Grothendieck の二重二十面体 v1.1

橋本 義武

2004/10/18–21, 2005/07/11–15　中大集中講義より

1　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ の幾何

1.1　$\mathbb{P}^1$ 上の n 点のモジュライとそのコンパクト化

1.1.1

□　$n \geq 3$ に対し,

$$\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{C}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}/PSL_2(\mathbb{C})$$

とし，その **Deligne-Mumford コンパクト化** を $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{C})$ とする.

■　以下 $(\mathbb{C})$ は略す.

1.1.2

□　$\mathcal{M}_{0,3} = \overline{\mathcal{M}}_{0,3} \cong \mathrm{pt}.$

□　$\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$,　$\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \cong \mathbb{P}^1$.

1.2　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$

1.2.1

□　$\mathcal{M}_{0,5} \cong (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus \mathrm{diag}.$

□　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を 3 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$, (∞, ∞) で **blow up** したもの.

□　したがって，$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ は $\mathbb{P}^2$ の 4 点 blow up でもある．ただし，4 点のうちの任意の 3 点は 1 直線上にないとする.

1.2.2

□　**Riemann-Roch の定理** と **小平の消滅定理** により,

$$\dim H^0(\overline{\mathcal{M}}_{0,5}, -K) = (3^2 - 4) + 1 = 6.$$

□　**反標準因子** $-K$ により，$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ は $\mathbb{P}^5$ に埋めこまれる.

1.3　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5} \setminus \mathcal{M}_{0,5}$ の形

1.3.1

□　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5} \setminus \mathcal{M}_{0,5}$ は $\binom{5}{2} = 10$ 本の $\mathbb{P}^1$ からなり，おのおの他の 3 本とそれぞれ 1 点で交わる.

□　これらは $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ 上のすべての (-1)-curve.

1.3.2　Remark

□　**(-1)-curve** とは，曲面 S 上の有理曲線（種数 0 の曲線）C で，$C \cdot C = -1$ であるもののこと.

□　このとき，**adjunction 公式**（種数公式）より，$-K \cdot C = 1$.
　したがって，$n+1 = \dim H^0(S, -K) \geq 2$ ならば，$-K$ の定める $\mathbb{P}^n$ への **rational map** による C の像は直線.

1.3.3

□　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5} \setminus \mathcal{M}_{0,5}$ における 5 辺形は反標準因子．12 個ある.

□　各 5 辺形に対し，残りの 5 本も 5 辺形をなす．このような 5 辺形の対を **相補的** と言うことにする.

□　このことより，$\overline{\mathcal{M}}_{0,5} \setminus \mathcal{M}_{0,5} \sim -2K$.

□　相補的な対は 5 点でまじわり，それらを通る楕円曲線の pencil をさだめる．各楕円曲線上，この 5 点は（1 点を単位元に選ぶと）部分群 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ をなす.

■　一般の $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ における 相補的な対については，[GoM] を参照.

1.3.4

□　5 辺形の各頂点に対し，その頂点のみが共通である 5 辺形がただ 1 つある．この関係にある 2 つの 5 辺形を **隣接する** と言うことにする.

□　1 つの交点に対し，それによって隣接する 5 辺形の対が 2 組ある.

□　1 つの直線に対し，その上の 3 つの交点により，2 つずつ隣接する 5 辺形の 3 つ組が 2 組できる.

□　5 辺形に点を対応させ，隣接するものどうしを辺で結び，直線に対応して 2 単体を 2 つずつ張って 2 次元単体複体をつくると，「正二十面体の中心について対称な 2 点を同一視したもの」（**射影正二十面体** とよぶことにする）が 2 つできる.

□　このとき，相補的な 5 辺形の対のなす 6 点集合上に，次節で述べる **二重二十面体構造** が入っている．この 6 点集合に，5 次対称群が $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ への自然な作用を通して作用するが，その作用は二重二十面体構造をたもつ．

1.3.5　具体的には

□　$\sigma : \overline{\mathcal{M}}_{0,5} \to \mathbb{P}^2$ を，どの 3 つも 1 直線上にない 4 点 $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^2$ における blow up とする．

□　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ 上の (-1)-curve (end) は，

$$E_i = \sigma^{-1}(p_i) \quad (1 \leq i \leq 4), \qquad F_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq 4)$$

の 10 本．ここで F_{ij} は，$\sigma(F_{ij})$ が直線 $p_i p_j$ であるような (-1)-curve.

□　直線 p_1p_4 と p_2p_3 の交点を q_a，p_2p_4 と p_1p_3 の交点を q_b，p_3p_4 と p_1p_2 の交点を q_c とする．

□　$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ 上の 5 辺形は，1 直線上にない p_i, p_j, q_k をむすぶ $\mathbb{P}^2$ 上の 3 直線の逆像である．これを A_{ij}^k と書く．

□　相補的な対は，

$$\begin{aligned}
&(A_{14}^b, A_{23}^c), \quad (A_{24}^c, A_{13}^a), \quad (A_{34}^a, A_{12}^b), \\
&(A_{23}^b, A_{14}^c), \quad (A_{13}^c, A_{24}^a), \quad (A_{12}^a, A_{34}^b)
\end{aligned}$$

の 6 つ．

□　2 単体は，

$$\begin{aligned}
&(E_1 : A_{14}^b A_{12}^a A_{13}^c,\ A_{14}^c A_{13}^a A_{12}^b), &&(E_2 : A_{24}^c A_{23}^b A_{12}^a,\ A_{24}^a A_{12}^b A_{23}^c), \\
&(E_3 : A_{34}^a A_{13}^c A_{23}^b,\ A_{34}^b A_{23}^c A_{13}^a), &&(E_4 : A_{14}^b A_{24}^c A_{34,}^a,\ A_{14}^c A_{24}^a A_{34}^b), \\
&(F_{12} : A_{24}^c A_{13}^c A_{12}^a,\ A_{14}^c A_{23}^c A_{12}^b), &&(F_{13} : A_{14}^b A_{23}^b A_{13}^c,\ A_{34}^b A_{12}^b A_{13}^a), \\
&(F_{14} : A_{14}^b A_{34}^a A_{12}^a,\ A_{14}^c A_{24}^a A_{13}^a), &&(F_{23} : A_{34}^a A_{12}^a A_{23}^b,\ A_{24}^a A_{13}^a A_{23}^c), \\
&(F_{24} : A_{14}^b A_{24}^c A_{23}^b,\ A_{24}^a A_{34}^b A_{12}^b), &&(F_{34} : A_{24}^c A_{34}^a A_{13}^c,\ A_{14}^c A_{34}^b A_{23}^c)
\end{aligned}$$

の 20 個.

2　二重二十面体

2.1　射影正二十面体とその双対

□　**記号**　集合 X に対し，$X^{(n)} = \{A \mid A \subset X,\, |A| = n\}$ とおく．

2.1.1

□　射影正二十面体の頂点，辺，面の集合を $V,\, E,\, F$ とする．

□　$|V| = 6, \quad |E| = 15, \quad |F| = 10.$

□　$E = V^{(2)},\ F \subset V^{(3)}$ と見なせる．

2.1.2

□　$f \in F$ ならば，$f^c (= V \setminus f) \in F^c (= V^{(3)} \setminus F)$.

□　$(V,\, E,\, F^c)$ も射影二十面体．

□　任意の $f \in X^{(3)}$ に対し，$f \in F,\, f^c \in F^c$ または $f \in F^c,\, f^c \in F.$

2.1.3

□　$f \in F$ に対し，全単射 $s = s[F]_f ; f \to f^c$ で，

　任意の $v \in f$ に対し，$(f \setminus \{v\}) \cup \{s(v)\} \in F$

となるものがただ 1 つ存在する．(f の頂点の対辺に関する折り返し.)

□　$\bar{s}[F]_f = \{s[F]_f : f \to f^c,\, {s[F]_f}^{-1} : f^c \to f\}$ （非順序対）とおくと，これは非順序対 $\{F,\, F^c\},\, \{f,\, f^c\}$ によって定まるので，$\bar{s}\{F,\, F^c\}_{\{f,\, f^c\}}$ と書くことにする．

2.2　二重二十面体構造

2.2.1

□　6 点からなる集合 X に対し，$\Phi \subset X^{(3)}$ で $(X,\, X^{(2)},\, \Phi)$ が射影二十面体になるようなもの全体の集合を I_X とおく．

□　$\Phi \in I_X$ ならば $\Phi^c \in I_X$.

□　$\Phi \in I_X$ に対し，非順序対 $\{\Phi,\, \Phi^c\}$ を X 上の**二重二十面体構造** と言う．

$$X^* = \{\{\Phi,\, \Phi^c\} \mid \Phi \in I_X\}$$

とおく．

2.2.2

□　6 点からなる集合 X に対し,

$$X^{[3]} = \{\{f,\, f^c\} \mid f \in X^{(3)}\}$$

とおく．$|X^{[3]}| = 10$.

□　$\{f,\, f^c\} \in X^{[3]}$ に対し,

$$\mathrm{Bi}(X)_{\{f,\, f^c\}} = \{\{s,\, s^{-1}\} \mid s : f \to f^c \text{ bijection}\}$$

とおく．$|\mathrm{Bi}(X)_{\{f,\, f^c\}}| = 6$.

□　$\{f,\, f^c\} \in X^{[3]}$ に対し,

$$X^* \longrightarrow \mathrm{Bi}(X)_{\{f,\, f^c\}}, \quad \{\Phi,\, \Phi^c\} \longmapsto \bar{s}\{\Phi,\, \Phi^c\}_{\{f,\, f^c\}}$$

は全単射．よって,

$$|X^*| = 6.$$

2.2.3

□　全単射 $X \to X^*$ を 1 つあたえると，6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ 上の外部自己同型が誘導される．

2.3　双対性

2.3.1

□　$\{f,\, f^c\} \in X^{[3]}$ に対し，置換の偶奇により,

$$\mathrm{Bi}(X)_{\{f,\, f^c\}} = \mathrm{Bi}(X)^A_{\{f,\, f^c\}} \sqcup \mathrm{Bi}(X)^B_{\{f,\, f^c\}}$$

と分割する．そこで，$\bar{s}\{\Phi,\, \Phi^c\}_{\{f,\, f^c\}}$ がどちらに入るかによって,

$$X^* = (X^*)^A_{\{f,\, f^c\}} \sqcup (X^*)^B_{\{f,\, f^c\}}$$

と分割する．

□　$X^{[3]} \ni \{f,\, f^c\} \longmapsto \{(X^*)^A_{\{f,\, f^c\}},\, (X^*)^B_{\{f,\, f^c\}}\} \in (X^*)^{[3]}$ は全単射.

2.3.2

□　$\{f,\, f^c\} \in X^{[3]}$, $x \in f$ に対し，$f \setminus \{x\}$ の 2 つの元の互換により，全単射

$$\mathrm{Bi}(X)^A_{\{f,\, f^c\}} \to \mathrm{Bi}(X)^B_{\{f,\, f^c\}}, \qquad (X^*)^A_{\{f,\, f^c\}} \to (X^*)^B_{\{f,\, f^c\}}$$

が誘導され，X^* 上の二重二十面体構造 $\Psi_{\{f,\, f^c\}}(x)$ が定まる．

□　$\Psi_{\{f,\,f^c\}}(x)$ は x のみにより，$\{f,\,f^c\}$ にはよらない．

∵)　$X \setminus \{x\}$ の置換群は $X^{[3]}$ に推移的に作用するので，$X \setminus \{x\}$ 上の互換に対して $\Psi_{\{f,\,f^c\}}(x)$ が変わらないことをたしかめればよい． □

□　$\Psi(x) = \Psi_{\{f,\,f^c\}}(x)$ と書くと，

$$\Psi : X \to (X^*)^*$$

は，X 上の置換に関して同変な全単射．

References

[Gr]　グロタンディーク，ある夢と数学の埋葬一陰 (イン) と陽 (ヤン) の鍵　収穫と蒔いた種と，現代数学社，1993

[GoM]　A. B. Goncharov and Yu. I. Manin, Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,\,n}$, Compositio Math. 140 (2004) 1–14, math.AG/0204102