市大授業：非ユークリッド幾何

橋本 義武

2005/11/05 Sat.

1 はじめに

1.1 神秘から図形へ

1.1.1 科学のはじめ

- 最古の科学は **天文学** と **幾何学** であろう.
- これらの共通点は,「ズルができない」というところにある.
  - 天体は遠くにあって誰にも手が出せないから.
  - 図形は近くにあって誰でも自分の手で描いて確かめることができるから.
  - 科学を発展させるのは倫理である.
- 天文学と幾何学はそれぞれ独自に，人々を納得させる形式をもっている.
  天文学は **予言** によって，幾何学は **証明** によって人々を納得させる.
  - 占星術は，天体の運行が予言できるように，地上のできごとも予言できたらという願いのあらわれであろう.
  - 証明は対話であり，ボケとツッコミである.
  - **ユークリッド**（エウクレイデス）「**原論**（ストイケイア）」紀元前３世紀？
- 天文学と幾何学にはもう一つ共通点がある．**直線と円** を基本とするところである.
  - 天文学において，直線は光の通り道，円は天体の通り道である.
  - 幾何学において，直線は **定規**，円は **コンパス** によって描かれる.

1.1.2 天文学の危機—地動説

- 近代に入り，天文学に革命が起きる．**地動説** である.
- コペルニクス「回転について（De Revolutionibus)」．revolution ＝革命 の語源．ポーランド人.
- 慣性（ガリレイ）．物体も本来は光と同じように直線を進もうとする．物体と光を対等に見ようという発想は，現代物理学における **超対称性** の概念に通ずるものがある.
- 惑星の楕円軌道（ケプラー）．惑星の軌道は，実は円ではなく楕円である．この発見は衝撃的であった.
- **力学**（**ニュートン**）．運動方程式，万有引力の法則.
- ニュートン力学においては，月が地球の周りを回ることと林檎が木から落ちることが，同じ原理で理解される.
- その原理を表現するのが **微分方程式** の言語である.
- 高校で微分積分を学ぶのも，本来は微分方程式という考え方を知るためである.

1.1.3　脱線：役に立つ研究

- ニュートン力学は占星術の否定であると同時に成就であるとも言えよう．
- 近代科学においてもっとも重要な概念は，**原子** と **エネルギー** であろう．前者は錬金術の否定，後者は永久機関の否定である．しかしその否定の延長上に現代の科学技術が実現されたのである．
- いつの時代も人々が求めるのは科学ではなく魔術である．現代においても声高に「役に立つ研究」が要求されるが，そこにおいても求められているのは科学ではなく魔術なのではないか？それに対しては否定することからはじめるのが科学の使命であろう．否定なくして成就はない．

1.2　図形から神秘へ

1.2.1　原論

- ユークリッド「原論」は，その後のすべての学問の模範となった書である．
- 用語を **定義** し，**公理** からすべての命題を演繹する．
- そのようにして証明された命題は，世にあるいかなる真実よりも確かなものであった．
- 完璧と考えられていたユークリッド幾何にも，２つの未解決問題があった．１つは **第５公準（平行線の公理）**，もう１つは **３大作図問題** である．
- 19 世紀になって，前者は **非ユークリッド幾何**，後者は **ガロワ理論** という，予想外の展開を迎える．両者は **群** の概念を通して深く関わっている．

1.2.2　第５公準

- ５つの公準
  1. 任意の点から任意の点に，直線を引くことができる．
  2. 有限な直線を連続的に直線に延長することができる．
  3. 任意の点を中心に任意の半径の円を描くことができる．
  4. すべての直角は等しい．
  5. 直線が２直線と交わるとき，同じ側の内角の和が２直角より小さいなら，この２直線は，限りなく延長されたとき，内角の和が 2 直角より小さい側において交わる．
- 第５公準がややこしすぎる．他から証明できないか？
- **平行線の公理**（第５公準の言いかえ）

  直線 l とその上にない点 P に対し，P を通り l に平行な直線がただ１つ存在する．
- 平行線の公理を用いて，三角形の内角の和が２直角であることが証明される．
- **非ユークリッド幾何** とは，平行線の公理が成り立たない幾何のことである．

1.2.3　相対性理論と量子力学

- 20 世紀になると，完璧と考えられていたニュートン力学も，**特殊／一般相対性理論**（アインシュタイン）と **量子力学** によって書きかえられる．
- 特殊相対性理論は非ユークリッド幾何（双曲幾何）と同じ対称性（群）をもつ．
- 一般相対性理論は，非ユークリッド幾何をさらに一般化した **リーマン幾何** のことばで書かれる．

- 特殊相対性理論と量子力学は **場の量子論** によって統一されている．
- 一般相対性理論と量子力学はいまだ統一されていない．統一するものとして現在もっとも有力な候補なのは **超弦理論** である．
- 場の量子論，超弦理論とガロワ理論の関係は，これからの研究課題である．

2　球面幾何

2.1　球面上の図形

2.1.1　球面上の「直線」

- 球面を，中心を通る平面で切った切り口を **大円** と言う．
- 大円は，球面上の２点を最短で結ぶ球面上の曲線である．これが球面幾何において直線の役割を果たす．
- 中心に関して対称な２点を結ぶ大円は無限にある．
- ２つの大円は必ず交わる．すなわち「平行線」は存在しない．

2.1.2　球面三角形の面積

- 半径１の球面の面積は,

$$\int_0^\pi 2\pi \sin\varphi d\varphi = \int_{-1}^1 2\pi dz = 4\pi. \qquad (z = \cos\varphi)$$

（外接する円柱の側面積に等しい.）

- 以下，球面の半径は１とする．
- ２つの大円で切り取られた図形を二角形とよぶことにする．
- ２角形の２つの内角は相等しい.
- 内角が A, A である二角形の面積は，$4\pi \times \dfrac{A}{2\pi} = 2A$.（角度は弧度法による.）
  - 弧度法：角度を，角領域が切り取る，頂点を中心とする半径１の円弧の長さ，あるいは扇形の面積の２倍で測る．$360^\circ = 2\pi$.
- 三角形は３つの大円で切り取られた図形である．
- 三角形の頂点 A, B, C における内角を A, B, C とし，三角形 ABC の面積を S とする．中心に関して A, B, C と対称な点をそれぞれ A′, B′, C′ とし，三角形 A′BC, AB′C, ABC′ の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とすると，

$$S + S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi, \quad S + S_1 = 2A, \quad S + S_2 = 2B, \quad S + S_3 = 2C$$

より,

$$S = A + B + C - \pi.$$

- $S > 0$ より $A + B + C > \pi$.

2.2 球面三角法

2.2.1 三角形の合同条件と余弦定理・正弦定理

- 二角夾辺相等の合同条件は正弦定理のような公式の存在を，二辺夾角，三辺相等は余弦定理のような公式の存在を示唆している．
- 正弦定理
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$
- 余弦定理
$$\begin{aligned} a^2 &= (b \sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \end{aligned}$$
- $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ が
$$-1 < \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 1$$
をみたすとき，a, b, c を三辺の長さとする三角形が存在する．
- 三角法においては，どの公式よりも,「すべての多角形は三角形に分割され，三角形は直角三角形に分割される」という認識の方が重要である．

2.2.2 球面正弦定理・球面余弦定理

- 以下，球面三角形 ABC において，頂点 A, B, C における内角を A, B, C とし，
$$a = \mathrm{BC}, \quad b = \mathrm{CA}, \quad c = \mathrm{AB}$$
とする（弧の長さ）．球の中心を O とする．
- 球面直角三角形：C が直角であるとする．
B を通り OA に垂直な平面と，OA, OC との交点をそれぞれ A$'$, C$'$ とすると，４つの直角三角形ができる．
平面 OA’C’ は OBC’, A$'$BC$'$ に垂直．よって BC$'$ $\perp$ OC$'$ より，
$$\mathrm{OC}' = \cos a, \qquad \mathrm{BC}' = \sin a.$$
OA$'$ $\perp$ A$'$B より，
$$\mathrm{OA}' = \cos c, \qquad \mathrm{A}'\mathrm{B} = \sin c.$$
OA$'$ $\perp$ A$'$C$'$ より，
$$\mathrm{OA}' = \mathrm{OC}' \cos b = \cos a \cos b, \qquad \mathrm{A}'\mathrm{C}' = \mathrm{OC}' \sin b = \cos a \sin b.$$
したがって，
$$\cos c = \cos a \cos b.$$
これが球面上のピタゴラスの定理.
また，A$'$C$'$ $\perp$ BC$'$，$A = \angle \mathrm{BA}'\mathrm{C}'$ より，
$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}} = \frac{\cos a \sin b}{\sin c}, \\ \sin A &= \frac{\mathrm{BC}'}{\mathrm{A}'\mathrm{B}} = \frac{\sin a}{\sin c}. \end{aligned}$$

- $x>0$ が十分小さいとき，$\sin x \fallingdotseq x,\ \cos x \fallingdotseq 1-\dfrac{x^2}{2}$.
- 球面正弦定理
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$
- 球面余弦定理：C から大円 AB に下ろした球面上の垂線の足を H とすると，
$$\begin{aligned}\cos a &= \cos \mathrm{CH}\cos(\mathrm{AB}-\mathrm{AH}) \qquad \text{（弧の長さ）}\\ &= \cos\mathrm{CH}(\cos\mathrm{AB}\cos\mathrm{AH}+\sin\mathrm{AB}\sin\mathrm{AH})\\ &= \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.\end{aligned}$$
- 別証：A における球面の接平面と，OB, OC との交点をそれぞれ B′, C′ とすると，余弦定理より，
$$\mathrm{B'C'}^2=\mathrm{OB'}^2+\mathrm{OC'}^2-2\mathrm{OB'}\cdot\mathrm{OC'}\cos a,$$
$$\mathrm{B'C'}^2=\mathrm{AB'}^2+\mathrm{AC'}^2-2\mathrm{AB'}\cdot\mathrm{AC'}\cos A.$$
これと
$$\mathrm{OB'}=\frac{1}{\cos c},\quad \mathrm{OC'}=\frac{1}{\cos b},\quad \mathrm{AB'}=\tan c,\quad \mathrm{AC'}=\tan b,$$
$$\mathrm{OB'}^2-\mathrm{AB'}^2=\mathrm{OC'}^2-\mathrm{AC'}^2=1$$
より，
$$1+1-\frac{2\cos a}{\cos c\cos b}=-\frac{2\sin c\sin b\cos A}{\cos c\cos b}.$$
$$\therefore \qquad \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$
- a, b, c が小さいとき，
$$\begin{aligned}\cos A &\fallingdotseq \frac{1-\frac{a^2}{2}-(1-\frac{b^2}{2})(1-\frac{c^2}{2})}{bc}\\ &\fallingdotseq \frac{1-\frac{a^2}{2}-(1-\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{2})}{bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\end{aligned}$$
- 球面三角法は天文学に用いられたため，かえって平面三角法より早くに発達していたという．

2.2.3 双対性

- 大円を含む平面の，O を通る垂線と球面の交点を大円の極とよぶことにする．
- BC の極で，BC に関し A と反対側にあるものを A* とし，同様に B*, C* を定めると，
$$\mathrm{B^*C^*}=\pi-A,\quad \mathrm{C^*A^*}=\pi-B,\quad \mathrm{A^*B^*}=\pi-C.$$
頂点 A*, B*, C* における内角を A^*, B^*, C^* とすると，
$$A^*=\pi-a,\quad B^*=\pi-b,\quad C^*=\pi-c.$$
したがって，$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\ \sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ より，
$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}.$$
- この式で $a=0$ とおくと，$0<A, B, C<\pi$ より $A+B+C=\pi$.

3　双曲幾何

- 円板の内部の点のみ考える．
- 直線は，境界の円と直交する円・線分．
- 相異なる２点に対し，それらを通る直線がただ１つ存在する．
- 直線 l とその上にない点 P に対し，P を通り l に平行な直線が無限に存在する．
- 三角形の内角の和は２直角より小さい．

4　推薦図書

1. 山下純一，グロタンディーク―数学を超えて，日本評論社
2. 月刊数学セミナー，日本評論社
3. 吉田洋一／赤攝也，数学序説，培風館
4. 吉田洋一，零の発見，岩波新書
5. E. T. ベル，数学をつくった人びと I，II，III，ハヤカワ文庫
6. カジョリ，初等数学史，共立出版
7. 高木貞治，近世数学史談・数学雑談，共立出版
8. 深谷賢治，数学者の視点，岩波書店
9. ティモシー・ガウアーズ，１冊でわかる数学，岩波書店
10. M. マシャル，ブルバキー数学者達の秘密結社，シュプリンガー・フェアラーク東京
11. 寺阪英孝編，現代数学小事典，講談社ブルーバックス 325
12. 今井淳／寺尾宏明／中村博昭，不変量とはなにか，講談社ブルーバックス 1393
13. 中村亨，数学 21 世紀の 7 大難問，講談社ブルーバックス 1429
14. 木村俊一，天才数学者はこう解いた，こう生きた―方程式四千年の歴史，講談社選書メチエ
15. 木村俊一，数術師伝説，平凡社
16. 木村俊一，算数の究極奥義教えます―子どもに語りたい秘法，講談社