トポロジーと数学のいろいろな分野との関連

河内 明夫（かわうち・あきお）（大阪市立大学）

1　距離空間から位相空間へ

数学では，トポロジーという言葉は 2 つの意味で使われている．**位相空間** (topological space) の**位相** (topology) と**位相幾何学** (topology) のことである．この特集記事の空気を読めば，後者の意味でのトポロジーと数学の諸分野との関連について解説することだろうと思うが，これら 2 つの概念は**連続性** (continuity) を取り扱う学問という意味でつながっているので，前者の説明からはじめる．位相空間の位相は，抽象的に定義するのであるが，多くの場合には距離空間から導かれた位相空間を議論しており，また数学はどの教科でも同じと思うが，より具体的イメージをもって理解することが応用上極めて有効であるので，ここでは距離空間により定まる位相空間について説明しよう．

$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とする．空集合 ϕ と異なる集合 X について，つぎの条件をみたすような関数

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとき，関数 d を X の**距離関数** (metric function)，集合 X と関数 d の組 (X, d) を**距離空間** (metric space)，また値 $d(x, y)$ を X の元 x と y の**距離** (distance) という：

(1) $d(x, y) \geq 0$ がすべての元 $x, y \in X$ についてなりたち，$d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときであり，かつそのときに限る．
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ がすべての元 $x, y \in X$ についてなりたつ．
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(y, z)$ がすべての元 $x, y, z \in X$ についてがなりたつ．

例えば，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ は 2 つの実数の差の絶対値

$$g(x, y) = |x - y| \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

を距離関数として距離空間となる．

2 つの距離空間 (X_i, d_i) $(i = 1, 2)$ が与えられたら，直積集合

$$X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) |\, x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2\}$$

の 2 つの元 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

とおくと，d は $X_1 \times X_2$ の距離関数となり，$(X_1 \times X_2, d)$ は距離空間となる．

こうして，実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の n 個のコピーの積集合 $\mathbf{R}^n$ は，その元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の距離を

$$g^P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

で定めることにより距離空間となる．

距離空間 (X, d) が与えられると，任意の元 $x \in X$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球体

$$U_r(x) = \{y \in X |\, d(x, y) < r\}$$

を定めることができる．このとき，X の部分集合 O で，各元 $x \in O$ について $U_r(x) \subset O$ となる半径 r が存在するようなものを**開集合** (open set) と定義する．空集合 ϕ も X 自体も開集合の仲間に入れることにして，すべての X の開集合の集まり $\mathcal{O}$ を**距離空間** (X, d) **により定まる位相** (topology defined by metric space)，組 $(X, \mathcal{O})$ を**距離空間** (X, d) **により定まる位相空間** (topological space defined by metric space) という．　一般の位相空間は，距離関数を経由せずに直接開集合の集まりを定義することにより定義される．開集合 O の補集合 $X \backslash O$ を**閉集合** (closed set) というが，開集合の集まりの代わりに閉集合の集まりで位相を定めることもできる．

n 次元ユークリッド空間 (Euclidean space) とは, **ユークリッド距離** (Euclidean metric)

$$g^E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

により定められた距離空間 $(\mathbf{R}^n, g^E)$ のことである．$n > 1$ のとき，ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g^E)$ は先ほどの距離空間 $(\mathbf{R}^n, g^P)$ とは異なっている．例えば，$\mathbf{R}^2$ において

$$g^P((1,0),(0,1)) = 2,\ g^E((1,0),(0,1)) = \sqrt{2}$$

となる．しかしながら， g^P, g^E どちらの距離関数を使っても，開集合の集まり，すなわち位相 $\mathcal{O}$ は同じものになっており, 同じ位相空間 $(\mathbf{R}^n, \mathcal{O})$ を定めることがわかる．位相空間は距離空間と密接に関連しているが，位相空間の方が距離空間よりもリラックスした概念であることがわかる．

一般的にいえば，距離空間を対象に種々の議論を展開するのが**幾何学** (geometry) であり，位相空間に重きを置いて議論を展開するのがするのが**位相幾何学** (topology) である．それらの研究において，さらに微分に重きをおいたものをそれぞれ**微分幾何学** (differential geometry)，**微分位相幾何学** (differential topology) と呼ばれている．

距離空間 (X, d) が与えられると，X の空集合 ϕ と異なる任意の部分集合 X' もまた，距離関数 d の制限写像として定義された距離関数

$$d' : X' \times X' \longrightarrow \mathbf{R}$$

により距離空間となる．それにより定められる位相空間 $(X', \mathcal{O}')$ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の**部分位相空間** (topological subspace) であるという．

例えば, 整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{R}$ の部分集合であるので，$(\mathbf{R}, g)$ の部分距離空間であり，位相空間でもある. しかし，この位相ではすべての整数はそれだけで開集合かつ閉集合となり，興味のある位相空間とはいえない．整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ は，各素数 $p > 1$ により定まる興味深い距離空間であり，従って位相空間であることが知られているので，それを説明しよう．

$p > 1$ を素数として，0 でない整数 $n \in \mathbf{Z}$ を

$$n = p^r m \quad (r \geq 0 \text{ かつ } p \text{ と } m \text{ は互いに素})$$

と分解して $|n|_p = \dfrac{1}{p^r}$ と表し, 関数

$$d_p : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$$

を

$$d_p(n_1, n_2) = \begin{cases} |n_1 - n_2|_p & (n_1 - n_2 \neq 0) \\ 0 & (n_1 - n_2 = 0) \end{cases}$$

のように定める．このとき，$(\mathbf{Z}, d_p)$ は距離空間となることは直ちに確かめることができよう．これにより位相空間 $(\mathbf{Z}, \mathcal{O}_p)$ が得られる．これは**数論** (number theory) の基礎に横たわる位相空間である．

2 位相幾何学

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が与えられているとする．写像 $f : X \to Y$ について，Y の各開集合 $O \in \mathcal{O}_Y$ の原像

$$f^{-1}(O) = \{x \in X |\, f(x) \in O\}$$

が X の開集合，すなわち $\mathcal{O}_X$ の元になるならば，その写像 f を**連続写像** (continuous map) という．

解析学 (analysis) では，写像 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が連続であるとは，各 $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x)$$

であると学習するが，それは上で述べた写像 f が位相空間 $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$ の意味で連続であることと同値である．

写像 $f : X \to Y$ が全単射写像であり，かつ f とその逆写像 f^{-1} がともに連続であるとき，その写像 f を**同相写像** (homeomorphism) という．また，そのような同相写像 f が存在するとき，位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は**同相** (homeomorphic) であるという．

以後の話においては，断る必要がない限り距離関数 d や位相 $\mathcal{O}$ は省略して，距離空間 X，位相空間 X と呼ぶことにする．

位相幾何学のトポロジー研究とは「位置と形」を研究する学問である．**形** (topological shape) の研究とは，どのような位相空間があるか，また与えられた 2 つの位相空間が同じものになるかどうか（すなわち同相であるかどうか）を考えるような研究のことである．また**位置** (topological situation) の研究とは，位相空間 X とその部分位相空間 X' と X'' で，X' と X'' は同相であるようなものについて，組 (X, X') と (X, X'') はどのような条件を課せば同相になるかを考える研究のことである．

しかしながら，位相空間や位相空間の組は数えられないほどあり，何らかの意味で単純化した研究対象に絞って研究する必要がある．**多様体** (manifold) は形の研究についての典型的な研究対象であり，また**結び目理論** (knot theory) は位置の研究についての典型的な研究対象である．結び目理論については次節で説明することにして，この節の残りでは多様体のトポロジーと他の数学の学問分野の関連について考えてみる．

位相空間 X が **n 次元多様体** (n-dimensional manifold) であるとは，X の各点 x について，それを含むような開集合 $O(x)$ で，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ に同相であるようなものが存在することである．ふつうには**なめらか**

な (smooth)n 次元多様体を考えるので，$O(x)$ としては x で接した**接空間** (tangent space)$T_x(X)$ を取ることができ，そのことから**リーマン多様体** (Riemannian manifold) や**ファイバーバンドル** (fiber bundle) という**大域的な微分幾何学** (global differential geometry) において標準的な概念が生まれる．さらに接空間 $T_x(X)$ の移動に伴い，一般線形群 $GL(n; R)$ などの**構造群** (structure group) の考え方が生じる．より一般的には，多様体上の**変換群** (transformation group) の考え方が生まれる．一般線形群は**リー群** (Lie group) の仲間であり，多様体の研究にはリー群の考え方が必要となり，またその微分として**リー代数** (Lie algebra) の研究とも関連する．1 次元多様体とはユークリッド空間 $\mathbf{R}$ や円周 S^1 のことである．2 次元多様体は**曲面** (surface) ともよばれており，球面 S^2，トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$，射影平面 P^2，クラインの壺などが代表的なものである．

多様体のトポロジー研究では，多様体を位相的に区別するのに役立つような道具，すなわち**位相不変量** (topological invariant) が重要である．よく知られた位相不変量として，多様体 X 内の点 x を基点とする**基本群** (fundamental group)$\pi_1(X, x)$ や**ホモトピー群** (homotopy group)$\pi_q(X, x)$，**ホモロジー群** (homology group) $H_*(X)$ や**コホモロジー群** (cohomology group)$H^*(X)$ がある．基本群 $\pi_1(X, x)$ の各部分群 G に対して，基本群 $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = G$ となるような (X, x) 上の**被覆空間** (covering space)$(\tilde{X}, \tilde{x})$ の理論が展開される．これはファイバーバンドルの特別な形とみることもできる．

基本群 $\pi_1(X, x)$ の研究は, 有限表示群の同型問題などを直接取り扱う**組み合わせ群論** (combinatorial group theory) の研究と深く関連して研究されている．

多様体のホモロジーやコホモロジーについては**ポアンカレの双対性** (Poincaré duality) が基本的であり，それにより定義される**交叉形式** (intersection form) は次元的制約をうまく表現している．ホモロジーやコホモロジ一の元として定義される多様体の**特性類** (characteristic class) は多様体の幾何全般を通しての道具となっており，**数理物理** (mathematical physics) においてもまた有用な概念である．

多様体のホモロジー論から離れたホモロジー群の研究としては，**群のホモロジー** (homology of group) や**環のホモロジー** (homology of ring) など純代数の**群論**，**環論**の研究としても，永らく研究がなされてきた．

高次元多様体のトポロジー研究では，**モース理論** (Morse theory) と関連した**手術理論** (surgery theory) が重要で，上記位相不変量を道具とし

て研究されてきた，S^1 の n 個のコピーの直積である **n 次元トーラス** (n-dimensional torus)T^n がリー群として作用するような多様体を研究する**トーリック多様体** (toric manifold) の理論は**代数幾何学** (algebraic geometry) の研究に端を発しているが，位相的にも興味深い研究であり，現在活発に研究されている．

3 **次元多様体** (3-dimensional manifold) や 4 **次元多様体** (4-dimensional manifold) の研究が，今日多様体のトポロジー研究の中でも特に活発に研究されている．われわれの住む世界が縦・横・高さのある 3 次元空間と密接に関連しており，またそれに時間を考慮した 4 次元空間とも密接に関連していることから，多くの研究が可視化できる対象となっており，数多くの興味深い研究がなされてきたのである．

4 次元多様体のトポロジー研究では，数理物理学の**ゲージ理論** (gauge theory) や**サイバーグ・ヴィッテン理論** (SeibergWitten theory) を駆使して，**エキゾチック多様体** (exotic manifold) の対の構成研究が盛んに研究なされている．ここで，エキゾチック多様体対とは，X と Y は同相ではあるが，なめらかな同相写像 $f : X \to Y$ は存在しないような多様体の対 (X, Y) のことである．とくに，4 次元球面 S^4 を X にとるときのエキゾチック多様体対 (X, Y) が存在するかどうかという問題は，4 次元の**なめらかなポアンカレ予想** (smooth Poincaré conjecture) と呼ばれて，4 次元トポロジーの未解決の重要問題になっている．2 つの任意に与えられた 4 次元以上の多様体が同相かどうかを決定するアルゴリズムは存在しないことが知られており，4 次元多様体の同相問題を考える上では何らかの意味で限定した 4 次元多様体のクラスに限定して同相問題を考える必要がある．曲面上の曲面バンドルの一般化である**レフシェツ多様体** (Lefschetz manifold) は，そのような 4 次元多様体の興味深いクラスを形成しており，より一般の**シンプレクティック多様体** (symplectic manifold) とともに研究されている．この研究はまた**曲面の写像類群** (mapping class group of surface) の研究とも関連がある．

3 次元多様体のトポロジー研究では，G. ペレルマンによる **3 次元ポアンカレ予想** (3-dimensional Poincaré conjecture) の解決は有名である．その証明法は**リッチ・フロー** (Ricci flow) の理論という偏微分方程式を用いるものである．この解決は，すべての閉じた 3 次元多様体は 8 つの幾何構造をもつ 3 次元部分多様体に分解するだろう，という**サーストンの予想** (Thurston conjecture) の重要部分の解決になる．サーストンの予想の本質は双曲幾何の構造を有する多様体，すなわち**双曲多様体** (hyperbolic

manifold) であるか，曲面上の S^1 バンドルの一般化である**ザイフェルト多様体** (Seifert manifold) であるだろう，という予想である．ザイフェルト多様体は 4 次元のレフシェツ多様体のファイバー曲面を S^1 に置き換えた多様体といえるが，その位相的分類はよく知られている．3 次元双曲多様体の基本群は**射影的特殊線形群**の離散的部分群になる．ここで射影的特殊線形群というのは，$ad - bc = 1$ となるような複素数 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ を成分とする行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 全体のなす特殊線形群 $SL(2, \mathbf{C})$ を 2 次の単位行列 E の ± 1 倍のなす正規部分群 $\{\pm E\}$ で割って得れる群 $PSL(2, \mathbf{C})$ のことである．3 次元双曲多様体の基本群はこの観点から**クライン群**の研究と関連して研究がなされている．

トーラス $T^2 = S^1 \times S^1$ の $n(\geq 2)$ 個以上のコピーの連結和であるような曲面，すなわち**種数 n の曲面**は，リーマン面として，複素構造全体のなす**タイヒミュラー空間論**や**関数論**，**複素解析学**の基礎概念として研究されている．

3 次元多様体の基本群は重要な位相不変量であるが，一般的には計算が困難である．3 次元多様体特有の**組み合せトポロジー** (combinatorial topology) と呼ばれるテクニックを使う組み合せ群論の格好の題材である．

3 次元多様体の**ヘゴード分解** (Heegaard splitting) の研究も曲面の**曲線複体** (curve complex) の研究などを利用して発展している．数理物理学と関連する 3 次元多様体の位相不変量として，**ヘゴード・フロアホモロジー** (Heegaard Floer homology)，またヴィッテン不変量などの**量子不変量** (quantum invariant) があるが，次節で説明する結び目理論と密接に関連することで原理的には計算可能な位相不変量として，活発に研究されている．

3　結び目理論

円周 S^1 が 3 次元空間 $\mathbf{R}^3$ あるいは 3 次元球面 S^3 に埋め込まれたものを**結び目** (knot) という．また，いくつかの交わらない結び目の集まりを**絡み目** (link) という．結び目理論の主要な研究目的はつぎの 2 つの問題を考えることである．

(1) どのような結び目や絡み目があるか．
(2) 2 つの結び目あるいは絡み目 K, K' が与えられているとき，向きを保存している同相写像 $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ で $h(K) = K'$ となるようなものが存在

するかどうか.

結び目理論の研究の優れた特徴は，位置研究としての研究対象をはっきり目で確認でき，また適用した数学理論の有効性も直接確認できるところにある．向きづけられた閉じた 3 次元多様体は直接目で見ることはできないが，結び目や絡み目の**デーン手術理論** (Dehn surgery theory) を通して具体的に認知できる．具体的に，結び目理論が他の数学とどのように関わっているかを述べてみよう．結び目や絡み目を一般化した空間グラフの研究はもちろん**グラフ理論** (graph theory) と関係する． 結び目や絡み目の標準的な例としてよく登場する**トーラス結び目・絡み目** (torus knot·link) はデーン手術によりザイフェルト多様体となり，3 次元多様体として重要な例になる．一方，トーラス結び目·絡み目の結び目解消数は**代数曲線の特異点** (singularity of algebraic curve) の研究と関係している．また，2 **橋結び目・絡み目** (2-bridge knot·link) は 3 **次元双曲幾何** (3-dimensional hyperbolic geometry) を具体的に論ずる際にはなくてはならない標準的な例である．双曲的結び目・絡み目の**双曲体積** (hyperbolic volume) は，位相不変量であるが，その値は**リーマンのゼータ関数** (Reimann's zeta function) の特殊値と関係があることも知られている．交点数が少ない図式で表される場合には，コンピュータによってその近似値が計算され，インターネットで公開されている．**プレッツェル結び目・絡み目** (pretzel knot·link) は 3 次元双曲幾何のみならず平面幾何の**折り返し群** (refelection group) や**フックス群** (Fuchsian group) とも関係している．

結び目や絡み目を区別する多項式型位相不変量として，**ジョーンズ多項式** (Jones polynomial) や**アレクサンダー多項式** (Alexander polynomial) が知られている．これらは，数理物理の**量子場の理論** (quantum field theory)，とくに**ヤン・バクスター方程式** (Yang-Baxter equation) と関連がある．これらは，それぞれホモロジー理論へ一般化され，前者は**ホバノフ・ホモロジー** (Khovanov homology)，後者は**ノットフレアホモロジー** (knot Floer homology) と呼ばれているが，**表現論** (representation theory) や $\mathbf{3}+1$ **次元共形場理論** (conformal field theory) の立場からの研究もある．アレクサンダー多項式は 90 年近く前に開発された位相不変量で，これまでには，結び目や絡み目の基本群 $\pi_1(\mathbf{R}^3\backslash K, x)$ に伴う**群論** (group theory) の研究，特に他の群への表現の研究, やそれに関連した**アレクサンダー加群** (Alexander module) などの**可換環論** (commutative ring theory) の研究など，多くの基礎的研究がなされてきた．結び目理論には，他の位相不変量として，結び目や絡み目の 2 **次形式** (quadratic form) や**符号数不変量**

(signature invariant) のような数論的な位相不変量もある．

関数論の**リーマン面**は球面 S^2 上の**分岐被覆** (branched covering) と関連するが，結び目や絡み目上で分岐する 3 次元球面 S^3 の分岐被覆も詳しく研究されてきた．

結び目群や絡み目群より強力な**カンドル理論** (quandle theory) も結び目や絡み目の図式移動と相性がよく，近年注目されて，研究されている．結び目や絡み目の集合は**組みひも** (braid) の全体集合をマルコス同値と呼ばれる関係で割ったものと同一視できるという**アレクサンダー・マルコフの定理** (Alexander-Markov theorem) があり，その意味からも結び目理論は代数幾何や数理物理など組みひも群の研究と関連する学問すべてと関連があるといってもよい．

4 次元空間 $\mathbf{R}^4$ 内の**閉曲面結び目** (surface-knot) の理論については，**動画法** (motion picture method) と呼ばれる結び目や絡み目の変形理論を用いて研究がなされているが，これはモース理論の初歩理論でもある．組みひもを次元的に引き上げた 2 **次元組みひも** (2-dimensional braid) の概念も開発され，研究されている．

4 付言

この解説記事では，参考書・参考文献は挙げませんでした．というのも，参考にすべきものは多岐にわたり，数冊を挙げて事足りるとするには無理があるからです．強いて挙げるとすれば『岩波数学辞典 第 4 版』 日本数学会編， 岩波書店 (2007) でしょうか．英語のキーワードを付しましたので，日本語・英語のキーワードでホームページを検索して調べていけば，知りたい情報にたどり着けるでしょう．学部学生や大学院学生の場合には, 関心がある数学概念については指導教員に聞いて調べるのがよいです．他の方法としては，関心のあるテーマの「公開の数学の研究集会」（開催情報はホームページなどで調べればわかります）に出席して，情報を入手する方法もあります.

この拙文を読んで下さった研究者を目指す皆さんは，トポロジーを学習するには，こんなに多くの概念を勉強しなければならないのかと焦ってしまうかもしれませんが，そんなことはありません．数学のある専門分野を研究するとは，その数学の専門分野の具体的イメージを身に刻みつけるように獲得する行為です．どのような数学分野であれ，その研究を推し進める中で出合った新しい概念を，すぐに役立つかどうかはあま

り意識せずに，数学的なイメージを持ちつつ 1 つずつ積み上げて学んでいくようにすれば，少し時間がかかるにしても，いろいろな数学を，具体的なイメージを持って獲得できるようになるはずです．いいかえると，新しい数学概念と出会ったときには必ず学習すると習慣づけておくならば，自分の関心を持って研究している専門分野だけを，落ち着いて，思う存分楽しみつつ，深く学んでいけばよいのではないか，と個人的には思っています．とはいっても，学部学生の場合，将来研究の進展の速度をぐっと遅くしないために，大学で習う程度の数学はできるだけ常識として身につけて置くことが望ましいでしょう．数学には実験科学のような実験はないのですが，論文に書かれていないような情報や考え方を知ったり，自分の考え方を修正したりするために，人（研究者）に会う「思考実験」は行われております．これは自分の考え方の限界を乗り越えるために数学では必要なことと思われますので，人に会うのが苦手な人は，それを克服する努力をした方がよいと思います．読んで下さった皆様のトポロジーに関する ‘はるかなる航海と冒険’ に期待します．