2020年8月 大阪市立大学 オープンキャンパス

トランプのシャッフルの話

大阪市立大学大学院理学研究科
伊師 英之（いし　ひでゆき）

1. シャッフルの方法

(1) リッフル・シャッフル (riffle shuffle)：右手と左手でパラパラと。
(2) カルタ切り、ヒンズー・シャッフル (Hindu shuffle)、オーバーハンド・シャッフル (overhand shuffle)：持ち方は異なるが、いずれも右手に持ったカードを少しずつ左手に移していく。

この授業ではリッフル・シャッフルについて論じる。(2) については [12] 参照。

2. ポイントは上昇列

シャッフルしたカードの順列に現れる「数字が1ずつ増えていく部分列」を**上昇列** (rising sequence) とよぶ。上昇列が3つ以上ある順列（たとえば $A45789623TJQK$）は，1回のリッフル・シャッフルでは得られない。2回のリッフル・シャッフルでは高々4つの上昇列が現れる。一般に k 回のリッフル・シャッフルによって高々 2^k 個の上昇列が現れる。

3. １９９０年１月９日のニューヨークタイムスの記事 ([10])

ベイヤーとダイアコニスの研究 ([7]) を紹介。カジノへの影響を詳しく論じているのが面白い。

4. リッフル・シャッフルの混ざり具合

論文 [7] に次の表が載っている：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.000	1.000	1.000	1.000	0.924	0.614	0.334	0.167	0.085	0.043

上段はリッフル・シャッフルの回数。下段は「混ざり具合」を表す 0 から 1 までの数で、0 に近いほどよく混ざっている（正確な定義は後で説明する）。

5. パーシ・ダイアコニスという人

１４歳で家出をし、手品師ダイ・ヴァーノンの助手に。確率論の本（[5]）を読むために２３歳でニューヨーク市立大学の夜間部に入学。数学者になる ([3] 328–334 ページ)。近年『数学で織りなすカードマジックのからくり』(原題: Magical Mathematics）という本をロン・グラハムと共に書いた（[9], この本の 249 ページで今回の話題にも言及している)。

6. リッフル・シャッフルを符号化する

カードの順列 (配列) が $A23456789TJQK$（T は 10を表す）から $A2394TJ5Q67K8$

に変わったとき、何が起きたか？はじめに左手に A〜8、右手に 9〜K を持っていた。そして左、左、左、右、左、右、右、 左、右、左、左、右、左の順番でカードが落ちて行った。左を 0, 右を 1 に対応させることにより、これを 0001011010010 と表そう。ここまでの思考を逆に辿ると数字列 0001011010010 からリッフル・シャッフルが復元できる。

リッフル・シャッフルについての或る自然なモデル（ギルバート・シャノン・リードのモデル）を仮定すると、次が成り立つ :『n 枚のカードのリッフル・シャッフルにおいて、00...0 から 11...1 までの 2^n 通りの数字列で表されるシャッフルは全て等しい確率で（すなわち $\frac{1}{2^n}$ の確率で）生じる。』0001111111111 や 0000000111 などの数字列で表されるシャッフルは $A23456789TJQK$ を変えない。

３枚のカードのリッフル・シャッフルは次のようにまとめられる。

順列	シャッフル	確率
A23	000, 001, 011, 111	$\frac{1}{2}$
A32	010	$\frac{1}{8}$
2A3	101	$\frac{1}{8}$
23A	110	$\frac{1}{8}$
3A2	100	$\frac{1}{8}$
32A		0

7. 手が４本ある人のリッフル・シャッフル

カードの順列が $A23456789TJQK$ から $JQ67834A9T5K2$ に変わったとき, 何が起きたか？４つの手に 0,1,2,3 と番号をつける. 手 0 に $A2$, 手 1 に 345, 手 2 に 6〜T, 手 3 に JQK を持っていた。そして４手リッフルによって手 3, 手 3, 手 2, 手 2, 手 2, 手 1, 手 1, 手 0, 手 2, 手 1, 手 3, 手 0 の順番でカードが落ちていった。
つまり, このシャッフルは 3322211022130 と表される。この確率は $\frac{1}{4^{13}}$ である。

３枚のカードの４手リッフル・シャッフルは次のようにまとめられる。

順列	シャッフル	確率
A23	000, 001, 002, 003, 011, 012, 013, 022, 023, 033 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333	$\frac{5}{16}$
A32	010, 020, 021, 030, 031, 032, 121, 131, 132, 232	$\frac{5}{32}$
2A3	101, 102, 103, 202, 203, 212, 213, 303, 313, 323	$\frac{5}{32}$
23A	110, 120, 130, 220, 221, 230, 231, 330, 331, 332	$\frac{5}{32}$
3A2	100, 200, 201, 211, 300, 301, 302, 311, 312, 322	$\frac{5}{32}$
32A	210, 310, 320, 321	$\frac{1}{16}$

同様にして a 手シャッフル（a は 2 以上の自然数）を考えることができる。このシャッフルでは上昇列が $a+1$ 個以上あるような順列は現れない。

8. リッフル・シャッフルを２回することは, ４手リッフル・シャッフルと同じこと

一般に k 回リッフル・シャッフルすることは 2^k 手リッフル・シャッフルを 1 回することと同じ。証明は少し複雑なので省略。

9. 混ざり具合とは

n 枚のカードの全ての順列（$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 個ある）が等しい確率（すなわち $\frac{1}{n!}$）で現れるのが理想の混ざり方。シャッフルの混ざり具合とは、 $n!$ 個の順列の全てについて、その出現する確率と $\frac{1}{n!}$ との差を足し合わせたものの $\frac{1}{2}$ と定義する。３枚のリッフル・シャッフルの場合は

$$\frac{1}{2}\Big\{|\frac{1}{2}-\frac{1}{6}|+4\times|\frac{1}{8}-\frac{1}{6}|+|0-\frac{1}{6}|\Big\} = \frac{1}{3} \fallingdotseq 0.333.$$

３枚の４手リッフル・シャッフルの場合は

$$\frac{1}{2}\Big\{|\frac{5}{16}-\frac{1}{6}|+4\times|\frac{5}{32}-\frac{1}{6}|+|\frac{1}{16}-\frac{1}{6}|\Big\} = \frac{7}{48} \fallingdotseq 0.146.$$

専門用語では、確率の全変動距離（total variation distance） という。

10. 上昇列を使った公式

５２枚の順列は

$$52! = 80658175170943878571660636856403766975289505440883277824000000000000$$

（６８ケタ）個あるので, その一つ一つについて確率を計算して足し合わせるのは、コンピューターを使っても実質不可能。しかし次の定理のおかげで計算が可能になった :『与えられた n 枚の順列が a 手リッフル・シャッフルによって現れる確率 P は、その上昇列の個数 r によって決まる。』すなわち

$$P = \begin{cases} 0 & (r > a), \\ \frac{1}{a^n} & (r = a), \\ \frac{{}_{n+a-r}C_n}{a^n} & (r < a). \end{cases}$$

この値を $P_{n,r}(a)$ と書くことにしよう。ここで ${}_{n+a-r}C_n$ は「 n 個のならびに $a-r$ 個の仕切りを入れる組み合わせの数」と解釈するとよい (r 個の上昇列のどこかに全部で $a-r$ 個の仕切りを入れて，無理やり a 個の上昇列とみなす)。一方, n 枚の順列のうちで r 個の上昇列をもつものの総数を $A_{n,r}$ とすると

$$A_{n,1} = 1, \qquad A_{n,r} = r^n - \sum_{j=1}^{r-1} {}_{n+r-j}C_n A_{n,j} \quad (2 \le j \le n)$$

が成り立つ。以上から, n 枚のカードを k 回リッフル・シャッフルしたときの混ざり具合は

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} A_{n,r}\left|P_{n,r}(2^k) - \frac{1}{n!}\right|$$

で与えられる。

11. カットオフ現象

はじめに挙げた表のように,「混ざり具合」は或る回数を境に急激に減少する。一般に n 枚のリッフル・シャッフルについては, $k = \frac{3}{2}\log_2 n$ 回くらいで急激に変化する（[7]）。これはトランプのシャッフルに限らず、ランダムな操作を独立に繰り返す（マルコフ連鎖）ときに、よく現れる現象である。これを「カットオフ現象」という([6, 8])。

参考文献

[1] 熊谷隆 ”マルコフ連鎖とカード・シャッフル — カード・シャッフルの数理”. 平成23 年度 (第 33 回) 数学入門公開講座テキスト, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/H23-kumagai.pdf

[2] 熊谷隆 ”カード・シャッフルとマルコフ連鎖”, 平成２３年「現代の数学と数理解析」講義ノート. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/Gendai-suugaku11.pdf

[3] デイビッド・ザルツブルグ著 竹内惠行, 熊谷悦生 訳「統計学を拓いた異才たち」, 日本経済新聞社.

[4] ２０１０年度日本数学コンクール問題「シャッフルの数理」, http://www.sangaku.nagoya-u.ac.jp/math-con/10sj1.pdf

[5] ウイリアム・フェラー著 卜部舜一ほか訳「確率論とその応用」, 紀伊國屋書店.

[6] 洞彰人 ”ランダムウォークのカットオフ現象”, 数理解析研究所講究録 **1017** 巻 (1997), 70–91. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1017-5.pdf

[7] Dave Bayer and Persi Diaconis, ”Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair”, Annals of Applied Probability **2** (1992), 294–313. http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/bayer92.pdf

[8] Persi Diaconis, ”The cutoff phenomenon in finite Markov chains”, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93** (1996), 1659–1664. http://www.pnas.org/content/93/4/1659.full.pdf

[9] パーシ・ダイアコニス，ロン・グラハム著　川辺治之訳「数学で織りなすカードマジックのからくり」, 共立出版.

[10] Gina Kolata, ”In Shuffling Cards, Seven is Winning Number”, New York Times, January 9, 1990. http://www.nytimes.com/1990/01/09/science/in-shuffling-cards-7-is-winning-number.html

[11] Brad Mann, ”How many times should you shuffle a deck of cards?”, In ’Topics in contemporary probability and its applications’, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995, 261–289. https://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/Mann.pdf

[12] Robin Pemantle, ”Randomization time for the overhand shuffle”, Journal of Theoretical Probability **2** (1989), 37–49. http://www.math.upenn.edu/~pemantle/papers/overhand2.pdf