局所化公式とその周辺 v2.3

橋本 義武

2005/02/11–12

Contents

0 Introduction

0.1 はじめに

局所化公式 (**localization formula**) とは,

> トーラス $T = U(1)^r$ の作用する多様体 M 上で，ある条件をみたす微分形式 μ を積分したものが，固定点集合 M^T 上の積分によってあらわされる：
>
> $$\int_M \mu = \int_{M^T} \mu_{\mathrm{eff}}$$

というタイプの定理です.

0.1.1 非常に大雑把な見取り図

大雑把に言って，局所化の手続きは,

1. 全体の積分を，固定点集合 M^T の近傍上の積分の形に書き直す
2. さらに M^T の法線方向の自由度を積分して，M^T 上の積分の形に書く

という 2 段階に分かれます．法線方向を積分すると，Gauss 積分の変数変換のような因子が出て，μ が μ_{eff} になります.

$\triangleright\triangleright$ このように，議論が (1) 部分多様体の近傍への局所化 (2) 法線方向の積分，という 2 段階に分けられるという話は他にもあって，たとえば Atiyah-Singer 指数定理の証明がそうです．この類似は偶然ではなく，指数定理は「ループ空間上の積分の $U(1)$ 作用による局所化公式」と見なすことができます．[At85]

0.1.2 予備知識

ファイバー束や de Rham コホモロジーの基本事項については既知とします．[BT82] の 2 章までくらいで十分だと思います.

0.2 予定

0.2.1 局所化と $U(1)$ Borel 構成

$U(1)$ 作用の場合に，固定点集合の近傍への局所化，および法線方向の評価について，発見的考察をおこないます.

0.2.2 $U(1)$ 同変微分形式

やはり $U(1)$ 作用の場合に，同変微分形式を導入して，孤立固定点の場合の局所化公式を導出します.

0.2.3 *Thhe* 分類空間

より一般の場合の **分類空間** (classifying space) と**同変コホモロジー** (equivariant cohomology) について説明します.

理論の背後にあるのは **Koszul duality** という観点で，これは,

導来圏の boson-fermion 対応

のようなものです.

Koszul duality は，ADHM 構成にも本質的にかかわっています.

1 局所化と $U(1)$ Borel 構成

1.1 固定点集合の近傍への局所化

1.1.1 ことばの準備

▶ 群［位相群，Lie 群］G が集合［位相空間，多様体］M に **作用する** とは，写像［連続写像，C^∞ 写像］で

$$G \times M \ni (g,\, x) \longmapsto gx \in M$$

で $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ をみたすものが与えられていることを言います.

このとき，M を G 集合［G 空間，G 多様体］と言います.

▶ 集合

$$G \cdot x = \{gx \mid g \in G\} \subset M$$

を，点 $x \in M$ を通る G **軌道** と言います．すべての G 軌道から成る集合

$$M/G = \{G \cdot x \mid x \in M\}$$

を，作用の **商空間** と言います．G 軌道を点と思ったもの，と言うこともできます.

▶ 作用の **固定点** とは，$G \cdot x = \{x\}$ である点 $x \in M$ のことです．固定点すべての集合を固定点集合と言い，M^G と書きます.

▶ G はコンパクトとします.

固定点 $x \in M^G$ における M の接ベクトル空間 T_xM は G ベクトル空間（G の表現）になります．これは

$$T_xM = T_xM^G \oplus \nu_x$$

のように，固定点集合の接ベクトル空間 T_xM^G と法ベクトル空間 ν_x の直和に分かれます．さらに，T_xM^G は自明な表現であり，ν_x は自明でない既約表現の直和になります.

▶ すべての点 $x \in M$ に対し，$G \ni g \mapsto gx \in M$ が単射（すなわち $G \cdot x$ への全単射）であるようなものを，**free な作用** と言います.

▶ G がコンパクト Lie 群ならば，free な作用に対して商空間 M/G は多様体になり，$M \to M/G$ は G 主束になります.

1.1.2 局所化公式のバカバカしいくらい自明な場合

$T = U(1)$ が向きづけられた閉多様体 M に free に作用しているとします．商空間 M/T 上の微分形式 β を射影 $\pi : M \to M/T$ によって引きもどしたもの $\pi^*\beta$ に対し，

$$\int_M \pi^*\beta = 0.$$

$M^T = \emptyset$ なので，これは局所化公式の特別な場合だと思えます．

$\because$) $\dim M/T < \dim M$. □

1.1.3 大事な例

ここで，$T = U(1) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ の $2k+1$ 次元球面

$$S^{2k+1} = \{(z_0, z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid \sum_{a=0}^{k} |z_a|^2 = 1\}$$

へのスカラー倍による作用

$$t \cdot (z_0, z_1, \ldots, z_k) = (tz_0, tz_1, \ldots, tz_k).$$

を考えます．この作用は free で，商空間は複素射影空間

$$\mathbb{C}P^k = \{\mathbb{C}^{k+1} \text{ の 1 次元部分ベクトル空間 }\}$$

です．

□ これは，トポロジーにとっても微分幾何にとっても代数幾何にとっても表現論にとっても，とってもとっても大事な例です．

数学の場合，このような単純な例の中にアイデアが住んでいることが多いと言えます．一般化された主張は，一見すごそうですが，実は何も考えずにオートマチックに処理していたりします．て言うか，ややこしいものは結局オートマチックにやらないと扱いようがなかったりするわけです．

▶ それはさておき，この空間を用いて，もう少しましな主張をしてみます．

1.1.4 少し自明でない局所化公式

やはり $T = U(1)$ が向きづけられた n 次元閉多様体 M に free に作用しているとします．

$T = U(1)$ の球面 $S^{2k+1} \times M$ への作用 $t \cdot (z, x) = (t^{-1} \cdot z, t \cdot x)$ に関する商空間

$$M_T(k) = (S^{2k+1} \times M)/T$$

は，左成分への射影により，複素射影空間 $\mathbb{C}P^k$ 上の M をファイバーとするファイバー束になります．これは $T = U(1)$ の S^{2k+1} への作用が free だからです．

$M_T(k)$ 上の n 次閉微分形式 μ をファイバー M 上で積分しましょう．このとき，

$$n < 2k+1 \quad \Rightarrow \quad \int_M \mu = 0.$$

やはり $M^T = \emptyset$ なので，これも局所化公式の特別な場合です．

1.1.5 証明

いま，$T = U(1)$ の M への作用も free なので，$M_T(k)$ は，右成分への射影により，M/T 上の S^{2k+1} 束にもなります．Gysin 完全列により，

$$H^n(M_T(k), \mathbb{R}) \cong H^n(M/T, \mathbb{R})$$

がわかりますが，やはり $\dim M/T < \dim M = n$ より，$H^n(M/T, \mathbb{R}) = 0$ です．よって de Rham コホモロジーの定義を思いだすと，$\mu = d\nu$ と書けて，Stokes の定理より，

$$\int_M \mu = \int_M d\nu = 0$$

が言えます． □

1.1.6 何をやったのか

ここで，M を $S^{2k+1} \times M$ に取りかえてから T で割った商空間 $M_T(k)$ を考えました．証明に用いたのは，$T = U(1)$ が S^{2k+1} に free に作用することと，S^{2k+1} の低次のホモトピー群が消えることです．

▷▷ 実は，S^{2k+1} の自由度をつけくわえるのは，ゴーストを入れるような操作です．

1.1.7 自明でない局所化公式に向けて

では，固定点がある場合はどうなるでしょう．

▶ $T = U(1)$ が向きづけられた n 次元閉多様体 M に作用しているとします．

簡単のため，$M \smallsetminus M^T$ への作用が free である場合を考えます．このようなものを semifree な作用と言います．T 軌道として，$T \to T \cdot x$ が同型なものと 1 点になるものと，両極端なタイプのみが現れる場合です．

▶ やはり μ を $M_T(k)$ 上の n 次閉微分形式とすると，先ほどと同様に，$n < 2k+1$ ならば，$(M \smallsetminus M^T)_T(k)$ 上で $\mu = d\nu$ と書けます．

ここで，$M^T \subset M$ の（T 不変計量に関する）ε 近傍（管状開近傍）を $N(\varepsilon)$ とし，関数 $\rho\colon M \to [0, 1]$ を，台が $N(\varepsilon)$ に含まれ，$N(\varepsilon/2)$ 上で恒等的に 1 になるものとします．

すると，$d(\rho\nu)$ は M 上の閉微分形式で，台は $N(\varepsilon)$ に含まれます．$(1-\rho)\nu$ が M 全体に延びることに注意すると，

$$\int_M \mu = \int_{M \smallsetminus M^T} d\nu = \int_M d(\rho\nu) + d((1-\rho)\nu) = \int_M d(\rho\nu) = \int_{N(\varepsilon)} d(\rho\nu).$$

こうして，M 上の積分を，固定点集合の近傍上の積分に書きなおすことができました．ここではこれを「局所化公式の種」とよぶことにします．

▷▷ 実は，semifree という仮定は不要です．multiple orbit があっても，商空間が orbifold になるだけなので，$\mathbb{R}$ 係数で考えるかぎり大丈夫です．

□ まず，$U(1)$，孤立固定点，semifree で考えてみよ，というのは変換群論の常套手段です．

1.1.8　ファイバー積分

▶ μ を $M_T(k)$ 上の $n+p$ 次閉微分形式，$n+p<2k+1$ とすると，$\int_M \mu$ をファイバー積分 [BT82] と解釈して，複素射影空間 $\mathbb{C}P^k$ 上の p 次閉微分形式と見ることができます.

▶ このとき「局所化公式の種」は,

$$\left[\int_M \mu\right] = \left[\int_{N(\varepsilon)} d(\rho\nu)\right] \in H^p(\mathbb{C}P^k, \mathbb{R})$$

と書けます．なお，$U(1)$ 主束 $\pi : S^{2k+1} \to \mathbb{C}P^k$ の Gysin 完全列

$$\cdots \to H^p(\mathbb{C}P^k) \underset{\cup\epsilon}{\to} H^{p+2}(\mathbb{C}P^k) \underset{\pi^*}{\to} H^{p+2}(S^{2k+1}) \underset{\pi_!}{\to} H^{p+1}(\mathbb{C}P^k) \to \cdots$$

より，複素射影空間のコホモロジー環は

$$H^\bullet(\mathbb{C}P^k, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[\epsilon]/(\epsilon^{k+1}), \quad \deg\epsilon = 2$$

とあらわされることがわかります.

1.2　固定点集合の近傍で何をするか

1.2.1　Thom form と Euler form

▶ 向きづけられた n 次元多様体 M とその余次元 q の向きづけられた部分多様体 X に対し，X の法ベクトル束を N_X，包含写像を $i : X \to N_X$，射影を $\pi : N_X \to X$ とします．$\pi \circ i = \mathrm{id}_X$ です.

N_X は X の ε 近傍（管状開近傍）と微分同相です.

▶ ランク q の向きづけられた実ベクトル束 $\pi : E \to X$ の **Thom form** とは，E 上の q 次閉微分形式 τ で，ファイバー方向についてコンパクト台であり，ファイバー積分すると，$\pi_!(\tau) = 1$ となるものです.

Thom form はつねに存在します．ファイバー方向についてコンパクト台の de Rham コホモロジーを $H^\bullet_{\mathrm{cv}}$ と書くと，ファイバー積分

$$\pi_! : H^{q+k}_{\mathrm{cv}}(E) \underset{\cong}{\longrightarrow} H^k(X)$$

は同型で，Thom form を外積する作用素が逆をあたえます（Thom 同型）．[BT82]

▶ $E = N_X$ の Thom form を τ_X とし，N_X を X の管状開近傍と同一視すると，M 上の $n-q$ 次閉微分形式 σ に対し,

$$\int_M \sigma \wedge \tau_X = \int_X \sigma.$$

すなわち，τ_X は X の Poincaré dual です.

▶ Thom form τ_X の X への制限 $e_X = i^*\tau_X$ を，$X \subset M$ の **Euler form** とよぶことにします．これは X 上の q 次閉微分形式です.

▶ i, π は X と N_X の間のホモトピー同値を与えます．よって，$\tau_X - \pi^* i^* \tau_X = \tau_X - \pi^* e_X$ は完全微分形式です．

したがって，N_X 上の $n-q$ 次閉微分形式 σ がファイバー方向についてコンパクト台ならば，

$$\int_M \sigma \wedge \pi^* e_X = \int_X \sigma$$

がなりたちます．

1.2.2 局所化公式の形が見えてきた

前の状況にもどって $X = M^T$ とします．ここで，かりに「e_X で割る」ことができるなら,「局所化公式の種」から一歩進んで,

$$\int_M \mu = \int_{N(\varepsilon)} d(\rho\nu) = \int_{M^T} \frac{i^* d(\rho\nu)}{e_{M^T}} = \int_{M^T} \frac{i^* \mu}{e_{M^T}} \in H^p(\mathbb{C}P^k, \mathbb{R})$$

とすることができそうです．しかし，e_X は有限次元多様体上の微分形式ないしはコホモロジー群の元なので，べき零であり，逆元を考えることはできません．

1.2.3 $U(1)$ Borel 構成

▶ そこで，$k \to \infty$ としてみましょう．

$U(1)$ 主束の間の自然な包含写像

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
U(1) & = & S^1 & \xrightarrow{\subset} & S^3 & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & S^{2k+1} & \xrightarrow{\subset} & S^{2k+3} & \xrightarrow{\subset} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
* & = & \mathbb{C}P^0 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}P^k & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}P^{k+1} & \xrightarrow{\subset} & \cdots
\end{array}$$

によって，M 束の間の包含写像

$$\begin{array}{ccccccccccc}
M & = & M_T(0) & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & M_T(k) & \xrightarrow{\subset} & M_T(k+1) & \xrightarrow{\subset} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
* & = & \mathbb{C}P^0 & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}P^k & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{C}P^{k+1} & \xrightarrow{\subset} & \cdots
\end{array}$$

が誘導されるので，$M_T = M_T(\infty) = \bigcup_k M_T(k)$ が定義できます．これは無限次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup_k \mathbb{C}P^k$ 上の M 束です．$T = U(1)$ の作用する空間 M から M_T をつくる手続きを **Borel 構成** と言います．

▶ $\mathbb{C}P^\infty$ のコホモロジー環は，やはり Gysin 完全列により，

$$H^\bullet(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\epsilon], \quad \deg \epsilon = 2$$

とあらわされることがわかります．今,

$$H_T^p(M, \mathbb{R})_{\mathsf{Borel}} = H^p(M_T, \mathbb{R})$$

と書きましょう．これを Borel 構成による M の $T = U(1)$ **同変コホモロジー** とよびます．これは $H^\bullet(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[\epsilon]$ 上の加群です．また,

$$H_T^\bullet(M, \mathbb{R})_{\mathsf{Borel}} \xrightarrow[\cong]{} \varprojlim_k H^\bullet(M_T(k), \mathbb{R}).$$

▶ $\mathbb{R}[\epsilon]$ には ϵ^{-1} をつけくわえることができますので，今度は e_{M^T} で割ることも正当化できるかもしれません．かりにできたとしたら，局所化公式は次のように書くことができそうです．

1.2.4　何とか局所化公式が書けたけれど

$T = U(1)$ が向きづけられた閉多様体 M に作用しているとき，$M_T = M_T(\infty)$ 上の閉微分形式 μ に対し，

$$\int_M \mu = \int_{M^T} \frac{i^*\mu}{e_{M^T}} \in \mathbb{R}[\epsilon].$$

ただし，右辺の計算の途中に ϵ^{-1} があらわれます．

▶ 問題は，本当に e_{M^T} で割っていいか，ということで，これは，e_{M^T} が具体的にどう書けるか，ということにも関わってきます．

▶ また今度は，無限次元空間である $M_T = M_T(\infty)$ 上の微分形式とは何か，という問題が生じています．無限次元空間である $M_T = M_T(\infty)$ 上の微分形式を直接考えるのは大変そうです．そこでそのかわりに，$M_T(k)$ 上の微分形式を k によらない仕方でつくる，ということを考えます．

▶ $M_T(k)$ は $T = U(1)$ 主束 $S^{2k+1} \times M \to M_T(k)$ の底空間でした．いま $M_T(k)$ 上の微分形式を書きたいのですが，全空間 $S^{2k+1} \times M$ の方が簡単な形をしています．

▶ そこで一般に，連結 Lie 群 G を構造群とする主束 $\pi : P \to B$ に対し，P 上の微分形式と B 上の微分形式の関係について調べておきたいわけですが，この際，微分形式の復習から話を一からやりなおします．

2　$U(1)$ 同変微分形式

2.1　微分形式とコホモロジー

2.1.1　微分形式

▶ 多様体 M 上の **微分形式** とは，局所的には，座標 $(x^a;\ a = 1, \ldots, \dim M)$ に対して記号 dx^a およびそれらの積を形式的に導入し，これに反可換の関係式

$$dx^b dx^a = -dx^a dx^b, \quad dx^a dx^a = 0$$

を課して，さらに（実数または複素数値）関数を係数とし和をとったものでした．dx^a たちが p 個かかっているものを，p 次微分形式 (p-form) と言います．

▶ こういう代数を考える利点は，行列式を自動的に出してくれるところにあります．正方行列 $P = (P_{ab})_{a,\,b=1,\,\ldots,\,\dim M}$ に対し，$P_a = \sum_b P_{ab} dx^b$ とおくと，

$$P_1 \cdots P_n = (\det P) dx^1 \cdots dx^n$$

となります．

□ 以前 深谷賢治さんに「微分形式の幾何学的意味は何でしょうか？」とたずねたところ,「意味はない！ないからいいんだ！」と即答されました．

2.1.2 外微分

▶ 多様体 M 上の微分形式のなすベクトル空間 $\Omega^p(M) = \{p\text{-forms on } M\}$ には，**外微分作用素**

$$d = d^p : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$$

という次数を 1 つ上げる作用素が作用していました．

▶ 関数 f には

$$df = \sum_a \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a$$

と作用し，p-form $\sigma = f dx^{a_1} \cdots dx^{a_p}$ には

$$d\sigma = (df) dx^{a_1} \cdots dx^{a_p} = \sum_{a \neq a_i} \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a dx^{a_1} \cdots dx^{a_p}$$

と作用します．σ の脚に出てこない成分について微分して，その成分の脚をつけくわえて次数を 1 つ上げたものの係数にするわけです．

▶ このように定めると，座標 x^a を関数と思って外微分を作用させたものは，はじめに単なる記号として導入した dx^a に一致しています．実にうまくできているわけです．

□ そこへいくと，偏微分作用素の記号 $\partial/\partial x^a$ はイケてません．本当は座標のすべての成分に依存しているのに，1 つの成分のことしか書いてないからです．そのせいで，部分的に変数変換したときなどに困ってしまいます．熱力学を学ぶ際のつまづきは，物理の理解の難しさよりも，むしろこの記号の駄目さに起因することの方が多かったりするかもしれません．記号 ∂ の形が，いかにも申しわけなさそうです．

▶ $M = \mathbb{R}^3$ の場合，d とはベクトル解析の grad, rot, div のことに他なりません：

$$\begin{aligned}
&df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3, \\
&d\left(g_1 dx^1 + g_2 dx^2 + g_3 dx^3\right) \\
&\quad = \frac{\partial g_1}{\partial x^2} dx^2 dx^1 + \frac{\partial g_1}{\partial x^3} dx^3 dx^1 + \frac{\partial g_2}{\partial x^1} dx^1 dx^2 + \frac{\partial g_2}{\partial x^3} dx^3 dx^2 + \frac{\partial g_3}{\partial x^1} dx^1 dx^3 + \frac{\partial g_3}{\partial x^2} dx^2 dx^3 \\
&\quad = \left(\frac{\partial g_3}{\partial x^2} - \frac{\partial g_2}{\partial x^3}\right) dx^2 dx^3 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x^3} - \frac{\partial g_3}{\partial x^1}\right) dx^3 dx^1 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x^1} - \frac{\partial g_1}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2, \\
&d\left(h_1 dx^2 dx^3 + h_2 dx^3 dx^1 + h_3 dx^1 dx^2\right) \\
&\quad = \frac{\partial h_1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 + \frac{\partial h_2}{\partial x^2} dx^2 dx^3 dx^1 + \frac{\partial h_3}{\partial x^3} dx^3 dx^1 dx^2 \\
&\quad = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x^1} + \frac{\partial h_2}{\partial x^2} + \frac{\partial h_3}{\partial x^3}\right) dx^1 dx^2 dx^3.
\end{aligned}$$

▶ 一般の場合にもどって，このとき重要な恒等式

$$dd = 0$$

がなりたちます．これこそ 20 世紀の数学を代表する式ではないでしょうか．これは

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a}$$

によるものです．つまり $dd=0$ という式は，たがいに可換な作用素たちがいると言っているわけです．

▶ $d\sigma$ と書ける微分形式を **完全形式**，$d\sigma=0$ となる微分形式 σ を **閉形式** とよびます．
$dd=0$ より，完全形式ならば閉形式です．
逆に，閉形式は局所的には完全です（**Poincaré の補題**）．
$\dfrac{dz}{z}$ は $\{z\in\mathbb{C}\mid z\neq 0\}$ 上の完全でない閉形式です．

▶ 閉形式のなすベクトル空間の，完全形式のなす部分空間による商空間

$$H^p(M)_{\mathsf{de\,Rham}}=\operatorname{Ker}d^p/\operatorname{Im}d^{p-1}$$

が **de Rham コホモロジー** でした．Poincaré の補題より，このベクトル空間は多様体 M の大域的形状を反映しているものと考えられます．実際にこれは，$\mathbb{R}$ 係数の特異コホモロジーや Čech コホモロジーに一致します．

□ また熱力学の話ですが，熱が閉でない 1-form で記述される，というところがなかなかわからなかった覚えがあります．そのおかげで，エンジンはピストンが元の位置にもどる間に仕事をすることができるわけですが．物理がわからなかったというより，閉でない 1-form という数学的概念が難しかったせいでしょう．

□ 経済学部は熱力学を必修にすべきだと思うのですが，どうでしょう？

2.2 微分形式とベクトル場の作用

2.2.1 Lie 微分と内部積

▶ 多様体 M 上にベクトル場 ξ があると，さらに **Lie 微分** L_ξ および **内部積** ι_ξ という作用素が定まります：

$$L_\xi:\Omega^p(M)\longrightarrow\Omega^p(M),\qquad \iota_\xi:\Omega^p(M)\longrightarrow\Omega^{p-1}(M).$$

▶ Lie 微分 L_ξ は ξ の積分曲線に沿った微分で，次数を変えません．

▶ 内部積は代数的なもので，接ベクトルと余接ベクトルの間の自然な pairing によって，次数を 1 つ下げます．$\xi=g\dfrac{\partial}{\partial x^a}$, $a\neq a_1,\ldots,a_p$ に対し，

$$\iota_\xi(f\,dx^{a_1}\cdots dx^{a_p})=0,$$
$$\iota_\xi(f\,dx^a dx^{a_1}\cdots dx^{a_p})=gf\,dx^{a_1}\cdots dx^{a_p}.$$

▶ Lie 微分，内部積，外微分の間には， **H. Cartan の公式**

$$L_\xi=d\iota_\xi+\iota_\xi d=(d+\iota_\xi)^2$$

がなりたちます．Lie 微分の計算はこれによっておこないます．

□ 土屋昭博さんはこの公式が大好きだそうです．

2.2.2 同変微分形式

▶ $d+\iota_\xi$ を不変微分形式のなすベクトル空間

$$\Omega^p(M)^\xi = \{\sigma \in \Omega^p(M) \mid L_\xi \sigma = 0\}$$

の上に制限すると，H. Cartan の公式より，

$$(d+\iota_\xi)^2 = 0 \quad \text{on} \quad \Omega^\bullet(M)^\xi.$$

ゆえに $d+\iota_\xi$ によるコホモロジーを考えることができます．

▶ しかしこれでは次数が混ざってしまっていますので，ちょっと工夫して，

$$\Omega_\xi^\bullet(M) = \mathbb{R}[\epsilon] \otimes \Omega^\bullet(M)^\xi = \bigoplus_{i \geq 0} \epsilon^i \, \Omega^\bullet(M)^\xi$$

とおきます．ここの元を，ベクトル場 ξ に関する **同変微分形式** とよびます．このベクトル空間は，1 変数多項式環 $\mathbb{R}[\epsilon]$ 上の加群です．$\Omega_\xi^\bullet(M)$ 上で $\mathbb{R}[\epsilon]$ 準同型

$$d_\xi = d - \epsilon \, \iota_\xi$$

を考えます．$\deg \epsilon = 2$ と決めれば d_ξ は次数を 1 上げる作用素になります．やはり H. Cartan の公式より，

$$d_\xi d_\xi = dd - \epsilon(d\iota_\xi + \iota_\xi d) + \epsilon^2 \iota_\xi \iota_\xi = 0.$$

そこで d_ξ によるコホモロジー $H_\xi^p(M)$ を考えることができます．これをベクトル場 ξ に関する **同変 de Rham コホモロジー** とよびます．これは $\mathbb{R}[\epsilon]$ 加群になります．

▶ 同変微分形式 μ により $d_\xi \mu$ と書ける同変微分形式を **同変完全形式**，$d_\xi \mu = 0$ となる同変微分形式 μ を **同変閉形式** とよびます．

いきなり μ という記号を使いだしたのは，モーメント写像のことが念頭にあってのことなのですが，今回はそれについては述べません．

▶ p 次同変微分形式 μ は，$p = 2k, 2k+1$ とすると，

$$\mu = \mu^{(p)} + \epsilon \mu^{(p-2)} + \epsilon^2 \mu^{(p-4)} + \cdots + \epsilon^k \mu^{(p-2k)}, \qquad \mu^{(i)} \in \Omega^i(M)^\xi$$

と書け，

$$d_\xi \mu = d\mu^{(p)} + \epsilon(-\iota_\xi \mu^{(p)} + d\mu^{(p-2)}) + \epsilon^2(-\iota_\xi \mu^{(p-2)} + d\mu^{(p-4)}) + \cdots - \epsilon^{k+1} \iota_\xi \mu^{(p-2k)}.$$

▶ $\xi = 0$ ならば，$\mathbb{R}[\epsilon]$ 加群として

$$H_{\xi=0}^\bullet(M) \cong \mathbb{R}[\epsilon] \otimes H^\bullet(M)_{\mathsf{de\,Rham}}.$$

2.2.3 同変積分

▶ M を閉多様体とします．M 上の積分は，$\mathbb{R}[\epsilon]$ 準同型

$$\int_M : \Omega_\xi^\bullet(M) \longrightarrow \mathbb{R}[\epsilon]$$

を定めます．これを **同変積分** と言います．

▶ このとき，$\dim M = p - 2k + 1$, $\mu \in \Omega_\xi^p(M)$ に対し，Stokes の定理より，

$$\int_M d_\xi \mu = \epsilon^k \int_M d\mu^{(p-2k)} = 0.$$

よって，同変積分は $\mathbb{R}[\epsilon]$ 準同型 $H_\xi^\bullet(M) \to \mathbb{R}[\epsilon]$ を定めます．

2.2.4 複数のベクトル場があるとき

▶ 多様体 M 上にたがいに可換なベクトル場 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ があるとき，

$$\Omega^p(M)^\xi = \{\sigma \in \Omega^p(M) \mid L_{\xi_a}\sigma = 0,\ a = 1, \ldots, r\}$$
$$\Omega_\xi^\bullet(M) = \mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r] \otimes \Omega^\bullet(M)^\xi, \qquad \deg \epsilon^a = 2$$

とおき，$\Omega_\xi^\bullet(M)$ 上で作用素

$$d_\xi = d - \sum_{a=1}^r \epsilon^a \, \iota_{\xi_a}$$

を考えると，$\xi_1, \ldots, \xi_r$ がたがいに可換なので，像も $\Omega_\xi^\bullet(M)$ に入り，$\mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r]$ 準同型になります．やはり H. Cartan の公式より

$$d_\xi d_\xi = 0.$$

そこで d_ξ によるコホモロジー $H_\xi^p(M)$ を考えることができます．これは $\mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r]$ 加群になります．

▶ M が閉多様体ならば，同変積分は $\mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r]$ 準同型

$$\int_M : \Omega_\xi^\bullet(M) \longrightarrow \mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r],$$
$$\int_M : H_\xi^\bullet(M) \longrightarrow \mathbb{R}[\epsilon^1, \ldots, \epsilon^r]$$

を定めます．

2.2.5 Lie 群の作用

▶ Lie 群 G が多様体 M に作用するとき，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ から M 上のベクトル場のなす Lie 環への準同型が誘導されます．記号の節約のため，$\xi \in \mathfrak{g}$ に対応するベクトル場も ξ と書くことにします．

▶ G が連結のとき，M 上の微分形式 σ が G 不変なことと，任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し $L_\xi \sigma = 0$ であることとは同値です．

2.2.6 The $U(1)$ Cartan model

▶ $T = U(1)$ の Lie 環 $\mathfrak{t}$ 上の座標として，線型同型 $\epsilon : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ をとり，$\xi \in \mathfrak{t}$ を $\epsilon(\xi) = 1$ となるようにとります．$T = U(1)$ 上のベクトル場と思えば，$\xi = \dfrac{\partial}{\partial \epsilon}$ ということです．

▶ $T = U(1)$ が多様体 M に作用しているとき，

$$\Omega^p(M)^{\mathfrak{t}} = \{\sigma \in \Omega^p(M) \mid L_\eta \sigma = 0 \text{ for any } \eta \in \mathfrak{t}\}$$

とおきます．と言っても $\Omega^p(M)^{\mathfrak{t}} = \Omega^p(M)^{\xi}$ です．ξ に関する同変微分形式を $U(1)$ 同変微分形式と言い，その全体を

$$\Omega^\bullet_T(M) = \mathbb{R}[\epsilon] \otimes \Omega^\bullet(M)^{\xi} = S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M)^{\mathfrak{t}}$$

と書きます．$d_T = d_\xi$ はこの上の $S\mathfrak{t}^* = \mathbb{R}[\epsilon]$ 準同型で，$S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M)^{\mathfrak{t}}$ 上の作用素として，ϵ のとり方によらずに定まっています．

　やはり $d_T d_T = 0$ です．複体

$$(\Omega^\bullet_T(M), d_T)$$

を $U(1)$ **Cartan model** と言い，そのコホモロジー

$$H^p_T(M)_{\mathsf{Cartan}}$$

を Cartan model の $U(1)$ 同変 de Rham コホモロジーと言います．

▹▹ 後で示しますが，実は

$$H^p_T(M)_{\mathsf{Cartan}} \cong H^p_T(M, \mathbb{R})_{\mathsf{Borel}}.$$

▶ 作用が自明ならば，$S\mathfrak{t}^*$ 加群として，

$$H^\bullet_T(M)_{\mathsf{Cartan}} \cong S\mathfrak{t}^* \otimes H^\bullet(M)_{\mathsf{de\,Rham}}.$$

2.3 $U(1)$ 主束上の微分形式

2.3.1 Basic forms

連結 Lie 群 G を構造群とする主束 $\pi : P \to B$ に対し，P 上の微分形式と B 上の微分形式の関係について調べておきます．

▶ 局所自明性より，$\pi : P \to B$ による引きもどし

$$\pi^* : \Omega^p(B) \longrightarrow \Omega^p(P)$$

は単射になります．問題は像の特徴づけです．

　まず，B から引きもどした微分形式は G 不変でなければなりません．でも条件はそれだけではありません．

▶ **例**　$\pi : P \to B$ として

$$P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad B = \mathbb{R}, \quad \pi(x,\, y) = x, \quad G = \mathbb{R}$$

という場合を考えてみます．P 上の微分形式 $f(x,\, y)dx + g(x,\, y)dy$ が B 上の微分形式の引きもどしであるための必要十分条件は,

$$g = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ですね.

▶ P 上の微分形式 σ が，ファイバー方向の脚をもたないとき，すなわち任意の $\xi \in \mathfrak{g}$ に対し $\iota_\xi \sigma = 0$ をみたすとき，**水平** であると言います．B から引きもどした微分形式は水平にもなります.

上の例では，$g = 0$ の方に相当します．一方，$G = \mathbb{R}$ 不変という条件は $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0,\, \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ です.

▶ G は連結としています．水平かつ G 不変な微分形式を **basic form** とよび,

$$\begin{aligned} \Omega^p(P)_{\mathrm{basic}} &= \{\text{basic } p\text{-forms on } P\} \\ &= \{\sigma \in \Omega^p(P) \mid \forall \xi \in \mathfrak{g};\ \iota_\xi \sigma = 0,\, L_\xi \sigma = 0\} \\ &= \{\sigma \in \Omega^p(P) \mid \forall \xi \in \mathfrak{g};\ \iota_\xi \sigma = 0,\, \iota_\xi d\sigma = 0\} \end{aligned}$$

とおきます．このとき,

$$\pi^*(\Omega^p(B)) = \Omega^p(P)_{\mathrm{basic}}.$$

2.3.2　$U(1)$ 接続形式

▶ $T = U(1)$ 主束 $\pi : P \to B$ の **接続形式** θ_P とは，T の Lie 環 $\mathfrak{t}$ の双対 $\mathfrak{t}^*$ から $\Omega^1(P)$ への線型写像 $\theta_P : \mathfrak{t}^* \to \Omega^1(P)$ であって，任意の $\epsilon \in \mathfrak{t}^*, \xi \in \mathfrak{t}$ に対し,

$$\iota_\xi \theta_P(\epsilon) = \epsilon(\xi), \qquad L_\xi \theta_P(\epsilon) = 0$$

をみたすものを言います.

▶ $U(1)$ 接続形式は任意の $T = U(1)$ 主束上に存在します.

▶ 各点 $p \in P$ に対し，接ベクトル空間 T_pP 上の線型関係式 $\theta_P(\epsilon)_p = 0$ は，ファイバー方向の補空間をあたえます.

2.3.3　例：S^{2k+1} 上の $U(1)$ 接続形式

▶ $T = U(1)$ の Lie 環 $\mathfrak{t}$ 上の座標として，線型同型 $\epsilon : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ を固定します．normalization は，$t = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\,\epsilon}$ が指数写像 $\mathfrak{t} \to T = U(1) \subset \mathbb{C}$ に一致するように決めます．

▶ $T = U(1)$ が $2k+1$ 次元球面

$$S = S^{2k+1} = \{(z^0, z^1, \ldots, z^k) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid \sum_{a=0}^{k} |z^a|^2 = 1\}$$

に，スカラー倍で

$$t \cdot (z^0, z^1, \ldots, z^k) = (tz^0, tz^1, \ldots, tz^k).$$

のように作用しているとします．$\mathfrak{t}$ 上のベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial \epsilon}$ が誘導する $S = S^{2k+1}$ 上のベクトル場は，$z^a = x^a + \mathbf{i}\, y^a$ によって，

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} = \sum_a \left(-y^a \frac{\partial}{\partial x^a} + x^a \frac{\partial}{\partial y^a} \right)$$

と書けます．

∵）まず，

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}(x^b + \mathbf{i}\, y^b) = \left.\frac{\partial}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\,\epsilon}(x^b + \mathbf{i}\, y^b) = \mathbf{i}\,(x^b + \mathbf{i}\, y^b) = -y^b + \mathbf{i}\, x^b.$$

一方，$-y^a \dfrac{\partial}{\partial x^a} + x^a \dfrac{\partial}{\partial y^a}$ は，

$$\left(-y^a \frac{\partial}{\partial x^a} + x^a \frac{\partial}{\partial y^a} \right) \sum_b |z^b|^2 = -y^a x^a + x^a y^a = 0$$

より，$S = S^{2k+1}$ 上のベクトル場であり，

$$\sum_a \left(-y^a \frac{\partial}{\partial x^a} + x^a \frac{\partial}{\partial y^a} \right) (x^b + \mathbf{i}\, y^b) = -y^b + \mathbf{i}\, x^b.$$

よって等式が得られました．　□

▶ そこで

$$\theta_S(\epsilon) = \mathrm{Im} \left(\sum_a \overline{z^a} dz^a \right) = \sum_a (-y^a dx^a + x^a dy^a)$$

とおくと，

$$\iota_{\partial/\partial\epsilon} \theta_S(\epsilon) = \sum_a ((-y^a)^2 + (x^a)^2) = 1.$$

よって $\xi \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$\iota_\xi \theta_S(\epsilon) = \epsilon(\xi).$$

θ_S は，Lie 環 $\mathfrak{t}$ の双対 $\mathfrak{t}^*$ から $\Omega^1(S^{2k+1})$ への線型写像と思えるわけです．また，

$$d\theta_S(\epsilon) = 2 \sum_a dx^a dy^a$$

より，

$$\iota_{\partial/\partial\epsilon} d\theta_S(\epsilon) = 2\sum_a (-y^a dy^a - x^a dx^a) = -d\sum_a ((x^a)^2 + (y^a)^2) = 0.$$

よって $\xi \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$L_\xi \theta_S(\epsilon) = \iota_\xi d\theta_S(\epsilon) = 0.$$

というわけで，θ_S は $U(1)$ 主束 $S^{2k+1} \to \mathbb{C}P^k$ の接続形式です．

2.3.4 $U(1)$ 主束の同変コホモロジー

$T = U(1)$ 主束 $\pi : P \to B$ に対し，

$$H^p_T(P)_{\mathsf{Cartan}} \cong H^p(B).$$

$S\mathfrak{t}^*$ 加群としては，$\mathfrak{t}^*$ の元が自明に作用します．

$\because$) 接続形式を θ_P とします．
自然な写像

$$H^p(P)_{\text{basic}} \longrightarrow H^p_T(P)_{\mathsf{Cartan}}$$

が同型であることを示します．

（全射性）P 上の p 次同変微分形式

$$\mu = \mu^{(p)} + \epsilon\mu^{(p-2)} + \epsilon^2\mu^{(p-4)} + \cdots + \epsilon^k\mu^{(p-2k)}, \qquad \mu^{(i)} \in \Omega^i(P)^{\mathfrak{t}}$$

が $d_T\mu = 0$ をみたすとすると，特に

$$\iota_\xi \mu^{(p-2k)} = 0$$

なので，

$$\mu + d_T(\epsilon^{k-1}\theta_P\mu^{(p-2k)}) = \mu + d(\epsilon^{k-1}\theta_P\mu^{(p-2k)}) - \epsilon^k\mu^{(p-2k)}$$

は ϵ^{k-1} の項までしかありません．これをつづけて，μ と cohomologous な $\hat{\mu}^{(p)} \in \Omega^p(P)^{\mathfrak{t}}$ を得ます．このとき，$d_T\hat{\mu}^{(p)} = 0$ より

$$d\hat{\mu}^{(p)} = 0, \qquad \iota_\xi\hat{\mu}^{(p)} = 0.$$

（単射性）$p-1$ 次同変微分形式

$$\nu = \nu^{(p-1)} + \epsilon\nu^{(p-3)} + \epsilon^2\nu^{(p-5)} + \cdots + \epsilon^k\nu^{(p-2k-1)}, \qquad \nu^{(i)} \in \Omega^i(P)^{\mathfrak{t}}$$

に対し，

$$d_T\nu = d\nu^{(p-1)} + \epsilon(-\iota_\xi\nu^{(p-1)} + d\nu^{(p-3)}) + \cdots - \epsilon^{k+1}\iota_\xi\nu^{(p-2k-1)} \in \Omega^p(M)^{\mathfrak{t}}$$

とすると，

$$\iota_\xi\nu^{(p-2k-1)} = 0.$$

よって同様に，ν を

$$\nu + d_T(\epsilon^{k-1}\theta_P \nu^{(p-2k-1)}) = \nu + d(\epsilon^{k-1}\theta_P \nu^{(p-2k-1)}) - \epsilon^k \nu^{(p-2k-1)}$$

でおきかえると，これは ϵ^{k-1} の項までで，$d_T\nu$ は変わりません．これをつづけて，$\nu \in \Omega^{p-1}(P)^{\mathfrak{t}}$ とすることができ，$d_T\nu \in \Omega^p(P)^{\mathfrak{t}}$ より，

$$\iota_\xi \nu = 0.$$

以上により，

$$H_T^p(P)_{\mathsf{Cartan}} \cong H^p(P)_{\mathrm{basic}} \cong H^p(B).$$

$\square$

2.3.5　もう 1 つの少し自明でない局所化公式

$T = U(1)$ 主束 $\pi : P \to B$ において，P が閉多様体のとき，同変閉形式 $\mu \in \Omega^\bullet(P)^{\mathfrak{t}}$ の同変積分は 0:

$$\int_P \mu = 0 \in \mathbb{R}[\epsilon].$$

$\because$) $\dim B < \dim P$. $\square$

2.4　局所化公式

2.4.1　コンパクト台の de Rham コホモロジー

▶ コンパクト台の微分形式全体を $\Omega_{\mathrm{c}}^\bullet$，コンパクト台の de Rham コホモロジーを $H_{\mathrm{c}}^\bullet$ と書きます．基本は，

$$H_{\mathrm{c}}^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = n \\ 0 & p \neq n \end{cases}$$

です．積分が同型

$$\int_{\mathbb{R}^n} : H_{\mathrm{c}}^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}$$

をあたえます（Thom 同型）．

▶ コンパクト台の $T = U(1)$ 同変 de Rham コホモロジーを $H_{T,\mathrm{c}}^\bullet$ と書くことにします．
　$T = U(1)$ が $\mathbb{R}^n$ に作用するとき，

$$H_{T,\mathrm{c}}^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[\cong]{} H_{\mathrm{c}}^n(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}[\epsilon] \cong \mathbb{R}[\epsilon].$$

すなわち，同変積分が同型

$$\int_{\mathbb{R}^n} : H_{T,\mathrm{c}}^n(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[\cong]{} \mathbb{R}[\epsilon]$$

をあたえます（同変 Thom 同型）．

$\because$) 閉形式 $\mu^{(n)} \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ があたえられたとします．$T = U(1)$ の作用で平均して，$\mu^{(n)}$ は T 不変にできます．すなわち，$\xi \in \mathfrak{t}$ に対し，

$$d\mu^{(n)} = 0, \qquad L_\xi \mu^{(n)} = 0.$$

よって，

$$d\iota_\xi\mu^{(n)} = (L_\xi - \iota_\xi d)\mu^{(n)} = 0.$$

$H_{\mathrm{c}}^{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$ なので，コンパクト台の $(n-2)$-form $\mu^{(n-2)}$ により，

$$\iota_\xi\mu^{(n)} = d\mu^{(n-2)}$$

と書けます．やはり $T = U(1)$ の作用で平均して，$\mu^{(n-2)}$ を T 不変にできます．

これをつづけて，コンパクト台の同変閉形式

$$\mu^{(n)} + \epsilon\mu^{(n-2)} + \epsilon^2\mu^{(n-4)} + \cdots$$

が得られます． □

2.4.2 例

▶ $T = U(1)$ の Lie 環 $\mathfrak{t}$ 上の座標として，線型同型 $\epsilon : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}$ を固定します．normalization は，$t = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\,\epsilon}$ が指数写像 $\mathfrak{t} \to T = U(1) \subset \mathbb{C}$ に一致するように決めます．

▶ $T = U(1)$ が 平面 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ に $z \mapsto t^k z\,(k \in \mathbb{Z})$ で作用しているとします．$\mathfrak{t}$ 上のベクトル場 $\xi = \dfrac{\partial}{\partial\epsilon}$ が誘導するベクトル場は，$z = x + \mathbf{i}\,y$ によって，

$$\xi = \frac{\partial}{\partial\epsilon} = k\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

と書けます．

$$\mu^{(2)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$$

とおくと，これはコンパクト台ではありませんが，それに非常に近いもので，

$$\begin{aligned} d\mu^{(2)} &= 0, \\ \iota_\xi\mu^{(2)} &= k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(-ydy - xdx) \\ &= d\left(k\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right). \end{aligned}$$

よって，

$$\mu = \mu^{(2)} + k\epsilon\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

は同変閉形式で，

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mu = \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi, \qquad \mu|_{(0,\,0)} = k\epsilon.$$

▶ $H^2_{T,\,\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}$ に注意します．$\mathbb{R}^2$ 上のコンパクト台の同変閉形式 μ に対し，

$$\mu_{\mathrm{eff}} = \frac{2\pi}{k\epsilon}\mu \in \Omega_{\mathrm{c}}^{\bullet}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{R}[\epsilon,\,\epsilon^{-1}]$$

とおくと，Gauss 積分がコンパクト台ではないことに目をつぶって，

$$\int_{\mathbb{R}^2}\mu = \mu_{\mathrm{eff}}|_{(0,\,0)}.$$

この場合の局所化公式が書けました．

2.4.3 局所化公式―孤立固定点の場合

▶ $T = U(1)$ が向きづけられた $2m$ 次元閉多様体 M に作用しているとします．ただし，固定点はすべて孤立するものとし，$p \in M^T$ の法ベクトル空間上の $T = U(1)$ の表現の重みを $(k_1(p), \ldots, k_m(p)) \in \mathbb{Z}^m$ とすると，M 上の同変閉形式 μ に対し，

$$\int_M \mu = \sum_{p \in M^T} \left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right)^m \frac{\mu|_p}{k_1(p)\cdots k_m(p)}.$$

▶ $T = U(1)^r$ が向きづけられた $2m$ 次元閉多様体 M に作用しているとします．ただし，固定点はすべて孤立するものとし，$p \in M^T$ の法ベクトル空間上の T の表現の重みを $(k_1(p), \ldots, k_m(p)) \in (\mathbb{Z}^r)^m$ とすると，M 上の同変閉形式 μ に対し，

$$\int_M \mu = \sum_{p \in M^T} (2\pi)^m \frac{\mu|_p}{\prod_i (k_i(p) \cdot \epsilon)}, \qquad \epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r).$$

2.4.4 例

▶ 複素射影直線 $\mathbb{C}P^1 = \{[z_0 : z_1]\}$ に $T = U(1)$ が

$$t \cdot [z_0 : z_1] = [z_0 : tz_1]$$

によって作用しているとすると，$[1:0]$ における表現が t，$[0:1]$ における表現が t^{-1} なので，

$$0 = \int_{\mathbb{C}P^1} 1 = 2\pi \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{-\epsilon}\right).$$

▶ 複素射影平面 $\mathbb{C}P^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2]\}$ に $T = U(1)^2$ が

$$(t_1, t_2) \cdot [z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : t_1 z_1 : t_2 z_2]$$

によって作用しているとすると，$[1:0:0]$ における表現が $t_1 + t_2$，$[0:1:0]$ における表現が $t_1^{-1} + t_1^{-1} t_2$，$[0:0:1]$ における表現が $t_2^{-1} + t_1 t_2^{-1}$ なので，

$$0 = \int_{\mathbb{C}P^2} 1 = (2\pi)^2 \left(\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{1}{-\epsilon_1(\epsilon_2 - \epsilon_1)} + \frac{1}{-\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}\right).$$

2.4.5 一般の場合

▶ 孤立固定点とは限らない場合は，次のように考えます．

M^T の連結成分を X とし，その余次元を $2m_X$ とすると，X の法ベクトル束 N_X は T 同変ベクトル束になり，その同変 Euler 類 e_X の逆元を考えることができます．e_X を点 $p \in X$ に制限すると，孤立固定点の場合の計算で見たように 0 でないからです．

▶ Thom form, Euler form の議論を，同変ベクトル束に対して同変微分形式を用いておこなうことにより，同変 Thom form，同変 Thom 同型，同変 Euler form が得られます．

2.5 比較定理

2.5.1 Lie 環と DG Lie 環

▶ Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同型なベクトル空間

$$\mathfrak{g} \underset{\cong}{\longrightarrow} \mathfrak{g}_0, \quad \xi \longmapsto L_\xi$$
$$\mathfrak{g} \underset{\cong}{\longrightarrow} \mathfrak{g}_1, \quad \xi \longmapsto \iota_\xi$$

に対し，$\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ 上に DG Lie 環の構造を次のように入れます：

$$\begin{aligned} &d(\iota_\xi) = L_\xi, \quad d(L_\xi) = 0, \\ &[L_\xi,\, L_\eta] = L_{[\xi,\,\eta]}, \quad [L_\xi,\, \iota_\eta] = \iota_{[\xi,\,\eta]}, \quad [\iota_\xi,\, \iota_\eta] = 0. \end{aligned}$$

▶ Lie 環 $\mathfrak{g}$ が多様体 M に作用するとき，Lie 微分と内部積により，DG Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ の DG 代数 $\Omega^\bullet(M)$ への作用が誘導されます.

▶ DG Lie 環 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ の作用する DG 代数を，$\mathfrak{g}$-DG 代数とよぶことにします.

2.5.2 $U(1)$ の Weil 代数

▶ $T = U(1)$ に対し，graded algebra

$$\Lambda\mathfrak{t}^* \otimes S\mathfrak{t}^* = \Lambda_{\mathbb{R}}(\theta) \otimes \mathbb{R}[\epsilon], \quad \deg\theta = 1, \quad \deg\epsilon = 2$$

上に微分 d および $\xi \in \mathfrak{t}$, $\epsilon(\xi) = 1$ の作用を

$$d\theta = \epsilon, \quad d\epsilon = 0, \quad \iota_\xi\theta = 1, \quad \iota_\xi\epsilon = 0$$

によって定めたものを，$T = U(1)$ の **Weil 代数** と言います．このとき，

$$L_\xi\theta = 0, \qquad L_\xi\epsilon = 0$$

であり，

$$H^\bullet((\Lambda\mathfrak{t}^* \otimes S\mathfrak{t}^*)_{\mathrm{basic}}) \cong S\mathfrak{t}^*.$$

▶ $T = U(1)$ 主束 $\pi : P \to B$ 上の接続形式 $\theta_P : \mathfrak{t}^* \to \Omega^1(P)$ により，$\mathfrak{t}$-DG 代数の準同型

$$\Lambda\mathfrak{t}^* \otimes S\mathfrak{t}^* \longrightarrow \Omega^\bullet(P)$$

が誘導されます．これを **Weil 準同型** と言います.

ϵ の像は basic な同変閉形式になり，B 上の閉形式と見なせます.

2.5.3 The $U(1)$ Weil model

▶ $T = U(1)$ が多様体 M に作用しているとき，複体

$$((\Lambda\mathfrak{t}^* \otimes S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M))_{\mathrm{basic}},\, d)$$

を $U(1)$ **Weil model** と言い，そのコホモロジー

$$H_T^\bullet(M)_{\mathsf{Weil}}$$

を Weil model の $U(1)$ 同変 de Rham コホモロジーと言います．

▶ $T = U(1)$ 主束 $S^{2k+1} \to \mathbb{C}P^k$ の接続形式に対する Weil 準同型により，同型

$$H_T^\bullet(M)_{\mathsf{Weil}} \underset{\cong}{\longrightarrow} \varprojlim_k H^\bullet(M_T(k),\, \mathbb{R}) \underset{\cong}{\longleftarrow} H_T^\bullet(M,\, \mathbb{R})_{\mathsf{Borel}}$$

が誘導されます．

▶ $U(1)$ Weil model と $U(1)$ Cartan model の間には，複体としての自然な同型があります．特に，

$$H_T^\bullet(M)_{\mathsf{Weil}} \cong H_T^\bullet(M)_{\mathsf{Cartan}}.$$

$\because$)

$$\mu = \sum_k \epsilon^k(\mu_k' + \theta\mu_k'') \in (\Lambda\mathfrak{t}^* \otimes S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M))_{\mathrm{basic}}$$

とすると，$L_\xi\mu = 0$, $\iota_\xi\mu = 0$ より，

$$L_\xi\mu_k' = 0, \quad L_\xi\mu_k'' = 0, \quad \iota_\xi\mu_k' + \mu_k'' = 0, \quad \iota_\xi\mu_k'' = 0.$$

ゆえに，

$$\mu' = \sum_k \epsilon^k\mu_k'$$

とおくと，

$$\mu' \in S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M)^{\mathfrak{t}}, \qquad \mu = \mu' - \theta\iota_\xi\mu'.$$

逆に，$\mu' \in S\mathfrak{t}^* \otimes \Omega^\bullet(M)^{\mathfrak{t}}$ に対し，

$$L_\xi(\mu' - \theta\iota_\xi\mu') = 0, \qquad \iota_\xi(\mu' - \theta\iota_\xi\mu') = 0.$$

さらに，$d_T = d - \epsilon\,\iota_\xi$ より，

$$d(\mu' - \theta\iota_\xi\mu') = d\mu' - \epsilon\,\iota_\xi\mu' - \theta\iota_\xi d\mu' = d_T\mu' - \theta\iota_\xi d_T\mu'.$$

□

3　*Thhe* 分類空間

3.1　Lie 群のホモロジー　"the fermion side"

3.1.1　コンパクト Lie 群のホモロジー

コンパクト Lie 群 G の乗法 $G \times G \to G$ は，ホモロジー群 $H_*(G)$ 上に乗法

$$H_*(G) \otimes H_*(G) \longrightarrow H_*(G).$$

を誘導します．$\mathbb{R}$ 係数の場合，それは外積代数になります：

$$H_*(G, \mathbb{R}) = \Lambda_{\mathbb{R}}(\psi_1, \ldots, \psi_r), \qquad \deg(\psi_i)\text{: odd.}$$

ここで，r は G のランク，すなわち極大トーラスの次元です．

$$\deg(\psi_1) \leq \cdots \leq \deg(\psi_r), \qquad \deg(\psi_i) = 2m_i + 1$$

とするとき，$(m_1, \ldots, m_r)$ を G の exponent と言います．

たとえば,

$$\begin{aligned} H_*(U(1)^r, \mathbb{R}) = H_*((S^1)^r, \mathbb{R}) &= \Lambda_{\mathbb{R}}(\psi_1, \ldots, \psi_r), & \deg(\psi_i) &= 1, \\ H_*(SU(2), \mathbb{R}) = H_*(S^3, \mathbb{R}) &= \Lambda_{\mathbb{R}}(\psi), & \deg(\psi) &= 3, \\ H_*(U(n), \mathbb{R}) &= \Lambda_{\mathbb{R}}(\psi_1, \ldots, \psi_n), & \deg(\psi_i) &= 2i - 1. \end{aligned}$$

3.1.2　G 空間のホモロジー

G 空間 X 対し，作用 $G \times X \to X$ は $H_*(X)$ 上に $H_*(G)$ 加群の構造

$$H_*(G) \otimes H_*(X) \longrightarrow H_*(X)$$

を誘導します．

ホモロジーは，G 空間の圏 $(\underline{G\text{-space}})$ から $H_*(G)$ 加群の圏 $(\underline{H_*(G)\text{-mod}})$ への函手

$$H_* : (\underline{G\text{-space}}) \longrightarrow (\underline{H_*(G)\text{-mod}})$$

を与えます．

3.2　分類空間のコホモロジー　"the boson side"

3.2.1

▶ 位相群 G に対し，全空間が可縮な G 主束 $EG \to BG$ が存在します．これを **普遍 G 主束** **(universal principal G-bundle)** と言い, BG を **分類空間** **(classifying space)** と言います.

▶ 基点を保つループ空間 ΩBG は G に弱ホモトピー同値.

▶ パラコンパクト Hausdorff 空間 Y 上の任意の G 主束 P に対し，連続写像 $f : Y \to BG$ が存在して,

$$\omega Y = f^{-1}EG = \bigsqcup_{y \in Y} EG_{f(y)}$$

が P に同型：

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & EG \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"'] & BG \end{tikzcd}$$

f はホモトピーを除いて一意的.

$\square$ 分類空間 BG は，弱ホモトピー同値を除いて一意的．このようなものには *"thhe"* という「ホモトピー定冠詞」をつけたらどうか，と Drinfeld は言っています． [Dr04]

▶ コンパクト Lie 群の分類空間の存在を言うには，ユニタリ群の場合に構成すれば十分です．実際，G はあるユニタリ群 $U(n)$ の部分群になることが知られています．$EU(n)$ があれば，G もこれに自由に作用し，G がコンパクトなので，$EU(n) \to EU(n)/G$ は G 主束になります.

3.2.2 ユニタリ群の分類空間の構成

▶ $\mathbb{C}^{n+k}$ 上の標準的 Hermite 内積を $\langle u, v\rangle = u^* v$ とします.

$$\begin{aligned} V_n(\mathbb{C}^{n+k}) &= \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in \mathbb{C}^{n+k}, \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\}, \\ Gr_n(\mathbb{C}^{n+k}) &= \{\mathbb{C}^{n+k} \text{ の } n \text{ 次元部分ベクトル空間}\} \end{aligned}$$

とおきます．$V_n(\mathbb{C}^{n+k})$ を **Stiefel 多様体**，$Gr_n(\mathbb{C}^{n+k})$ を **Grassmann 多様体** と言います.

$$V_n(\mathbb{C}^{n+k}) \to Gr_n(\mathbb{C}^{n+k}), \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$$

は $U(n)$ 主束です.

▶ $n = 1$ のとき，$V_1(\mathbb{C}^{k+1}) = S^{2k+1}$（球面）であり，$Gr_1(\mathbb{C}^{k+1}) = \mathbb{C}P^k$ (複素射影空間). $S^{2k+1} \to \mathbb{C}P^k$ は $U(1)$ 主束.

▶ $V_n(\mathbb{C}^{n+k})$ は $2k$ 連結（弧状連結かつ $2k$ 次以下のホモトピー群が自明）.
　これは，S^{2k+1} 束

$$V_n(\mathbb{C}^{n+k}) \longrightarrow V_{n-1}(\mathbb{C}^{n+k}), \quad (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto (v_1, \ldots, v_{n-1})$$

にホモトピー完全列を適用すればわかります.

▶ 包含写像 $S^{2k+1} \to S^{2k+3}$ がホモトピー群に誘導する準同型は自明なので，

$$\begin{tikzcd} S^{2k+1} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & S^{2k+3} \arrow[d] \\ V_n(\mathbb{C}^{n+k}) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d] & V_n(\mathbb{C}^{n+k+1}) \arrow[d] \\ V_{n-1}(\mathbb{C}^{n+k}) \arrow[r, "\subset"] & V_{n-1}(\mathbb{C}^{n+k+1}) \end{tikzcd}$$

にホモトピー完全列を適用すると，帰納的に，包含写像 $V_n(\mathbb{C}^{n+k}) \to V_n(\mathbb{C}^{n+k+1})$ がホモトピー群に誘導する準同型が自明であることがわかります．

▶ 図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
U(n) & = & V_n(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\subset} & V_n(\mathbb{C}^{n+1}) & \xrightarrow{\subset} & V_n(\mathbb{C}^{n+2}) & \xrightarrow{\subset} & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
* & = & Gr_n(\mathbb{C}^n) & \xrightarrow{\subset} & Gr_n(\mathbb{C}^{n+1}) & \xrightarrow{\subset} & Gr_n(\mathbb{C}^{n+2}) & \xrightarrow{\subset} & \cdots
\end{array}
$$

に対し，

$$
EU(n) = V_n^{\mathbb{C}} = \bigcup_k V_n(\mathbb{C}^{n+k}), \qquad BU(n) = Gr_n^{\mathbb{C}} = \bigcup_k Gr_n(\mathbb{C}^{n+k})
$$

とおくと，$EU(n) \to BU(n)$ は $U(n)$ 主束，$EU(n)$ は可縮．

$n = 1$ のとき，$BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$．

3.2.3

より一般に，G が位相群，さらに A_∞ 空間の場合にも，分類空間と普遍束に相当するものが存在します (Milnor，菅原正博，Stasheff)．

3.2.4

コンパクト Lie 群 G の分類空間 BG の実係数コホモロジー環は，多項式環に同型：

$$
H^*(BG, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_r], \quad \deg(x_i) = \deg(\psi_i) + 1\text{: even.}
$$

ここで r は G のランク．たとえば,

$$
\begin{aligned}
H^*(B(U(1)^r), \mathbb{R}) = H^*((\mathbb{C}P^\infty)^r, \mathbb{R}) &= \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_r], & \deg(x_i) &= 2, \\
H^*(BSU(2), \mathbb{R}) = H^*(\mathbb{H}P^\infty, \mathbb{R}) &= \mathbb{R}[x], & \deg(x) &= 4, \\
H^*(BU(n), \mathbb{R}) = H^*(Gr_n^{\mathbb{C}}, \mathbb{R}) &= \mathbb{R}[c_1, \ldots, c_n], & \deg(c_i) &= 2i.
\end{aligned}
$$

3.3 Borel 構成

3.3.1

▶ $f : Y \to BG$ に G 空間

$$
\omega Y = f^{-1}EG = \{(y, p) \in Y \times EG \mid f(y) = \pi(p)\}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\omega Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & EG \arrow[d, "\pi"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & BG
\end{tikzcd}
$$

を対応させます．ω は G への写像をあたえられた空間の圏 (Space/BG) から G 空間の圏 (G-space) への函手です．

▶ G 空間 X に対し，空間 $bX = X_G = EG \times_G X$ および写像 $bX \to BG$

$$\begin{array}{ccc} EG \times X & \longrightarrow & EG \\ \Big\downarrow & \square & \Big\downarrow \\ bX & \longrightarrow & BG \end{array}$$

を対応させます．b は $(\underline{G\text{-space}})$ から $(\underline{\mathsf{Space}/BG})$ への函手．これを **Borel 構成** と言います．

3.3.2 固定点

固定点 $x_0 \in X^G$ に対し，$EG \to EG \times X$, $p \to (p, x_0)$ によりファイバー束 $bX \to BG$ の切断が誘導されます．

3.3.3 随伴函手

b は ω の右随伴函手．すなわち自然な全単射

$$(\underline{G\text{-space}})(\omega Y, X) \cong (\underline{\mathsf{Space}/BG})(Y, bX)$$

があります．

∵）$\varphi \in (\underline{G\text{-space}})(\omega Y, X)$ に対し，

$$\omega Y \longrightarrow EG \times X, \quad (y, p) \longmapsto (p, \varphi(y, p))$$

は G 同変なので，$\psi \in (\underline{\mathsf{Space}/BG})(Y, bX)$ を $\psi(y) = [(p, \varphi(y, p))]$ によって誘導します．

逆に，$\psi \in (\underline{\mathsf{Space}/BG})(Y, bX)$ と $(y, p) \in \omega Y$ に対し，$\psi(y)$ は $EG_{\pi(p)} \times_G X$ の点．G は $EG_{\pi(p)}$ に自由かつ推移的し作用するので，ただ 1 つ $x \in X$ が存在して，$\psi(y) = [(p, x)]$．そこで $\varphi \in (\underline{G\text{-space}})(\omega Y, X)$ を $\psi(y) = [(p, \varphi(y, p))]$ によって定義します． □

3.3.4

$\omega bX = EG \times X$ は X に（弱）ホモトピー同値．

$$b\omega Y = EG \times_G \omega Y \to Y$$

も（弱）ホモトピー同値．

3.3.5

$Y \to BG$ は環準同型 $H^*(BG) \to H^*(Y)$ を誘導するので，函手

$$H^* : (\underline{\mathsf{Space}/BG}) \longrightarrow (\underline{H^*(BG)\text{-mod}})$$

が得られます．

3.3.6 同変コホモロジー

G 空間 X に対し，

$$H_G^*(X) = H^*(bX) = H^*(X_G)$$

とおくと，これは

$$H_G^*(\mathrm{pt}) = H^*(BG)$$

上の加群．函手

$$H_G^* = H^* \circ b : (\underline{G\text{-space}}) \longrightarrow (\underline{H^*(BG)\text{-mod}})$$

を G-**同変コホモロジー** と言います．

3.3.7 同変特性類

▶ G ベクトル束 $E \to X$ に対し，ベクトル束 $E_G \to X_G$ が構成できます．その特性類は $H^\bullet(X_G) = H_G^\bullet(X)$ の元．これを E の同変特性類と言います．

▶ 任意の実ベクトル束は，$O(1) = S^0 = \mathbb{Z}_2$ がファイバーにスカラー倍，底に自明に作用するので，$O(1)$ 同変ベクトル束と見なせます．その $O(1)$ 同変 mod 2 Euler 類が，実ベクトル束の Stiefel-Whitney 類に他なりません．

▶ 同様に，任意の複素ベクトル束は，$U(1) = S^1$ がファイバーにスカラー倍，底に自明に作用するので，$U(1)$ 同変ベクトル束と見なせます．その $U(1)$ 同変 Euler 類（複素ベクトル束は標準的な向きをもちます）が，複素ベクトル束の Chern 類に他なりません．

3.3.8 Steenrod 作用素

X を位相空間とします．成分の入れ替えにより，$\mathbb{Z}_2$ が $X \times X$ に作用します．固定点集合は対角集合 X です．$\alpha \in H^q(X, \mathbb{Z}_2)$ に対し，

$$\alpha \times \alpha \in H^{2q}(X \times X, \mathbb{Z}_2)$$

は同変コホモロジー類 $P(\alpha) \in H_{\mathbb{Z}_2}^{2q}(X \times X, \mathbb{Z}_2)$ に拡張されます．これを固定点集合に制限することにより，

$$Sq(\alpha) = \sum_{i=0}^{q} x^{q-i} Sq^i(\alpha) \in H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \otimes H^*(X, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x] \otimes H^*(X, \mathbb{Z}_2)$$

が得られます．

$$Sq^i : H^q(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{q+i}(X, \mathbb{Z}_2)$$

を **Steenrod 作用素** と言います．

A　付録

A.1　位相空間の帰納極限

A.1.1　定義

▶ 位相空間の列 $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ において，X_k は X_{k+1} の部分空間であるとします．

$X = \bigcup_k X_k$ に次のように位相を入れます：

> $U \subset X$ が開集合であるとは，任意の k に対し，$U \cap X_k$ が X_k の開集合であること．

あるいは

> $F \subset X$ が閉集合であるとは，任意の k に対し，$F \cap X_k$ が X_k の閉集合であること

と言っても同値です．

これが位相の公理をみたすことは容易に確かめられます．

この空間を $\{X_k\}$ の **帰納極限** と言い，$\varinjlim X_k$ と書きます．

▶ $f : X \to Y$ が連続であることは，f の各 X_k への制限が連続であることに同値．

▶ 各 X_k は X の部分空間．すなわち，$U_k \subset X_k$ が X_k の開集合であることと，X の開集合 $U \subset X$ が存在して $U_k = U \cap X_k$ となることは同値．

∵) 定義より，X の開集合 U に対し，$U \cap X_k$ は X_k の開集合．

逆に，U_k を X_k の開集合とする．X_k は X_{k+1} の部分空間なので，X_{k+1} の開集合 U_{k+1} が存在して，$U_k = U_{k+1} \cap X_k$. X_{k+1} は X_{k+2} の部分空間なので，X_{k+2} の開集合 U_{k+2} が存在して，$U_{k+1} = U_{k+2} \cap X_{k+1}$. これをつづけて，任意の $i \geq k$ に対し，X_i の開集合 U_i を $U_i = U_{i+1} \cap X_i$ をみたすように取れます．

$U = \bigcup_{i \geq k} U_i$ とおくと，任意の $i \geq k$ に対し $U \cap X_i = U_i$. よって U は X の開集合．そして $U_k = U \cap X_k$ と書けます．　□

A.1.2　T_1 空間の場合

以下，各 X_k は T_1 空間，すなわち 1 点が閉集合であるような位相空間とします．

▶ X は T_1 空間．(逆に X が T_1 空間ならば，部分空間である X_k も T_1 空間.)

▶ X の任意のコンパクト集合 K に対し，ある k があって $K \subset X_k$.

∵) 任意の k に対して $x_k \in K \setminus X_k$ が取れたとして，矛盾を導きます．

$$U^k = X \setminus \{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots\}$$

とおきます．$U^k \subset U^{k+1}$ であり，$X_k \subset U_k$ より $\bigcup_k U^k = X$ ですが，$K \not\subset U^k$ です．

一方，任意の i に対し，$X_i \cap \{x_k,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \dots\}$ は有限集合なので，X_i が T_1 空間であることにより，

$$U^k \cap X_i = X_i \setminus (X_i \cap \{x_k,\, x_{k+1},\, x_{k+2},\, \dots\})$$

が X_i の開集合であることがわかります．よって U^k は X の開集合．これは K がコンパクトであることに反します． □

▶ したがって，X 上の任意の特異 q 単体，すなわち連続写像 $\sigma : \Delta^q \to X$ に対し，ある k があって $\sigma(\Delta^q) \subset X_k$ となります．ここで，

$$\Delta^q = \{(t_1,\, \dots,\, t_q) \mid 0 \le t_1 \le \cdots \le t_q \le 1\}.$$

A.2 ホモトピー完全列

A.2.1 空間対の場合

▶ $(X,\, A)$ を $*$ を基点とする空間対とします．包含写像 $A \subset X$ が $\pi_n(A) \to \pi_n(X)$ を誘導します．

▶ $\pi_n(A)$ の元（の代表元）$g : (I^n,\, \partial I^n) \to (A,\, *)$ が $\pi_n(X)$ において自明になるのは，ホモトピー $h : I^n \times I \longrightarrow X$ が存在して

$$h(I^n \times \{0\}) = h(\partial I^n \times I) = *, \quad h(\,\cdot\,,\, 1) = g$$

となるときです．そこで $\pi_{n+1}(X,\, A)$ を $h : I^n \times I \longrightarrow X$ で

$$h(I^n \times \{0\}) = h(\partial I^n \times I) = *, \qquad h(I^n \times \{1\}) \subset A.$$

をみたすもののホモトピー類の集合とすると，$h \mapsto h(\,\cdot\,,\, 1)$ が $\pi_{n+1}(X,\, A) \to \pi_n(A)$ を誘導し，

$$\pi_{n+1}(X,\, A) \longrightarrow \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X)$$

は完全です．

▶ $\pi_{n+1}(X,\, A)$ の元 h が $\pi_n(A)$ において自明になるのは，$g_1 : I^n \times I \to A$ が存在して

$$g_1(I^n \times \{0\}) = g_1(\partial I^n \times I) = *, \quad g_1 \mid I^n \times \{1\} = h \mid I^n \times \{1\}.$$

となるときです．h と g_1 を接着して $\pi_{n+1}(X)$ の元を得ます．よって

$$\pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\, A) \longrightarrow \pi_n(A)$$

は完全です．

▶ $\pi_{n+1}(X)$ の元 $f : (I^{n+1},\, \partial I^{n+1}) \to (X,\, *)$ が $\pi_{n+1}(X,\, A)$ において自明になるのは，$f_1 : I^n \times I \times I \longrightarrow X$ が存在して

$$f_1(I^n \times I \times \{0\}) = f_1(I^n \times \{0\} \times I) = f_1(\partial I^n \times I \times I) = *,$$
$$f_1(\,\cdot\,,\, \cdot\,,\, 1) = f, \qquad f_1(\partial(I^n \times I) \times I) \subset A.$$

となるときです．f_1 が f と $f_1(\,\cdot\,,1,\,\cdot\,): I^{n+1} \to A$ の間のホモトピーをあたえるので，

$$\pi_{n+1}(A) \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\,A)$$

は完全です．

▶ こうして長完全列が得られます：

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(A) \longrightarrow \pi_{n+1}(X) \longrightarrow \pi_{n+1}(X,\,A) \longrightarrow \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \cdots.$$

A.2.2 ファイバー束の場合

▶ $\pi : E \to B$ が S に対して**被覆ホモトピー性質 (covering homotopy property: CHP)** あるいは **ホモトピー持ち上げ性質 (homotopy lifting property: HLP)** をみたすとは，任意の $F : S \times I \to B$ と $\widetilde{f} : S \to E$ で $F(\,\cdot\,,0) = \pi \circ \widetilde{f}$ をみたすものに対して，

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ S \times I & \xrightarrow[F]{} & B \end{array}$$

$\widetilde{F} : S \times I \to E$ が存在して $F = \pi \circ \widetilde{F}$ をみたすこと．

▶ $\pi : E \to B$ が **Serre fibration** であるとは，I^n $(n = 0,\,1,\,2,\,\ldots)$ に対して CHP をみたすこと．

▶ 基点を保つ写像 $\pi : E \to B$, $\pi(*_E) = *_B$ が **quasi-fibration** であるとは，$F = \pi^{-1}(*_B)$ とおくとき，誘導する $\pi_n(E,\,F) \to \pi_n(B)$ が任意の $n \geq 1$ に対して同型であること．

▶ A quasi-fibration $\pi : E \to B$ は長完全列

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(F) \longrightarrow \pi_{n+1}(E) \longrightarrow \pi_{n+1}(B) \longrightarrow \pi_n(F) \longrightarrow \pi_n(E) \longrightarrow \cdots$$

を誘導します．

▶ ファイバー束 $\Rightarrow$ Serre fibration $\Rightarrow$ quasi-fibration.

A.3 スペクトル列の考え方

A.3.1 コホモロジーを近似するとは

▶ 複体 $(C,\,d)$ に，exhaustive decreasing filtration

$$C^n = F^0C^n \supset F^1C^n \supset F^2C^n \supset \cdots, \qquad \bigcap_p F^pC^n = 0$$

であって，両立条件

$$d(F^pC^n) \subset F^pC^{n+1}$$

をみたすものが与えられているとき，$(F^\bullet C, d)$ を **filtered complex** とよびます.

▶ 以下，しばしば C の次数（右上の 2 つめの添字）を略します．d が次数を 1 つ上げることに気をつければ，略した添字を再現することは容易です.

▶ filtration が入っているというのは，位相が入っているようなものなので，それを用いてコホモロジーを近似してゆくことができます.

▶ どうするかと言うと，コサイクルの集合を外側から近似する

$$K_r^{p,\,q} = \{x \in F^p C^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} C^{p+q+1}\}$$

とコバウンダリーの集合を内側から近似する

$$L_r^{p,\,q} = \{dy \in F^p C^{p+q} \mid y \in F^{p-r+1} C^{p+q-1}\}$$

を考え，これらを用いて filtration をさらに細かくします.

すると，細かくした filtration の gr の各項が，コホモロジーまで生き残る項を除いて，d によって同型にうつりあう対をつくることがわかります.

ババ抜きのように，そのような対を順に相殺させていけば，最後にババ（コホモロジーの gr）だけが残るというわけです.

A.3.2　コサイクル，コバウンダリーの集合を近似する

▶ filtered complex $(F^\bullet C, d)$ に対して，

$$\begin{aligned} K_r^{p,\,q} &= \{x \in F^p C^{p+q} \mid dx \in F^{p+r} C^{p+q+1}\} \\ &= F^p C^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} C^{p+q+1}), \\ L_r^{p,\,q} &= \{dx \in F^p C^{p+q} \mid x \in F^{p-r+1} C^{p+q-1}\} \\ &= dF^{p-r+1} C^{p+q-1} \cap F^p C^{p+q} \end{aligned}$$

とおきます．このとき，

$$dK_r^{p,\,q} = L_{r+1}^{p+r,\,q-r+1}.$$

さらに

$$K_r^{p,\,q} \supset K_{r+1}^{p,\,q}, \qquad L_{r+1}^{p,\,q} \supset L_r^{p,\,q}$$

に注意して，

$$\begin{aligned} K_\infty^{p,\,q} &:= \bigcap_r K_r^{p,\,q} = \{x \in F^p C^{p+q} \mid dx = 0\}, \\ L_\infty^{p,\,q} &:= \bigcup_r L_r^{p,\,q} = L_{p+1}^{p,\,q} = \{dx \in F^p C^{p+q} \mid x \in C^{p+q-1}\} \end{aligned}$$

とおくと，$dd = 0$ より，$K_\infty^{p,\,q} \supset L_\infty^{p,\,q}$．よって，

$$F^p C = K_0^p \supset K_1^p \supset \cdots \supset K_\infty^p \supset L_\infty^p \supset \cdots \supset L_1^p \supset L_0^p = dF^{p+1} C.$$

▶ 後のために $F^pC \supset F^{p+1}C$ との交わりを見ておくと，

$$
\begin{aligned}
K_r^p \cap F^{p+1}C &= K_{r-1}^{p+1}, \qquad & K_\infty^p \cap F^{p+1}C &= K_\infty^{p+1}, \\
L_r^p \cap F^{p+1}C &= L_{r+1}^{p+1}, \qquad & L_\infty^p \cap F^{p+1}C &= L_\infty^{p+1}.
\end{aligned}
$$

A.3.3 filtration を細かくする

▶ これを用いて，filtration を細かく分けます．すなわち，

$$
\begin{aligned}
A_r^{p,q} &= K_r^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}, \qquad & A_\infty^{p,q} &= K_\infty^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q} = \bigcap_r A_r^{p,q}, \\
B_r^{p,q} &= L_r^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q}, \qquad & B_\infty^{p,q} &= L_\infty^{p,q} + F^{p+1}C^{p+q} = \bigcup_r B_r^{p,q}
\end{aligned}
$$

とおくと，これらは $F^pC \supset F^{p+1}C$ の間の filtration

$$
F(p):\ F^pC = A_0^p \supset A_1^p \supset \cdots \supset A_\infty^p \supset B_\infty^p \supset \cdots \supset B_1^p \supset B_0^p = F^{p+1}C
$$

を与えます．すべての p を考えると，これらが一列にならんで C 上の filtration $(F(p))_{p\geq 0}$ になるわけです．

▶ 以下，$\mathrm{gr}\,(F(p))_{p\geq 0}$ の項

$$
\ldots,\ \frac{B_1^{p-1}}{B_0^{p-1}},\ \frac{A_0^p}{A_1^p},\ \frac{A_1^p}{A_2^p},\ \ldots,\ \frac{A_\infty^p}{B_\infty^p},\ \ldots,\ \frac{B_2^p}{B_1^p},\ \frac{B_1^p}{B_0^p},\ \frac{A_0^{p+1}}{A_1^{p+1}},\ \ldots,
$$

のうち，どことどこが d によって相殺して，どこが残るかを見ていきます．

A.3.4 相殺する項

▶ これまでに見てきた

$$
\begin{aligned}
&dK_r^p = L_{r+1}^{p+r}, \quad dK_{r+1}^p = L_{r+2}^{p+r+1}, \quad dK_{r-1}^{p+1} = L_r^{p+r}, \\
&K_r^p \cap F^{p+1}C = K_{r-1}^{p+1}, \quad L_{r+1}^{p+r} \cap F^{p+r+1}C = L_{r+2}^{p+r+1}.
\end{aligned}
$$

を合わせると，d が $\mathrm{gr}\,F(p)$ の項 A_r^p/A_{r+1}^p から $\mathrm{gr}\,F(p+r)$ の項 B_{r+1}^{p+r}/B_r^{p+r} への全射

$$
\frac{A_r^p}{A_{r+1}^p} \xleftarrow[\cong]{} \frac{K_r^p}{K_{r+1}^p + K_{r-1}^{p+1}} \xrightarrow[d]{} \frac{L_{r+1}^{p+r}}{L_r^{p+r} + L_{r+2}^{p+r+1}} \xrightarrow[\cong]{} \frac{B_{r+1}^{p+r}}{B_r^{p+r}}
$$

を誘導することがわかりますが，

$$
K_{r+1}^p + K_{r-1}^{p+1} \supset K_{r+1}^p \supset K_\infty^p = K_r^p \cap \mathrm{Ker}\,d
$$

なので，上の全射は同型になります．

▶ こうして，$(\mathrm{gr}\,F(p))_{p\geq 0}$ の各項が，$(A_\infty^p/B_\infty^p)_{p\geq 0}$ を除き，d による同型で相殺することがわかりました．

A.3.5　生き残る項

▶ 包含射 $F^pC \subset C$ がコホモロジー HC に誘導する射の像を F^pHC とすると，これは HC 上の exhaustive decreasing filtration

$$HC = F^0HC \supset F^1HC \supset F^2HC \supset \cdots, \qquad \bigcap_p F^pHC = 0$$

をあたえます.

▶ このとき，$\mathrm{gr}\, F(p)$ の項 A^p_∞/B^p_∞ が $\mathrm{gr}^p HC$ に同型になります：

$$\begin{aligned}\frac{A^p_\infty}{B^p_\infty} &= \frac{K^p_\infty + F^{p+1}C}{L^p_\infty + F^{p+1}C} \\ &\cong \frac{K^p_\infty}{L^p_\infty + K^{p+1}_\infty} = \frac{\{x \in F^pC \mid dx = 0\}}{\{dy \in F^pC\} + \{x \in F^{p+1}C \mid dx = 0\}} \\ &\cong F^pHC/F^{p+1}HC = \mathrm{gr}^pHC.\end{aligned}$$

A.3.6　ババ抜きあるいは玉葱の皮むき

▶ ここで，

$$A^p_r \supset A^p_{r+1} \supset B^p_{r+1} \supset B^p_r$$

および

$$A^{p+r}_r \supset A^{p+r}_{r+1} \supset B^{p+r}_{r+1} \supset B^{p+r}_r$$

に対し，

$$\frac{A^p_r}{B^p_r} \underset{\text{surj.}}{\longrightarrow} \frac{A^p_r}{A^p_{r+1}} \underset{\cong}{\longrightarrow} \frac{B^{p+r}_{r+1}}{B^{p+r}_r} \underset{\text{inj.}}{\longrightarrow} \frac{A^{p+r}_r}{B^{p+r}_r}$$

を合成して射

$$d^p_r : \frac{A^p_r}{B^p_r} \longrightarrow \frac{A^{p+r}_r}{B^{p+r}_r}$$

を得ます．$B^p_{r+1} \subset A^p_{r+1}$ より，

$$\frac{B^p_{r+1}}{B^p_r} \longrightarrow \frac{A^p_r}{B^p_r} \longrightarrow \frac{A^p_r}{A^p_{r+1}}$$

の合成は 0 なので，

$$d^p_r d^{p-r}_r = 0.$$

これは，d_r が

$$d : K^p_r \longrightarrow K^{p+r}_r$$

から

$$\frac{A^p_r}{B^p_r} \underset{\cong}{\longleftarrow} \frac{K^p_r}{L^p_r + K^{p+1}_{r-1}} \underset{d}{\longrightarrow} \frac{K^{p+r}_r}{L^{p+r}_r + K^{p+r+1}_{r-1}} \underset{\cong}{\longrightarrow} \frac{A^{p+r}_r}{B^{p+r}_r}.$$

のように誘導されますので，結局 $dd = 0$ に帰着するとも言えます.

▶ そこで

$$E^{p,q}_r = \frac{A^{p,q}_r}{B^{p,q}_r}, \qquad E^{p,q}_\infty = \frac{A^{p,q}_\infty}{B^{p,q}_\infty}$$

とおきます．省略していた添字を書くと，

$$d_r^{p,\,q} : E_r^{p,\,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}.$$

$(E_r,\, d_r)$ のコホモロジーを考えると，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} d_r^p &= \operatorname{Ker}\left(\frac{A_r^p}{B_r^p} \longrightarrow \frac{A_r^p}{A_{r+1}^p}\right) = \frac{A_{r+1}^p}{B_r^p}, \\ \operatorname{Im} d_r^{p-r} &= \operatorname{Im}\left(\frac{B_{r+1}^p}{B_r^p} \longrightarrow \frac{A_r^p}{B_r^p}\right) = \frac{B_{r+1}^p}{B_r^p} \end{aligned}$$

より，

$$\frac{\operatorname{Ker} d_r^p}{\operatorname{Im} d_r^{p-r}} \cong \frac{A_{r+1}^p}{B_{r+1}^p} = E_{r+1}^p.$$

すなわち，$(E_r,\, d_r)$ のコホモロジーをとると，

$$\frac{A_r^p}{A_{r+1}^p} \underset{\cong}{\longrightarrow} \frac{B_{r+1}^{p+r}}{B_r^{p+r}}$$

が相殺して，あるいは皮が 1 枚むけて，E_{r+1} が得られる，というわけです．

▶ $r = 0, 1$ の場合を見てみると，

$$K_0^p = F^pC, \qquad L_0^p = dF^{p+1}C \subset F^{p+1}C$$

なので，

$$E_0^p = F^pC/F^{p+1}C = \operatorname{gr}^pC.$$

よって，

$$E_1^p \cong H(\operatorname{gr}^pC).$$

つぎつぎコホモロジーをとっていくと，$(\operatorname{gr} F(p))_{p\geq 0}$ の各項がつぎつぎと相殺していきます．

▶ 任意の $s \geq r$ に対し $d_s = 0$ であるとき，

$$E_r^{p,\,q} = E_{r+1}^{p,\,q} = \cdots = E_\infty^{p,\,q} \cong \operatorname{gr}^pH^{p+q}C.$$

こうなったらゲームセットです．

A.3.7　スペクトル列

複体の列と同型の組

$$(E_r^{p,\,q}, \quad d_r^{p,\,q} : E_r^{p,\,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}, \quad E_{r+1}^{p,\,q} \cong \operatorname{Ker} d_r^{p,\,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,\,q+r-1})$$

を，**スペクトル列** (**spectral sequence**) と言います．

A.3.8 Gysin 完全列

filtered complex FC のスペクトル列が,

$$E_2^{p,\,q} = 0 \quad \text{for} \quad q \neq 0,\, n$$

をみたすとき,

$$\begin{aligned}
&E_2^{p,\,q} = E_3^{p,\,q} = \cdots = E_{n+1}^{p,\,q}, \qquad E_{n+2}^{p,\,q} = E_{n+3}^{p,\,q} = \cdots = E_\infty^{p,\,q},\\
&0 \to E_{n+2}^{p,\,q} \longrightarrow E_{n+1}^{p,\,n} \underset{d_{n+1}}{\longrightarrow} E_{n+1}^{p+n+1,\,0} \to E_{n+2}^{p+n+1,\,0} \to 0 \qquad \text{exact},\\
&0 \to E_\infty^{p,\,0} \longrightarrow H^pC \longrightarrow E_\infty^{p-n,\,n} \to 0 \qquad \text{exact}.
\end{aligned}$$

以上によって得られる長完全列

$$\cdots \to E_2^{p-n-1,\,n} \to E_2^{p,\,0} \to H^pC \to E_2^{p-n,\,n} \to E_2^{p+1,\,0} \to H^{p+1}C \to \cdots$$

を **Gysin 完全列** と言います.

A.3.9 二重複体

▶ 二重複体 $C^{\bullet,\,\bullet}$ の場合, 全複体 $C^m = \sum_p C^{p,\,m-p}$ の filtration

$$F^pC = \bigoplus_{k \geq p} C^{k,\,\bullet}, \qquad F'^qC = \bigoplus_{l \geq q} C^{\bullet,\,l}$$

によって 2 つのスペクトル列ができます.

▶ 複体の短完全列によってコホモロジーの長完全列が誘導されることが, 次のように示されます.

1. 複体の短完全列 $0 \to A \underset{i}{\to} B \underset{j}{\to} C \to 0$ を二重複体と思う.
   タテ（複体方向）ヨコ（短完全列方向）2 つの filtration が考えられる.
2. タテの filtration に関してスペクトル列を考えると, E_1 項が消える.
3. よって全複体は完全.
4. 次に, ヨコの filtration に関してスペクトル列を考える.
   (a) 全複体が完全なので, E_∞ 項が消えなければならない.
   (b) E_1 項および d_1 は
   $$0 \to HA \underset{i_*}{\to} HB \underset{j_*}{\to} HC \to 0$$
   で与えられる.（他は 0.）
   (c) よって E_2 項は $\operatorname{Ker} i_*$, $\operatorname{Ker} j_*/\operatorname{Im} i_*$, $\operatorname{Coker} j_*$ が残る.
   d_2 は $\operatorname{Ker} i_* \to \operatorname{Coker} j_*$ 以外 0.
   (d) 残る E_3 項にはもう相殺する項がないので, すでに 0 でなければならない. すなわち, $\operatorname{Im} i_* = \operatorname{Ker} j_*$ かつ $d_2 : \operatorname{Ker} i_* \to \operatorname{Coker} j_*$ は同型.

5. 以上により，長完全列

$$\cdots \to H^pA \to H^pB \to H^pC \to H^{p+1}A \to H^{p+1}B \to H^{p+1}C \to \cdots$$

が得られた．$H^pC \to H^{p+1}A$ は ${d_2}^{-1}$ から誘導される．

▶ (**five lemma**) 可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
{\scriptstyle g_1}\downarrow & & {\scriptstyle g_2}\downarrow & & {\scriptstyle g_3}\downarrow & & {\scriptstyle g_4}\downarrow & & {\scriptstyle g_5}\downarrow \\
A_1' & \xrightarrow{f_1'} & A_2' & \xrightarrow{f_2'} & A_3' & \xrightarrow{f_3'} & A_4' & \xrightarrow{f_4'} & A_5'
\end{array}$$

において，横の並びはそれぞれ完全であるとします．

このとき，g_2, g_4 が同型，g_1 が全射，g_5 が単射ならば g_3 が同型になります．

これは次のように示されます．

1. この図式を二重複体と思う．次数は A_i が i，A_i' が $i+1$ とする．

   タテ・ヨコ 2 つの filtration が考えられる．

2. タテの filtration に関してスペクトル列を考えると，E_1 項は，

$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{Ker} f_1 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Coker} f_4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\operatorname{Ker} f_1' & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Coker} f_4'
\end{array}$$

   であり，次数 3, 4 の項は消えている．

3. よって全複体のコホモロジーの次数 3, 4 の項は消える．

4. 次に，ヨコの filtration に関してスペクトル列を考える．

   (a) E_∞ 項の次数 3, 4 の項が消えなければならない．

   (b) E_1 項は，

$$\operatorname{Ker} g_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Coker} g_3 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Coker} g_5$$

   である．これは E_∞ 項に一致．

   (c) よって g_3 は同型．

References

[At85] M. F. Atiyah, Circular symmetry and stationary-phase approximation, Astérisque 131(1985), 43–60

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott, The moment map and equivariant cohomology, Topology 23(1984), 1–28

[BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology,* Springer GTM 82, 1982

[Dr04] V. Drinfeld, DG quotients of DG categories, J. Alg. 272(2004), 643–691 math.KT/0210114

[GS99] V. W. Guillemin and S. Sternberg, *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory,* Springer, 1999

[Ha02] A. Hatcher, *Algebraic Topology,* Cambridge Univ. Press, 2002, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/`

[Hu75] D. Husemoller, *Fibre Bundles,* 2nd ed., Springer GTM 20, 1975

[中岡 77] 中岡稔，不動点定理とその周辺，岩波書店，1977