

# 冬の位相数学・演習問題

橋本 義武

2004 年度冬学期

## キャスト紹介

高校生篇（ユークリッド空間篇）

ユジン：開集合．明るい女子高生．

サンヒョク：閉集合．開集合の補集合．  
おさななじみ

チュンサン：有界閉集合．

チェリン：点列．どちらが位相の基本概念かをめぐって  
開集合にライバル意識をもつ．

社会人篇（位相空間篇）

ユジン：開集合．

サンヒョク：閉集合．開集合の補集合．  
こんやくしゃ

ミニョン：コンパクト空間（コンさま）．

チェリン：フィルター．フランスでコンパクト空間に出  
会う．

キム次長：ハウスドルフ空間．コンパクト空間とは名コ  
ンピ．

キム・ジヌ：閉写像．閉集合の父．

## ”冬の位相数学 ”とは

ユークリッド空間で暮らす開集合は明るい女子高生．  
幼なじみの閉集合とは家族ぐるみの付き合いで，まるで  
双子のよう．

そんなある日，開集合はソウル解析学高校からの転  
校生，有界閉集合と恋に落ちた．点列の収束部分列の存  
在，連続関数の最大・最小の存在，連続関数の一様連続  
性，有界閉集合と一緒にいると，つぎつぎ不思議な出来  
事が起こるのだった．

しかし，突然の悲劇が2人の初恋に終止符を打つ．故  
郷のユークリッド空間を離れて位相空間へと旅立った  
ら，もう有界という概念などなくなってしまう……

10年後，位相空間の基本概念として活躍する開集合  
の前に，有界閉集合と瓜二つのコンパクト空間が現れて  
……

コンパクト空間とハウスドルフ空間の軽妙なやりと  
りも見所である．

## 1 高校時代

### 1.1 放送室

昼休み、いつものように校内放送をはじめようとするが、音が出ない。

閉集合「点列！また発散したな！」

点列「ちょっと！わたしのせいにはしないでよ！」

機械の裏にまわって配線を調べはじめる有界閉集合。やがて収束する部分列を見つける。

点列「ア、アー...直ったわ！コマウォ(ありがとう)、有界閉集合！」

うっとり有界閉集合を見つめる点列。

### 1.2 講堂

ピアノの前で有界閉集合を隣にすわらせる開集合。

開集合「いい？連続関数っていうのはね、点  $a$  と、イプシロンが与えられたとするでしょ。それに対してデルタを...」

有界閉集合「何のつもり？」

開「イプシロン・デルタ論法よ。教えてあげるわ。ピアノで言うとバイエルみたいなものなの。」

突然証明をはじめめる有界閉集合。

開「アニヤ(そうじゃないわ)! 点  $a$  より先にデルタをとっちゃダメなの！アラッチ(わかった)?」

ニヤリと笑って構わず証明を続ける有界閉集合。その鮮やかさに見とれる開集合。

開「今の、何？」

有界閉「一様連続。」

開「一様連続...一様連続...一様連続...」

有界閉集合のことはをかみしめるようにつぶやく開集合。

## 2 10年後

### 2.1 閉集合の車の中

開集合を送る閉集合。アパートの前に着いたが、まだ離れられない。

開集合「開集合の補集合は閉集合、閉集合の補集合は開集合。わたしたち、子どもの頃からいつも一緒だったわ

ね。」

閉集合「クレ(そうだね)。でも位相空間によっては、開集合の補集合が開集合になったり、閉集合の補集合が開集合になったりすることもあるらしいよ。」

開「ムスンソリヤ(どういうこと)? 空集合でも全体でもないのに?」

閉「そうなんだ。変だろ?」

開「きっとその位相空間は一つにつながってないのね!」

幸せそうに笑いあう二人。

### 2.2 コンパクト空間のオフィス

コンパクト空間のオフィスを訪れた開集合。まだ来ていないコンパクト空間を待っている。そこに現れるコンパクト空間。

開集合「.....!」

開集合の目に映る、有界閉集合に瓜二つのコンパクト空間の姿を、無限の涙がおおいつくす。

コンパクト空間「ケンチャナヨ(どうかなさったんですか)?」

コンパクト空間の微笑みに、落ち着きを取りもどしてゆく開集合。もう涙は有限におさまっている。

開「ケンチャナ(大丈夫です)...」

### 2.3 コンパクト空間のアパート

コンパクト空間の部屋を突然たずねる開写像。

コンパクト空間「どうされたんですか?」

開写像「ミアナダ(すまなかった)。コンパクト空間、おまえはわたしの息子だ。」

コン「モラグヨ(何ですって)?」

開写像「アラッソ(わかったんだ)。任意の位相空間  $X$  との直積から  $X$  への射影がつねに閉写像になる。それがおまえの本当の定義なのだ。」

絶句するコンパクト空間。