ゲージ理論とα-接続

埼玉大学大学院　理工学研究科
数理電子情報部門　情報領域

田中　勝

ゲージ理論と微分幾何学との対応

構造群 $\longleftrightarrow$ ゲージ群

$$G = \{\, g \mid g = \exp(-ie\chi)\}$$

セクション $\longleftrightarrow$ 物質場

$$\psi$$

主ファイバー束の
ファイバーの座標変換 $\longleftrightarrow$ ゲージ変換

$$(x, \psi) \longrightarrow (x, \psi') = (x, g\psi)$$

接続 $\longleftrightarrow$ ゲージポテンシャル

$$A' = gAg^{-1} + g\mathrm{d}g^{-1}$$

曲率 $\longleftrightarrow$ ゲージ場

$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A \qquad F' = gFg^{-1}$$

ゲージ理論

物質場とゲージ場の相互作用をminimal couplingで導入する（共変微分を定義する）.
物質場に局所ゲージ変換を施し，ある量（理論＝Lagrangean density）が不変になるようにゲージポテンシャルの変換性を決める.

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} i\gamma^{\mu} \underline{D_{\mu}\psi} - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Minimal coupling

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^{j} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0} \qquad D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

ゲージポテンシャル　　ゲージ場

ゲージ変換: $\psi' = \exp(-ie\chi)\psi$

このとき $D'_{\mu}\psi' = \exp(-ie\chi)D_{\mu}\psi$ となるようにしたい.

ゲージポテンシャルが次のように変換されればよい: $A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi$

このとき $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$

α-接続のゲージ理論的導出

確率密度関数: $p = p(X, \theta)$

確率振幅: $u = 2\sqrt{p}$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$$

$$u_i = \partial_i u = \frac{1}{\sqrt{p}}(\partial_i p) = \sqrt{p}\,(\partial_i \log p)$$

u_i はベクトル場

Fisher計量: $g_{ij} = \mathrm{E}[(\partial_i \log p)(\partial_j \log p)] = \int \mathrm{d}x\; u_i u_j$

ゲージ変換: $u_i^{(\alpha)} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}f\right)u_i$

ただし, $f = f(X, \theta)$

α -共役: $(\alpha)^{\#} = -\alpha$

Fisher計量を不変にする:

$$\int \mathrm{d}x \left(u_i^{(\alpha)}\right)^{\#} u_j^{(\alpha)} = \int \mathrm{d}x\, u_i^{(-\alpha)} u_j^{(\alpha)} = g_{ij}$$

共変微分:　$D_j u_i = \partial_j u_i - \Gamma^k_{ji} u_k$

ゲージ変換後の接続が次のように変換すると仮定する:

$$\Gamma^{(\alpha)k}_{ji} = \Gamma^k_{ji} - \frac{\alpha}{2} A^k_{ji} \qquad A^k_{ji} = A^k_{ji}(\theta)$$

接続:　$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\partial_k g_{ij}$

双対性(自動的に満たされる):

$$\partial_\ell g_{ij} = g_{\ell k}\Gamma^{(\alpha)k}_{ji} + g_{\ell k}\left(\Gamma^{(\alpha)k}_{ji}\right)^{\#} = g_{\ell k}\Gamma^{(\alpha)k}_{ji} + g_{\ell k}\Gamma^{(-\alpha)k}_{ji}$$

ゲージ変換後の共変微分:

$$D_j^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} = \partial_j u_i^{(\alpha)} - \Gamma_{ji}^{(\alpha)k} u_k^{(\alpha)}$$

$$= \exp\left(-\frac{\alpha}{2} f\right) D_j u_i$$

$$- \frac{\alpha}{2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} f\right) \left\{ \left(\partial_j f\right) u_i - A_{ji}^k u_k \right\}$$

以下のように A_{ji}^k を決定する:

$$D_j^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} f\right) D_j u_i$$

$$\Rightarrow \quad A_{ji}^k u_k = \left(\partial_j f\right) u_i$$

$\boxed{A_{ji}^k \text{ を決定すれば, } \alpha\text{-接続を導いたことになる}}$

u_ℓ をかけて，確率変数 x で積分すると

$$\int \mathrm{d}x\, u_\ell\, A^k_{ji} u_k \;=\; A^k_{ji} \int \mathrm{d}x\, u_\ell u_k \;=\; A^k_{ji} g_{\ell k} \;=\; A_{ji\ell}$$

したがって，

$$\boxed{A_{ji\ell} \;=\; \int \mathrm{d}x\, u_\ell \left(\partial_j f\right) u_i}$$

確率振幅 u を通して θ 微分を考えると，f に対する適当な仮定の下で

$$\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial u} u_j$$

$$\Rightarrow \quad A_{ji\ell} = \int \mathrm{d}x \, \frac{\partial f}{\partial u} u_\ell u_j u_i$$

これで $A_{ji\ell}$ を決定することができたので，ゲージ変換後の接続は次のようになる：

$$\boxed{\Gamma^{(\alpha)k}_{ji} = \Gamma^k_{ji} - \frac{\alpha}{2} A^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} - \frac{\alpha}{2} g^{k\ell} \int \mathrm{d}x \, \frac{\partial f}{\partial u} u_\ell u_j u_i}$$

上記のように α-接続は期待値をとった後で定義されるので，ゲージ場（曲率）の
ゲージ変換の下での変換性を通常の通りに考えることはできないことに注意する

例：正規分布の場合

$$\theta^1 = \frac{\mu}{\sigma^2} \qquad \theta^2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$p = \exp\left[\theta^1 x + \theta^2 x^2 - \left(-\frac{1}{4}\frac{(\theta^1)^2}{\theta^2} - \frac{1}{2}\log(-\theta^2) + \frac{1}{2}\log\pi\right)\right]$$

例1.（シャノン-タイプ）

$$f = \log \frac{u^2}{4} = \log p \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2}{u} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$A_{111} = 0$$

$$A_{112} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\theta^2)^2}$$

$$A_{122} = -\frac{\theta^1}{(\theta^2)^3}$$

$$A_{222} = \frac{3}{2}\frac{(\theta^1)^2}{(\theta^2)^4} - \frac{1}{(\theta^2)^3}$$

α-ダイバージェンスから得られる
α-接続と一致する

例2.（β -タイプ：$q = 1$ のときにはシャノン-タイプに一致する）

$$f = \frac{1}{1-q}\left\{\left(\frac{u}{2}\right)^{2(1-q)} - 1\right\} = \frac{1}{1-q}\left(p^{1-q} - 1\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{u}{2}\right)^{1-2q} = p^{-q+\frac{1}{2}}$$

積分が収束するための条件： $0 < q < 2$

この場合は，以下で示すように non-conjugate symmetric equiaffine model になっている

$$A_{111} = 0$$

$$A_{112} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}^{\,q-1}(q+1)}{(2-q)^{\frac{5}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{3+q}{2}}}$$

$$A_{122} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}^{\,q-1}(q+1)}{(2-q)^{\frac{5}{2}}}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{\frac{5+q}{2}}}$$

$$A_{222} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{\pi}^{\,q-1}(q+1)}{(2-q)^{\frac{5}{2}}}\frac{(\theta^1)^2}{(-\theta^2)^{\frac{7+q}{2}}} + \frac{1}{8}\frac{\sqrt{\pi}^{\,q-1}(q^3-3q^2+9q+1)}{(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{5+q}{2}}}$$

α-Riemann tensor:

$$R^{(\alpha)}_{1212} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{64(2-q)^6}\frac{1}{(-\theta^2)^{q+2}}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{32(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{q+5}{2}}}\alpha - \frac{1}{8}\frac{1}{(-\theta^2)^3}$$

$$R^{(\alpha)}_{2112} = -\frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{64(2-q)^6}\frac{1}{(-\theta^2)^{q+2}}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{32(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{q+5}{2}}}\alpha + \frac{1}{8}\frac{1}{(-\theta^2)^3}$$

α-Riemann tensor (続き):

$$R^{(\alpha)}_{1221} = -\frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{64(2-q)^6}\frac{1}{(-\theta^2)^{q+2}}\alpha^2$$
$$+\frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{32(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{q+5}{2}}}\alpha+\frac{1}{8}\frac{1}{(-\theta^2)^3}$$

$$R^{(\alpha)}_{2121} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{64(2-q)^6}\frac{1}{(-\theta^2)^{q+2}}\alpha^2$$
$$+\frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{32(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{q+5}{2}}}\alpha-\frac{1}{8}\frac{1}{(-\theta^2)^3}$$

α-Riemann tensor (続き):

$$R^{(\alpha)}_{2212} = -\frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{\frac{q+7}{2}}}\alpha$$

$$R^{(\alpha)}_{2221} = \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2-4q-11)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{\frac{q+7}{2}}}\alpha$$

他はすべて 0

Conjugate symmetric ではない

α-Ricci tensor:

$$R_{11}^{(\alpha)} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{32(2-q)^6}\frac{1}{(-\theta^2)^q}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2+2q+7)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{q+1}{2}}}\alpha - \frac{1}{4}\frac{1}{(-\theta^2)}$$

$$R_{22}^{(\alpha)} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{32(2-q)^6}\frac{(\theta^1)^2-\theta^2}{(-\theta^2)^{2+q}}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2+2q+7)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{(\theta^1)^2+\theta^2}{(-\theta^2)^{\frac{q+5}{2}}}\alpha - \frac{1}{4}\frac{(\theta^1)^2-\theta^2}{(-\theta^2)^3}$$

α -Ricci tensor（続き）:

$$R_{12}^{(\alpha)} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{32(2-q)^6}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{1+q}}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2+2q+7)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{\frac{q+3}{2}}}\alpha - \frac{1}{4}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^2}$$

$$R_{21}^{(\alpha)} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3-q^2+7q-3)}{32(2-q)^6}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{1+q}}\alpha^2 - \frac{\pi^{\frac{q-1}{2}}(q-1)(q^2+2q+7)}{16(2-q)^{\frac{7}{2}}}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^{\frac{q+3}{2}}}\alpha - \frac{1}{4}\frac{\theta^1}{(-\theta^2)^2}$$

equiaffine である

α-Ricci scalar 曲率:

$$R^{(\alpha)} = \frac{\pi^{q-1}(q+1)(q^3 - q^2 + 7q - 3)}{8(2-q)^6}(-\theta^2)^{1-q}\alpha^2 - 1$$

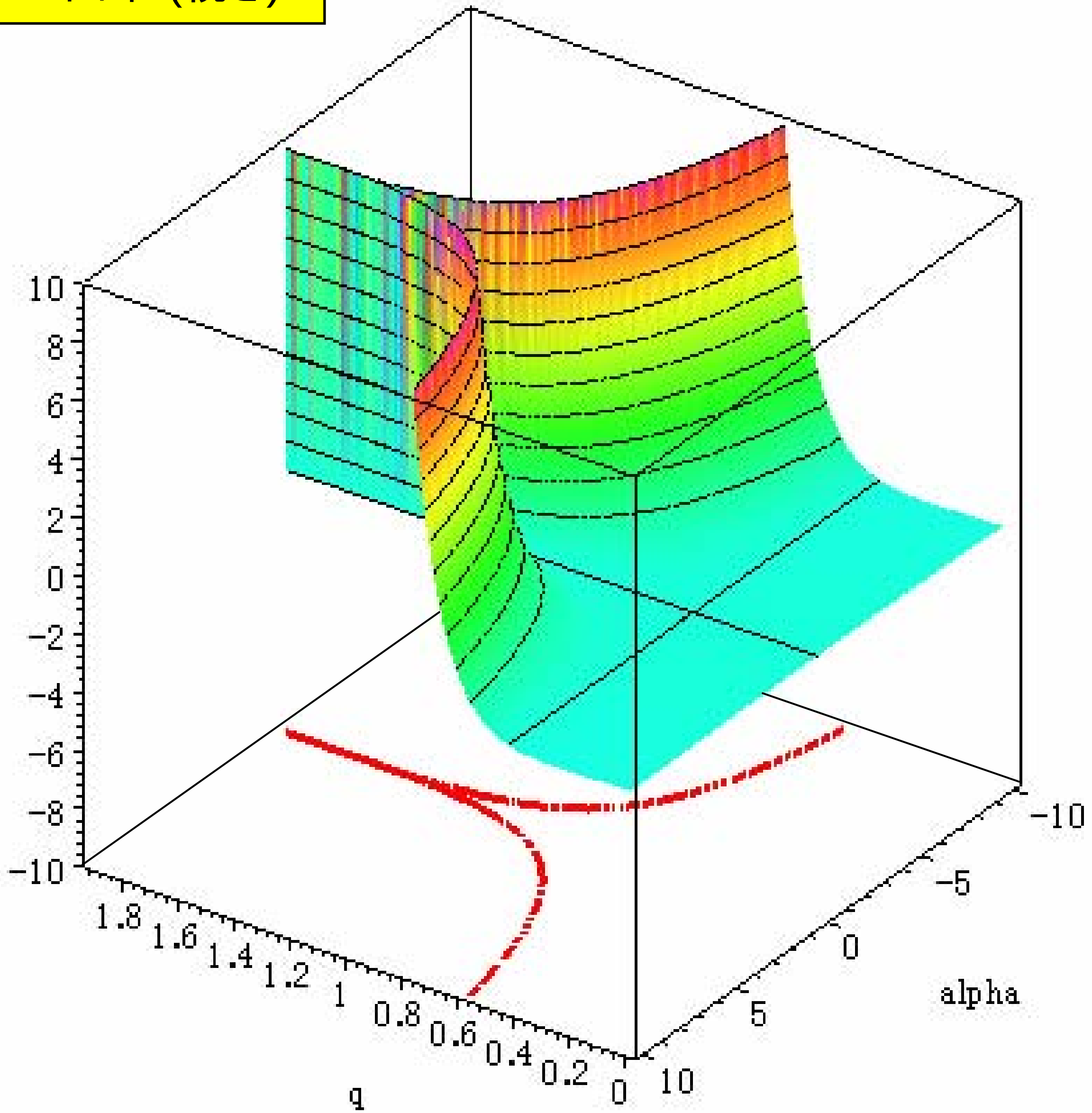
$R^{(\alpha)} = 0$ となるのは,

$$\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}(2-q)^3}{\sqrt{\pi^{q-1}(q+1)(q^3 - q^2 + 7q - 3)}}\frac{1}{(-\theta^2)^{\frac{1-q}{2}}}$$

$q = \dfrac{\left(\sqrt[3]{10} - 1\right)^2}{3} \simeq 0.4442398183$ のとき, $R^{(\alpha)} = -1$

(α の値に依らない)

α-Ricci scalar 曲率 (続き):



まとめ

α-共役の下で, ゲージ変換 $u_i^{(\alpha)} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}f\right)u_i$ を施すと

Fisher計量は不変であり,

$$\text{仮定}: \Gamma_{ji}^{(\alpha)k} = \Gamma_{ji}^{k} - \frac{\alpha}{2}A_{ji}^{k}$$

$$\text{要請}: D_j^{(\alpha)}u_i^{(\alpha)} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}f\right)D_j u_i$$

α-接続が f に応じて得られる:

$$\Gamma_{ji}^{(\alpha)k} = \Gamma_{ji}^{k} - \frac{\alpha}{2}A_{ji}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} - \frac{\alpha}{2}g^{k\ell}\int \mathrm{d}x\, \frac{\partial f}{\partial u}u_\ell u_j u_i$$

双対性も保たれる

$$\partial_\ell g_{ij} = g_{\ell k}\Gamma_{ji}^{(\alpha)k} + g_{\ell k}\left(\Gamma_{ji}^{(\alpha)k}\right)^{\#} = g_{\ell k}\Gamma_{ji}^{(\alpha)k} + g_{\ell k}\Gamma_{ji}^{(-\alpha)k}$$

Conjugate symmetric になるかどうかは α-接続の与え方(f)で決まる