' \to H$ によって誘導される H 上の乗法は，条件をみたす．

3　共役作用素

3.1

□　$T_eT_w = T_w = T_wT_e$ ゆえ，$T_e = 1$ と書くことにする．

$$T_sT_s = \lambda_sT_s + \mu_s \qquad (s \in S)$$

より，

$$T_s(T_s - \lambda_s) = (T_s - \lambda_s)T_s = \mu_s.$$

よって ${\mu_s}^{-1} \in \mathbf{k}$ とすると，

$$(T_s)^{-1} = {\mu_s}^{-1}(T_s - \lambda_s).$$

$w = s_1 \cdots s_n$ を最短表示とすると，

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = (T_{s_n \cdots s_1})^{-1} = (T_{s_n} \cdots T_{s_1})^{-1} = (T_{s_1})^{-1} \cdots (T_{s_n})^{-1}.$$

3.2

□　ここで

$$\overline{T}_w = (T_{w^{-1}})^{-1}$$

とおく．

□　$l(sw) > l(w)$ ならば，

$$\begin{aligned}\overline{T_sT_w} &= \overline{T}_{sw} = (T_{w^{-1}s})^{-1} = (T_{w^{-1}}T_s)^{-1} = (T_s)^{-1}(T_{w^{-1}})^{-1} \\ &= \overline{T}_s\overline{T}_w.\end{aligned}$$

□　また，

$$\begin{aligned}\overline{T}_s\overline{T}_s &= (T_s)^{-1}(T_s)^{-1} = (T_s)^{-1}{\mu_s}^{-1}(T_s - \lambda_s) = {\mu_s}^{-1}(1 - \lambda_s(T_s)^{-1}) \\ &= {\mu_s}^{-1}(1 - \lambda_s\overline{T}_s).\end{aligned}$$

$l(sw) \leq l(w)$ ならば，$\overline{T}_w = \overline{T_sT_{sw}} = \overline{T}_s\overline{T}_{sw}$ なので，

$$\begin{aligned}\overline{T_sT_w} &= \overline{\lambda_sT_w + \mu_sT_{sw}} \\ \overline{T}_s\overline{T}_w &= \overline{T}_s\overline{T}_s\overline{T}_w = {\mu_s}^{-1}(1 - \lambda_s\overline{T}_s)\overline{T}_{sw} \\ &= {\mu_s}^{-1}(\overline{T}_{sw} - \lambda_s\overline{T}_w)\end{aligned}$$

そこで，

$$\overline{\mu}_s = {\mu_s}^{-1}, \qquad \overline{\lambda}_s = -{\mu_s}^{-1}\lambda_s$$

と定義すれば，任意の $s \in S$, $w \in W$ に対し，

$$\overline{T_sT_w} = \overline{T}_s\overline{T}_w.$$

$w' = s_1 \cdots s_n$ $(s_1, \ldots, s_n \in S)$ を最短表示とすると，

$$\begin{aligned}
\overline{T_{w'}T_w} &= \overline{T_{s_1\cdots s_n}T_w} = \overline{T_{s_1}T_{s_2}\cdots T_{s_n}T_w} \\
&= \overline{T}_{s_1}(\overline{T_{s_2}\cdots T_{s_n}T_w}) = \cdots \\
&= \overline{T}_{s_1}(\overline{T}_{s_2}(\cdots(\overline{T}_{s_n}\overline{T}_w))) \\
&= (\overline{T}_{s_1}\overline{T}_{s_2}\cdots\overline{T}_{s_n})\overline{T}_w \\
&= \overline{T}_{w'}\overline{T}_w.
\end{aligned}$$

3.3

■　関係式

$$T_sT_s = \lambda_sT_s + \mu_s$$

において，

$$\lambda_s = q_s + r_s, \qquad \mu_s = -q_sr_s$$

とおくと，

$$(T_s - q_s)(T_s - r_s) = 0.$$

$\overline{\cdot}$ を q_s, r_s を含む環上の準同型に拡張することを考える．

$$\overline{\lambda}_s = \overline{q}_s + \overline{r}_s, \qquad \overline{\mu}_s = -\overline{q}_s\overline{r}_s$$

なので，

$$-\overline{q}_s\overline{r}_s = -(q_sr_s)^{-1}, \qquad \overline{q}_s + \overline{r}_s = (q_sr_s)^{-1}(q_s + r_s).$$

ゆえに

$$\overline{q}_s + \overline{r}_s = {q_s}^{-1} + {r_s}^{-1}, \qquad \overline{q}_s\overline{r}_s = {q_s}^{-1}{r_s}^{-1}.$$

よって

$$\overline{q}_s = {q_s}^{-1}, \qquad \overline{r}_s = {r_s}^{-1}$$

または

$$\overline{q}_s = {r_s}^{-1}, \qquad \overline{r}_s = {q_s}^{-1}.$$

□　以下，

$$\overline{q}_s = {q_s}^{-1}, \qquad r_s = -1$$

とする．このとき，

$$\lambda_s = q_s - 1, \qquad \mu_s = q_s$$

であり，関係式は，

$$(T_s - q_s)(T_s + 1) = 0.$$

また，

$$\overline{T}_s = {q_s}^{-1}(T_s - q_s + 1) = {q_s}^{-1}(T_s - q_s) + {q_s}^{-1}.$$

よって，

$$\overline{T_s - q_s} = {q_s}^{-1}(T_s - q_s).$$

そこで $C_s = T_s - q_s$ とおくと，

$$\overline{C}_s = {q_s}^{-1} C_s,$$
$$T_s T_s = q_s T_s - (T_s - q_s) = q_s T_s - C_s.$$

■　最短表示 $w = s_1 \cdots s_n$ に対し，

$$C_{s_1} \cdots C_{s_n} = (T_{s_1} - q_{s_1}) \cdots (T_{s_n} - q_{s_n})$$

は最短表示の取り方による．これを修正して，最短表示の取り方によらない元をつくりたい．

3.4

□　あらためて関係式を書くと，

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & l(sw) > l(w) \\ (q_s - 1)T_w + q_s T_{sw} & l(sw) \leq l(w) \end{cases} \qquad (w \in W,\ s \in S).$$

さらに，

$$\overline{T}_w = (T_{w^{-1}})^{-1}, \qquad \overline{q}_s = {q_s}^{-1}.$$

□　$w = s_1 \cdots s_n$ を最短表示とすると，$q_{s_1} \cdots q_{s_n}$ は最短表示の取り方によらない．そこでこれを q_w と書くことにする．

$\because$) $l(w)$ に関する帰納法によって証明する．
$w = s_1 \cdots s_n = \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_n$ を 2 つの最短表示とする．

1. $s_1 = \hat{s}_1$ または $s_n = \hat{s}_n$ の場合は帰納法の仮定より．
2. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots, s, s')$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots, s', s)$ の場合は正しい．
3. $(s_1, \cdots, s_n) = (s, s', s, s', \ldots, s', s)$, $(\hat{s}_1, \cdots, \hat{s}_n) = (s', s, s', s, \ldots, s, s')$ の場合，s, s' は共役なので，$q_s = q_{s'}$.

よって $\Gamma(w)$ の連結性より結論がみちびかれる．　□

□　これによって関係式を書きなおすと，

$${q_s}^{-1} T_s \cdot {q_w}^{-1} T_w = \begin{cases} {q_{sw}}^{-1} T_{sw} & l(sw) > l(w) \\ (1 - {q_s}^{-1}){q_w}^{-1} T_w + {q_s}^{-1}{q_{sw}}^{-1} T_{sw} & l(sw) \leq l(w) \end{cases}$$

あるいは

$$({q_s}^{-1} T_s - 1){q_w}^{-1} T_w = \begin{cases} {q_{sw}}^{-1} T_{sw} - {q_w}^{-1} T_w & l(sw) > l(w) \\ {q_s}^{-1}({q_{sw}}^{-1} T_{sw} - {q_w}^{-1} T_w) & l(sw) \leq l(w) \end{cases}$$

4 Kazhdan-Lusztig 多項式

4.1

□ 以下，$q = q_s$ は $s \in S$ によらないものとする．

□ このとき，Iwahori-Hecke 環

$$H = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[q,\, q^{-1}]T_w$$

の関係式は，

$$q^{-1}T_s \cdot q^{-l(w)}T_w = \begin{cases} q^{-l(sw)}T_{sw} & l(sw) > l(w) \\ (1-q^{-1})q^{-l(w)}T_w + q^{-1}q^{-l(sw)}T_{sw} & l(sw) \leq l(w) \end{cases}$$

すなわち

$$(q^{-1}T_s - 1)q^{-l(w)}T_w = \begin{cases} q^{-l(sw)}T_{sw} - q^{-l(w)}T_w & l(sw) > l(w) \\ q^{-1}(q^{-l(sw)}T_{sw} - q^{-l(w)}T_w) & l(sw) \leq l(w) \end{cases}$$

また，

$$\overline{T}_s = (T_s)^{-1} = q^{-1}(T_s - (q-1)) = q^{-1}T_s - 1 + q^{-1}.$$

よって，$w = s_1 \cdots s_n$ を最短表示とすると，

$$\begin{aligned} \overline{T}_w &= \overline{T}_{s_1} \cdots \overline{T}_{s_n} \\ &= (q^{-1}T_{s_1} - 1 + q^{-1}) \cdots (q^{-1}T_{s_n} - 1 + q^{-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)} (-1+q^{-1})^{n-k} q^{-1}T_{s_{\sigma(1)}} \cdots q^{-1}T_{s_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{x \leq w} \overline{R}_{x,\,w} q^{-l(x)} T_x. \end{aligned}$$

ここで

$$R_{x,\,w} \in \mathbb{Z}[q], \qquad R_{w,\,w} = 1,$$

$x \leq w$ は Bruhat 順序.

4.2 Kazhdan-Lusztig 多項式

定理 Iwahori-Hecke 環 H の $\mathbb{Z}[q,\, q^{-1}]$ 基底 $\{C_w \mid w \in W\}$ で，

$$\overline{C}_w = q^{-l(w)}C_w$$

をみたし，

$$P_{x,\,w} \in \mathbb{Z}[q], \quad \deg P_{x,\,w} \leq \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1), \quad P_{w,\,w} = 1$$

により，

$$C_w = \sum_{x \leq w} (-q)^{l(w)-l(x)} \overline{P}_{x,\,w} T_x$$

とあらわされるものがただ 1 つ存在する．

□　$P_{x,\,w}$ を **Kazhdan-Lusztig 多項式** と言う.

4.3　証明：一意性

□

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_w &= \sum_{x\le w}(-q)^{-l(w)+l(x)}P_{x,\,w}\overline{T}_x \\
&= \sum_{x\le w}\sum_{y\le x}(-q)^{-l(w)+l(x)}P_{x,\,w}\overline{R}_{y,\,x}q^{-l(y)}T_y \\
&= \sum_{y\le x}\left(\sum_{y\le x\le w}(-q)^{-l(w)+l(x)}P_{x,\,w}\overline{R}_{y,\,x}\right)q^{-l(y)}T_y \\
&= \sum_{y\le x}\left((-q)^{-l(w)+l(y)}P_{y,\,w}+\sum_{y<x\le w}(-q)^{-l(w)+l(x)}P_{x,\,w}\overline{R}_{y,\,x}\right)q^{-l(y)}T_y.
\end{aligned}
$$

よって $\overline{C}_w = q^{-l(w)}C_w$ より,

$$
(-1)^{l(w)-l(y)}\overline{P}_{y,\,w} = (-q)^{-l(w)+l(y)}P_{y,\,w}+\sum_{y<x\le w}(-q)^{-l(w)+l(x)}P_{x,\,w}\overline{R}_{y,\,x}.
$$

このとき，$\deg(-1)^{l(w)-l(y)}\overline{P}_{y,\,w}$ の最低次の項の次数は $\ge -\frac{1}{2}(l(w)-l(y)-1)$ で，$\deg(-q)^{-l(w)+l(y)}P_{y,\,w}$ の最高次の項の次数は

$$
\le -l(w)+l(y)+\frac{1}{2}(l(w)-l(y)-1) = -\frac{1}{2}(l(w)-l(y)+1).
$$

したがって，$P_{y,\,w}$ は $P_{x,\,w}$ $(y<x\le w)$ から決まる.

4.4　証明：存在

□　$s\in S$ に対し

$$
C_s = T_s - q
$$

とおくと,

$$
\overline{C}_s = q^{-1}C_s.
$$

□　$w\in W,\ l(sw)>l(w)$ に対し,

$$
C_w = q^{l(w)}\sum_{x\le w}(-1)^{l(w)-l(x)}\overline{P}_{x,\,w}q^{-l(x)}T_x
$$

が条件をみたすとして，C_sC_w を計算する.

$$
(T_s-q)q^{-l(w)}T_w = \begin{cases} q(q^{-l(sw)}T_{sw}-q^{-l(w)}T_w) & l(sw)>l(w) \\ q^{-l(sw)}T_{sw}-q^{-l(w)}T_w & l(sw)\le l(w) \end{cases}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
C_sC_w &= q^{l(w)} \sum_{x\le w,\, x<sx} (-1)^{l(w)-l(x)} \overline{P}_{x,\,w} q(q^{-l(sx)}T_{sx} - q^{-l(x)}T_x) \\
&\quad + q^{l(w)} \sum_{sx<x\le w} (-1)^{l(w)-l(x)} \overline{P}_{x,\,w} (q^{-l(sx)}T_{sx} - q^{-l(x)}T_x) \\
&= q^{l(sw)} \sum_{x\le w,\, x<sx} (-1)^{l(w)-l(x)} \overline{P}_{x,\,w} (q^{-l(sx)}T_{sx} - q^{-l(x)}T_x) \\
&\quad + q^{l(sw)} \sum_{sx<x\le w} (-1)^{l(w)-l(x)} \overline{qP}_{x,\,w} (q^{-l(sx)}T_{sx} - q^{-l(x)}T_x)
\end{aligned}
$$

□　このとき，

$$\overline{C_sC_w} = \overline{C}_s\overline{C}_w = q^{-1}C_sq^{-l(w)}C_w = q^{l(sw)}C_sC_w$$

であり，C_sC_w における T_{sw} の係数は 1.

□

$$\deg P_{x,\,w} \le \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$$

なので

$$
\begin{aligned}
\deg P_{x,\,w} &\le \frac{1}{2}(l(sw) - l(sx) - 1), \\
\deg P_{x,\,w} &\le \frac{1}{2}(l(sw) - l(x) - 1), \\
\deg qP_{x,\,w} &\le \frac{1}{2}(l(sw) - l(sx) - 1)
\end{aligned}
$$

はみたされるが，$P_{x,\,w}$ に $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ 次の項があると，

$$\deg qP_{x,\,w} > \frac{1}{2}(l(sw) - l(x) - 1).$$

□　そこで，$P_{x,\,w}$ の $\frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ 次の係数を $\mu_{x,\,w}$ とする．($l(w) - l(x)$ が偶数の場合は $\mu_{x,\,w} = 0$ とする．特に $\mu_{w,\,w} = 0$.)

$$
\begin{aligned}
C_{sw} &= C_sC_w + q^{l(sw)} \sum_{sx<x<w} (-1)^{l(w)-l(x)} \mu_{x,\,w} q^{-\frac{1}{2}(l(w)-l(x)+1)} q^{-l(x)} C_x \\
&= C_sC_w + \sum_{sx<x<w} (-1)^{l(w)-l(x)} \mu_{x,\,w} q^{\frac{1}{2}(l(sw)-l(x))} C_x
\end{aligned}
$$

とおくと，問題の項は相殺する．また

$$\overline{C}_{sw} = q^{-l(sw)}C_{sw}.$$

C_{sw} における T_{sw} の係数は 1.

□　あらたな項は,

$$
\begin{aligned}
&q^{l(sw)} \sum_{sx<x<w} (-1)^{l(w)-l(x)} \mu_{x,\,w} q^{-\frac{1}{2}(l(w)-l(x)+1)} q^{-l(x)} (C_x - T_x) \\
&= q^{l(sw)} \sum_{sx<x<w} (-1)^{l(w)-l(x)} \mu_{x,\,w} q^{-\frac{1}{2}(l(w)-l(x)+1)} \sum_{y<x} (-1)^{l(x)-l(y)} \overline{P}_{y,\,x} q^{-l(y)} T_y.
\end{aligned}
$$

で,

$$
\begin{aligned}
\deg q^{\frac{1}{2}(l(w)-l(x)+1)} P_{y,\,x} &\leq \frac{1}{2}(l(w)-l(x)+1) + \frac{1}{2}(l(x)-l(y)-1) \\
&= \frac{1}{2}(l(sw)-l(y)-1).
\end{aligned}
$$

□　以上により,

$$
C_{sw} = q^{l(sw)} \sum_{x \leq sw} (-1)^{l(sw)-l(x)} \overline{P}_{x,\,sw} q^{-l(x)} T_x
$$

とおくと,

$$
P_{x,\,sw} \in \mathbb{Z}[q], \quad \deg P_{x,\,sw} \leq \frac{1}{2}(l(sw)-l(x)-1), \quad P_{sw,\,sw} = 1.
$$