

第1章 結び目による数学の幼児教育の試みについて

1-1. 結び目理論のゲーム「領域選択ゲーム」

(1) 結び目理論のゲーム「領域選択ゲーム」の起こり

結び目理論とは、絡まりあったひも(結び目)が、実際にほどこけるかほどこけないかを判定したり、どのような変換を使うとほどこけなかった結び目をほどくことができるのかを研究したり、またどんな結び目があるのかを研究したりする数学の研究分野である。

今日では、結び目理論は、たいていの数学分野の研究や数理論物理などの理論的研究の分野ばかりでなく、電子顕微鏡などの技術革新により、ソフトマター物理、高分子合成化学、DNA やタンパク質の研究などの物理学、化学、生物学における“目で見える結び目”を研究対象とした研究として、世界中で活発に研究されるようになっている。 がんの解明にも必要な理論ともいわれている。

「領域選択ゲーム」(Region Select)は、大阪市立大学数学研究所において発見された結び目理論を応用した数学のゲームである。そのデモ版は、大阪立大学数学研究所ホームページ

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/gametop.html>

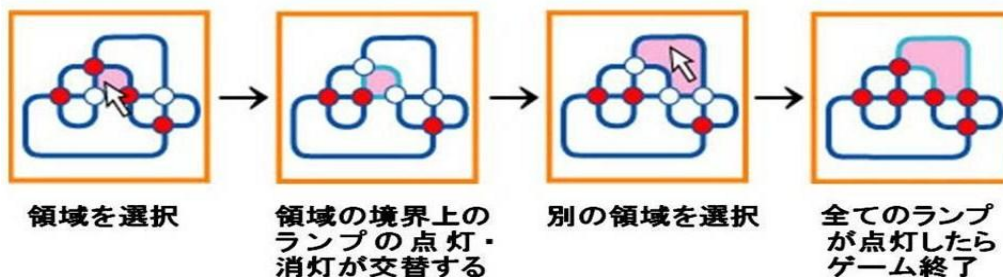
で閲覧できる。またプレイすることもできる。

2010年秋の結び目理論のセミナーで、岸本健吾(当時数学研究所員、現大阪工大特任講師)が領域交差交換とよばれる、立体の結び目を解く変換操作を導入し、すべての結び目はこの操作により必ず解くことができるか、という問題を提起した。数週間後に、清水理佳(当時後期博士課程2年、現群馬工業高等専門学校助教)が数学の結び目理論を使って、この問題を肯定的に解決した(A. Shimizu [1]参照)。さらに筆者が、結び目のこの変換操作を平面上の結び目射影図の領域の周囲のすべてのランプのオン、オフ変換操作として解釈することにより、誕生した。(発明者：河内明夫、清水理佳、岸本健吾、特許出願人：公立大学法人大阪市立大学、特願 2011-95520)。

図 1-1 からわかるように「領域選択ゲーム」のルールは単純である。結び目射影図の交点にランプがついていて、領域を1つ選択する毎に、その領域の周囲のすべてのランプのオン、オフが切り替わるような仕組みが設定されているとき、いく

つかのランプがオンになっている結び目射影図から、このゲームは開始する。どの領域を選択すれば全てのランプをオンにできるかということを考える頭脳ゲームである。結び目射影図は無限に多くあり、その射影図毎にゲームが異なるので、豊富にゲームを設定できる。

領域選択ゲーム(Region Select)



どのような点灯状態であっても必ずすべてのランプを点灯できるということが、数学の結び目理論で証明されている。

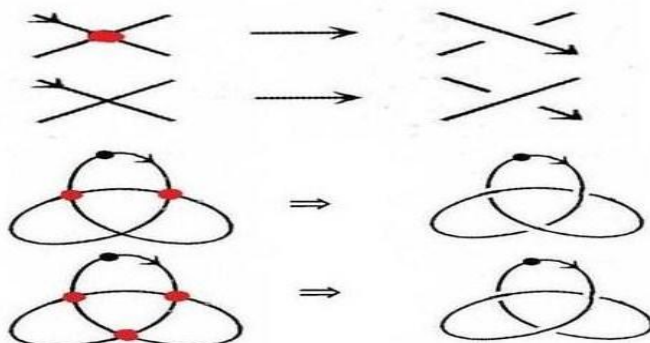
図 1-1

その後、株式会社グローバルエンジニアリング(本社名古屋市)とスマートフォン用図形ゲームのための共同研究を行い、2011年12月にアンドロイドアプリとして商品化を実施した。このゲーム「Region Select」はGoogle Playストアで公開されており、課金が設定されたゲームもあるが、大部分は無料でダウンロードしてプレイすることができる(図1-2参照)。



図 1-2

ランプつき結び目射影図は、始点と方向を定めると、つぎの対応により結び目図式に対応する。



全点灯は解けた結び目のことである。

図 1-3

平面上の結び目射影図に始点と進むべき方向を与えるとき、ランプつき結び目射影図は立体的結び目と同等であり、1つの結び目射影図のもとでゲームをプレイすることは立体的結び目を別の立体的結び目に変形していることと同等になる。またすべてのランプがオンになっている結び目射影図は解けた結び目になる(図 1-3 参照)。

(2) 結び目理論のゲーム「領域選択ゲーム」の最小手数クリアの確率

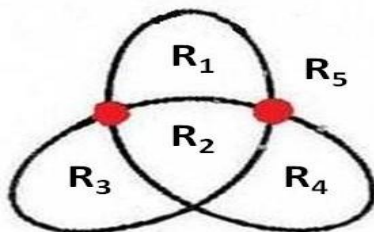


図 1-4

「領域選択ゲーム」および結び目理論とゲームの関連については[2]で詳しく説明されているが、ここではその最小手数でゲームをクリアする確率を考えてみよう。

まず、図 1-4 のように各領域に番号をつける。領域 R_i を選択する回数を x_i で表す ($i=1, 2, 3, 4, 5$)。同じ領域を 2 度選択すると何もしないのと同じなので、 x_i を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元としてよい。全てのランプをオンにするのであるから、次の連立 1 次方程式の解 x_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) が選択するデータを与えることがわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{array} \right.$$

行列表記としては $Ax=b$ と表せる。ただし、

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

一般に n 交点の結び目射影図 D にいくつかのランプがオンになっている領域選択ゲームを考えると、領域の数は $n+2$ 個となるので D 上でのそのゲームの解法は同様の考察で連立 1 次方程式

$$Ax = b$$

を解く問題と考えることができる。ただし A はサイズ $(n, n+2)$ の $Z/2Z$ 上の行列で、 \mathbf{x} は成分 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+2}$ の縦ベクトル、また \mathbf{b} はランプがオンになっていない交点を 1、他の交点では 0 となるような長さ n の縦ベクトルを表す。清水 (A. Shimizu) の結果 [1] により、この連立 1 次方程式は解を持つ。それを \mathbf{a}_0 とすると、 $A\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}$ となることから

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{a}_0) = \mathbf{0} \quad (\text{ゼロベクトル})$$

となる。この行列 A の $Z/2Z$ 上での階数は n になることが、Cheng-Gao [3] により示されている。¹⁾ 従って、行列方程式 $Ay=0$ の $Z/2Z$ 上の解ベクトル空間は 2 次元であり、 \mathbf{y} は 4 個の解を持つ。それらを $\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ で表すとき、 $Ax = \mathbf{b}$ の解は

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0 + \mathbf{w}_1, \mathbf{a}_0 + \mathbf{w}_2, \mathbf{a}_0 + \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

の 4 個となる。例えば、図 1-4 のゲームの場合、 $Ax = \mathbf{b}$ の解は

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1)$$

となる。それぞれの解について、成分が 1 で表された領域を選択すれば、全ての交点のランプがオンとなる。こうして、このゲームをクリアするための最小手数は 2 となる。このゲームの場合、選択する領域の場合の数は $2^5 - 1 = 31$ 個あるので、最小手数でゲームをクリアする確率は $2/31$ となる。

一般の n 交点の結び目射影図 D で、いくつかのランプがオンになっている領域

選択ゲームの場合には、選択する領域の場合の数は $2^{n+2}-1$ 個あり、最小手数でゲームをクリアする領域の場合の数 k は

$$1 \leq k \leq 4$$

で与えられる。よって、最小手数でゲームをクリアする確率は

$$k / (2^{n+2}-1), \quad 1 \leq k \leq 4$$

となることが上の結果からわかる。 k の正確な値はそれぞれのゲームに依存して決まる。結び目射影図 D が既約結び目射影図（すなわち各交点の周りは4つの異なる領域となっているような結び目射影図）の場合には、 n が奇数ならば、 $k=1$ または 2 となることがわかる。 n が偶数の場合には、 $k=4$ となる場合もある。

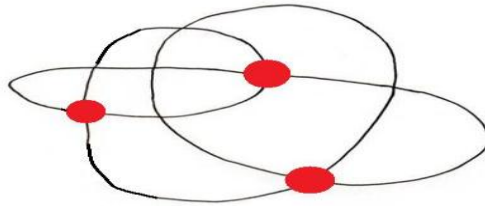


図 1-5

例えば、図 1-5 の 8 交点の結び目射影図のゲームは、アンドロイドアプリ Region Select には m16-5 として登場しているが、これは最小手数が 5 であるので、4 つの解のすべてが最小手数となり、従って $k=4$ となる。なぜならば、もし $u (\geq 6)$ 回の領域選択ですべての交点のランプがオンとなるならば、選択しなかった領域のみを選択することによってもすべての交点のランプをオンとすることができるのだから、 $8+2-u=10-u (\leq 4)$ 回の領域選択で全ての交点のランプをオンにすることができることになり、矛盾が生じるからである。

n 交点の結び目射影図 D の領域選択ゲームで、外側領域は選択できないように設定してゲームを行うこともできる。そのときには、設定なしのゲームでは 4 つの解法の内 2 つは必ず外側領域を選択しなければならないことから、いつも $k=1$ または 2 となる。この場合には、選択する領域の場合の数は $2^{n+1}-1$ 個であるので、最小手数でゲームをクリアする確率は

$$k / (2^{n+1}-1), \quad 1 \leq k \leq 2$$

となることがわかる。

何れにしても、 n 交点の結び目射影図 D の領域選択ゲームで、最小手数でゲームをクリアすることは、交点数 n が増大するにつれて、指数関数的に困難になっていくことがこの確率からわかる。

領域選択ゲームは数式を使わない簡単操作の図形のゲームであるが、既に示したように、完全に数学（線形代数）に対応している数学ゲームであるので、 n 交点の結び目射影図について、 $k/(2^{n+2}-1)$ より一定程度大きい確率の最小手数でこのゲームをクリアすることができるような人は、図形処理に関する数学アルゴリズムに関して秀でたものを持っていると言ってもよいのではないかと考える。

何度も繰り返してこのゲームをプレイすることにより、図形の観察力や数学アルゴリズムが育成されることを期待している。

(3) 結び目理論のゲーム「領域選択ゲーム」による幼児教育

幼児のための iOS 向けゲーム「結び目理論を応用した領域選択ゲーム」（図 1-4 参照）は、今年（2013 年）、共同研究先企業である株式会社グローバルエンジニアリング（本社名古屋市）の協力のもと、科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金（挑戦的萌芽研究））「結び目理論のゲームと科学への応用」（研究課題番号 4654015、研究代表者河内明夫）の助成により、作成された。このデモ版も先ほどの大阪市大数学研究所ホームページで閲覧できる。

この領域選択ゲームは、先ほども述べたように、結び目理論の数学的なアルゴリズムを使って作られたもので、各ゲームは「2 を法とした整数係数の多元連立一次方程式」と対応しており、それを解くこととゲームをクリアすることは同等になる。言いかえると、このゲームは多元連立一次方程式を解くことを図示化したもので、真に数学的な図形ゲームである。

今回製作した幼児用「領域選択ゲーム」

(1) 朝顔の状態が**つぼみ、開花**のどのような状態であっても必ず**全ての朝顔を開花**できるということが、**数学の結び目理論**で証明されている。

(2) このゲームをクリアにすることは **0 と 1 の数の世界での多変数の連立 1 次方程式を解くこと** と同等

調査・検証のポイント: **数を知らない幼児でも数学力を向上させることが可能**であること

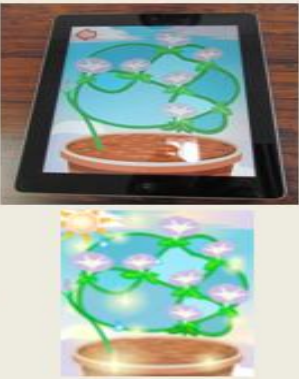


図 1-6

数さえよく知らない幼児でもこの図形ゲームでプレイすることは容易であり、

それにより、幼児が数学アルゴリズムを体得するのに貢献できたら、言い換えると、数学力を向上させることができれば、大変に素晴らしいことではないか。

この幼児版のゲームにより、幼児がどの程度図形による数学アルゴリズムを獲得できるのかについて、2012年度学術振興会(挑戦的萌芽研究)「結び目理論のゲームと科学への応用」と2012年度JST研究成果展開事業(研究成果最適展開支援プログラム)A-STEP「幼児教育用結び目ゲームと新規パスワードの実証開発研究」の補助のもと、調査研究に着手した次第である。数学者が数学の難問を解こうとする場合には、

- (i) 最初に視覚パターンや運動パターンを使って考える。
- (ii) 研究の結論段階に入って、やっと数式を使う。
- (iii) 最後に、研究成果を発表する等のために、視覚パターンや運動パターンを普通の言葉に翻訳する。

という過程を経ると考えられる。²⁾ 数学の難問を考えるには、まず数学の具体的なイメージをもつ力が必要になるが、これは図形教育による訓練により培われると考えられる。結び目理論の初等部分は、ユークリッド幾何の進化した図形の学問といえる。結び目理論を応用した図形ゲーム「領域選択ゲーム」の主な特徴としては、つぎの4点を挙げることができる。

- (1) 1つ1つが、直感力や数手先を読むような思考力が試される図形訓練のゲームである。
- (2) 文字・数字を使わない数学を応用した頭脳ゲームで、数学の知識が不要で、操作・ルールは簡単である。
- (3) 就学前児童や、小学校低学年児童の図形教育、および高齢者の視空間認識機能リハビリテーションに役立つことが期待できるゲームである。
- (4) このゲームの1つ1つは、0と1からなる数の世界で、多元連立1次方程式を解くことと同等であり、これは高度な数学アルゴリズムの訓練である。

幼児に数学を教えようとする場合、一般には数字を暗記させることは将来の数学の勉強のための重要な準備作業ではあるが、数学や数学アルゴリズムの力を向上させるための訓練とはいえない。この幼児版「領域選択ゲーム」という数学図形ゲームにより、数字をまだ知らない幼児でも数学力や数学アルゴリズムを向上させることができることを検証したい所以である。

<調査・検証の概要>

調査・検証のポイント： 数字を知らない幼児でも数学力を向上させることが可能であること

調査対象施設：

- ・大阪教育大学附属幼稚園
- ・大阪女子短期大学地域子育て支援研究所
- ・社会福祉法人晴朗会すくすく保育園

幼児版の図形ゲームを組み込んだタブレット端末を配布して、教育効果のデータ取得を依頼した。実施期間：平成25年1月下旬～8月上旬。取得データの解析とその教育効果の検証については「結び目の数学教育研究会」（代表 柳本朋子大阪教育大学教授）に依頼した。

幼児版「領域選択ゲーム」については、4交点1個、5交点1個、6交点1個、7交点1個、8交点2個の既約結び目射影図を用いた。（3交点結び目射影図は操作方法の説明としてだけ利用されている。）また、幼児版の図形ゲームでは外側領域は選択できないように設定してある。従って、幼児版「領域選択ゲーム」のゲームについて、最小手数でゲームをクリアする確率は、2節の考察から

$$2/(2^5-1) = 0.0645\cdots \text{ 以下}$$

となることがわかる。

幼児の場合に、これより大きな確率の最小手数で、ゲームをクリアできるならば、図形処理に関する数学のアルゴリズムに関して能力がある、と判定してもよいのではないかと考える。

注釈

- 1) 行列 A の $Z/2Z$ 上での階数は n になることは、結び目理論の先駆的論文であるアレクサンダーの論文 (J. W. Alexander [4]) から示すことができる。実際、その論文においてアレクサンダーは、向きの付いた既約結び目図式に関して、各交点の周りの領域に x , $-x$, 1 , -1 を一意的に割り振った行列 A を構成している。興味深い注意として、 A において $x=1$ とおき、またその行列成分を $Z/2Z$ で考えるならば、その行列は A と一致している。行列 A において2つの適当な行を除いてできる n 次正方行列の行列式 $\Delta(x)$ が今日アレクサンダー多項式と呼ばれている結び目の位相不変量である。この論文で示され、また今日良く知られているように、 $\Delta(1) = \pm 1$ がなりたつ。このことは、行列 A の

$Z/2Z$ 上での階数が n になることを示している. 向きの付いた既約でない結び目図式については, その図式は既約結び目図式が樹状につながっていることから, 既約結び目図式の個数の数学的帰納法で示すことができる. Cheng-Gao [3] は絡み目についても述べているが, それについても今述べた方法からの別証明が可能である.

- 2) これは, 数学者としての経験上同意できる考え方である. 右脳左脳の単純化された2元的なモデルによると, より明快に説明できる考え方である ([5], [6] 参照).

参考文献

- [1] A. Shimizu, Region crossing change is an unknotting operation, J. Math. Soc. Japan (to appear) (arXiv:1011.6304).
- [2] 河内明夫・岸本健吾・清水理佳, 結び目理論とゲーム, 朝倉書店, 2013.
- [3] Z. Cheng and H. Gao, On region crossing change and incidence matrix (arXiv:1101.1129).
- [4] J. W. Alexander, Topological invariants of knots and links, Trans. A. M. S. 30 (1928), 275-306.
- [5] P. F. セルゲーエフ著(阿部光伸訳), 右脳と左脳のはなし, 東京図書, 1984.
- [6] 河内明夫, 結び目の数学教育, 数学教育研究 42 (2013), 141-146.

第1章 1. 河内明夫 所属 大阪市立大学数学研究所 専任研究所員
(大阪市立大学数学研究所名誉所長・大阪市立大学名誉教授)