微分幾何学 II (2016/12/22) 配布資料

本資料では, 次の事柄について解説する:

(i) 微分形式の外微分 d の定義と, その諸性質 (微分形式の引き戻しとの関係, Leibniz 則)

(ii) ベクトル解析に現れた, grad, rot, div の 3 つがすべて外微分から統一的に導出されること

(iii) $dd = 0$

1 前回の復習

微分形式の定義を復習しよう.

Step 1 (外積空間の定義)

M を C^∞ 多様体とする. $p \in M$ に対し, M の p における接ベクトル空間 T_pM が定まっていた (忘れている場合は定義を確認). そして, T_pM の双対空間, すなわち T_pM 上の線型形式 $f : T_pM \to \mathbb{R}$ の全体として, M の p における**余接ベクトル空間 (cotangent space)**T_p^*M が定まっていた:

$$T_p^*M = \{f : T_pM \to \mathbb{R} | f \text{ は } \mathbb{R}\text{-線型写像 } \}$$

これの一般化として, $k \geq 0$ に対し, T_pM の ***k* 次外積空間 (*k*-th exterior space)**$\wedge^k T_pM$ が T_pM 上の k 次交代形式, すなわち線型形式

$$f : T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

であって, 任意の k 次の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対し, 交代性

$$f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_1, \cdots, v_k) \quad (v_1, \cdots, v_k \in T_pM)$$

をみたすものの全体として定義されていた:

$$T_p^*M = \{f : T_pM \times \cdots \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ は } k \text{ 次交代形式 } \}$$

$k = 1$ のときは交代性は自動的に成立しているから, 1 次外積空間とは余接ベクトル空間 T_p^*M のことに他ならない.

Step 2 (外積空間の基底)

局所座標を用いた, $\wedge^k T_pM$ の $\mathbb{R}$ 基底の定義について復習する. まず, $k = 1$ の場合, すなわち余接ベクトル空間の場合を思い出す. $p \in M$ とし, $(U, x_1, \cdots, x_m)$ を M の p の周りの局所座標系とする. このとき, m 個の接ベクトル

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p \right\}$$

が接ベクトル空間 T_pM の $\mathbb{R}$ 基底を与えていたから, 線型代数の一般論から, その双対基底が T_p^*M の $\mathbb{R}$ 基底を与える. つまり, 新しい記号として, 余接ベクトル $(dx_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ を

$$(dx_i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) := \delta_{ij} \ (= \text{Kronecker のデルタ. } i = j \text{ のとき } 1, i \neq j \text{ のとき } 0)$$

で定めると, $\{(dx_1)_p, \cdots, (dx_m)_p\}$ が T_p^*M の $\mathbb{R}$ 基底をなす.

　すると, k 次外積空間 $\wedge^k T_pM$ の $\mathbb{R}$ 基底は次で与えられるのであった:

$$\{(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\}.$$

(この部分, もし難しく感じたり分からなかったりする場合は, 当面は単に事実を受け入れて認める, というスタンスでいいと思う). 特に, $\omega_p \in \wedge^k T_pM$ は実数 $\omega_{i_1\cdots i_k}(p)$ を用いて

$$\omega_p = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \omega_{i_1\cdots i_k}(p)(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$$

と表せることになる. 例として $k=1$ の場合を考えてみると, 余接ベクトルは

$$\omega_1(p)(dx_1)_p + \cdots + \omega_m(p)(dx_m)_p$$

と表せることになる.

以上で準備が整ったので, 微分形式の定義をする. $p \in M$ ごとに k 次外積空間 $\wedge^k T_pM$ が定まっていたわけだが, これらを全部寄せ集めた集合を $\wedge^k TM$ と書く. つまり, $\wedge^k TM = \cup_{p\in M} \wedge^k T_pM$ とおく (正確に言うといわゆる「非交和」というやつである).

写像 $\omega : M \to \wedge^k TM$ を考える. M の局所座標系 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ を 1 つとって固定しておく. このとき, $p \in U$ ごとに

$$\omega_p = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \omega_{i_1\cdots i_k}(p)(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$$

と書けるのであった. すると上の係数を抜き出すことで, 各 $i_1, \cdots, i_k$ ごとに関数

$$\omega_{i_1\cdots i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \omega_{i_1\cdots i_k}(p)$$

が定まる.

定義 1.1. M 上の ***k* 次微分形式** (あるいは単に ***k* 形式**) とは, 写像 $\omega : M \to \wedge^k TM$ であって, 次の 2 条件をみたすものをいう:

(i) $\omega_p \in \wedge^k T_pM$

(ii) どのような局所座標系 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ に対しても, 上の関数

$$\omega_{i_1\cdots i_k} : U \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \omega_{i_1\cdots i_k}(p)$$

はすべて C^∞ 級.

微分形式の局所座標を用いた表現

$$\omega_p = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \omega_{i_1\cdots i_k}(p)(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_k})_p$$

は, p を全部取り払って, 単に

$$\omega|_U = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とだけ書くのが普通である. さらに, $|_U$ すら書かないのが普通なので, 多様体の本を読むときには十分注意したい. このような表現ができるのは局所座標系 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ を一つ固定したときだけであり, 上の表現は U に制限したところでだけ成り立つ式である (一般に M 全体で座標はとれないので, M の一部分 U 上でだけ, 上のような書き方ができる).

例 1.2. 上では一般的に定義したので, 添え字が多く, 分かりにくいかもしれない. $\mathbb{R}^3$ の場合に添え字を使わない形で書いておくので, これを見て「一般の場合も大体こんな感じなんだろうな」と思ってもらえれば幸いである.

まず, $\mathbb{R}^3$ の場合は全体で座標 x, y, z がとれる. これを用いた場合, 0,1,2,3 形式はそれぞれ次のような形をしている:

- 0 形式は単なる C^∞ 級関数
$$f \qquad (f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\text{ は }C^\infty\text{級関数})$$
のこと.

- 1 形式
$$fdx+gdy+hdz \qquad (f,g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\text{ は }C^\infty\text{級関数})$$

- 2 形式
$$fdx\wedge dy+gdx\wedge dz+hdy\wedge dz \qquad (f,g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\text{ は }C^\infty\text{級関数})$$

- 3 形式
$$fdx\wedge dy\wedge dz \qquad (f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\text{ は }C^\infty\text{級関数})$$

要するに重積分とかの $\displaystyle\int$ の中身を抜き出してきたような感じのものであり, 逆に言うと, 高校時代からずっと意味不明であった $f(x)dx$ という感じのものを数学的に厳密に定義したのが微分形式と言える.

2 外微分

この章では k 形式から $(k+1)$ 形式を得るための一つの方法「外微分」を紹介したい. 外微分の定義には大まかに言って 2 通りの方法がある.

まずは局所座標表示を用いた定義を述べる.

定義 2.1. C^∞ 多様体 M 上の k 形式 ω の**外微分** $d\omega$ とは, 次のようにして定義される $(k+1)$ 形式のことをいう:

$$d\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

元の状態からの変化を色付きで表しておくと

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

の赤色の部分が外微分によって新しく付け加わった部分である. 要するに

- 元々の微分形式の関数の部分を偏微分する
- どの変数で偏微分したかに応じて先頭の部分に $dx_i\wedge$ を付け足す

というだけの話である. また, 上の定義によれば $d\omega_{i_1\cdots i_k}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i}dx_i$ であり, これは上の式の赤い部分に他ならないから, 外微分は

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

と書くこともできる.

なお, 先でも述べたが, 微分形式は M 上の写像であり, 上の座標表示はそれをある座標近傍 U 上に制限した部分でしか通用しない表示法である. よって, 外微分を計算するには, 多様体を座標近傍で覆って, その座標近傍ごとに上の方法で外微分を計算しなければならないことを注意しておく. この章の残りと次章で $M=\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ の場合の外微分の計算を書いておくので, 上の添え字だらけの式が難しければ, 以下の例たちを見て一般に行っていることを推測してほしい.

注意 2.2. 上の外微分の定義は局所座標系 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ の取り方によっているように見えるが, 各点ごとに見れば実はそうではない. つまり, $(V, y_1, \cdots, y_m)$ を別の局所座標系とすると, V 上で $\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \omega'_{i_1\cdots i_k} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$ とも書けるが, このとき $U \cap V$ 上で

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \omega'_{i_1\cdots i_k}}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$$

が成り立つかどうかが問題になる. 実はこのことは成り立っており, それゆえ, 外微分は局所座標の取り方によらない (いわゆる well-defined な) 定義になっている. 上の等式は余接ベクトルの座標変換公式から出るので, 余裕があれば各自で試みられたい.

実際に座標で計算する際には, 上の外微分の定義と, 次の 2 点だけを押さえておけばよい:

- $\cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_j \wedge \cdots = -\cdots \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots$. つまり, 異なる二か所を入れ替えると, マイナスが付く.
- $\cdots \wedge dx_i \wedge \cdots \wedge dx_i \wedge \cdots = 0$. つまり, 異なる場所に同じものがあると 0 になる.

例 2.3. $M = \mathbb{R}$ とし, x を M 上の標準的な座標とする. このとき, 0, 1 形式について外微分を計算してみると

- 0 形式 (つまり C^∞ 級関数) $f : M \to \mathbb{R}$ の場合, その外微分は $df = \dfrac{df}{dx} dx$ となる.
- 1 形式 $f dx$ を外微分すると $d(f dx) = \dfrac{df}{dx} dx \wedge dx = 0$. つまり, $\mathbb{R}$ の 1 形式の外微分は常に 0 となる.

例 2.4. $M = \mathbb{R}^2$ とし, x, y を M 上の標準的な座標とする. このとき, 0, 1, 2 形式について外微分を計算してみると

- 0 形式 (つまり C^∞ 級関数) $f : M \to \mathbb{R}$ の場合, その外微分は $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy$ となる.
- 1 形式 $f dx + g dy$ を外微分すると

  $$d(f dx + g dy) = d(f dx) + d(g dy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy\right)$$

  ここで, 先に書いた 2 つの性質により

  $$dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy$$

  であるから, 上の式はさらに整理できて $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ となる.
- 2 形式 $f dx \wedge dy$ を外微分すると

  $$d(f dx \wedge dy) = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dy$$

ここで, 先に書いた性質の 2 つ目により $dx \wedge dx \wedge dy = dy \wedge dx \wedge dy = 0$ だから, 上の式は 0 になる.

注意 2.5. 一般に, m 次元多様体の場合には m 形式の外微分は常に 0 になる. m 形式は $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ と書けるから, 外微分は $\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ となるが, i は 1 から m のどれかなので, $dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ の中には必ず同じ項がある. よって 0 になる, というのがその理由である.

k 形式の全体を $\Omega^k(M)$ とすると, 外微分は $\mathbb{R}$ 線型写像 $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ を定めている.
外微分は微分形式のウェッジ積について, 積の微分公式と非常に似たふるまいをする:

定理 2.6. ω, η をそれぞれ M 上の k 形式, l 形式とすると,

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta)$$

が成り立つ.

証明. d の線型性から, $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \eta = g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ の場合に示せばよい. このとき, $\omega \wedge \eta = fg dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ であるから

$$\begin{aligned}
&d(\omega \wedge \eta)\\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(fg) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} + \sum_{i=1}^m f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) + \sum_{i=1}^m f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \wedge (g dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}) + \sum_{i=1}^m f \frac{\partial g}{\partial x_i} (-1)^k dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}\\
&= (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (d\eta).
\end{aligned}$$

□

外微分は微分形式の引き戻しとの可換性をもつ.

命題 2.7. $\varphi : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. このとき, N の k 形式 ω について, $d(\varphi^* \omega) = \varphi^* d\omega$ が成り立つ.

証明. まず ω が 0-形式, つまり関数 $f : N \to \mathbb{R}$ の場合を考えると, 引き戻しの定義により $d(\varphi^* f) = d(f \circ \varphi) = \varphi^* df$ だから成り立つ. 次に一般の場合を考えると, ウェッジ積と引き戻しの可換性, 及び今確かめた 0 形式の場合の成立から

$$\begin{aligned}
\varphi^* d\omega &= \varphi^* \Bigg(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} d\omega_{j_1 \cdots j_k} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k} \Bigg)\\
&= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} d(\varphi^* \omega_{j_1 \cdots j_k}) \wedge d(\varphi^* y_{j_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y_{j_k}) \Bigg)
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
d(\varphi^* \omega) &= d \Bigg(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} (\varphi^* \omega_{j_1 \cdots j_k}) d(\varphi^* y_{j_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y_{j_k}) \Bigg)\\
&= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} d(\varphi^* \omega_{j_1 \cdots j_k}) \wedge d(\varphi^* y_{j_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y_{j_k})
\end{aligned}$$

だから, 一般の場合も正しい. □

3 ベクトル解析との関連

「外微分を考えると, ベクトル解析でいうところの grad, rot, div が自然に導出される」ということを説明したい. 逆に言えば, 「無関係に見える grad, rot, div が, 外微分の観点から見るとほとんど同じことをしているに過

ぎない」ということを解説したい. 計算を丹念に追うことで, 外微分の計算練習にもなるので, 以下を読んで理解できたと思ったら, 是非自分でも計算してみてほしい.

$(\mathbb{R}^3, (x,y,z))$ の場合に実際に計算してみよう. なお, この場合には $(dx)_p \wedge (dy)_p, (dy)_p \wedge (dz)_p, (dz)_p \wedge (dx)_p$ を $\wedge^2 T_p M$ の基底にとるのが自然なので, 2 形式の場合はこれを基底と考える.

- 0 形式 f を外微分すると
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$
となり, 係数の部分に grad $f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ が現れる.

- 1 形式 $fdx + gdy + hdz$ を外微分すると
$$\begin{aligned}
&d(fdx + gdy + hdz) \\
&= d(fdx) + d(gdy) + d(hdz) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dy\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dz\right)
\end{aligned}$$
ここで, 最初に説明したルールから
$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, dy \wedge dx = -dx \wedge dy, dz \wedge dx = -dx \wedge dz, dz \wedge dy = -dy \wedge dz$$
となるから, 上の式はさらに整理できて
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)dx \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)dy \wedge dz$$
となり, 係数の部分に $\mathrm{rot}(f,g,h) =$ が現れる.

- 2 形式 $hdx \wedge dy + fdy \wedge dz + gdz \wedge dx (f,g,h$ はこの位置においておく) を外微分すると
$$\begin{aligned}
&d(hdx \wedge dy + fdy \wedge dz + gdz \wedge dx) \\
&= d(hdx \wedge dy) + d(fdy \wedge dz) + d(gdz \wedge dx) \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy\right) \\
&\qquad + \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dy \wedge dz\right) \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial z}dz \wedge dz \wedge dx\right)
\end{aligned}$$
ここで, 異なる場所に同じものがある項は 0 になるから, 生き残るのは第 3,4,8 項の 3 つで, それぞれ
  - $\frac{\partial h}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy = -\frac{\partial h}{\partial z}dx \wedge dz \wedge dy = \frac{\partial h}{\partial z}dx \wedge dy \wedge dz$
  - $\frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz$
  - $\frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dz \wedge dx = -\frac{\partial f}{\partial x}dy \wedge dx \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz$

  となるから, 上の式は $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz$ となり, 係数の部分に $\mathrm{div}(f,g,h) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$ が現れる.

このように, grad, rot, div は微分形式の外微分を通して統一的に導出できる. そしてこのことにより, ベクトル解析で学んだ種々の積分公式をすべて統一的な方法で書くことができる. 詳しくは微分形式の積分を学んだあとで Stokes の定理として勉強することになるはずである.

4　$dd = 0$

なぜ外微分を考えるのか, という問いにはいくつもの答え方があるが, そのうち最も重要なものは「外微分を考えることで多様体の de Rham コホモロジーというコホモロジー理論が誘導される」というものであろう. 次が最重要ポイントである:

定理 4.1. $dd = 0$

証明. $\omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ として $d(d\omega) = 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \right). \end{aligned}$$

ここで (i, j) に対応する項 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ に着目すると

- $i = j$ のときは, $dx_j \wedge dx_i = 0$ より 0 となり,
- $i \neq j$ のときは (j, i) に対応する項が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

　となるので, (i, j) に対応する項と (j, i) に対応する項が打ち消しあう.

よって, $d(d\omega) = 0$. □

定義 4.2.

(1) $d\omega = 0$ となる k 形式 ω を**閉 k 形式**という.

(2) $\omega = d\eta$ となるような $(k-1)$ 形式 η が存在するとき, ω を**完全 k 形式**と呼ぶ.

閉 k 形式の全体を $Z^k_{\mathrm{dR}}(M)$ とおく. 線型写像の言葉で言えば, これは $\mathrm{Ker}(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))$ に他ならない. また, 完全 k 形式の全体を $B^k_{\mathrm{dR}}(M)$ とおく. これは $\mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))$ に他ならない.

補題 4.3. $B^k_{\mathrm{dR}}(M) \subset Z^k_{\mathrm{dR}}(M)$

証明. $\omega \in B^k_{\mathrm{dR}}(M)$ をとる. 完全形式の定義により, $\omega = d\eta$ となる $(k-1)$ 形式 η が存在する. すると定理 4.1 から $d\omega = d(d\eta) = 0$ となるから, $\omega \in Z^k_{\mathrm{dR}}(M)$. □

定義 4.4. 商空間 $H^k_{\mathrm{dR}}(M) := Z^k_{\mathrm{dR}}(M)/B^k_{\mathrm{dR}}(M)$ を M の **k 次 de Rham コホモロジー**という.

ここでは証明しないが, 一般にコンパクト C^∞ 多様体には単体複体の構造が入ることが知られている. よって, M には

- 外微分という微分構造から定まる de Rham コホモロジー $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$
- 単体複体という組み合わせ論的構造から定まる $\mathbb{R}$ 係数の単体複体のコホモロジー $H^*_{\mathrm{simp}}(M, \mathbb{R})$

の 2 つのコホモロジーが付随することになるが, 驚くべきことに, これらの (定義が全く異なる!) コホモロジーが $\mathbb{R}$ 線型空間として同型になることが知られている.

5 微分形式のもう 1 つの見方

最後に, 微分形式の外微分の, 座標を用いない定義について紹介だけしておく. 無限次元多様体の場合には具体的な局所座標を取りづらいことが多いので, 前の方法で外微分を定義することが難しいのであるが, ここで述べる定義の仕方ならば, そういう状況にも対応できる.

ポイントは, k 形式 $\omega : M \to \wedge^k TM$ を次の式により写像 $\omega : \mathcal{X}(M) \times \cdots \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ とみなすことである.

$$(\omega(\xi_1, \cdots, \xi_k))(p) := \omega_p((\xi_1)_p, \cdots, (\xi_k)_p)$$

このとき, 外微分について, 次の公式が成り立つ:

命題 5.1.
$$\begin{aligned}(d\omega)(\xi_1, \cdots, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} &(-1)^{i-1} \xi_i(\omega(\xi_1, \cdots, \check{\xi}_i, \cdots, \xi_{k+1})) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le m+1} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \cdots, \check{\xi}_i, \cdots, \check{\xi}_j, \cdots, \xi_{k+1})\end{aligned}$$