日本数学会

2011年度秋季総合分科会

無限可積分系セッション
講演アブストラクト

2011年9月28日〜10月1日

於　信州大学

無　限　可　積　分　系

9月30日(金)　第II会場

10:00〜11:50

1	岩木耕平	(京大数理研)♯	Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation	30
2	佐々木良勝	(広島大理)♯	パンルヴェ II 型階層に対するネヴァンリンナ特性函数の下からの評価	15
3	金子和雄	(四日市大関孝和研)*	4 次元 Painlevé 型方程式 $21, 21, 111, 111$ における特殊解と線型モノドロミ	15
4	眞野智行	(琉球大理)*	ガルニエ系の解の行列式公式とパデ近似	15
5	竹村剛一	(中大理工)♯	Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial	20

14:30〜15:50

6	名古屋創	(神戸大理)♯	ある Schrödinger 系のアフィン Weyl 群対称性について	15
7[A]	鈴木貴雄	(阪府大総合教育)♯	$A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解	15
8	礒島伸	(青学大理工)♯	符号付き超離散 Painlevé II 型方程式の特殊解の系列	15
	薩摩順吉	(青学大理工)		
9	岩尾慎介	(立教大理)♯	2 次元周期箱玉系の波形の挙動	15
10	中筋麻貴	(北里大一般教育)♯	Factorial Schur function に対する Tokuyama-type formula とその応用	15

16:00〜17:00　特別講演

	中西知樹	(名大多元数理)♯	団代数とその応用	

10月1日(土)　第II会場

10:00〜11:50

11	小島武夫	(山形大工)♯	量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N\|1))$ のレベル k の自由場表現	10
12	J-S. Caux	(Univ. of Amsterdam)♯	XXZ 模型の零質量相における 2-スピノン形状因子と構造因子	20
	今野均	(広島大理)		
	M. Sorrell	(Univ. of Melbourne)		
	R. Weston	(Heriot-Watt Univ.)		
13	粟田英資	(名大多元数理)♯	Ding–Iohara 代数の primary 場の因子化公式 I	15
	B. Feigin	(Landau Inst.)		
	星野歩	(上智大理工)		
	金井政宏	(東大数理)		
	白石潤一	(東大数理)		
	柳田伸太郎	(神戸大理)		

14:30〜15:30 特別講演

Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation

Kohei Iwaki (RIMS, Kyoto University)*

Abstract

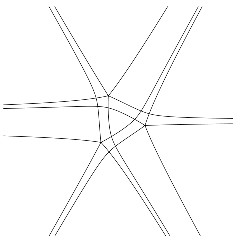
The second Painlevé equation with a large parameter (P_{II}) is analyzed by using the exact WKB analysis. The purpose of this study is to investigate the problem of the degeneration of P-Stokes geometry of (P_{II}), which is related to a kind of Stokes phenomena for asymptotic (formal) solutions of (P_{II}). We formulate the connection formula for this Stokes phenomenon, and confirm it in two ways: the first one is by computing the "Voros coefficient" of (P_{II}), and the second one is by using the isomonodromic deformation theory. Our main claim is that the connection formulas derived by these two completely different methods coincide. This is the result of the Preprint [1].

1. Parametric Stokes phenomenon

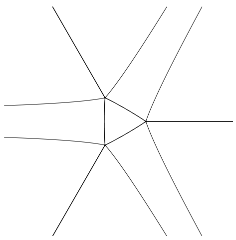
We analyze the second Painlevé equation with a large parameter η

$$(P_{\mathrm{II}}) : \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2(2\lambda^3 + t\lambda + c)$$

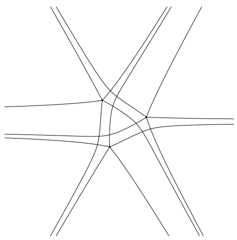
by using the exact WKB analysis. The purpose of this study is to investigate the problem of the degeneration of P-Stokes geometry (existence of P-Stokes curves connecting two turning points) of (P_{II}). (See [2] for the definition of P-Stokes curves.) Here the following figures describe the P-Stokes curves of (P_{II}) near arg $c = \frac{\pi}{2}$. The degeneration of P-Stokes curves observed when arg $c = \frac{\pi}{2}$ suggests



$\arg c = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$



$\arg c = \frac{\pi}{2}$



$\arg c = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

that a kind of Stokes phenomena occurs when c varies near arg $c = \frac{\pi}{2}$, that is, the correspondence between asymptotic (formal) solutions and true solutions of (P_{II}) changes discontinuously before and after the degeneration. We call this phenomenon "parametric Stokes phenomenon" because this Stokes phenomenon (or the degeneration of P-Stokes geometry) occurs when the parameter c contained

2000 Mathematics Subject Classification: 34M55, 34M40.
Keywords: Exact WKB analysis, Painlevé equations.
*e-mail: iwaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

in (P_{II}) varies. In this case, asymptotic solutions mean the following 1-parameter family of transseries solutions (1-parameter solutions) of (P_{II}):

$$\lambda(t,c,\eta;\alpha) = \lambda^{(0)}(t,c,\eta) + \alpha\eta^{-\frac{1}{2}}\lambda^{(1)}(t,c,\eta)e^{\eta\phi_{\mathrm{II}}} + (\alpha\eta^{-\frac{1}{2}})^2\lambda^{(2)}(t,c,\eta)e^{2\eta\phi_{\mathrm{II}}} + \cdots. \tag{1}$$

Here α is a free parameter, $\lambda^{(k)}(t,c,\eta)$ $(k \geq 0)$ is a formal power series of η^{-1} and $\phi_{\mathrm{II}} = \phi_{\mathrm{II}}(t,c)$ is some function. (Note that $\lambda^{(0)}(t,c,\eta)$ itself is a formal power series solution of (P_{II}), called 0-parameter solution.) We will formulate the connection formula for the parametric Stokes phenomenon.

2. Connection formula for the parametric Stokes phenomenon

Let $\lambda(t,c,\eta;\alpha)$ be a 1-parameter solution normalized appropriately. Then the following connection formula describes the discontinuous change of the Borel sum of $\lambda(t,c,\eta;\alpha)$ caused by the parametric Stokes phenomenon:

Connection formula for the 1-parameter solution $\lambda(t,c,\eta;\alpha)$. *Let ε be a sufficiently small positive number. If the Borel sums of $\lambda(t,c,\eta;\alpha)$ for arg c $= \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ and of $\lambda(t,c,\eta;\tilde{\alpha})$ for arg c $= \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ coincide, then the following holds:*

$$\tilde{\alpha} = (1 + e^{2\pi i c\eta})\,\alpha. \tag{2}$$

We derive the above connection formula in two ways:

A: derivation through the analysis of "the Voros coefficient of (P_{II})",

B: derivation by using the isomonodromic deformation.

The Voros coefficient plays an important role in the analysis of the parametric Stokes phenomenon. Our main claim is that the connection formulas derived by these two different methods coincide with (2).

References

[1] K.Iwaki : Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, Preprint, arXiv:1106.0612 [math.CA].

[2] T.Kawai and Y.Takei : Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, volume 227, 2005.

パンルヴェII型階層に対するネヴァンリンナ特性函数の下からの評価

佐々木 良勝 (広島大学理学部)*

概　要

In this talk, we study the second Painlevé hierarchy derived by the similarity reduction from the KdV hierarchy. We give the lower estimates of growth of the Nevanlinna characteristics of any meromorphic solutions to any differential equation of the second Painlevé hierarchy with an integer parameter.

1. Introduction.

$n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C}$ とする. また $D = {}' = \mathrm{d}/\mathrm{d}z$ とおく. z を独立変数, w を従属変数とする次の $2n$ 階常微分方程式を考える:

$$D^{-1}S_w^n Dw + zw + \alpha = 0,\ S_w := -D^2 + 4w^2 + 4w'D^{-1}w, \tag{1}$$

(1) は Painlevé II 型階層と呼ばれる. $n = 1$ のとき (1) は Painlevé II 型方程式 $w'' = 2w^3 + zw + \alpha$ を与えることがすぐに分かる.

(1) はKdV階層と総称される偏微分方程式の列に属する $2n+1$ 階偏微分方程式から相似簡約と呼ばれる操作で得られ, 逆に (1) の解が得られるとKdV階層のある解を表すことができる, という事実が知られている. 詳しくは [1, §22] を参照されたい. 例えば, Painlevé II 型方程式の解 $w(z)$ に対し $u(x,t) = t^{-2/3}(w'(z) + w^2(z))$, $z = xt^{-1/3}$ とおくと $u(x,t)$ はKdV方程式 $3\dfrac{\partial u}{\partial t} = 6u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ の解となっている.

下村俊氏 (慶応大) は [3] において Painlevé I 型方程式およびパラメータが整数または半整数の場合の Painlevé II 型方程式の解の下からの評価を与えている. また, [4] において Painlevé II 型および IV 型方程式の解の下からの評価を与えており, この際にはパラメータについての制限が外れている. さらに, [5] においてある種の weight を導入することにより Painlevé I 型階層の解の下からの評価を与えている. また講演者は [2] において下村 [3] の方法を拡張して Painlevé II 型階層に属する 4,6,8 階の微分方程式の解の下からの評価を与えた.

本講演において講演者は下村 [5] において導入された weight の Painlevé II 型階層版を導入することにより, 講演者の [2] における結果を Painlevé II 型階層の $2n$ 階方程式へと一般化する.

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 30D35
キーワード：Painlevé hierarchy, Value distribution
* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1　広島大学大学院理学研究科
e-mail: sasakiyo@hiroshima-u.ac.jp
web: http://home.hiroshima-u.ac.jp/sasakiyo/

2. Result.

f を有理型函数, $T(r,f)$ をその Nevanlinna 特性函数とし, $T(r,f)$ の増大度 $\sigma(f)$ を $\sigma(f) := \limsup_{r\to\infty} \dfrac{\log T(r,f)}{\log r}$ で定める (これらは Nevanlinna 理論の標準的な記号であり, 詳細については [1] を参照されたい). 以下に主定理を述べる.

Proposition. For every $n \in \mathbb{N}$, (1) defines a $2n$-th order ordinary differential equation.

Theorem. Let w be any transcendental meromorphic solution to (1) with the parameter $\alpha = 0$. Then we have $\sigma(w) \geq 1 + 1/2n$.

参考文献

[1] Valerii I. Gromak, Ilpo Laine and Shun Shimomura, *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.

[2] Yoshikatsu Sasaki, *Lower estimates of growth order for the second Painlevé trascendents of higher order*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B10**(2008), 191–203.

[3] Shun Shimomura, *Lower estimates for the growth of Painlevé transcendents*, Funkcial. Ekvac. **46**(2003), 287–295.

[4] Shun Shimomura, *Lower estimates for the growth of the fourth and the second Painlevé transcendents*, Proc. Edinburgh Math.Soc. **47**(2004), 231–249.

[5] Shun Shimomura, *Poles and α-points of meromorphic solutions of the first Painlevé hierarchy*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **40**(2004), 471–485.

4次元Painlevé型方程式 21,21,111,111における特殊解と線型モノドロミ

金子 和雄（四日市大学　関孝和数学研究所)

4次元Painlevé 型方程式 21,21,111,111は、第6 Painlevé方程式の拡張として　藤、鈴木によりDrinfel'd-Sokolov 階層からの相似簡約から得られた[1]が、これとは独立に坂井がFuchs型方程式のモノドロミ保存変形から導いた[2]。本講演では、坂井による次の3行3列行列型表示式を用い、これから得られたハミルトン系から特殊解を求め、その内の幾つかについて線型モノドロミを計算した結果につき報告する。

$$\frac{d\widehat{Y}}{dx}=\widehat{A}(x)\widehat{Y},\quad \widehat{A}(x)=\frac{\widehat{A}_0}{x}+\frac{\widehat{A}_1}{x-1}+\frac{\widehat{A}_t}{x-t}, \tag{1}$$

$$\widehat{A}_0=\begin{pmatrix}\theta_1^0 & -1+q_1/t & -1+q_2/t\\ 0 & \theta_2^0 & \widehat{a}_0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \widehat{A}_1=\begin{pmatrix}\widehat{a}_1 & 1 & 1\\ \widehat{a}_1(p_1q_1-\varepsilon) & p_1q_1-\varepsilon & p_1q_1-\varepsilon\\ \widehat{a}_1(p_2q_2-\widetilde{\varepsilon}) & p_2q_2-\widetilde{\varepsilon} & p_2q_2-\widetilde{\varepsilon}\end{pmatrix},$$

$$\widehat{A}_t=\begin{pmatrix}\widehat{a}_t & -q_1/t & -q_2/t\\ \widehat{a}_ttp_1 & -p_1q_1 & -p_1q_2\\ \widehat{a}_ttp_2 & -p_2q_1 & -p_2q_2\end{pmatrix},\qquad \begin{aligned}&\widehat{a}_0=p_1(q_2-q_1)+\varepsilon,\ \varepsilon=\theta_2^0+\kappa_2,\\ &\widehat{a}_1=\theta_2^0+\theta^1+\kappa_2+\kappa_3-p_1q_1-p_2q_2,\\ &\widehat{a}_t=\theta^t+p_1q_1+p_2q_2,\ \widetilde{\varepsilon}=\kappa_3.\end{aligned}$$

上の3行3列Fuchs型方程式のRiemann schemeは次のとうり。

$$P\begin{pmatrix}x=0 & x=1 & x=t & x=\infty\\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1\\ \theta_1^0 & 0 & 0 & \kappa_2\\ \theta_2^0 & \theta^1 & \theta^t & \kappa_3\end{pmatrix},\ \theta_1^0+\theta_2^0+\theta^1+\theta^t+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0.$$

Hamiltonianは第6 Painlevé方程式のHamiltonianを用いて次のように与えられる。

$$t(t-1)H\begin{bmatrix}21,21,111\\ 111\end{bmatrix}\left(\begin{matrix}\theta_1^0,\theta_2^0,\theta^1,\theta^t\\ \kappa_1,\kappa_2\ \kappa_3\end{matrix};t;\begin{matrix}q_1,q_2\\ p_1,p_2\end{matrix}\right)=t(t-1)H_{VI}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma\\ \delta,\ \varepsilon\end{matrix};t;q_1,p_1\right)$$

$$+t(t-1)H_{VI}\left(\begin{matrix}\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}\\ \widetilde{\delta},\ \widetilde{\varepsilon}\end{matrix};t;q_2,p_2\right)+(q_1-t)(q_2-1)\{(q_1p_1-\varepsilon)p_2+(q_2p_2-\widetilde{\varepsilon})p_1\}+g(t),$$

$$\alpha=\theta_1^0-\theta_2^0,\ \beta=\theta^1+\kappa_3,\ \gamma=\theta^t+\kappa_3,\ \delta=\theta_2^0+\kappa_1-\kappa_3,\ \varepsilon=\theta_2^0+\kappa_2,$$

$$\widetilde{\alpha}=\theta_1^0-\theta_2^0-\kappa_2,\ \widetilde{\beta}=\theta^1+\theta_2^0+\kappa_2,\ \widetilde{\gamma}=\theta^t+\theta_2^0+\kappa_2,\quad \widetilde{\delta}=\kappa_1,\ \widetilde{\varepsilon}=\kappa_3.$$

ハミルトン系はBriot-Bouquet型で表され、つぎの定理を得る。

定理　4次元Painlev'e 型方程式 21,21,111,111には、特異点$x=0,1,\infty$の近傍に正

則解 (0-1), (1-1), (∞-1) が存在する。

$$(0\text{-}1): \qquad q_1=\sum_{j=0}^{\infty}a_jt^j,\ p_1=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}_jt^j,\ q_2=\sum_{j=0}^{\infty}b_jt^j,\ p_2=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{b}_jt^j,$$

$$\boxed{a_0=0},\ a_1=\frac{\theta^t}{\theta^t+\theta_1^0-\theta_2^0},\ \boxed{b_0=0},\ b_1=\frac{\theta^t(\kappa_2+\theta^t+\theta_1^0)}{(\theta^t+\theta_1^0)(\theta^t+\theta_1^0-\theta_2^0)},$$

$$(1\text{-}1): \qquad q_1=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j,\ p_1=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}_j\xi^j,\ q_2=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\xi^j,\ p_2=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{b}_j\xi^j,\ (\xi=t-1),$$

$$a_0=1,\ \widetilde{a}_0=\frac{-(\theta_2^0+\kappa_2)(\theta_2^0+\theta^1+\kappa_2+\kappa_3)}{\theta_1^0-\theta_2^0+\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3},\ b_0=1,\ \widetilde{b}_0=\frac{-\kappa_3(\theta_2^0+\theta^1+\kappa_2+\kappa_3)}{\theta_1^0-\theta_2^0+\kappa_1-\kappa_2-\kappa_3},$$

$$(\infty\text{-}1): \quad q_1=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\eta^j,\ p_1=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}_j\eta^j,\ q_2=\sum_{j=0}^{\infty}b_j\eta^j,\ p_2=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{b}_j\eta^j, \quad (\eta=1/t),$$

$$a_0=\frac{\kappa_3(1-\kappa_1+\kappa_3)}{(1-\kappa_1+\kappa_3-\theta^t)(1-\kappa_1+\kappa_2-\theta^t)},\ \boxed{\widetilde{a}_0=0},\ \widetilde{a}_1=\frac{(\theta_2^0+\kappa_2)(\theta_2^0+\theta^1+\kappa_2+\kappa_3)}{\theta^t+\kappa_1-\kappa_2}$$

$$b_0=\frac{-\theta^t}{(1-\kappa_1+\kappa_3-\theta^t)},\ \boxed{\widetilde{b}_0=0},\ \widetilde{b}_1=\frac{\kappa_3(\theta_2^0+\theta^t+\kappa_1)(\theta_2^0+\theta^1+\kappa_2+\kappa_3)}{(\theta^t+\kappa_1-\kappa_2)(\theta^t+\kappa_1-\kappa_3)}.$$

線型方程式 (1) は代入する特殊解に対し、${}_3F_2$ を解にもつ一般化超幾何方程式、Gauss の超幾何方程式、E_6-Painlevé 方程式に対応する線形方程式等に帰着される。

定理　線型方程式 (1) は, 特殊解 (0-1) に対し次のモノドロミデータをもつ

$$M_0=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta_1^0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_2 0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_t=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta^t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_\infty=C_1\begin{pmatrix} e^{2\pi i\kappa_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\kappa_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\kappa_3} \end{pmatrix}C_1^{-1},\ \boxed{[M_0,\ M_t]=0},$$

$$M_\infty M_1 M_t M_0=I_3.$$

特殊解 (0-1) は線型モノドロミ M_0, M_t を可換とする解である。ここで C_1 は一般化超幾何函数 ${}_3F_2$ における接続行列である [3], [4], [5]。

Reference

[1] K. Fuji and T. Suzuki, Funkcial.Ekvac.**53** (2010),143–167.

[2] H. Sakai, Graduate School of Math. Sci. Univ. of Tokyo, **17** (2010),1–21.

[3] K. Mimachi, Funkcial.Ekvac.**51** (2008),107–133.

[4],[5] 川畑　ユリ子, 3 個の特異点をもつ n 階 Fuchs 型微分方程式の接続問題, 津田塾大学紀要, 第 **8** 号 (1976),69–75 , 第 **10** 号 (1978),45–55.

ガルニエ系の解の行列式公式と パデ近似

眞野　智行　(琉球大理)

1. 導入　パンルヴェ方程式やその一般化であるガルニエ系について行列式を用いた解の表示が知られている. 山田泰彦氏は [3] において, 適当な母関数のパデ近似から (超幾何型) 有理解のシューア関数による行列式表示が導出できることを示した. 本講演ではより一般的に, パデ近似を用いて線形微分方程式のシュレジンガー変換を構成できるという主張を示すことにより, ガルニエ系の広範囲な解に対する行列式公式が導出できることを述べる.

2. 超幾何解　2 行 2 列の連立系

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{t_i}}{x-t_i} \right) Y, \tag{1}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & \beta_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} b & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{t_i} = \begin{pmatrix} c_i & \beta_{t_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_\infty = -A_0 - A_1 - \sum_{i=1}^{N} A_{t_i} = \begin{pmatrix} -(a+b+\sum_{i=1}^N c_i) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. このとき (1) のモノドロミ保存変形を記述するシュレジンガー方程式は β_i についての連立線形微分方程式に帰着する. $\beta_0 + \beta_1 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{t_j} = 0$ に注意すると, 解は積分表示を用いて

$$\beta_1 = b \int_\gamma u^a (u-1)^{b-1} \prod_{j=1}^{N} (u-t_j)^{c_j} du, \quad \beta_{t_i} = c_i \int_\gamma u^a (u-1)^b (u-t_i)^{c_i - 1} \prod_{j \neq i} (u-t_j)^{c_j} du$$

で与えられる. (1) の基本解を $Y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として β_i を上のように取ると $y_1^{(1)} = x^a (x-1)^b \prod_{i=1}^N (x-t_i)^{c_i}$ であるが, $y_1^{(2)}$ の $x=\infty$ のまわりの展開について次が成り立つ:

命題 1　$y_1^{(2)} = \sum_{n=0}^\infty p_n x^{-n-1}$ と展開したとき, 係数 p_n は次で与えられる:

$$p_n = \int_\gamma u^{a+n} (u-1)^b \prod_{i=1}^{N} (u-t_i)^{c_i} du.$$

$m \geq n-1$ に対し $y_1^{(2)}$ のパデ近似を取る:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{-n-1} - x^{-1} \frac{P_m(x^{-1})}{Q_n(x^{-1})} = O(x^{-n-m-2}).$$

補題 **1**

$$\bar{Y} = R(x)Y, \qquad R(x) = \begin{pmatrix} r_{11}(x) & r_{12}(x) \\ r_{21}(x) & r_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} r_{11}(x) &= \frac{x^{m+1}Q_n(x^{-1})}{s_{(m^n)}}, & r_{12}(x) &= -\frac{x^m P_n(x^{-1})}{s_{(m^n)}}, \\ r_{21}(x) &= \frac{x^m Q_{n-1}(x^{-1})}{s_{((m-1)^{n-1},m+n-1)}}, & r_{22}(x) &- \frac{x^{m-1}P_{m-1}(x^{-1})}{s_{((m-1)^{n-1},m+n-1)}}, \end{aligned}$$

ただし $s_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_l)} = \det(p_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^{l}$, とおくと (2) は (1) に対するシュレジンガー変換を与える.

変換後の解について $\bar{k} = \bar{\beta}_1 + \sum_{j=1}^{N} t_j \bar{\beta}_{t_j}$, $\bar{q}_{t_i} = \bar{k}^{-1}\bar{\beta}_{t_i}$ $(i = 1, \ldots, N)$, とおくと

$$\bar{q}_{t_i} = (a + b + \sum_{j=1}^{N} c_j + m + n + 2)^{-1} \frac{\partial}{\partial t_i} \log \frac{S_{m+1,n+1}}{S_{m,n}}$$

が得られる. ただし $S_{m,n} = s_{(m^n)}$ とおいた.

3. 一般解　連立線形微分方程式系

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{A_{t_j}}{x - t_j} \right) Y, \quad \frac{\partial Y}{\partial t_i} = -\frac{A_{t_i}}{x - t_i} Y, \ i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

の $x = \infty$ で正規化された基本解 $Y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \end{pmatrix}$ について

$y_1^{(2)}/y_2^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^{-n-1}$ のパデ近似を取る. 補題1において $m = n - 1$ と制限すれば一般解に対しても同様の主張が成り立ち, シュレジンガー変換を施した後の解が得られる ((3) の係数行列 A_i の (1,2)-成分 $\bar{\beta}_i$ から $\bar{q}_{t_i}$ を §2 と同様に定める):

$$\bar{q}_{t_i} = -(\kappa_1 - \kappa_2 - 2n - 1)^{-1} \frac{\partial}{\partial t_i} \log \frac{S_{n+1}}{S_n}$$

ただし κ_1, κ_2 は A_∞ の固有値であり, $S_n = S_{n-1,n}$ とおいた. 同時に τ 関数についても行列式表示 $\tau_n = S_n \tau_0$ が得られる. 一般解に対する行列式公式の行列成分の母関数が線形微分方程式系 (3) の解を与えるという現象は (PII,PIV に対しては)[1],[2] においても議論されている.

参考文献

[1] N. Joshi, K. Kajiwara and M. Mazzocco, Generating Function Associated with the Determinant Formula for the Solutions of the Painlevé II Equation, Astérisque, **297** (2004), 67-78.

[2] N. Joshi, K. Kajiwara and M. Mazzocco, Generating Function Associated with the Hankel Determinant Formula for the Solutions of the Painlevé IV Equation, Funkcial. Ekvac., **49** (2006), 451-468.

[3] Y. Yamada, Padé method to Painlevé equations, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83-92.

Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial

竹村　剛一　(中大理工)

概　要

ホインの微分方程式において、特異点 $z = t$ が見かけの特異点となる場合について研究した。とくに、一般超幾何関数との関係について予想を提示し、いくつかの場合に正しいことを確立した。また、例外ヤコビ多項式に結果を応用した。

ホイン (Heun) の微分方程式は、二階線形常微分方程式であり

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)}y = 0, \tag{1}$$

$(\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1)$ として定められる。ここで、q はアクセサリーパラメーターと呼ばれるものである。ホインの微分方程式は、4 点に確定特異点をもつ二階線形常微分方程式の標準形であることが知られている。

見かけの特異点　$\epsilon \in \mathbf{Z}_{\leq \mathbf{0}}$ のとき、確定特異点 $z = t$ における局所解の基底は

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-t)^j + A\, g(z) \log(z-t),\ g(z) = (z-t)^{1-\epsilon} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j (z-t)^j,$$

で与えられるが、ここでの log 項が消えるとき $(A = 0)$、$z = t$ はみかけの特異点と呼ばれる。このとき、$z = t$ におけるモノドロミー行列は自明（単位行列）となっている。$z = t$ はみかけの特異点となる条件は、$(1-\epsilon)$ 次の q に関する多項式 $P_{1-\epsilon}(q)$ を用いて $P_{1-\epsilon}(q) = 0$ の形で書くことができる。

$z = t$ が見かけの特異点となっているときの解の積分表示

[1, 2] にて論じられているホインの微分方程式におけるオイラー型積分変換を用いることにより、以下の命題が示される。

Proposition 1 ([3]) $\epsilon \in \mathbf{Z}_{\leq \mathbf{0}}$, $\alpha, \beta, \beta-\gamma, \beta-\delta \notin \mathbf{Z}$ であり、$z = t$ が微分方程式 (1) において見かけの特異点ならば、$h(w)$ という $(-\epsilon)$ 次の多項式を用いて

$$\int_{[\alpha_z, \alpha_p]} w^{\beta-\gamma}(w-1)^{\beta-\delta} h(w)(z-w)^{-\beta} dw,$$

$(p = 0, 1)$ という形で微分方程式 (1) の 0 でない解が得られる。ここで、$[\alpha_z, \alpha_p] = \alpha_z \alpha_p \alpha_z^{-1} \alpha_p^{-1}$ は $w = z$ と $w = p$ をめぐる Pochhammmer の径路とし、関数 $w^{\beta-\gamma}(w-1)^{\beta-\delta}h(w)$ は以下のパラメータに関する w についてのホインの微分方程式の解として特徴付けされる。

$$\gamma' = \gamma - \beta + 1,\ \delta' = \delta - \beta + 1,\ \epsilon' = \epsilon - \beta + 1,\ \alpha' = \alpha - \beta + 1,$$
$$\beta' = 2 - \beta,\ q' = q + (\beta - 1)(\epsilon + \delta t + (\gamma - \beta)(t + 1)).$$

本研究は科研費 (課題番号:22740107) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 34M35, 33E10, 34M55

一般超幾何微分方程式　以下の式を一般超幾何微分方程式と呼ぶ。

$$\left[\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}+b_1-1\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz}+b_q-1\right)-\left(z\frac{d}{dz}+a_1\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz}+a_p\right)\right]y=0. \quad (2)$$

微分の最高次の係数を1とした式を $L_{a_1,\dots,a_p;b_1\dots b_q}y=0$ と記す。これの一つの解として、一般超幾何関数 ${}_pF_q\left(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;z\right)$ が得られる。$p=q+1$ のとき、微分方程式 (2) は3点 $z=0,1,\infty$ に確定特異点をもち、アクセサリーパラメータを持たないことが知られている。

Conjecture 1 ([4])

$$\tilde{L}=\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}-\sum_{k=1}^{M}\frac{m_k}{z-t_k}\right)\frac{d}{dz}+\frac{s_Mz^M+\ldots+s_0}{z(z-1)(z-t_1)\ldots(z-t_M)},$$

とおき、点 $0,1,t_1,\dots,t_M$ は相異なるとする。さらに $m_1,\dots m_M\in\mathbf{Z}_{\geq 1}$ とし、$\tilde{L}y=0$ において $z=t_k$ $(k=1,\dots,M)$ はすべて見かけの特異点とする。このとき、あるパラメータの一般超幾何微分作用素 $L_{\alpha,\beta,e_1+1,\dots,e_N+1;\gamma,e_1,\dots,e_N}$ $(N\leq\sum_{k=1}^{M}m_k)$ と N 階の微分作用素 $\tilde{D}$ が存在し、以下の因子分解が成立する。

$$L_{\alpha,\beta,e_1+1,\dots,e_N+1;\gamma,e_1,\dots,e_N}=\tilde{D}\tilde{L}.$$

Theorem 2 ([4]) Conjecture 1は、$n=1$, $m_1=1,2,3$ のときには成立する。（ホインの微分方程式において $\epsilon=-1,-2,-3$ で $z=t$ が見かけの特異点の場合）

ここで、$\epsilon=-2$ で $z=t$ が見かけの特異点となる場合を扱う。見かけの特異点となるための条件は q の3次方程式として記述される。この場合の式 (1) における左辺の作用を $H_{[\epsilon=-2]}$ と記すとき、以下の一般超幾何微分作用素 $L_{\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1;\gamma,e_1,e_2}$ において因子分解が成り立つ。

$$L_{\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1;\gamma,e_1,e_2}=\left(\tfrac{d^2}{dz^2}+\left(\tfrac{e_1+e_2+3}{z}+\tfrac{2}{z-1}+\tfrac{2}{z-t}\right)\tfrac{d}{dz}+v(z)\right)H_{[\epsilon=-2]},$$
$$e_1+e_2=-3+\tfrac{q-(\alpha+2)(\beta+2)t+2\gamma}{(1-t)},\quad e_1e_2=\tfrac{\alpha\beta t(q-(\alpha\beta+2\alpha+2\beta+2)t+2(\gamma-1))}{(q-\alpha\beta t)(1-t)}.$$

とくに、この場合のホインの微分方程式の解は、一般超幾何微分方程式 $L_{\alpha,\beta,e_1+1,e_2+1;\gamma,e_1,e_2}y=0$ の解にもなっている。

例外ヤコビ多項式への応用については、([4]) を参照にされたい。

参考文献

[1] Kazakov A.Ya., Slavyanov S.Yu., Integral relations for special functions of the Heun class, *Theoret. and Math. Phys.* **107** (1996), no. 3, 733–739.

[2] Takemura K., Middle convolution and Heun's equation, *SIGMA* **5** (2009), 040, 22 pages, arXiv:0810.3112.

[3] Takemura K., Integral transformation of Heun's equation and some applications, arXiv:1008.4007.

[4] Takemura K., Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial, arXiv:1106.1543

ある Schrödinger 系のアフィン Weyl 群対称性について

名古屋 創 (神戸大理)*

次の Schrödinger 方程式

$$\kappa\frac{\partial}{\partial s}\Psi(\mathbf{q},s)=H\left(\mathbf{q},\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right)\Psi(\mathbf{q},s)\quad(\kappa\in\mathbb{C})\tag{1}$$

を考える．ここで, $\Psi(\mathbf{q},s)$ は変数

$$\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_{L-1}),\quad s$$

の未知函数である．ハミルトニアン H は

$$\begin{aligned}s(s-1)H=&\sum_{m=1}^{L-1}H_{\mathrm{VI}}\left(\sum_{n=0}^{L-1}\alpha_{2n+1}-\alpha_{2m-1}-\eta,\sum_{n=0}^{m-1}\alpha_{2n},\sum_{n=m}^{L-1}\alpha_{2n},\alpha_{2n-1}\eta;q_m,p_m\right)\\&+\frac{1}{4}\sum_{1\le m<n\le L-1}(((q_m-1)\,p_mq_m+q_mp_m\,(q_m-1)+2\alpha_{2m-1}\,(q_m-1))\\&\times(p_n\,(q_n-s)+(q_n-s)\,p_n)\\&+((q_n-s)\,p_nq_n+q_np_n\,(q_n-s)+2\alpha_{2n-1}\,(q_n-s))\\&\times(p_m\,(q_m-1)+(q_m-1)\,p_m))\end{aligned}$$

で与えられる．ただし,

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{VI}}\,(a_0,a_1,a_s,a;q,p)=&\frac{1}{6}\,(qp(q-1)p(q-s)+(q-1)p(q-s)pq+(q-s)pqp(q-1)+\\&+(q-s)p(q-1)pq+(q-1)pqp(q-s)+qp(q-s)p(q-1))\\&-\frac{1}{2}\,(a_0((q-1)p(q-s)+(q-s)p(q-1))+a_1(qp(q-s)+(q-s)pq)\\&+(a_s-1)(qp(q-1)+(q-1)pq))+aq\end{aligned}$$

は第6 Painlevé 方程式のハミルトニアンの正準量子化である．簡単のため, $\partial/\partial q_n=p_n$ $(1\le n\le L-1)$ と書いた．α_m は複素定数であり $\sum_{m=0}^{2L-1}\alpha_m=1$ を満たす．

ハミルトニアン H は藤・鈴木 [1], 鈴木 [2], 津田 [3] により独立に与えられた多項式ハミルトニアンの (一つの) 正準量子化である．津田によれば, それらはある Fuchs 型方程式のモノドロミー保存変形を記述するハミルトニアン系のものである．

Schrödinger 系 (1) は $N=1$ のとき, ゲージ理論のあるインスタントン分配函数が満たす微分方程式であるという予想が山田によって提出されている [4].

本講演では, [2] において鈴木の与えた古典ハミルトニアン系に対する $A^{(1)}_{2L-1}$ 型アフィン Weyl 群対称性を量子化する．

* Department of Mathematics, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan, Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science
e-mail: nagoya@math.kobe-u.ac.jp

$\mathcal{K}_L$ を生成元が $\alpha_n,\, p_i, q_i$ $(i=1,\dots,L-1)$ で交換関係式が

$$[p_i, q_j] = \delta_{i,j}$$

である斜体とする.

行列 $A=(a_{mn})_{m,n=0}^{2L-1}$ を $A_{2L-1}^{(1)}$ 型の一般 Cartan 行列

$$\begin{aligned}
&a_{mm} = 1 \quad (m = 0, 1 \dots, L-1)\\
&a_{m,m+1} = a_{m+1,m} = a_{0,L-1} = a_{L-1,0} = -1 \quad (m = 0, 1 \dots, L-2),\\
&a_{mn} = 0 \quad (\text{それ以外}).
\end{aligned}$$

とする.

命題.

斜体 $\mathcal{K}_L$ 上に次の双有理変換 $r_0, r_1, \dots, r_{2L-1}$ を定義することができる.

$$r_0(q_n) = q_n, \quad r_0(p_n) = p_n - \frac{\alpha_0}{q_1 - 1}\delta_{0,1}, \tag{2}$$

$$r_{2m-1}(q_n) = q_n + \frac{\alpha_{2m-1}}{p_m}\delta_{m,n}, \quad r_{2m-1}(p_n) = p_n \quad (m = 1, \dots, L-1), \tag{3}$$

$$r_{2m}(q_n) = q_n, \quad r_{2m}(p_n) = p_n - \frac{\alpha_{2m}}{q_m - q_{m+1}}\left(\delta_{m,n} - \delta_{m+1,n}\right) \quad (m = 1, \dots, L-2), \tag{4}$$

$$r_{2L-2}(q_n) = q_n, \quad r_{2L-2}(p_n) = p_n - \frac{\alpha_{2L-2}}{q_{L-1} - s}\delta_{2L-2,n}, \tag{5}$$

$$r_{2L-1}(q_n) = q_n \left(1 - \alpha_{2L-1}\left(\sum_{l=1}^{L-1} q_l p_l + \eta\right)^{-1}\right)^{-1}, \tag{6}$$

$$r_{2L-1}(p_n) = \left(1 - \alpha_{2L-1}\left(\sum_{l=1}^{L-1} q_l p_l + \eta\right)^{-1}\right) p_n \tag{7}$$

$(n = 1, \dots, L-1)$,

$$r_m(\alpha_n) = \alpha_n - \alpha_m a_{mn}, \quad r_m(\eta) = \eta + (-1)^m \alpha_m \quad (m, n = 0, 1, \dots, 2L-1).$$

定理.

r_i $(i = 0, 1, \dots, 2L-3, 2L-1)$ はハミルトニアン H を不変に保つ.

参考文献

[1] K. Fuji and T. Suzuki, Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevśystems, Funkcial. Ekvac. 53 (2010), 143–167

[2] T. Suzuki, A class of higher order Painleve systems arising from integrable hierarchies of type A, arXiv:1002.2685v2

[3] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, arXiv:1007.3450v1

[4] Y. Yamada, A quantum isomonodromy equation and its application to $\mathcal{N}=2$ $SU(N)$ gauge theories *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011)

7

$A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解

神戸大学理学研究科　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)

概 要

現在までにパンルヴェVI 方程式の高階化がいくつか提出されている．その中で, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つものについては, 一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ で記述される特殊解を持つことが最近の研究で明らかになった．この結果の詳細を報告することが本講演の目的である．

1　$A^{(1)}_{2n+1}$ 型高階パンルヴェ系

本研究において考察する対象は, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ次のハミルトン系である:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, \ldots, n),$$
$$H = \frac{1}{t}\sum_{i=0}^{n}\left\{\frac{1}{2}x_i^2y_i^2 - \alpha^{(2n-2i-1)}_{2i+2}x_iy_i + \sum_{j=0}^{i-1}x_i(x_iy_i + \alpha_{2i+1})y_j\right\} + \frac{1}{1-t}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}x_i(x_iy_i + \alpha_{2i+1})y_j. \tag{1.1}$$

ここで, パラメータは次のように定める:

$$\alpha_0 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 1, \quad \alpha_{k+2n+2} = \alpha_k, \quad \alpha^{(l)}_k = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+l}.$$

また, 従属変数の間には次の関係式が常に成り立つと仮定しておく:

$$\sum_{i=0}^{n}x_iy_i + \eta = 0. \tag{1.2}$$

本研究の目的は, この方程式が一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ によって記述される特殊解を持つことを示すことである．

注 1.1. ハミルトン系 (1.1) は関係式 (1.2) を用いた変数分離法によって, $2n$ 階のハミルトン系を導く．この得られたハミルトン系は結合型パンルヴェVI 系として記述される [1].

2　超幾何函数解

命題 2.1. ハミルトン系 (1.1) の下で特殊化

$$y_i = 0 \quad (i = 0, \ldots, n), \quad \eta = 0,$$

を課す．このとき $\mathbf{x} = {}^t[x_0, \ldots, x_n]$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の線形微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{1-t}\right)\mathbf{x},$$
$$A_0 = -\sum_{i=0}^{n-1}\alpha^{(2n-2i-1)}_{2i+2}E_{i,i} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_{2j+1}E_{i,j}, \quad A_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{2j+1}E_{i,j}. \tag{2.1}$$

を満たす．ただし, $E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]^n_{k,l=0}$ は行列単位とする．

一般超幾何微分方程式 (2.1) の $t=0$ での基本解を, フロベニウスの方法を用いて級数解の形で与える. 次のようなゲージ変換を考える:

$$\mathbf{x}^k = t^{\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} O & t^{-1}I_{n-k} \\ I_{k+1} & O \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (k=0,\ldots,n).$$

このとき, 各 k に対して (2.1) は次のように変換される:

$$\frac{d\mathbf{x}^k}{dt} = \left(\frac{A_0^k}{t} + \frac{A_1^k}{1-t} \right) \mathbf{x}^k, \tag{2.2}$$

ただし, A_0^k, A_1^k は A_0, A_1 中のパラメータの添字を全て $2k+2$ 増やしたものとする.

方程式系 (2.2) の級数解は次のようにして求まる. ベキ級数

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}_i^k t^i,$$

を (2.2) に代入すると漸化式

$$A_0^k \mathbf{x}_0^k = \mathbf{0}, \quad \{A_0^k - (i+1)I_{n+1}\}\mathbf{x}_{i+1}^k = (A_0^k - A_1^k - iI_{n+1})\mathbf{x}_i^k \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

が得られる. この漸化式は係数行列に関する次元定理より 1 次元分の解を持つので, 後はその解を見つければ良い.

定理 2.2 ([2]). 領域 $|t|<1$ において, 一般超幾何微分方程式 (2.1) は次の基本解を持つ*:*

$$\mathbf{x} = t^{-\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} f^{k,k} \\ \vdots \\ f^{k,0} \\ tf^{k,n} \\ \vdots \\ tf^{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (k=0,\ldots,n), \quad f^{k,l} = \prod_{i=1}^{l} \frac{\alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}}{\alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_0)_i(a_1)_i\ldots(a_n)_i}{(1)_i(b_1)_i\ldots(b_n)_i} t^i.$$

ここで, 一般超幾何函数のパラメータは次で与えられる*:*

$$\begin{aligned} &a_i = 1 + \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \quad b_i = 1 + \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \quad (i=1,\ldots,l), \\ &a_i = \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \quad b_i = \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \quad (i=l+1,\ldots,n), \quad a_0 = \alpha_{2k-2n+1}^{(2n)}. \end{aligned}$$

注 2.3 ([3]). 上記の結果は津田照久氏によっても独立に得られている. ただし積分表示を用いた形で与えられており, 本研究とはアプローチが全く異なる.

参考文献

[1] T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, preprint (arXiv:1002.2685).

[2] T. Suzuki, A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$, SIGMA **6** (2010), 078.

[3] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math., in press. (preprint: arXiv:1005.4130)

符号付き超離散Painlevé II型方程式の特殊解の系列

礒島　伸　　(青学大理工)*1
薩摩　順吉　(青学大理工)*2

1. 符号付き超離散化

q-Airy 方程式

$$w(q\tau) - \tau w(\tau) + w(\tau/q) = 0 \tag{1}$$

を例として「符号付き超離散化」の手続き [1] を説明する．以後 $\tau = q^m$ とし，パラメータ ε を $q = e^{Q/\varepsilon}$ $(Q < 0)$ により導入する．符号付き超離散化の手続きにおいては，従属変数を

$$w(q^m) = \{s(\omega_m) - s(-\omega_m)\}e^{W_m/\varepsilon} \tag{2}$$

によって置き換える．ここで $\omega_m \in \{+1, -1\}$ は $w(q^m)$ の符号であり，関数 $s(\omega)$ は $s(+1) = 1$, $s(-1) = 0$ で定義される．この置き換えと極限操作 $\varepsilon \to +0$ により，超離散 Airy 方程式

$$\begin{aligned}&\max\left(W_{m+1} + S(\omega_{m+1}),\ mQ + W_m + S(-\omega_m),\ W_{m-1} + S(\omega_{m-1})\right)\\&\quad = \max\left(W_{m+1} + S(-\omega_{m+1}),\ mQ + W_m + S(\omega_m),\ W_{m-1} + S(-\omega_{m-1})\right)\end{aligned} \tag{3}$$

を得る．ここで関数 $S(\omega)$ は $s(\omega)$ の超離散化に相当し，$S(+1) = 0$, $S(-1) = -\infty$ で定義される．超離散化された変数は符号 ω_m と「振幅」W_m の組 (ω_m, W_m) で表される．

2. q-Painlevé II型方程式

q-Painlevé II型方程式は

$$\left(z(q\tau)z(\tau) + 1\right)\left(z(\tau)z(q^{-1}\tau) + 1\right) = \frac{a\tau^2 z(\tau)}{\tau - z(\tau)} \tag{4}$$

で与えられる．その特殊解の構造は双線形形式を導入することで明確になる [2]．すなわち，双線形方程式

$$q^{2N}g^{(N+1)}(\tau/q)g^{(N)}(q^2\tau) - q^N\tau g^{(N+1)}(\tau)g^{(N)}(q\tau) + g^{(N+1)}(q\tau)g^{(N)}(\tau) = 0 \tag{5}$$

$$q^{2N}g^{(N+1)}(\tau/q)g^{(N)}(q\tau) - q^{2N}\tau g^{(N+1)}(\tau)g^{(N)}(\tau) + g^{(N+1)}(q\tau)g^{(N)}(\tau/q) = 0 \tag{6}$$

を満たす関数 $g^{(N)}(\tau)$ $(N = 0, 1, 2, \dots)$ に対し，変数変換

$$z^{(N)}(\tau) = \{g^{(N)}(\tau)g^{(N+1)}(q\tau)\}/\{q^N g^{(N)}(q\tau)g^{(N+1)}(\tau)\} \tag{7}$$

*1 〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺5-10-1　青山学院大学 理工学部　物理・数理学科
e-mail: isojima@gem.aoyama.ac.jp
*2 e-mail: satsuma@gem.aoyama.ac.jp

によって構成される関数 $z^{(N)}(\tau)$ は，(4) において $a=q^{2N+1}$ とした方程式の解である．$N=-1,-2,\ldots$ に対しても類似の双線形方程式と変数変換が知られている．なお $g^{(N)}(\tau)$ の明示公式として，成分が (1) の解で表される $|N|$ 次行列式によるものが知られている．

3. 超離散 Painlevé II 型方程式の特殊解

前節の方程式たちを符号付き超離散化する [3, 4]．超離散双線形方程式の解を帰納的に求め，その解から変数変換によって超離散 Painlevé II 型方程式の特殊解の系列を構成することができた．すなわち $N\geq 0$ に対する Ai 関数型特殊解

$$\left(\zeta_m^{(N)},\ Z_m^{(N)}\right)=\begin{cases}((-1)^m,\ 0) & (m\geq 0)\\ (+1,\ mQ) & (m\leq -1),\end{cases}\tag{8}$$

Bi 関数型特殊解

$$\left(\zeta_m^{(N)},\ Z_m^{(N)}\right)=\begin{cases}((-1)^{m-1},0) & (m\geq -2N-1)\\ (+1,-(m+2N+1)Q) & (m\leq -2N-2)\end{cases}\tag{9}$$

および $N<0$ に対する Ai 関数型特殊解

$$\left(\zeta_m^{(N)},\ Z_m^{(N)}\right)=\begin{cases}((-1)^{m-1},0) & (m\geq -N)\\ (+1,-(m+2N+1)Q) & (m\leq -N-1),\end{cases}\tag{10}$$

Bi 関数型特殊解

$$\left(\zeta_m^{(N)},\ Z_m^{(N)}\right)=\begin{cases}((-1)^m,0) & (m\geq -N-1)\\ \left((-1)^{\frac{m-N}{2}},\frac{m+N}{2}Q\right) & (|m|\leq -N-2, m-N:even)\\ \left((-1)^{\frac{m-N-1}{2}},\frac{m+N+1}{2}Q\right) & (|m|\leq -N-2, m-N:odd)\\ (+1,mQ) & (m\leq N+1)\end{cases}\tag{11}$$

である．

今回報告した超離散 Painlevé 方程式の解は比較的単純な N 依存性を持つが，対応する超離散双線形方程式の解はより複雑な構造を持っている．これらの解は，2 節で触れた行列式表示を持つ特殊関数解に対応すると考えられるが，その直接の対応関係はまだ明らかでない．

参考文献

[1] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata and J. Satsuma, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 315206 [7 pp].

[2] T. Hamamoto, K. Kajiwara and N.S. Witte, *IMRN* **2006** (2006), 84619 [26 pp].

[3] S. Isojima, K. Konno, N. Mimura, M. Murata and J. Satsuma, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011), 175201 [10 pp].

[4] S. Isojima and J. Satsuma, Submitted to SIGMA.

2次元箱玉系の波形の挙動

岩尾　慎介　(立教大理)*

2次元周期箱玉系は、2次元周期離散戸田方程式

$$
\begin{cases}
I^t_{n,m+1}+V^{t+1}_{n,m}=I^t_{n+1,m}+V^t_{n,m+1}, \\
I^t_{n,m}V^{t+1}_{n,m}=I^t_{n+1,m}V^t_{n,m}, \\
I^t_{n,m}\equiv I^t_{n,m+M}\equiv I^t_{n+N,m}, \quad V^t_{n,m}\equiv V^t_{n,m+M}\equiv V^t_{n+N,m}, \qquad (N,M\in\mathbb{Z}_{>0}).
\end{cases} \tag{1}
$$

に、超離散化 $I^t_{n,m}=\exp(-Q^t_{n,m}/\varepsilon)$, $V^t_{n,m}=\exp(-W^t_{n,m}/\varepsilon)$ を施すことにより得られる方程式

$$
\begin{cases}
Q^t_{n,m}=W^t_{n,m}+\min\left[0,\ X^t_{n,m}\right] \\
W^{t+1}_{n,m}=Q^t_{n+1,m}+W^t_{n,m}-Q^t_{n,m} \\
X^t_{n,m}:=\max_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{l=0}^{k}\left(Q^t_{n+1,m-l-1}-W^t_{n,m-l}\right)\right]
\end{cases} \tag{2}
$$

のことである。$\{W^t_{n,m}\}_{n,m}$ のデータを図1のように並べる。

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|l}
\hline
W^t_{N,M} & \cdots & W^t_{3,M} & W^t_{2,M} & W^t_{1,M} & & M \\
\hline
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
W^t_{N,2} & \cdots & W^t_{3,2} & W^t_{2,2} & W^t_{1,2} & & 2 \\
\hline
W^t_{N,1} & \cdots & W^t_{3,1} & W^t_{2,1} & W^t_{1,1} & & 1=m \\
\hline
n=N & \cdots & 3 & 2 & 1 & &
\end{array}
$$

図 1: 2次元箱玉系のデータの並べ方.

箱玉系の時間発展の例をひとつ与える。

```
...1.2...     ....111..     .....2.1.     .....11.1
..1.2....     ...12....     ....3....     ....21...
.1.2.....     ..12.....     ...3.....     ...21....
322.11333     332..2233     333..1323     3331.1232
   t=0           t=1           t=2           t=3
```

箱玉系は、浅水波の干渉の様子を表すような挙動を示す。しかし、与えられた初期値に対してどのような波形を示すかを決定するのは難しい問題である。本講演では、トロピカル幾何を用いた波形の判定方法を紹介したい。

本研究は科研費 (課題番号:23-1939) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 37K15, 37K20
キーワード：ultradiscrete system,
* 〒171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1　立教大学理学部数学科
e-mail: iwao@rikkyo.ac.jp

Factorial Schur function に対する Tokuyama-type formula とその応用

中筋麻貴 (北里大学一般教育部)

任意の複素数列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$ と $\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_n)$（スペクトルパラメータ) および整数列 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し，

$$A_\mu(\mathbf{z}|\alpha) := \det((z_i|\alpha)^{\mu_j})_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

と定義する．ただし，$(z|\alpha)^r = (z + \alpha_1) \cdots (z + \alpha_r)$ とする．このとき，Schur function $s_\lambda(\mathbf{z})$ の一般化である factorial Schur function $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$ は，$A_\mu(\mathbf{z}|\alpha)$ を用いて，以下のように定義される．

Definition.(Factorial Schur function) $\rho = (n-1, n-2, \cdots, 0)$，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{A_{\lambda+\rho}(\mathbf{z}|\alpha)}{A_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)}.$$

これを six-vertex model に関する partition function を用いることにより Tokuyama-type に書き下す．$\mathfrak{S}$ を statistical system, $\mathfrak{s}$ を $\mathfrak{S}$ の state とする．$\mathfrak{s}$ の各点 v における Boltzmann weight を $\beta_{\mathfrak{s}}(v)$ とし，$\beta(\mathfrak{s}) = \prod_v \beta_{\mathfrak{s}}(v)$ とする．ここで，partition function $Z(\mathfrak{S})$ を以下で定義する:

$$Z(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{s}} \beta(\mathfrak{s}).$$

今，partition $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ に対し，$n + \lambda_1$(もしくはそれ以下) 個の行と n 個の列からなる長方形 lattice を考える．各 edge には，[1] で定義される boundary condition をつけ，各格子点 v には，[1] の Yang Baxter 方程式の条件を満たす Boltzmann weight(パラメータ t を含む) を対応させる．なお，具体的な Boltzmann weight の値は [3] を参照．この長方形 lattice の system を $\mathfrak{S}_{\lambda,t}$ と表す．このとき，factorial Schur function に対する以下の Tokuyama-type formula を得た．

Theorem1. ([2])

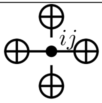
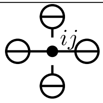
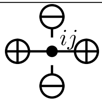
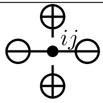
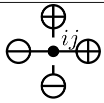
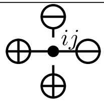
$$\left[\prod_{i<j}(tz_j + z_i)\right] s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = Z(\mathfrak{S}_{\lambda,t}).$$

本定理の応用として，t を ∞ としたときの挙動について以下の主定理を得た.

Theorem2.

$$\frac{\mathbf{z}^{w_0\rho}}{\alpha^{(\lambda+\rho)'}} s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = Z(\mathfrak{S}_{\lambda,\infty}).$$

なお，$(\lambda+\rho)'$ は $\lambda+\rho$ の転置を表し，w_0 はワイル群の最長元を表す．また，$\mathfrak{S}_{\lambda,\infty}$ の Boltzmann weight は以下で与えられる.

Ice						
Boltzmann weight	1	-1	1	$1+\frac{z_i}{\alpha_j}$	$\frac{z_i}{\alpha_j}$	1

本定理は，Lascoux[4, Theorem 1] および McNamara[6, Theorem1.1] の別証明となる．また，これより，以下の factorial Schur function の vanishing property を導くことができる.

Theorem 3. λ, μ を n の partition とする．$(\alpha_\mu)_i = \alpha_{n+1-i+\lambda_i}$ で定義される数列を $\alpha_\mu = ((\alpha_\mu)_1, \cdots, (\alpha_\mu)_n)$ とすると，

$$Z_\lambda(\alpha_\mu|\alpha) = 0 \qquad \text{if} \quad \lambda \not\subset \mu$$

$$Z_\lambda(\alpha_\lambda|\alpha) = \prod_{(i,j)\in\lambda} \left(\frac{\alpha_{n+1-i+\lambda_i}}{\alpha_{n-\lambda'_j+j}} - 1 \right)$$

が成り立つ.

参考文献

[1] B.Brubaker, D.Bump, and S.Friedberg, Schur polynomials and the Yang-Baxter equation, http://arxiv.org/abs/0912.0911.

[2] D.Bump, P. McNamara, M.Nakasuji, Factorial Schur functions and the Yang-Baxter equation, preprint.

[3] D.Bump, P. McNamara, 中筋麻貴, Factorial Schur functions と six-vertex model, 日本数学会 2011 年度年会 無限可積分系セッション講演アブストラクト, page 3, 2011.

[4] A.Lascoux, The 6 vertex model and Schubert polynomials. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 3:Paper 029, 12 (electronic), 2007.

[5] I.G. Macdonald, Factorial functions: theme and variations. In *Seminaire alotharingien de Combinatorie (Saint-Nabor, 1992)*, volume 498 of *Publ. Inst. Rech. Math. Av.*, Pages 5-39. Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.

[6] P.J.McNamara, Factorial Schur functions via the six vertex model. Preprint, 2009.

量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ のレベル k の自由場表現

小島武夫　山形大学工学部

量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表現を一般のレベル k で構成する **[K1]**. この自由場表現は脇本表現 **[W]** の量子・超代数版である. 楕円超代数 $U_{q,p}(\widehat{sl}(M|N))$ への Dressing deformation **[K2]** を応用することで、楕円超代数 $U_{q,p}(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表示も得られる.

- **ボゾン（微分作用素）**： 量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N|M))$ の導入は **[Y]** により行われた。Drinfeld current $X_j^\pm(z)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}X_{m,j}^\pm z^{-m}, a_{j,n}, h_j, c$, $(1\leqq j\leqq N+M-1, n\in\mathbb{Z}_{\neq 0})$ の関係式には、超代数特有の反交換関係 $\{x,y\}=xy+yx$ に関わるものがあり、$U_q(\widehat{sl}(N))$ では $X_j^\pm(z)$ の 3 項間のみにあった Serre 関係式が 4 項間にも存在する部分も新しい。
- **量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表示**： ボゾン $a_n^i, (1\leqq i\leqq N; n\in\mathbb{Z}_{\neq 0})$, $b_n^{i,j}, c_n^{i,j}$, $(1\leqq i<j\leqq N+1; n\in\mathbb{Z}_{\neq 0})$ の交換関係を以下で定める **[AOS1, AOS2]**.

$$
\begin{aligned}
[a_n^i,a_m^j] &= \frac{[(k+N-1)n]_q[A_{i,j}n]_q}{n}\delta_{n+m,0},\\
[b_n^{i,j},b_m^{k,l}] &= -\nu_i\nu_j\frac{[n]_q^2}{n}\delta_{i,k}\delta_{j,l}\delta_{n+m,0},\quad [c_n^{i,j},c_m^{k,l}]=\nu_i\nu_j\frac{[n]_q^2}{n}\delta_{i,k}\delta_{j,l}\delta_{n+m,0}.
\end{aligned}
$$

なお $(A_{i,j})_{1\leqq i,j\leqq N-1}$ は $sl(N|1)$ のカルタン行列で、$\nu_1=\cdots=\nu_N=+, \nu_{N+1}=-$. $[a]_q=\frac{q^a-q^{-a}}{q-q^{-1}}$. これとゼロモード $b_0^{i,j}, Q_b^{i,j}$ を用いて、補充的なカレントを導入する。

$$
\begin{aligned}
b^{i,j}(z) &= -\sum_{m\neq 0}\frac{b_m^{i,j}}{[m]_q}z^{-m}+Q_b^{i,j}+b_0^{i,j}\log z,\\
b_\pm^{i,j}(z) &= \pm(q-q^{-1})\sum_{\pm m>0}b_m^{i,j}z^{-m}\pm b_0^{i,j}\log q,\\
a_\pm^j(z) &= \pm(q-q^{-1})\sum_{\pm m>0}a_m^j z^{-m}.
\end{aligned}
$$

- **量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表示 [K1]**： レベル $c=k$ における $U_q(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表示が上記したボゾンで構成できる。例えば Drinfeld current $X_i^\pm(z)$ $(1\leqq i\leqq N)$ の自由場表示は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
X_i^+(z) &= \frac{1}{(q-q^{-1})z}\sum_{j=1}^{i}(X_{i,2j-1}^+(z)-X_{i,2j}^+(z)),\qquad X_N^+(z)=\sum_{j=1}^{N}X_{N,j}^+(z),\\
X_i^-(z) &= \frac{1}{(q-q^{-1})z}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(X_{i,2j-1}^-(z)-X_{i,2j}^-(z))+(X_{i,2i-1}^-(z)-X_{i,2i}^-(z))\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left. - \sum_{j=i+1}^{N-1} (X^-_{i,2j-1}(z) - X^-_{i,2j}(z)) \right) + q^{k+N-1} X^-_{i,2N-1}(z),
$$

$$
X^-_N(z) = \frac{1}{(q-q^{-1})z} \sum_{j=1}^{N} \left(-q^{j-1} X^-_{N,2j-1}(z) + q^{j-1} X^-_{N,2j}(z) \right),
$$

$X^{\pm}_{i,j}(z)$ のうち超代数特有の項を具体的に示しておく。添え字 $1 \leqq j \leqq N$ に対して、

$$
X^+_{N,j}(z) = :\exp\left((b+c)^{j,N}(q^{j-1}z) + b^{j,N+1}(q^{j-1}z) - \sum_{l=1}^{j-1} (b^{l,N+1}_+(q^l z) + b^{l,N}_+(q^l z)) \right) :.
$$

添え字 $1 \leqq j \leqq N-1$ に対して、

$$
X^-_{j,2N-1}(z) = :\exp\left(a^j_+(q^{\frac{k+N-1}{2}}z) - b^{j,N+1}(q^{k+N-1}z) - b^{j+1,N+1}_+(q^{k+N-1}z) + b^{j+1,N+1}(q^{k+N}z) \right) :.
$$

$$
\begin{aligned}
X^-_{N,2j-1}(z) &= :\exp\Big(a^N_-(q^{-\frac{k+N-1}{2}}z) - b^{j,N}_-(q^{-k-j}z) - (b+c)^{j,N}(q^{-k-j+1}z) \\
&\quad - b^{j,N+1}_-(q^{-k-j}z) - b^{j,N+1}(q^{-k-j+1}z) - \sum_{l=2}^{N-1} (b^{l,N}_-(q^{-k-l}z) + b^{l,N+1}_-(q^{-k-l}z)) \Big) :, \\
X^-_{N,2j}(z) &= :\exp\Big(a^N_-(q^{-\frac{k+N-1}{2}}z) - b^{j,N}_+(q^{-k-j}z) - (b+c)^{j,N}(q^{-k-j-1}z) \\
&\quad - b^{j,N+1}_+(q^{-k-j}z) - b^{j,N+1}(q^{-k-j-1}z) - \sum_{l=j+1}^{N-1} (b^{l,N}_-(q^{-k-l}z) + b^{l,N+1}_-(q^{-k-l}z)) \Big) :, \\
X^-_{N,2N-1}(z) &= :\exp\left(a^N_-(q^{-\frac{k+N-1}{2}}z) - b^{N,N+1}(q^{-k-N+1}z) \right) :, \\
X^-_{N,2N}(z) &= :\exp\left(a^N_+(q^{\frac{k+N-1}{2}}z) - b^{N,N+1}(q^{k+N-1}z) \right) :.
\end{aligned}
$$

他の $X^{\pm}_{i,j}(z), a_{j,n}, h_j$ も類似した自由場表示が与えられる。これは $U_q(\widehat{sl}(2|1))$ のレベル k の自由場表示 **[AOS2]** の高ランク版になる。

- **楕円超代数 $U_{q,p}(\widehat{sl}(N|1))$ の自由場表示：** 量子超代数 $U_q(\widehat{sl}(M|N))$ から楕円超代数 $U_{q,p}(\widehat{sl}(M|N))$ への Dressing deformation **[K2]** を応用することで、楕円超代数のレベル k 自由場表示も得られる.

参考文献

[W] M.Wakimoto, *Commun.Math.Phys.***104**, 605-609, (1986).

[Y] H.Yamane, *Pub.RIMS.* **35**,321-390,(1999).

[AOS1]H.Awata, S.Odake, J.Shiraishi, *Commun.Math.Phys.***162**, 61-83, (1994).

[AOS2]H.Awata, S.Odake, J.Shiraishi, *Lett.Math.Phys.***42**, 271-279, (1997).

[K1] T.Kojima, [arXiv.1103.5527], submitted for publication (2011).

[K2] T.Kojima, [arXiv.1105.5772], submitted for publication (2011).

XXZ 模型の零質量相における 2-スピノン形状因子と構造因子

Jean-Sébastien Caux　*Univ. of Amsterdam*

今野　均　広島大学 理学研究科

Mark Sorrell　*Univ. of Melbourne*

Robert Weston　*Heriot-Watt Univ.*

スピン $1/2XXZ$ 模型は

$$H_{XXZ} = J\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + \Delta\sigma_i^z\sigma_{i+1}^z)$$

$(J > 0)$ をハミルトニアンとする量子統計力学模型であり, 零質量相は $-1 \leq \Delta \leq 1$ で与えられる. 励起状態はスピノンと呼ばれ, 運動量 p とエネルギー e に対して零質量の分散 $e = v_F|\sin p|$ を持つ. ここで, $v_F = \frac{\pi J\sqrt{1-\Delta^2}}{2\cos^{-1}\Delta}$ はフェルミ速度である. 2-スピノン形状因子とは, 模型の基底状態 $|\mathrm{vac}\rangle$ と 2 つのスピノンが励起された状態 $|\beta_1, \beta_2\rangle$ (β_1, β_2 はスピノンの rapidity) によるスピン作用素の期待値 $\langle\mathrm{vac}|\sigma^\alpha|\beta_1, \beta_2\rangle$ $(\alpha = x, y, z)$ であり, 構造因子とは, ダイナミカル スピン作用素 $\sigma^\alpha(t) = e^{iH_{XXZ}t}\sigma^\alpha e^{-iH_{XXZ}t}$ の相関関数のフーリエ変換

$$S^{\alpha\alpha}(k,\omega) = \frac{1}{4}\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-ikj}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\langle\mathrm{vac}|\sigma_j^\alpha(t)\sigma_0^\alpha(0)|\mathrm{vac}\rangle$$

である. 物理の世界では, 構造因子は中性子散乱実験などによって直接観測できる重要な量である.

本研究では, 楕円量子群の表現に基づく代数解析的方法に従って, 格子サイズが無限大の模型について, 2-スピノン形状因子とその構造因子への寄与 $S_2^{\alpha\alpha}(k,\omega)$ を計算した [1]. ここで, $k = p(\beta_1) + p(\beta_2)$, $\omega = e(\beta_1) + e(\beta_2)$ は, 2-スピノン状態の運動量とエネルギーである.

この模型は既に [2] で議論しており, 本研究においても基本的なアイディアは同じである. 即ち, まず楕円関数的な拡張である XYZ 模型を考えてその主相において形状因子を求め, これを不整合相の量にゲージ変換して, 最後に三角関数への極限をとって XXZ 零質量相の量を得るというものである. 問題のポイントは次の 4 点である.

1) XXZ 零質量相は R 行列で見ると $|q| = 1$ なるアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現を用いて定式化されそうに見えるが, その直接的な定式化は困難である [2]. そこで, まず XYZ 模型を考える.

2) 楕円関数の三角関数極限には母数 →0 と補母数 →0 の２通りあり, XYZ 模型の主相から母数 →0 で得られるのが XXZ 模型の反強磁性相で, これは generic な q (<-1) に対する $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ を用いて直接定式化することもできる．一方, XXZ 模型零質量相は補母数 →0 に対応する.

3) XYZ 模型では, 異なる相の間の量がゲージ変換でやりとりできる [2].

4) [2] では, XYZ 模型の形状因子の計算法が未だ無かったために, 補母数 →0 の極限をとってから模型をボソン化して考えたが, その結果, 形状因子の規格化や選択則を決める原理が欠落するなどの問題があった.

5) sine-Gordon 理論と零質量 XXZ 模型は, ともに XYZ 模型主相から補母数 →0 の極限で得られる．これらの区別を明確にする必要がある.

本研究では, Lashkevich-Pugai[3, 4] の方法によって 4) の問題を解決し, また, 5) の区別を与える処方箋を見出した．結果は, $\xi=\frac{\pi}{\cos^{-1}\Delta}-1$ を用いて,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{vac}|\sigma^z|\beta_1,\beta_2\rangle &= i\frac{(1+\xi^{-1})G(\beta_1-\beta_2)}{2\sin\left(\frac{\beta_1}{2i}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\beta_1}{2i}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta_1-\beta_2}{2i\xi}\right)},\\
G(\beta) &= \exp\left(-\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{\sinh[(\xi+1)t]\sinh^2\left[\left(1+\frac{\beta}{\pi i}\right)t\right]}{\sinh(\xi t)\sinh(2t)\cosh t}\right),\\
S_2^{zz}(k,\omega) &= \frac{\Theta(\omega_U(k)-\omega)\Theta(\omega-\omega_L(k))}{\sqrt{\omega_U^2(k)-\omega^2}}\frac{\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^2 e^{-I_\xi(\rho(k,\omega))}}{\cosh\left(\frac{2\pi\rho(k,\omega)}{\xi}\right)+\cos\frac{\pi}{\xi}}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\Theta(\omega)$ はステップ関数, $e^{-I_\xi(\rho(k,\omega))}=|G(\beta)|^2$, $\rho(k,\omega)=\frac{\beta_1-\beta_2}{2\pi}$, $\omega_U(k)=2v_F\sin\frac{k}{2}$, $\omega_L(k)=v_F|\sin k|$ である． 講演ではさらに, 2-スピノン構造因子 $S_2^{zz}(k,\omega)$ が和則に対して高い充足率をもつことや, 上下２つの閾値 ω_U,ω_L の近傍での $S_2^{zz}(k,\omega)$ の振る舞いについて議論する.

参考文献

[1] J-S.Caux, H.Konno, M.Sorrell, R.Weston, *Phys.Rev.Lett.*106, 217203 (2011) .

[2] M.Jimbo, H.Konno and T.Miwa, *Math.Phys.Studies* 20, 117 (1997).

[3] M.Lashkevich and Y.Pugai, *Nucl.Phys.* B516, 623 (1998), M.Lashkevich, *Nucl.Phys.* B621, 587 (2002) .

[4] S.Lukyanov and V.Terras, *Nucl.Phys.* B654, 323 (2003)

Ding-Iohara 代数の primary 場の因子化公式 I

栗田英資 (名大多元数理)　Boris Feigin(Landau Institute)　星野歩 (上智大理工)
金井政宏 (東大数理)　白石潤一 (東大数理)　柳田伸太郎 (神戸大理)

Ding-Iohara 代数 $\mathcal{U}$ の primary 場 $\Phi(w)$ を定義し, レベル 1 表現上の行列要素を求める.

1　Ding-Iohara 代数の primary 場

ここで扱う Ding-Iohara 代数 $\mathcal{U}$ は $\mathbb{F}:=\mathbb{Q}(q,t)$ 上の結合代数で Drinfeld カレントと中心元

$$x^{\pm}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}x_n^{\pm}z^{-n},\quad \psi^{\pm}(z)=\sum_{\pm n\in\mathbb{N}}\psi_n^{\pm}z^{-n},\quad \gamma^{\pm 1/2}\ \text{(central)}$$

で生成され, 関係式に函数 $g(z):=G^+(z)/G^-(z)$, $G^{\pm}(z):=(1-q^{\pm1}z)(1-t^{\mp1}z)(1-q^{\mp1}t^{\pm1}z)$ を含むものである [FHHSY]. $\mathcal{U}$ の表現は γ が $(t/q)^{k/2}$ で実現されるときレベル k 表現という.

$\mathbb{F}:=\mathbb{Q}(q,t)$ 上の Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}$ を生成元 a_n $(n\in\mathbb{Z})$, 関係式 $[a_m,a_n]=m\dfrac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0}\,a_0$ で定める. 真空ベクトル $|0\rangle$ は $a_n|0\rangle=0$ $(n\in\mathbb{Z}_{>0})$ を満たすものとし, 分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ に対し $|a_\lambda\rangle:=a_{-\lambda_1}a_{-\lambda_2}\cdots|0\rangle$ と表すことにする. Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上の頂点作用素を次のように定める.

$$\eta(z):=\exp\Big(\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}a_nz^{-n}\Big),$$
$$\xi(z):=\exp\Big(-\sum_{n>0}\frac{1-t^{-n}}{n}(q/t)^{-n/2}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(\sum_{n>0}\frac{1-t^n}{n}(q/t)^{-n/2}a_nz^{-n}\Big),$$
$$\varphi^{\pm}(z):=\exp\Big(\mp\sum_{n>0}\frac{1-t^{\pm n}}{n}(1-(q/t)^{-n})(q/t)^{n/4}a_{\pm n}z^{\mp n}\Big).$$

次の $\rho_u(\cdot)$ $(u\in\widetilde{\mathbb{F}}^{\times}$, $\widetilde{\mathbb{F}}:=\mathbb{Q}(q^{1/4},t^{1/4}))$ は Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上の $\mathcal{U}$ のレベル 1 表現を与える [FHHSY]:

$$\rho_u(\gamma^{\pm1/2})=p^{\mp1/4},\quad \rho_u(\psi^{\pm}(z))=\varphi^{\pm}(z),\quad \rho_u(x^+(z))=u\,\eta(z),\quad \rho_u(x^-(z))=u^{-1}\xi(z).\tag{1.1}$$

この表現 ρ_u による左 $\mathcal{U}$ 加群を $\mathcal{F}_u$ と書く.

Definition 1.1. $\mathcal{U}$ 上の準同型写像 $T(u,v)\in\mathrm{End}(\mathcal{U})$ を次で定める.

$$T(u,v)(x^+(z))=(1-u/z)x^+(z),\quad T(u,v)(x^-(z))=(1-\gamma v/z)x^-(z),$$
$$T(u,v)(\psi^{\pm}(z))=(1-\gamma^{\mp1/2}u/z)(1-\gamma^{1\pm1/2}v/z)\psi^{\pm}(z).\tag{1.2}$$

Definition 1.2. Fock 空間 $\mathcal{F}$ 上の頂点作用素 $\Phi(w)$ を次の条件で定める.

$$\Phi(w)=\Phi_u^v(w):\mathcal{F}_u\longrightarrow\mathcal{F}_v,\quad \Phi(w)|0\rangle=|0\rangle+O(w),$$
$$T(vw,q^{-1}tuw)(a)\Phi(w)=\Phi(w)T(q^{-1}tvw,uw)(a)\quad(\forall\,a\in\mathcal{U}).$$

このとき $\Phi(w)$ は (1.1),(1.2) より, Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}$ を用いて次のように記述される.

$$\Phi(w)=\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{v^n-(t/q)^nu^n}{1-q^n}a_{-n}w^n\Big)\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{v^{-n}-u^{-n}}{1-q^{-n}}a_nw^{-n}\Big).$$

2 Integral basis と行列要素

ここではレベル 1 表現 ρ_u を省略して記述する. 任意の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{l(\lambda)})$ に対し

$$|X_\lambda\rangle = x^+_{-\lambda_1}x^+_{-\lambda_2}\cdots x^+_{-\lambda_{\ell(\lambda)}}|0\rangle,\quad \langle X_\lambda| = \langle 0|\, x^+_{\lambda_{\ell(\lambda)}}\cdots x^+_{\lambda_2}x^+_{\lambda_1}$$

はそれぞれ Fock 空間 $\mathcal{F}$ とその双対空間 $\mathcal{F}^*$ の基底である. ここで $c_{\lambda\mu}(u)\in\mathbb{F}[u]$ に対し

$$|K_\lambda\rangle = \left|X_{(1^{|\lambda|})}\right\rangle + \sum_{\mu>(1^{|\lambda|})} c_{\lambda\mu}(u)\,|X_\mu\rangle\,,\quad x_0^+|K_\lambda\rangle = u\varepsilon_\lambda|K_\lambda\rangle,$$

$$\langle K_\lambda| = \left\langle X_{(1^{|\lambda|})}\right| + \sum_{\mu>(1^{|\lambda|})} c_{\lambda\mu}(u)\,\langle X_\mu|\,,\quad \langle K_\lambda|x_0^+ = u\varepsilon_\lambda\langle K_\lambda|\quad \left(\varepsilon_\lambda := 1+(t-1)\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}(q^{\lambda_i}-1)t^{-i}\right)$$

と定める. Fock 空間 $\mathcal{F}$ と対称多項式のなす環 $\Lambda_{\widetilde{\mathbb{F}}}$ は次数付きベクトル空間の同型写像

$$\iota:\mathcal{F}\xrightarrow{\sim}\Lambda_{\widetilde{\mathbb{F}}},\quad |a_\lambda\rangle\mapsto p_\lambda\quad (p_\lambda : \text{べき和対称多項式})$$

により同型である. この同型写像による Macdonald 対称多項式 P_λ の原像を $|P_\lambda\rangle$ と書く.

Proposition 2.1. Macdonald 対称多項式 P_λ の integral form を J_λ とすると, 次を得る.

$$|K_\lambda\rangle = (-u/t)^{|\lambda|}t^{-n(\lambda)}\,|J_\lambda\rangle\,,\quad \langle K_\lambda| = (-u)^{|\lambda|}t^{-n(\lambda)}\,\langle J_\lambda|\,,$$
$$\langle K_\lambda|K_\lambda\rangle = (-u^2)^{|\lambda|}q^{n(\lambda')}t^{-n(\lambda)}N_{\lambda,\lambda}(q/t).$$

ここに $N_{\lambda,\mu}(u)=\prod_{\square\in\lambda}(1-uq^{-a_\mu(\square)-1}t^{-\ell_\lambda(\square)})\cdot\prod_{\blacksquare\in\mu}(1-uq^{a_\lambda(\blacksquare)}t^{\ell_\mu(\blacksquare)+1})$ は 'Nekrasov の因子'.

また頂点作用素 $\Phi(w)$ の行列要素について次の定理を得る.

Theorem 2.2.

$$\langle J_\lambda|\,\Phi(w)\,|J_\mu\rangle = N_{\lambda,\mu}(qv/tu)w^{|\lambda|-|\mu|}(tu/q)^{|\lambda|}(-v/q)^{-|\mu|}t^{n(\lambda)}q^{n(\mu')},$$
$$\langle K_\lambda|\,\Phi(w)\,|K_\mu\rangle = N_{\lambda,\mu}(qv/tu)(-tuvw/q)^{|\lambda|}(tvw/q)^{-|\mu|}u^{|\mu|}t^{-n(\mu)}q^{n(\mu')}.$$

さらに頂点作用素 $\Phi(w)$ の合成

$$\Phi_v^w(z_1)\Phi_u^v(z_2):\mathcal{F}_u\longrightarrow\mathcal{F}_v\longrightarrow\mathcal{F}_w$$

を考えると Theorem 2.2 より次を得る.

$$\langle 0|\,\Phi_v^w(z_1)\Phi_u^v(z_2)\,|0\rangle = \sum_\lambda \frac{N_{\emptyset,\lambda}(qw/tv)N_{\lambda,\emptyset}(qv/tu)}{N_{\lambda,\lambda}(q/t)}(uz_2/wz_1)^{|\lambda|}.$$

この式の右辺は 5 次元 $N_f=2$ 超対称 U(1) ゲージ理論における Nekrasov の分配関数 Z^{inst} と等しい ([AY] およびその引用文献を参照).

参考文献

[AY] H. Awata and Y. Yamada, *Five-dimensional AGT Relation and the Deformed beta-ensemble*, Prog. Theor. Phys. **124** (2010), 227–262.

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi and S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215. 42 pp.

Ding-Iohara 代数の primary 場の因子化公式 II

Pieri 係数，Nekrasov 因子と梶原の Euler 変換

粟田英資 (名大多元数理)　Boris Feigin(Landau Institute)　星野歩 (上智大理工)
金井政宏 (東大数理)　白石潤一 (東大数理)　柳田伸太郎 (神戸大理)

1　準備

1.1　梶原の多重 q 超幾何関数

次の多重 q 超幾何関数に対する変換公式が因子化定理証明の鍵となる．

定義 1.1. 梶原の多重 q 超幾何関数

$$\phi^{l,m}\left(\begin{array}{c|c} a_1,\dots,a_l & b_1,\dots,b_m \\ x_1,\dots,x_l & c_1,\dots,c_m \end{array};u\right) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \sum_{\mu\in\mathbb{N}^l;|\mu|=n} \prod_{i<j} \frac{q^{\mu_i}x_i - q^{\mu_j}x_j}{x_i - x_j} \prod_{i,j} \frac{(a_j x_i/x_j;q)_{\mu_i}}{(q x_i/x_j;q)_{\mu_i}} \prod_{i,k} \frac{(b_k x_i;q)_{\mu_i}}{(c_k x_i;q)_{\mu_i}}.$$

ここに，q 階乗の記号 $(a;q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-aq^{i-1})$ を用いた．

命題 1.2. 梶原の Euler 変換．[K]

$$\phi^{l,m}\left(\begin{array}{c|c} a_1,\dots,a_l & b_1y_1,\dots,b_my_m \\ x_1,\dots,x_l & cy_1,\dots,cy_m \end{array};u\right) = \frac{(a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m u/c^m;q)_\infty}{(u;q)_\infty}\phi^{m,l}\left(\begin{array}{c|c} c/b_1,\dots,c/b_m & cx_1/a_1,\dots,cx_l/a_l \\ y_1,\dots,y_m & cx_1,\dots,cx_l \end{array};a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m u/c^m\right).$$

1.2　Pieri 公式

命題 1.3. Macdonald 対称函数 $P_\lambda(x;q,t)$, $Q_\lambda(x;q,t)$ および $g_r = Q_{(r)}$ に関する公式

$$P_\mu g_r = \sum_{\lambda\in\{\lambda/\mu\in H_r\}} \varphi_{\lambda/\mu}P_\lambda, \qquad Q_\mu g_r = \sum_{\lambda\in\{\lambda/\mu\in H_r\}} \psi_{\lambda/\mu}Q_\lambda.$$

ただし，H_r は horizontal r strip となる skew diagram 全体を表す．[M]

2　因子化定理

定義 2.1. Ding-Iohara 代数の primary 場

$$\Phi(w) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{v^n-(t/q)^n u^n}{1-q^n}a_{-n}w^n\Big)\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{v^{-n}-u^{-n}}{1-q^{-n}}a_n w^{-n}\Big).$$

定義 2.2. Nekrasov 因子

$$N_{\lambda,\mu}(u) = \prod_{(i,j)\in\lambda}(1 - uq^{-\mu_i+j-1}t^{-\lambda'_j+i}) \cdot \prod_{(k,l)\in\mu}(1 - uq^{\lambda_k-l}t^{\mu'_l-k+1}).$$

定義 2.3. Nekrasov 因子を少し修正して

$$F_{\lambda,\mu} = N_{\lambda,\mu}(qv/tu)w^{|\lambda|-|\mu|}(tu/q)^{|\lambda|}(-q/v)^{|\mu|}t^{n(\lambda)}q^{n(\mu')}/c'_\lambda c'_\mu,$$

と定める．ただし，$c'_\lambda = \prod_{(i,j)\in\lambda}(1 - q^{\lambda_i-j+1}t^{\lambda'_j-i})$.

定理 2.4. Macdonald 対称多項式 Q_λ に関する primary 場 $\Phi(w)$ の行列要素は

$$\langle Q_\lambda | \Phi(w) | Q_\mu\rangle = F_{\lambda,\mu},$$

と因子化される．（注：Q_λ と integral form J_λ との関係は $J_\lambda = c'_\lambda Q_\lambda$.）

3 証明の概要

命題 3.1. 与えられた二つの分割 λ と μ に対して，$x_i = t^i q^{-\lambda_i}$ および $z_i = t^i q^{-\mu_i}$ とする．任意の整数 $n \geq 0$ に対して次の二つの等式が成り立つ．

$$\sum_{\rho\in\{\rho/\mu\in H_n\}} \psi_{\rho/\mu}\frac{F_{\lambda,\rho}}{F_{\lambda,\mu}}$$
$$= (q/uw)^n \phi_n^{\ell(\mu)+1,\ell(\lambda)}\left(\begin{array}{c|c} t,\,\ldots,\,t,\,ut^{\ell(\lambda)}/vt^{\ell(\mu)} & ux_1/v,\,\ldots,\,ux_{\ell(\lambda)}/v \\ 1/z_1,\,\ldots,\,1/z_{\ell(\mu)},\,1/t^{\ell(\mu)+1} & tux_1/v,\,\ldots,\,tux_{\ell(\lambda)}/v \end{array}\right),$$

$$\sum_{\rho\in\{\lambda/\rho\in H_n\}} \varphi_{\lambda/\rho}\frac{F_{\rho,\mu}}{F_{\lambda,\mu}}$$
$$= (q/vw)^n \phi_n^{\ell(\lambda),\ell(\mu)+1}\left(\begin{array}{c|c} t,\,\ldots,\,t & u/vz_1,\,\ldots,\,u/vz_{\ell(\mu)},\,t^{-\ell(\lambda)} \\ x_1,\,\ldots,\,x_{\ell(\lambda)} & tu/vz_1,\,\ldots,\,tu/vz_{\ell(\mu)},\,u/vt^{\ell(\mu)} \end{array}\right).$$

梶原の Euler 変換と Pieri 公式により次の二つの命題が得られる．

命題 3.2.

$$\sum_{\rho\in\{\rho/\mu\in H_n\}} \psi_{\rho/\mu}F_{\lambda,\rho} = \sum_{r=0}^{n}\frac{(u/v)_{n-r}}{(q)_{n-r}}(q/uw)^{n-r}\sum_{\rho\in\{\lambda/\rho\in H_r\}}\varphi_{\lambda/\rho}F_{\rho,\mu}.$$

命題 3.3.

$$\sum_{\rho\in\{\rho/\mu\in H_r\}} \psi_{\rho/\mu}\langle Q_\lambda|\Phi(w)|Q_\rho\rangle = \sum_{r=0}^{n}\frac{(u/v)_{n-r}}{(q)_{n-r}}(q/uw)^{n-r}\sum_{\rho\in\{\lambda/\rho\in H_r\}}\varphi_{\lambda/\rho}\langle Q_\rho|\Phi(w)|Q_\mu\rangle.$$

これらを用いて帰納法によって因子化定理が証明される．

参考文献

[K] Y. Kajihara, *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications*, Adv. Math. **187** (2004), no. 1, 53–97.

[M] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press (1995).

Ding-Iohara代数のprimary場の因子化公式 III

レベル1表現とHilbert概型の同変K理論

粟田　英資　(名大多元数理)*1
Boris Feigin　(Landau Institute)*2
星野　歩　(上智大理工)*3
金井　政宏　(東大数理)*4
白石　潤一　(東大数理)*5
柳田　伸太郎　(神戸大理)*6

概　要

[2, §2.5] ではDing-Iohara代数$\mathcal{U}$のレベル1表現に頂点作用素 $\Phi(w)$ を導入し，そのMacdonald基底に関する行列要素の明示式を得た．本講演ではHilbert概型の同変K理論を用いた明示式の導出を紹介する．

1. Hilbert概型の同変K理論とFock表現

$\mathcal{U}$のレベル1表現$\mathcal{F}_u$はHeisenberg代数$\mathcal{H}$のFock表現上に実現されている．[3], [5]により，平面上の点のHilbert概型 Hilb_n の同変K理論を用いることで，$\mathcal{H}$のFock表現ならびに$\mathcal{U}$のレベル1表現が実現できる．この幾何学的な代数の実現を簡単に紹介したい(コホモロジー版については[4]を参照).

Hilb_nの点は2変数多項式環の余次元nのイデアル$\mathcal{I}$と思える．$\mathbb{C}^2$への$T:=(\mathbb{C}^*)^2$の自然な作用から，Hilb_nにはTの作用が定まる．その固定点は分割でパラメトライズできる．分割 λ に対応する固定点を$\mathcal{I}_\lambda$と書こう．

$R:=\mathrm{Rep}(T)=\mathbb{C}[q^{\pm1},t^{\pm1}]$ をTの表現環とする．但し $q,t:T\to\mathbb{C}^*$ は $(t_1,t_2)\mapsto t_1^{-1},t_2$．$K^T(\mathrm{Hilb}_n)$ を Hilb_n 上のT同変連接層のなす圏のK群とし，$K^T(X)_{\mathbb{F}}:=K^T(X)\otimes_R\mathbb{F}$とする．但し$\mathbb{F}:=\mathbb{Q}(q^{1/2},t^{1/2})$．$L_{\mathbb{F}}:=\bigoplus_n K^T(\mathrm{Hilb}_n)_{\mathbb{F}}$ がFock空間にあたる．局所化定理により固定点のクラス$\{\,[\mathcal{I}_\lambda]\mid\lambda:\text{分割}\,\}$が$L_{\mathbb{F}}$の基底を与える．

次に代数を実現する為にK群上のconvolutionを考える:

$$\begin{array}{rccc}\star: & K^T(\mathrm{Hilb}_l\times\mathrm{Hilb}_m)_{\mathbb{F}}\otimes K^T(\mathrm{Hilb}_m\times\mathrm{Hilb}_n)_{\mathbb{F}} & \longrightarrow & K^T(\mathrm{Hilb}_l\times\mathrm{Hilb}_n)_{\mathbb{F}}\\ & (x,y) & \mapsto & p_{13*}(p_{12}^*(x)\otimes p_{23}^*(y)).\end{array}$$

*1 〒464-8602 愛知県名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: awata@math.nagoya-u.ac.jp
*2 Russia, Chernogolovka, 142432, prosp. Akademika Semenova, 1a, Landau Institute.
e-mail: bfeigin@gmail.com
*3 〒102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1 上智大学 理工学研究科
e-mail: ayumu-h@sophia.ac.jp
*4 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: kanai@ms.u-tokyo.ac.jp
*5 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: shiraish@ms.u-tokyo.ac.jp
*6 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲大町 1-1 神戸大学 理学研究科
e-mail: yanagida@math.kobe-u.ac.jp

ここで p_{ij} は $\mathrm{Hilb}_l \times \mathrm{Hilb}_m \times \mathrm{Hilb}_n$ から i, j 番目の成分への射影. $p_{ij*}, p_{ij}^*, \otimes$ は K 群での押し出し, 引き戻し, テンソル積. そこで $E_{\mathbb{F}} := \bigoplus_k \prod_n K^T(\mathrm{Hilb}_{n+k} \times \mathrm{Hilb}_n)_{\mathbb{F}}$ とすれば $(E_{\mathbb{F}}, \star)$ は $\mathbb{F}$ 代数であり, $E_{\mathbb{F}}$ は $\star$ でもって $L_{\mathbb{F}}$ に作用する.

$E_{\mathbb{F}}$ の部分代数として以下のものを考える. $Z_{n,n+1} := \{(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathrm{Hilb}_n \times \mathrm{Hilb}_{n+1} \mid \mathcal{I} \supset \mathcal{J}\}$ を考える. ($Z_{n+1,n}$ も同様に定義する.) π_1, π_2 を $\mathrm{Hilb}_n \times \mathrm{Hilb}_{n+1}$ から Hilb_n 及び Hilb_{n+1} への射影とする. また, τ_n を Hilb_n の tautlogical bundle とする. $Z_{n,n+1}$ 上の全射 $\phi : \pi_2^*(\tau_{n+1}) \to \pi_1^*(\tau_n)$ を用いて $\tau_{n,n+1} := \ker(\phi)$ と定め, $\tau_{n+1,n}$ も同様に定める. 最後に $\mathrm{Hilb}_n \times \mathrm{Hilb}_n$ から Hilb_n への射影 (どちらの成分でもよい) を ϖ とし, $\tau_{n,n} := \varpi^*(\tau_n)$ と定める. そして $e_k := \prod_n [\tau_{n,n+1}]^k$, $f_k := \prod_n [\tau_{n+1,n}]^k$, $h_l := \prod_n [\bigwedge_{-1}^l \tau_{n,n}]$, $h_{-l} := \prod_n [\bigwedge_{-1}^l \tau_{n,n}^*]$ $(k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N})$ の生成する $E_{\mathbb{F}}$ の部分代数を $\mathcal{U}_{\mathrm{Hilb}}$ と書く. ここで $\bigwedge_{-1}$ は外積の交代和である,

$\widetilde{H}_\lambda(q,t) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ を cocharge Macdonald 対称函数とする. $\Omega : [\mathcal{I}_\lambda] \mapsto \widetilde{H}_\lambda(q,t)$ でもって $L_{\mathbb{F}}$ と $\Lambda_{\mathbb{F}}$ を同一視すると, $\mathcal{U}_{\mathrm{Hilb}}$ の作用が分かり, 全射 $\mathcal{U} \twoheadrightarrow \mathcal{U}_{\mathrm{Hilb}}$ の存在及びそれが Fock 表現と intertwine することが分かる.

2. $\Phi(w)$ の幾何学的実現と行列要素

頂点作用素 $\Phi(w)$ は [1] で導入された virtual bundle に対応する ([5, §5] も参照).

$\mathbb{C}^2$ 上の直線束 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ に対し $\mathrm{Hilb}_m \times \mathrm{Hilb}_n$ 上の virtual bundle $\mathcal{V}_{m,n}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ を, $(\mathcal{I}, \mathcal{J}) \in \mathrm{Hilb}_m \times \mathrm{Hilb}_n$ 上でのファイバーが次で与えられるものとする:

$$\mathcal{V}_{m,n}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_{\mathcal{I},\mathcal{J}} = \chi(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) - \chi(\mathcal{I} \otimes \mathcal{L}_1, \mathcal{J} \otimes \mathcal{L}_2).$$

ここで $\chi(F,G) := \sum_{i=0}^2 (-1)^i \operatorname{Ext}^i(F,G)$.

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ のファイバー方向の $\mathbb{C}^*$ 作用を考え, ウェイトを u, v とする. すると $\mathcal{V}_{m,n}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ は $\mathbb{T} := T \times \mathbb{C}^*$ の作用で同変束とみなせる. そこで $V_{m,n}(u,v) := [\mathcal{V}_{m,n}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)] \in K^{\mathbb{T}}(\mathrm{Hilb}_m \times \mathrm{Hilb}_n)$ とし, $V_{\pm k}(u,v) := \prod_n V_{n \pm k, n}(u,v)$ とおく. 最後に $V^{\pm}(u,v;z) := 1 + \sum_{k=1}^\infty z^{\mp k} \bigwedge_{-1}(V_{\mp k}(u,v))$ とすれば, 同一視 Ω でもって $V^-(u, qt^{-1}v; z) V^+(u,v;z)$ と $\Phi(w)$ が同一視できる. ここで V^- の中の qt^{-1} は

行列要素の計算は, 頂点作用素が幾何学的に実現されたので, 固定点定理から容易に従う.

参考文献

[1] E. Carlsson, A. Okounkov, *Exts and Vertex Operators*, arXiv:0801.2565v2.

[2] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, S. Yanagida, *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture* arXiv:1106.4088.

[3] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, arXiv:0904.1679.

[4] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, **18**. AMS, 1999.

[5] O. Schiffmann, E. Vasserot, *The elliptic Hall algebra and the equivariant K-theory of the Hilbert scheme of* $\mathbb{A}^2$, arXiv:0905.2555.

16

The Lie algebra of linear chord diagrams

河澄響矢 (東大数理)
久野雄介 (広島大理)

線型コード図式 (linear chord diagram, lcd と略する) 全体の張る線型空間に Lie 代数の構造が入ることが分かったので報告する。Goldman Lie 代数の中心の計算 [KK] の副産物として見つかった[1]のであるが、この Lie 代数自体には、どんな応用があるのか不明である。

種数 $g(\geq 1)$ の有向閉曲面を Σ_g と表す。第一 homology 群 $H := H_1(\Sigma_g;\mathbb{Q})$ には交叉形式が定義されている。それは、standard basis $\{A_i, B_i\}_{i=1}^g \subset H$ について $A_i \cdot B_j = -B_j \cdot A_i = \delta_{ij}$, $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$, $1 \leq i, j \leq g$, という値をとる。symplectic 形式 $\omega := \sum_{i=1}^g A_i \otimes B_i - B_i \otimes A_i \in H^{\otimes 2}$ は standard basis のとり方によらずに決まる。H とその双対 $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{Q})$ は交叉形式によって $H \cong H^*$, $X \mapsto (Y \mapsto Y \cdot X)$, のように同一視される。$T := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$ を H の生成する tensor 代数 (非可換多項式環) とする。$p \geq 1$ について $T_p := \bigoplus_{n \geq p} H^{\otimes n}$ は T の両側 ideal をなす。代数 T の導分全体のなす Lie 代数 $\mathrm{Der}(T)$ は、H への制限写像と交叉形式を使って、線型空間として次のように同一視される

$$\mathrm{Der}(T) \cong H^* \otimes T \cong H \otimes T = T_1.$$

他方、T には symplectic 群 $Sp := Sp_{2g}(\mathbb{Q})$ が作用している。 Weyl の古典的結果 [W] によって T の Sp 不変部分は ω の代数的結合で表されるが、これは lcd によって記述される。$m \geq 1$ について m 本 の lcd とは、集合 $\{1, 2, \ldots, 2m\}$ の位数 2 の部分集合の disjoint 和への分割のことであった。つまり条件 $\{i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m\} = \{1, 2, \ldots, 2m\}$ をみたす集合 $C = \{\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_m, j_m\}\}$ のことである。ここで $i_\alpha < j_\alpha$, $1 \leq \forall\alpha \leq m$, となるようにとっておく。この C に Sp-不変 tensor

$$a(C) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_m & j_m \end{pmatrix} \omega^{\otimes m} \in (H^{\otimes 2m})^{Sp}$$

を対応させる。$\mathcal{LC}_m$ を m 本 の lcd 全体の張る $\mathbb{Q}$-vector 空間とする。このとき Weyl により、写像 $a : \mathcal{LC}_m \to (H^{\otimes 2m})^{Sp}$, $C \mapsto a(C)$, は $m \leq g$ のとき同型であり $(H^{\otimes 2m+1})^{Sp} = 0$ である。つまり、写像

$$a : \mathcal{LC} := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{LC}_m \to \mathrm{Der}(T)^{Sp}$$

は「安定同型」であることが分かる。この安定同型を使って Lie 代数 $\mathrm{Der}(T)^{Sp}$ の bracket を空間 $\mathcal{LC}$ に遺伝させると、$\mathcal{LC}$ 上の bracket は、

[1] [KK] について R.Penner 氏 (Caltech/Aarhus 大学) と３人で議論している際に見つかった。

C および D を m および n 本の lcd とするとき

$$[C, D] = -\sum_{j=2}^{2n} C *_j D + \sum_{i=2}^{2m} D *_i C$$

と書ける。ここで $C *_j D$, $2 \le j \le 2n$, は次のように定義される $m+n-1$ 本の lcd である:

(1) C における 1 の相手を $\bar{1}$、D における j の相手を $\bar{j}$ とする。
(2) D から j を取り除き、その隙間に C から 1 を取り除いたものを挿入する。
(3) C の $\bar{1}$ と D の $\bar{j}$ とを chord で結ぶ.

$D *_i C$, $2 \le i \le 2m$, も同様に定義される。

トポロジストとして最初に気になるのは Lie 代数 $\mathcal{LC}$ の homology である。$E_0 := -\frac{1}{2}\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{LC}_1$ とおく。$\mathcal{LC}_m$ が、ちょうど $\mathrm{ad}(E_0)$ の固有値 $m-1$ の固有空間に一致する。任意の lcd C について $(-2E_0) *_i C = C *_2 (-2E_0) = C$ となるからである。この固有分解を使うと $\mathcal{LC}$ の homology が円周 S^1 の homology に同型であること $H_*(\mathcal{LC}) = H_*(S^1; \mathbb{Q})$ および $\mathcal{LC}$ の中心が自明であること $Z(\mathcal{LC}) = 0$ が分かる。

さらに、Lie 代数 $\mathcal{LC}$ は一変数の多項式 vector 場の Lie 代数 $L_0 := x\mathbb{Q}[x]\frac{d}{dx}$ への全射準同型

$$\kappa : \mathcal{LC} \to L_0, \quad (m \text{ 本の lcd}) \mapsto -2x^m \frac{d}{dx},$$

をもつ。$\kappa(E_0) = x\frac{d}{dx}$ は Euler 作用素に他ならない。Gel'fand-Fuks cohomology で重要な役割を果たす $L_1 := x^2\mathbb{Q}[x]\frac{d}{dx}$ の類似として、Lie 部分代数 $\mathcal{LC}^1 := \bigoplus_{m=2}^{\infty} \mathcal{LC}_m$ が考えられる。その homology 群 $H_*(\mathcal{LC}^1)$ は E_0 の作用で固有分解する。固有値 k の固有空間を $H_*(\mathcal{LC}^1)_{(k)}$ と書くことにする。これは現状ではほとんど何も分かっていない。ただし、すべての $k \ge 1$ について $H_1(\mathcal{LC}^1)_{(k)} \ne 0$ であって、その次元は $k \to \infty$ で無限大に発散する。また、Euler 標数の母函数 $\sum_{k=1}^{\infty} \chi(H_*(\mathcal{LC}^1)_{(k)}) x^k$ は低い次数のところでは次のようになっている

$$-3x - 12x^2 - 61x^3 - 570x^4 - 6600x^5 - 91910x^6 - 1460655x^7 - 26064990x^8 - \cdots .$$

Lie 代数 L_1 の homology [G] とはかなり様相が異なっている。

参考文献.

[G] L.V. Goncharova, "Cohomology of Lie algebra of formal vector fields on the line," Functional Anal. Appl., **7** (2) (1973) 6–14.

[KK] N. Kawazumi and Y. Kuno, "The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus," preprint, arXiv: 1009.4985.

[W] H. Weyl, 'The classical groups,' Princeton University Press, 2nd. ed. Princeton (1953).

The Lie algebra of rooted planar trees

石田智彦 (東京大学大学院数理科学研究科・日本学術振興会特別研究員 DC2)
河澄響矢 (東京大学大学院数理科学研究科)

久野-河澄 [KK] では線型コード図式全体の張る線型空間 $\mathcal{LC}$ には Lie 代数の構造が入り、多項式ベクトル場の Lie 代数 $L_0 := x\mathbb{Q}[x]\dfrac{d}{dx}$ への非自明な準同型 $\kappa : \mathcal{LC} \to L_0$ をもつことを示した。このことは対称群の作用を仮定しない operad つまり nonsymmetric operad について普遍的になりたつ現象である。つまり、線型コード図式とベクトル場は nonsymmetric operad によって結び付けられているのである。本講演では nonsymmetric operad の典型例である rooted planar tree および rooted binary planar tree の nonsymmetric operad について随伴する Lie 代数の有限生成性および多項式ベクトル場の Lie 代数への準同型の分裂の如何を報告する。

さて $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}(m)\}_{m\geq 0}$ を集合の圏における nonsymmetric operad とする。これは単位元 $1 \in \mathcal{C}(1)$ と、$c \in \mathcal{C}(m)$, $d \in \mathcal{C}(n)$ および $1 \leq s \leq m$ についての結合 $c \circ_s d \in \mathcal{C}(m+n-1)$ をもち、結合則と単位元の公理を充たす。$m \geq 0$ について $(\mathbb{Q}\mathcal{C})(m) := \mathbb{Q}(\mathcal{C}(m))$ つまり集合 $\mathcal{C}(m)$ の生成する $\mathbb{Q}$-自由線型空間とする。このとき $\mathbb{Q}\mathcal{C} := \{(\mathbb{Q}\mathcal{C})(m)\}_{m\geq 0}$ は、$\mathbb{Q}$-ベクトル空間の圏における nonsymmetric operad となる。Kapranov-Manin [KP] が指摘しているように、一般に $\mathbb{Q}$-ベクトル空間の圏における nonsymmetric operad $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(m)\}_{m\geq 0}$ と $k \geq -1$ について $\Lambda_k(\mathcal{P}) = \bigoplus_{m=k+1}^{\infty} \mathcal{P}(m)$ とおき、$c \in \mathcal{P}(m)$ および $d \in \mathcal{P}(n)$ について括弧積 $[c, d] \in \mathcal{P}(m+n-1)$ を $[c, d] := \sum_{t=1}^{n} d \circ_t c - \sum_{s=1}^{m} c \circ_s d$ と定めると、$\Lambda_k(\mathcal{P})$ は Lie 代数となる。とくに $\mathcal{P}$ として $\mathbb{Q}$ の自己準同型 operad $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ をとる。これはすべての $m \geq 0$ について $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(m) = \mathbb{Q}$ であって結合は $\mathbb{Q}$ の積 $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ で与えられる operad である。このとき $\Lambda_k(\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}) = L_k = x^{k+1}\mathbb{Q}[x]\dfrac{d}{dx}$ となる。集合の nonsymmetric operad $\mathcal{C}$ について添加写像 $\varepsilon : \mathbb{Q}\mathcal{C}(m) \to \mathbb{Q} = \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(m)$, $\sum_{x\in\mathcal{C}(m)} a_x x \mapsto \sum_{x\in\mathcal{C}(m)} a_x$, $m \geq 0$, は nonsymmetric operad の準同型 $\varepsilon : \mathbb{Q}\mathcal{C} \to \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ を定める。したがって Lie 代数準同型 $\varepsilon : \Lambda_k(\mathbb{Q}\mathcal{C}) \to L_k$ が得られる。これを添加準同型と呼ぶことにする。線型コード図式については $m \geq 1$ について $\overline{\mathsf{lcd}}(2m-1)$ を m 本コードの線型コード図式全体の集合とし、$\overline{\mathsf{lcd}}(2m)$ を空集合とし、[KK] におけるコード図式の融合 $C *_j D$ を用いて結合を定義して集合の圏における operad $\overline{\mathsf{lcd}}$ が定義できる。$\Lambda_0(\mathbb{Q}\overline{\mathsf{lcd}})$ こそが $\mathcal{LC}$ に他ならない。(括弧積の符号は逆になっている。) また添加準同型を少し手直しすることで準同型 κ が得られる。

$\underline{\mathsf{Tree}}$ を rooted planar tree の nonsymmetric operad とする。つまり $m \geq 1$ について一つの root と m 個の leaf をもつ平面 tree の全体を $\underline{\mathsf{Tree}}(m)$ とし、$c \in \underline{\mathsf{Tree}}(m)$ と $d \in \underline{\mathsf{Tree}}(n)$ および $1 \leq s \leq m$ について $c \circ_s d$ を d

1

の root を c の左から s 番目の leaf に結合することで得られる rooted planar tree と定義する。また、すべての内部頂点の valency が ≤ 3 である rooted planar tree 全体のなす nonsymmetric suboperad を $\underline{\mathsf{Tree}}_2$ と表わす。

定理 1. (1) $\Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Tree}})$, $\Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Tree}}_2)$, $k=0,1$, はすべて有限生成ではない。
(2) 添加準同型 $\varepsilon : \Lambda_0(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Tree}}) \to L_0$ は単位元を保つ splitting を持たない。

(1) は $\underline{\mathsf{Tree}}$ についてはほとんど自明である。$\underline{\mathsf{Tree}}_2$ については Catalan 数に関する考察から分かる。

(2) を証明するために以下のように分割の nonsymmetric operad $\underline{\mathsf{Par}}$ を定義する。$m \geq 2$ について $\underline{\mathsf{Par}}(m)$ を、集合 $\{1,2,\ldots,m\}$ の順序を保つ非自明な分割

$$\{1,2,\ldots,m\} = \coprod_{i=1}^{N} \{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + 1, \sum_{j=1}^{i-1} a_j + 2, \ldots, \sum_{j=1}^{i-1} a_j + a_i\},$$

ただし $N \geq 2$, $\sum_{i=1}^{N} a_i = m$, の全体の集合とする。$p \in \underline{\mathsf{Par}}(m)$, $q \in \underline{\mathsf{Par}}(n)$ および $1 \leq s \leq m$ について $p \circ_s q$ を p において s 番の属する集合が $n-1$ 個増えたものとして定義する。また $\underline{\mathsf{Par}}(1)$ を形式的な記号 1 からなる一点集合 $\{1\}$ として定義し、$p \circ_s 1 := p$ および $1 \circ_1 q := q$ と定める。このとき、$\underline{\mathsf{Par}}$ は nonsymmetric operad となる。いま、$c \in \underline{\mathsf{Tree}}(m)$ について root に最も近い頂点に着目し、そこでの枝分かれの定める集合 $\{1,2,\ldots,m\}$ の順序を保つ非自明な分割を $\nu(c) \in \underline{\mathsf{Par}}(m)$ と定義すると、nonsymmetric operad の準同型 $\nu : \underline{\mathsf{Tree}} \to \underline{\mathsf{Par}}$ が得られる。したがって $\underline{\mathsf{Tree}}$ の添加準同型は分解 $\varepsilon \circ \nu : \Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Tree}}) \to \Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Par}}) \to L_k$ をもつ。定理 1 の (2) は次の定理の (2) から得られる。

定理 2. (1) $\Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Par}})$, $k=0,1$, は有限生成ではない。一方、$\Lambda_k(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Par}}_2)$, $k=0,1$, は有限生成である。
(2) 添加準同型 $\varepsilon : \Lambda_0(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Par}}) \to L_0$ は単位元を保つ splitting を持たない。

(2) は Lie 代数 L_1 が $x^2\frac{d}{dx}$ と $x^3\frac{d}{dx}$ から生成されることから証明する。(1) は $\underline{\mathsf{Par}}$ についてはほとんど自明である。$\underline{\mathsf{Par}}_2$ については、実際に $\Lambda_1(\mathbb{Q}\underline{\mathsf{Par}}_2)$ が 1, $\{1\}\coprod\{2\}$, $\{1,2\}\coprod\{3\}$, $\{1\}\coprod\{2,3\}$ および $\{1,2,3\}\coprod\{4\} + \{1\}\coprod\{2,3,4\}$ の 5 つの元から生成されることを直接計算で証明する。

参考文献

[IK] T. Ishida and N. Kawazumi, "The Lie algebra of rooted planar trees," preprint, arXiv: 1105.4713.

[KM] M. Kapranov and Yu. Manin, "Modules and Morita theorem for operads," Amer. J. Math., **123**(2001) 811-838.

[KK] N. Kawazumi and Y. Kuno, "The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus," preprint, arXiv: 1009.4985v2.

団代数とその応用

中西　知樹　(名古屋大学)*

1. はじめに — Cluster algebras, what and why?

団代数(cluster algebra)は2000年ごろにFomin-Zelevinsky [FZ02, FZ03a, FZ03b, BFZ05, FZ07]により導入された可換環のあるクラスであり, 団(cluster)という環のある特別な生成元の組と、変異(mutation)という団から新しい団を産み出す操作を持つところにその特質がある. ある団に属する変数を団変数(cluster variable)というが, 変異で移り合う二つの団に属する団変数の間に交換関係式(exchange relation)と呼ばれる多項式関係式が得られる. この関係式がいろいろな既知の環やさまざまな対象の間の関係式として現れるのである.

たとえば、簡単な交換関係式の例として

$$x_1x_2 = x_3x_4 + x_5x_6 \tag{1.1}$$

という形の関係式をあげよう. これは, 可積分系においては大変なじみ深い関係式であり, Grassmann多様体のPlücker座標の関係式, Schur関数あるいは一般線形Lie代数の指標の関係式, Hirota-Miwa方程式, 離散Toda方程式, T-system, などに現れるが, さらには曲面のTeichmüller空間の座標のPtolemy関係式, 行列における全正値性(total positivity), ３次元空間における完全被覆(perfect matching)など, さまざまな分野のさまざまな文脈において現れることが知られている. 団代数においては, このような関係式の族が単に系統的に得られるだけではなく, 団代数の定式化によって後に述べるLaurent現象を始めとする一連の強力かつ一般的な結果が合わせて得られるのである. これが団代数が有用な応用を持つことの最大の要因であろう.

一方, 団代数においては変異を定める交換行列(exchange matrix)というものがある. これは変異を生物学的にたとえた場合におけるいわば「DNA」に相当するものであるが, この交換行列が特に(有限)ADE型のDynkin 箙(quiver) の場合, 団変数をそのDynkin図に対するルート系のルートと対応させることができる[FZ03a]. このことと多元環の表現論における Auslander-Reiten 理論との類似性とその重要性をいち早く認識した多元環論の研究者たちは, この類似性を追求して多元環の表現の導来圏の軌道圏である団圏(cluster category)により団代数の圏化が与えられること示した[BMR$^+$06]. さらに, Kellerたちは, 団傾加群の変異[IY08], ポテンシャル付箙[DWZ08, DWZ10], Ginzburgの微分次数付き代数 [Gin06] などを用いて, より一般の団代数に対する三角圏による圏化(2-Calabi-Yau実現)へと一般化した([Kel10a, Ami09, Pla10b]). 加えて, これと並行した結果がDonaldson-Thomas不変量の変換の立場からも得ることができるも明らかにされた[KS08, Nag10]. 団代数の基礎づけに関しては, まだまだ未整備な点も多く残されているものの, これらをもって初期段階における一応の到達点に達したということができるであろう.

ところで, 生物学的な変異においては「DNA」自身もまたすこしづつ変化していくように, 団代数における「DNA」である交換行列自身も変異に際してすこしづつ変化していくのである. このこととDynkin図との関連を考えるとき, 団代数の理論が従来のルー

* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町　名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: nakanisi@math.natoya-u.ac.jp

ト系の理論の「ある部分の」広汎な一般化になっているという見方もできるのである. 現時点においてはこのような観点はまだ必ずしも明確に定式化されているわけではなく, 今後の大きなテーマとなることは間違いないが, このことが団代数がなぜさまざまの分野に遍在する共通構造になり得るのかという疑問に対する一つの納得と示唆を与えるであろう.

以上述べたように, 団代数はその導入から10年間余の間に多くの分野と関連しながら急速に研究が進められている. Fomin による団代数に特有なキーワードを用いた論文検索によると2011年6月の時点での arXiv における関連論文の総数はすでに360編余を数え, これを受けて, MSC (Mathematics Subject Classification) の 2010 年改訂において cluster algebra (13F60) という項目が加えられた.

さて、講演者とその共同研究者 (Inoue, Iyama, Kashaev, Keller, Kuniba, Suzuki, Tateo, Zelevinsky) は、この3年間に,団代数の周期性と付随する dilogarithm 恒等式に関する一連の研究行い, 数々の結果を得た [IIK+10c, KNS09, Nak11, IIK+10a, IIK+10b, Nak10b, NT10, Nak10a, IN10, NZ11, KN11]. 特に, その応用として80年代および90年代における可積分系, 特に Bethe 仮説の研究に起源を持ち長らく未解決問題であった Y-system の周期性予想や共形場理論の中心荷電に対する dilogarithm 恒等式予想の証明を与えた. 本講演ではこららの結果を中心にして、団代数および団代数と可積分系の関連や応用の一端を紹介をしたい.

なお, 本稿と講演者による日本語の解説 [Nak10d, Nak10c] あるいは原著論文との間に内容の一部重複があることをお断りしておく.

2. 団代数

この章では Fomin-Zelevinsky [FZ02, FZ03a, FZ07] により導入された係数付き団代数の定義を与える.

2.1. 行列と箙の変異

以下では, 自然数 n を固定し $I = \{1, \dots, n\}$ を添字集合とする. $B = (b_{ij})_{i,j\in I}$ を反対称 (整数) 行列とする. このとき, 行列 B の $k \in I$ における変異 (mutation) $\mu_k(B) = B' = (b'_{ij})_{i,j\in I}$ を次で定める.

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ または } j = k \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[b_{kj}]_+ & \text{その他の場合.} \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし, 整数 x に対して, $x \geq 0$ のとき $[x]_+ = x$, $x < 0$ のとき $[x]_+ = 0$ とする. このとき, B' はふたたび反対称であり, また μ_k は対合的, すなわち $\mu_k^2 = \mathrm{id}$ がなりたつ.

反対称行列 B に対して, 頂点集合を I として, $b_{ij} > 0$ のとき, 頂点 i から頂点 j へ b_{ij} 本の矢を持つ箙 Q を対応させる. この箙 Q はループと2サイクルを持たず, また, これにより反対称行列とループと2サイクルを持たない箙の間の1対1対応が与えられる. 以下ではこの対応により反対称行列 B と箙 Q を同一視する.

Remark 2.1 Fomin-Zelevinsky はより一般に反対称化可能行列 B に対して, 団代数を定義しているが, 簡単のため本稿では B が反対称行列の場合に限って論じる.

2.2. 団代数

Definition 2.2 $\mathbb{P}$ が半体 (semifield) であるとは, $\mathbb{P}$ が乗法的 abel 群であり, 可換で結合的な演算 $\oplus$ (加法) を持ち, 分配則 $(a \oplus b)c = ac \oplus bc$ をみたすことである.

Example 2.3 以下の 3 つの半体が重要である.

(a) 普遍半体 (universal semifield) $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$.

変数の組 $y = (y_i)_{i \in I}$ に対して, y の引き算を伴わない (subtraction-free) 有理式表示を持つ有理式全体のなす半体.

(b) tropical 半体 (tropical semifield) $\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$.

変数の組 $y = (y_i)_{i \in I}$ に対して, y の生成する乗法的自由アーベル群 (すなわち y の係数 1 の Laurent 単項式全体のなす群) に以下の加法 $\oplus$ を入れたもの.

$$\prod_{i \in I} y_i^{a_i} \oplus \prod_{i \in I} y_i^{b_i} := \prod_{i \in I} y_i^{\min(a_i, b_i)}. \tag{2.2}$$

(c) 自明半体 (trivial semifiled) $\mathbf{1} = \{1\}$.

$1 \times 1 = 1 \oplus 1 = 1$ と定める.

いま, 反対称行列 $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ と形式的変数の組 $x = (x_i)_{i \in I}$ および形式的変数の組 $y = (y_i)_{i \in I}$ の 3 つ組 (B, x, y) を考え、これを初期種子 (initial seed) と呼ぶ. 初期種子 (B, x, y) の $k \in I$ における変異 $\mu_k(B, x, y) = (B', x', y')$ を次で定める. まず, $B' = \mu_k(B)$ は (2.1) で定めたとおりとする. つぎに, $y' = (y'_i)_{i \in I}$ $(y'_i \in \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y))$ を以下のとおり定める.

$$y'_i = \begin{cases} y_i^{-1} & i = k \\ y_i y_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+} (1 \oplus y_k^{\varepsilon})^{-b_{ki}} & i \neq k. \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで, $\varepsilon = +, -$ は符号で, どちらに対しても (2.1) は同じ値になる. (以降の同様の式においてこの注意は繰り返さない.) 最後に, $\tilde{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ を $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ の群環, $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ をその商体として, $x' = (x'_i)_{i \in I}$ $(x'_i \in \tilde{\mathbb{Q}}(x))$ を以下のとおり定める.

$$x'_i = \begin{cases} x_i & i \neq k \\ \dfrac{1}{x_i} \left(\dfrac{y_k}{y_k \oplus 1} \displaystyle\prod_{j \in I} x_j^{[b_{jk}]_+} + \dfrac{1}{y_k \oplus 1} \prod_{j \in I} x_j^{[-b_{jk}]_+} \right) & i = k. \end{cases} \tag{2.4}$$

これらを y と x の交換関係式 (exchange relation) という. このとき, $\mu_k^2 = \mathrm{id}$ がなりたつ.

このように得られた新たな「種子」(B', x', y') に対しても同様の規則で変異を次々と繰り返し, 得られたすべての種子 (B', x', y') を集めよう. 各種子 (B', x', y') に対して, B' を交換行列 (exchange matrix), x' を団 (cluster), x'_i $(i \in I)$ を団変数 (cluster variable), y' を係数の組 (coefficient tuple), y'_i $(i \in I)$ を係数 (coefficient) という. あるいは、より気楽に x'_i を x 変数, y'_i を y 変数ということも多い.

Remark 2.4 (a). y 変数の変異が (2.3) のように二通りの表式を持つことの重要性が認識されたのは量子団代数の研究を通してであり, ごく最近のことである [Nag10, Kel11, KN11].

(b) 若干余談になるが, Teichmüller 空間の観点から Fomin-Zelevinsky とほぼ独立に団代数の概念に到達した Fock-Goncharov の重要な文献 [FG09a, FG07, FG09c, FG09b] においては, 一貫して団変数に a, 係数に x という記号が用いられていて, 特に変数 x の意味するところが Fomin-Zelevinsky と正反対であることがこの分野の研究者の小さいが無視できない悩みとなっている.

Definition 2.5 ([FZ02, FZ03a]) 初期種子 (B, x, y) に対して変異で得られるすべての団変数たちで生成される体 $\tilde{\mathbb{Q}}(x)$ の $\tilde{\mathbb{Z}}$ 部分代数を係数つき団代数といい, $\mathcal{A}(B, x, y)$ と表す. また, 射影 $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y) \to \mathbf{1}$ により係数を自明化して得られる体 $\mathbb{Q}(x)$ の $\mathbb{Z}$ 部分代数係数なし団代数といい, $\mathcal{A}(B, x)$ と表す.

本稿では, 係数つき団代数を単に団代数ということにする.
以下の二つが団代数に関する最も基本的な定理である.

Theorem 2.6 (Laurent 現象 ([FZ02, FZ07])) $\mathcal{A}(B, x, y)$ のすべての団変数は初期団変数 x_i $(i \in I)$ の $\tilde{\mathbb{Z}}$ 係数の Laurent 多項式で表示できる.

Theorem 2.7 (有限型団代数の分類 ([FZ03a])) $\mathcal{A}(B, x, y)$ の異なる団変数が有限個であるための必要十分条件は $\mathcal{A}(Q, x, y)$ のある種子 (Q', x', y') に対して, Q' の下部グラフ (矢の向きを無視したグラフ) が ADE 型の Dynkin 図となることである.

x 変数と y 変数の間には以下のような特筆すべき関係がある.

Proposition 2.8 ([FZ02]) 各種子 (B', x', y') に対して

$$\hat{y}'_i = y'_i \prod_{j \in I} {x'_j}^{b'_{ji}} \tag{2.5}$$

とおくと, $\hat{y}'_i$ たちは y'_i たちと同じ交換関係式 (2.3) をみたす.

3. T-system と Y-system

T-system と Y-system は量子可積分系における Bethe ansatz との関連で 90 年代に見いだされた関数方程式系であり, 量子群の有限次元表現, 特に Kirillov-Reshetikhin 加群と関わりが深い. 団代数の導入後, 次第にそれらと団代数との関連が認識された. 以下ではもっとも簡単な場合である, ADE 型の量子アフィン代数に付随する T-system と Y-system を例にその概要を説明する.

X を ADE 型の Dynkin 図とし, I をその index 集合とする. また ℓ は 2 以上の整数とする.

ペア (X, ℓ) に対して, 変数の族

$$Y = \{Y_m^{(a)}(u) \mid a \in I; m = 1, \dots, \ell - 1; u \in \mathbb{Z}\} \tag{3.1}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型 Y-system という.

$$Y_m^{(a)}(u-1) Y_m^{(a)}(u+1) = \frac{\prod_{b \in I, b \sim a}(1 + Y_m^{(b)}(u))}{(1 + Y_{m-1}^{(a)}(u)^{-1})(1 + Y_{m+1}^{(a)}(u)^{-1})}, \tag{3.2}$$

ただし, $Y_0^{(a)}(u)^{-1} = Y_\ell^{(a)}(u)^{-1} = 0$ とする. また, $a \sim b$ は a, b が X において隣接することを意味する. Y-system は, S 行列模型や格子模型の熱平衡条件である熱力学的 Bethe 仮

説方程式 (thermodynamic Bethe ansatz (TBA) equation) の解のみたす関数方程式として, $\ell = 2$ のとき [Zam90] により導入され, その後, 一般の ℓ に対して [KN92, RTV93] により上の形に一般化された.

同様に, ペア (X, ℓ) に対して, 変数の族

$$T = \{T_m^{(a)}(u) \mid a \in I; m = 1, \ldots, \ell - 1; u \in \mathbb{Z}\} \tag{3.3}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型 T-system という.

$$T_m^{(a)}(u-1)T_m^{(a)}(u+1) = \prod_{b \in I, b \sim a} T_m^{(b)}(u) + T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u), \tag{3.4}$$

ただし, $T_0^{(a)}(u) = T_\ell^{(a)}(u) = 1$ とする. T-system は, 格子模型の転送行列の関係式 (の予想) として導入され [KNS94], それ以前に共形場理論の中心荷電の dilogarithm 恒等式予想と関連して導入された Q-system [Kir89, KR90] の affine 化となっている. 表現論的には T-system は量子アフィン代数の表現の Grothendieck 群における Kirillov-Reshetikhin 加群の間の関係式 (の予想) に他ならない. その後, この予想は q 指標 [FR99] を用いて, [Nak03, Her06] により証明された.

さて、Y-system (3.2) と T-system (3.4) の間には一見して外見上の類似性があるが, それとはまた別に以下のような代数的な関係がある.

Proposition 3.1 ([KNS94]) 変数の族 T が T-system (3.4) をみたすとき,

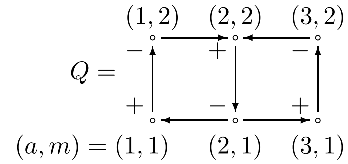
$$Y_m^{(a)}(u) := \frac{\prod_{b \in I, b \sim a} T_m^{(b)}(u)}{T_{m-1}^{(a)}(u)T_{m+1}^{(a)}(u)} \tag{3.5}$$

とおくと, 変数の族 Y は Y-system (3.4) をみたす.

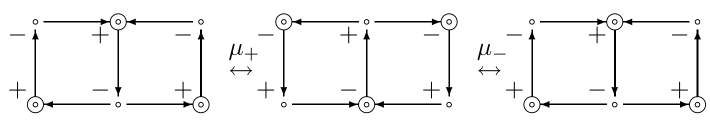
さて, Y-system と T-system がともにある共通の団代数の y 変数と x 変数 (ただし y 変数は自明化する) の関係式として定式化できることを以下の例で説明しよう.

Example 3.2 $X = A_3$, $\ell = 3$ を考えよう. 以下の箙 Q に対応する団代数 $\mathcal{A}(Q, x, y)$ を考える.

$Q =$



μ_+ をすべての符号 $+$ を持つ頂点における変異の合成とする. これは合成の順序によらないことに注意する. 同様に, μ_- を定める. このとき, 以下の箙の変異の列における周期性が成り立つ.



○: forward mutation points

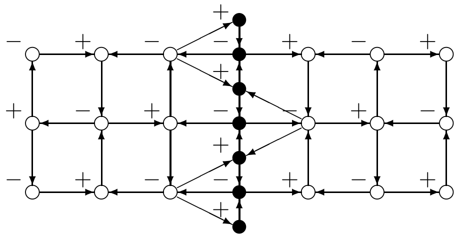


図 1: $X = B_4$, $\ell = 4$ の場合の初期箙

いま, $(x(0), y(0)) = (x, y)$ とおき, 変数の族 $(x(u), y(u))$ $(u \in \mathbb{Z})$ を以下で定める.

$$\begin{aligned}
&\cdots \overset{\mu_+}{\leftrightarrow} (Q^{\mathrm{op}}, x(-1), y(-1)) \overset{\mu_-}{\leftrightarrow} (Q, x(0), y(0)) \overset{\mu_+}{\leftrightarrow} (Q^{\mathrm{op}}, x(1), y(1)) \\
&\overset{\mu_-}{\leftrightarrow} (Q, x(2), y(2)) \overset{\mu_+}{\leftrightarrow} \cdots
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$P_+ = \{(u, a, m) \mid u + a + m = 0 \bmod 2\}$ とおく. これは, 前方変異点 (forward mutation point, 上の図で $\circ$ をつけた点) に対応していることに注意する.

このとき以下がなりたつ.

(1) $\{y_{am}(u) \mid (u, a, m) \in P_+\}$ は Y-system をみたす.

(2) $\{x_{am}(u-1) \mid (u, a, m) \in P_+\}$ は T-system をみたす. ただし, y 変数は自明化する.

(3) T-system と Y-system の関係 (Prop. 3.1) は, x 変数と y 変数の関係 (Prop. 2.8) の特別な場合に帰着する.

X が nonsimply laced の場合の T-system と Y-system はより複雑であるが, その分より興味深いとも言える. 例えば, レベル 4 の B_4 型 T-system と Y-system は, 図 1 の箙 Q と箙の周期

$$Q \overset{\mu_+^\bullet \mu_+^\circ}{\leftrightarrow} Q_1 \overset{\mu_-^\bullet}{\leftrightarrow} Q_2 \overset{\mu_+^\bullet \mu_-^\circ}{\leftrightarrow} Q_3 \overset{\mu_-^\bullet}{\leftrightarrow} Q \tag{3.7}$$

を用いて団代数の関係式として定式化ができる [IIK+10a].

量子群の観点からは, T-system は広汎なクラスの「quantum Kac-Moody algebra の量子アフィン化」に対して一般化されている [Her07]. さらに, これらはすべて団代数により定式化ができる [KNS09, IIK+10a, IIK+10b, Nak10b]. また, これらの例のさらなる広汎な一般化として, 交換行列 B の任意の周期に対して, 付随する T-system および Y-system を定式化することができる [Nak10a].

4. tropical 化

Fomin-Zelevinsky は [FZ07] において, 団変数 (x 変数) および係数 (y 変数) の F 多項式, C 行列, G 行列による積表示を与えることによりその構造を明らかにした. これと Plamondon [Pla10b, Pla10a] の団圏による圏化の結果と y 変数の tropical 化を組み合わせることにより団代数の理論は非常に豊富かつ強力なものになった. ここではその基本的事項についてまとめておこう.

4.1. tropical y 変数

自然な半体の準同形写像 $\pi_{\mathrm{trop}} : \mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y) \to \mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(y)$, $y_i \mapsto y_i$, $\alpha \mapsto 1$ $(\alpha \in \mathbb{Q}_+)$ に対して, 係数 y'_i の像を $[y'_i]_{\mathbf{T}} := \pi_{\mathrm{trop}}(y'_i)$ と表し, tropical 係数 (tropical coefficient), あるいは tropical y 変数と呼ぶ. ([FZ07] では principal coefficient と呼ばれている.)

定義により, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は初期係数の Laurent 単項式である. また, それらは形式的には (2.3) とまったく同じ交換関係式をみたす. ただし, $\oplus$ は tropical 半体の和 (2.2) である. 後に判明するように (Corollary 4.7) $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は常にそのべきが正または負の Laurent 単項式である. 特に, (2.3) において ε を $[y'_k]_{\mathbf{T}}$ のべきの符号と一致させると $1 \oplus y_k^{\varepsilon} = 1$ であるので交換関係式は以下の形になる.

$$[y'_i]_{\mathbf{T}} = \begin{cases} [y_i]_{\mathbf{T}}^{-1} & i = k \\ [y_i]_{\mathbf{T}}[y_k]_{\mathbf{T}}^{[\varepsilon b_{ki}]_+} & i \neq k \quad (\varepsilon \text{ は } [y'_k]_{\mathbf{T}} \text{ のべきの符号}). \end{cases} \tag{4.1}$$

式 (4.1) に現れる項 $[y_k]_{\mathbf{T}}^{[\varepsilon b_{ki}]_+}$ を便宜的に非自明項と呼ぶことにすると, 非自明項は ε と b_{ki} が同符号のときにかぎり寄与する. これを箙で表すと以下のような状況になる: (arrow-sign coordination)

$$\underset{k}{\circledcirc}\!\longrightarrow\!\underset{i}{\circ} \quad \varepsilon\text{: positive} \quad \text{or} \quad \underset{k}{\circledcirc}\!\longleftarrow\!\underset{i}{\circ} \quad \varepsilon\text{: negative}$$

4.2. F 多項式, C 行列, G 行列

はじめに定理 (公式) を述べよう.

Theorem 4.1 ([FZ07]) 団代数 $\mathcal{A}(B, x, y)$ の各種子 (B', x', y') に対して, ある y の多項式 $F'_i(y)$ $(i \in I)$、整数行列 $C' = (c'_{ij})_{i,j\in I}$ および整数行列 $G' = (g'_{ij})_{i,j\in I}$ が存在して以下がなりたつ.

$$y'_i = \left(\prod_{j\in I} y_j^{c'_{ji}}\right) \prod_{j\in I} F'_j(y_1, \dots, y_n)_{\oplus}^{b'_{ji}}, \tag{4.2}$$

$$x'_i = \left(\prod_{j\in I} y_j^{g'_{ji}}\right) \frac{F'_i(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}{F'_i(y_1, \dots, y_n)_{\oplus}}, \quad \hat{y}_i = y_i \prod_{j\in I} x_j^{b_{ji}}. \tag{4.3}$$

ここで, $F'_i(y_1, \dots, y_n)_{\oplus}$ は多項式 $F'_i(y_1, \dots, y_n)$ における和 $+$ を $\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}(y)$ における和 $\oplus$ で形式的に置き換えたものである. ($\hat{y}$ の定義における b_{ji} (=初期行列 B の成分) は b'_{ji} のミスプリントではない.)

以下では, 順に, F'_i, C', G' の定義を述べる.

(F 多項式の定義) 各団変数 x'_i に対して, F 多項式 $F'_i(y)$ を以下で定める.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{univ}}[x^{\pm}] & & \mathbb{Z}\mathbb{P}_{\mathrm{trop}}[x^{\pm 1}] & & \\ \cup & & \cup & & \\ \mathcal{A}(B, x, y) & \xrightarrow{\pi_{\mathrm{trop}}} & [\mathcal{A}(B, x, y)]_{\mathbf{T}} & \xrightarrow{x_1 = \cdots = x_n = 1} & \mathbb{Z}[y^{\pm 1}] \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ x'_i & \mapsto & [x'_i]_{\mathrm{T}} & \mapsto & F'_i(y) \end{array} \tag{4.4}$$

$F'(y)$ が実際に y の多項式であることは後に判明するが, ここではそれについては述べない.

(C 行列の定義) tropical y 変数 $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は初期係数の Laurent 単項式であるから

$$[y'_i]_{\mathbf{T}} = \prod_{j \in I} y_j^{c'_{ji}}, \quad c'_{ji} \in \mathbb{Z} \tag{4.5}$$

と表される. これにより整数行列 $C' = (c'_{ij})_{i,j \in I}$ が定まる.

(G 行列の定義) $\deg : x_i, y_i \mapsto \mathbb{Z}^n$ を以下で定める.

$$\deg\, x_i = \vec{e}_i, \quad \deg\, y_i = -\vec{b}_i, \tag{4.6}$$

ただし, $\vec{e}_i$ は基本単位ベクトル, $\vec{b}_i$ は B の i 列目のなすベクトルとする.

Fact 4.2 $[x'_i]_{\mathbf{T}}$ はこの degree に関して斉次である.

そこで, 行列 G' の i 列目 $\vec{g}'_i$ を $\vec{g}'_i = \deg[x_i]_{\mathbf{T}}$ によって定める.

実は, C 行列と G 行列には後述するような簡単な関係 (Corollary 4.8) がある.

4.3. 圏化

団代数の三角圏による圏化 (2-Calabi-Yau 実現) は, 箙 Q が ADE 型のときに Buan ら [BMR$^+$06] が導入した団圏 (cluser algebra) によって始められ, その後 Keller とその周辺の人々(Fu, Yang, Amiot, Plamondon ら) により一般の Q の場合に順次拡張されてきた. ここでは現時点においてその最も一般の場合である Plamondon [Pla10b, Pla10a] による結果のうち本稿に関連する結果のみを詳しい説明を一切省いて述べる.

任意の箙 Q に対して, Q の principal extension $\tilde{Q}$ とその上のあるポテンシャル W を用いて一般団圏 (generalized cluster category) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\tilde{Q},W)}$ という三角圏が定まる. このとき, 各団代数の各種子 (B', x', y') に対して $\mathcal{C}$ のある rigid object $T' = \bigoplus_{i \in I} T'_i$ が標準的に定まり, 以下が成り立つ.

Theorem 4.3 ([Pla10b, Pla10a]) $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$ を初期種子 (B, x, y) に対応する rigid object とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\tilde{Q}' = \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T') \text{ に付随する箙}, \tag{4.7}$$

$$c'_{ij} = -\mathrm{ind}_{T'}(T_i[1])_j = \mathrm{ind}^{\mathrm{op}}_{T'}(T_i)_j, \tag{4.8}$$

$$g'_{ij} = \mathrm{ind}_T(T'_j)_i, \tag{4.9}$$

$$F'_i(y) = \sum_{e \in \mathbb{Z}^{\tilde{I}}_{\geq 0}} \chi(\mathrm{Gr}_e(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T'_i[1]))) \prod_{j \in I} y_j^{e_j}. \tag{4.10}$$

ここで, $\mathrm{Gr}_e(X)$ は X に対する次元ベクトル e の quiver Grassmannian であり, χ はその Euler 数である.

4.4. Theorem 4.3 の系

この節では, 前節の圏化によって得られるいくつかの重要な系について述べる.

Definition 4.4 $\nu : I \to I$ を全単射とし, (B', x', y') を団代数の種子とする. また, I-列 $(k_1, \ldots, k_L)$ に対して $(B'', x'', y'') = \mu_{k_L} \cdots \mu_{k_1}(B', x', y')$ とする. このとき, $(k_1, \ldots, k_L)$ が (B', x', y') の ν 周期であるとは, 以下が成り立つことである.

$$b''_{\nu(i)\nu(j)} = b'_{ij}, \quad x''_{\nu(i)} = x'_i, \quad y''_{\nu(i)} = y'_i, \quad (i, j \in I). \tag{4.11}$$

以下の tropical y 変数による団代数の周期性の判定条件はまことに強力である.

Corollary 4.5 ([Pla10a, IIK+10a]) $(k_1, \ldots, k_L)$ が (B', x', y') の ν 周期であるための必要十分条件以下で与えられる.

$$[y''_{\nu(i)}]_{\mathbf{T}} = [y'_i]_{\mathbf{T}} \quad (i \in I).$$

すなわち, 団代数の種子の周期性は, tropical y 変数の周期性から従う.

つぎに, F 多項式および y 変数に関する系を与える.

Corollary 4.6 ([Pla10a]) (1) F 多項式の定数項は 1 である.
(2) C 行列の各列のすべての成分は sign-coherent (異符号を含まない) でありかつ 0 ベクトルではない.

なお, この定理の別証明は [DWZ10, Nag10] により与えられている.
Corollary 4.6 と Theorem 4.1 を組み合わせてさらに以下が得られる.

Corollary 4.7 y'_i は初期係数 y に関する Laurent 展開が可能であり, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ はその主要項を与える. さらに, $[y'_i]_{\mathbf{T}}$ は正または負のベキの単項式になる.

Corollary 4.6 よりさらに以下の C 行列と G 行列の関係が得られる.

Corollary 4.8 ([Nak10a]) C' の転置 C'^{T} と G' は互いに逆行列である.

5. 応用 1. Y-system の周期性

団代数の特筆すべき応用として, 90 年代に可積分系の研究から生まれ未解決であった Y-system の周期性予想の証明が得られる.

X を有限型 (すなわち $A, \ldots, G$ 型) の Dynkin 図形とし, ℓ を 2 以上の整数とする. 変数の集合 $T = (T^{(a)}_m(u))$, $Y = (Y^{(a)}_m(u))$ がそれぞれレベル ℓ の X 型 T-system と Y-system を満たすとする. このとき, Corollay 4.7 にしたがい, 対応する団代数の tropical y 変数の周期性を示すことにより以下の周期性が得られる.

Theorem 5.1 ([IIK+10a, IIK+10b])

$$T^{(a)}_m(u + t(h^\vee + \ell)) = T^{(a)}_m(u), \tag{5.1}$$
$$Y^{(a)}_m(u + t(h^\vee + \ell)) = Y^{(a)}_m(u). \tag{5.2}$$

ただし, $h^\vee$ は X の dual Coxeter 数, また t は X の段数 (tier number), すなわち, ADE 型に対しては $t = 1$, BCF 型に対しては $t = 2$, G 型に対しては $t = 3$ である.

Remark 5.2 上の周期はスペクトル変数 u の正規化の仕方に依存する. ここでは, T-system および Y-system の左辺が a が短ルートのとき常に (3.4), (3.2) の形となるように正規化をしている.

以下ではこの定理の背景と証明の発展について主に講演者自身の研究の経緯の観点から概観する.

Al. B. Zamolodchikov [Zam90, Zam91] は, 共形場理論の変形の観点から ADE に付随する可積分 S 行列模型の熱力学的極限の研究を行い, TBA 方程式の解のみたす関数方程式としてレベル 2 の ADE 型 Y-system の導入にいたったことはすでに述べた通りである. さらに, Zamolodchikov は, その Y-system の解が (5.2) の周期性を持つことに気づき (正確には予想を与え) , それにより共形場理論の摂動場の共形次元が得られることを示した. この一般化として, Ravanini 等 [RTV93] は ADE で一般の ℓ の場合に, さらに Kuniba 等 [KNS94] は nonsimply laced の場合に (5.2) を拡張し, これらは「Y-system の周期性予想」として知られるようになった. 一方, Gliozzi-Tateo [GT95] はこの周期性と 80 年代後半に Kirillov 等 [KR86, Kir89, KR90, BR90, Kun93] により定式化された「共形場理論の中心荷電に対する dilogarithm 恒等式予想」との関連を明らかにした.

さて、(5.2) は Y-system を u に関する離散発展方程式とみた場合に, その初期条件として具体的な数値計算例より計算機でその有効性は確認することができる. しかし, 周期性の証明はその問題の単純性とは逆に大変難しい問題であることも次第に明らかになった. その中で A 型の場合はさまざまなアイデアを用いて解の具体形表式を与えることができ, $X = A_1$ に対しては, Frenkel-Szenes [FS95] および Gliozzi-Tateo [GT96] が, また, $X = A_n$ に対して Volkov [Vol07] と Szenes [Sze09] が (5.2) を証明した. 以上をまとめると, Y-system とその周期性は共形場理論とその摂動の間の定量的な関係を与える上で一つの中心的な役割を果たすことが明らかになっていたが, その数学的な枠組みについては「量子群および Bethe 仮説と関係が深い」という認識にとどまっていた.

一方, Fomin-Zelevinsky は団代数の導入と平行して, レベル 2 の ADE 型 Y-system を団代数の観点から始めて研究し, (5.2) を証明した [FZ03b]. その後しばらくおいて, Keller [Kel10a, Kel10b] は団圏による圏化の応用として, Auslander-Reiten 理論における AR-translation と関連づけることにより (一般レベルの)ADE 型 Y-system の周期性を証明するに至った. これにより, 団代数と Y-system の関連の重要性が決定的となった. これに比して T-system と団代数との関係の認識はやや遅れていたが Q-system と団代数との関連が [DK09] により指摘されて以降急速に認識が進み [IIK$^+$10c, HL10, Nak09], Inoue 等 [IIK$^+$10c] は T-system においても周期性 (5.1) が成り立つことの予想を指摘し, [Kel10a] の方法を適用し, ADE 型 T-system の場合に (5.1) を証明した. 以上の発展を踏まえて, Inoue 等 [IIK$^+$10a, IIK$^+$10b] は, tropical y 変数の周期性に帰着させる方法 (Corollay 4.7) によりあらたに nonsimply laced の場合も含めて Theorem 5.1 の統一的方法による証明を与えた.

なお, 同様の団代数の手法により, Tateo [Tat95] による sine-Gordon 模型に付随する Y-system の周期性予想の一部が証明されている [NT10]. また, (5.1) は A 型については Volkov [Vol07] と Henriquez [Hen07] による団代数を用いない (解の explicit な表示による) 証明もある.

6. 応用 2. 古典および量子 dilogarithm 恒等式

ここでは団代数の第二の応用として, 団代数およびその量子化（非可換化）である量子団代数の周期に付随する dilogarithm 恒等式およびその量子化が得られることを説明する.

6.1. pentagon 関係式

はじめに, dilogarithm 関係式のひな形であり最も重要な例である pentagon 関係式とその量子化について述べる.

$\mathrm{Li}_2(x)$ および $L(x)$ をそれぞれ以下で定まる Euler dilogarithm および Rogers dilogarithm とする [Lew81, Kir95, Zag07].

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} \right\} dy \quad (x \leq 1), \tag{6.1}$$

$$L(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \left\{ \frac{\log(1-y)}{y} + \frac{\log y}{1-y} \right\} dy \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{6.2}$$

二つの関数は以下のように関係している.

$$L(x) = \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\log x \log(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1), \tag{6.3}$$

$$-L\left(\frac{x}{1+x}\right) = \mathrm{Li}_2(-x) + \frac{1}{2}\log x \log(1+x) \quad (0 \leq x). \tag{6.4}$$

この関数の最も重要な性質は pentagon 関係式である. たとえば $L(x)$ に関しては以下のような形をしている.

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right) + L(xy) + L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right) \quad (0 \leq x, y \leq 1). \tag{6.5}$$

一方, 量子 dilogarithm 関数は近年さまざまな分野に現れ注目を集めている. 例えば離散量子系, 双曲幾何と Teichmüller 理論, 量子トポロジー, Donaldson-Thomas 不変量, 弦理論, 多元環の表現論, などがあげられる.

[FV93, FK94] にしたがい, 量子 dilogarithm $\mathbf{\Psi}_q(x)$ ($|q| < 1$ and $x \in \mathbb{C}$) を以下で定める.

$$\mathbf{\Psi}_q(x) := \prod_{k=0}^{\infty}(1 + q^{2k+1}x)^{-1}. \tag{6.6}$$

この関数の「量子指数関数」としての研究は [Sch53] に遡るが, 「量子 dilogarithm」としての認識は最近のもの [FV93, FK94] である. これを dilogarithm の量子類似と考える理由は以下の二つの性質にある [FV93, FK94, Kas04].

(a). 漸近挙動: 極限 $q \to 1^-$ において,

$$\mathbf{\Psi}_q(x) \sim \exp\left(-\frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{2\log q}\right). \tag{6.7}$$

(b). Pentagon 関係式: $UV = q^2 VU$ をみたす変数 U, V に対して,

$$\mathbf{\Psi}_q(U)\mathbf{\Psi}_q(V) = \mathbf{\Psi}_q(V)\mathbf{\Psi}_q(q^{-1}UV)\mathbf{\Psi}_q(U). \tag{6.8}$$

さらに, 極限 $q \to 1^-$ において, 関係式 (6.8) は関係式 (6.5) に退化する.

(6.7) に現れるのは Euler dilogarithm にも関わらず (6.8) の極限として (6.5) には Rogers dilogarithm が現れることに注意したい. すなわち (6.8) の極限は項別極限のような自明なものではなく, U, V の非可換性が「手品のように」$\mathrm{Li}_2(x)$ を $L(x)$ に変えるのである. 後でみるように, 団代数は（はるかに広汎な状況において）この現象がどのようにおこるかの明解な説明を与えてくれる.

Remark 6.1 Faddeev [Fad96, Fad95] は量子dilogarithmの変種として以下のような関数を導入した.

$$\boldsymbol{\Phi}_b(z) = \exp\left(-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2zx\sqrt{-1}}}{\sinh(xb)\sinh(x/b)}\frac{dx}{x}\right), \tag{6.9}$$

ただし, bは実部が0でない複素パラメーターである. これをFaddeev量子dilogarithmと呼ぶ. (非コンパクト量子dilogarithmとも呼ばれる.) 関数$\boldsymbol{\Phi}_b(z)$に対しても(6.7), (6.8)および次節における結果とパラレルな結果が成立することが知られている[Fad96, Fad95, Wor00, FKV01, KN11]. 関数$\boldsymbol{\Phi}_b(z)$は, 絡み目不変量や3次元の双曲体積などへ重要な応用を持つ[Kas97].

6.2. 団代数とdilogarithm恒等式

前節で述べた古典pentagon関係式と量子pentagon関係式の間の関係は団代数による広汎な一般化を持つことが最近明らかにされた[Nak10a, Kel11, KN11]. これをまとめたのが以下の図式である.

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{量子団代数の周期}} & \xrightarrow{\text{(III)}} & \boxed{\text{量子dilogarithm恒等式}} \\
\text{(II)}\big\updownarrow & & \big\downarrow\text{(IV)} \\
\boxed{\text{古典団代数の周期}} & \xrightarrow{\text{(I)}} & \boxed{\text{古典 dilogarithm 恒等式}}
\end{array}$$

特にA_2型の長さ5の(12)周期の場合が前節のpentagon関係式を与える.

以下では矢印(I), (II), (III), (IV)の意味の説明をする.

(I) 古典団代数の周期 $\Longrightarrow$ 古典 dilogarithm 恒等式

この部分は[Nak10a]による. $(k_1,\dots,k_L)$を(B,y)のν周期として, x変数を忘れた以下のようなy種子の変異の列

$$(B(1),y(1)) \overset{\mu_{k_1}}{\longleftrightarrow} (B(2),y(2)) \overset{\mu_{k_2}}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{\mu_{k_L}}{\longleftrightarrow} (B(L+1),y(L+1)). \tag{6.10}$$

を考える. ただし, $(B(1),y(1)) = (B,y)$とする. ε_t を $[y_{k_t}(t)]$ のべきの符号 (Corollary 4.6)とする. 符号の列$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_L)$をtropical符号列と呼ぶ. 以下の定理は共形場理論の中心荷電等式[Kir89, KR90, BR90, Kun93]に端を発したdilogarithm恒等式[GT95, GT96, FS95, Cha05, Nak11, IIK+10a, IIK+10b, NT10]の団代数による一般化である.

Theorem 6.2 (古典dilogarithm恒等式 [Nak10a])

$$\sum_{t=1}^{L} \varepsilon_t L\left(\frac{y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}{1+y_{k_t}(t)^{\varepsilon_t}}\right) = 0. \tag{6.11}$$

Remark 6.3 恒等式(6.11)において, $[y_{k_t}(t)]_{\mathbf{T}}$ $(t=1,\dots,L)$のうちべきが負のもの全体の個数をN_-とおく. すると, Rogers dilogarithmの恒等式

$$L(x) + L(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \quad (0 \le x \le 1) \tag{6.12}$$

により恒等式 (6.11) は次の恒等式と等価になる [Nak10a].

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{t=1}^{L} L\left(\frac{y_{k_t}(t)}{1+y_{k_t}(t)}\right) = N_-. \tag{6.13}$$

(II) 古典団代数の周期 $\Longleftrightarrow$ 量子団代数の周期

この部分は主に [FG09c] による. 団代数の非可換化である量子団代数は現在のところ二つの定式化がある. 第一は [BZ05] によるもので x 変数, y 変数がともに非可換であるが, y 変数が tropical 化されているものである. 第二は [FG09a, FG09c] によるもので y 変数のみが非可換である. ここでは後者の量子団代数で y 変数のみの場合を考える.

反対称行列 $B=(b_{ij})_{i,j\in I}$ と非可換な形式的変数の組 $Y=(Y_i)_{i\in I}$ で

$$Y_iY_j = q^{2b_{ji}}Y_jY_i \tag{6.14}$$

をみたすとする. ペア (B,Y) を量子 y 初期種子という. これに対して, 古典 (非可換) 団代数と同様に, 変異を繰り返すことにより一般の y 種子 (B',Y') が得られる. ただし, 量子 y 変数の交換関係式は以下で与えられる.

$$Y''_i = \begin{cases} Y'^{-1}_k & i=k \\ q^{b'_{ik}[\varepsilon b'_{ki}]_+}Y'_iY'^{[\varepsilon b'_{ki}]_+}_k \displaystyle\prod_{m=1}^{|b'_{ki}|}(1+q^{-\varepsilon\mathrm{sgn}(b'_{ki})(2m-1)}Y'^{\varepsilon}_k)^{-\mathrm{sgn}(b'_{ki})} & i\neq k. \end{cases} \tag{6.15}$$

ここで $q=1$ とおけば, これは古典的な交換関係式 (2.3) に還元することに注意する.

量子 y 種子に対しても, Definition 4.4 と同様に ν 周期が定義できる. 量子 y 種子の ν 周期が古典 y 種子の周期となることは先の注意から明らかであるが, その逆も成り立つ.

Proposition 6.4 ([BFZ05, FG09c, Kel11, KN11]) 古典 y 種子 (B',y') の周期は量子 y 種子 (B',Y') の周期である.

(III) 量子団代数の周期 $\Longrightarrow$ 量子 dilogarithm 恒等式

この部分は [Kel11, KN11] による. はじめに, 生成元 Y^α $(\alpha\in(\mathbb{Z}^I)$ と関係式

$$q^{\langle\alpha,\beta\rangle}\mathsf{Y}^\alpha\mathsf{Y}^\beta = \mathsf{Y}^{\alpha+\beta}, \quad \langle\alpha,\beta\rangle = -\langle\beta,\alpha\rangle = {}^t\alpha B\beta. \tag{6.16}$$

で定まる $\mathbb{Q}(q)$ 上の代数 (量子トーラス代数) $\mathbb{T}(B,\mathsf{Y})$ を考える. 単位ベクトル e_i $(i\in I)$ に対して $\mathsf{Y}_i := \mathsf{Y}^{e_i}$ とおけば, Y_i と Y_i を同一視することにより (6.14) が得られる.

$(k_1,\dots,k_L)$ を量子 y 種子 (B,Y) の ν 周期とする. $y_i(t)$ を対応する古典 y 種子 (6.10) における古典 y 変数とし, 整数ベクトル $\alpha_t\in\mathbb{Z}^I$ $(t=1,\dots,L)$ を $[y_{k_t}(t)] = y^{\alpha_t}$ で定まるものとする. すなわち, α_t は $y_{k_t}(t)$ に対する C 行列 (4.5) の第 k_t 列に他ならない. $(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_L)$ を (6.10) の tropical 符号列とする.

以下の形の量子 dilogarithm 恒等式は [Kel11, Theorem 5.6] によるものである. A 型のある特別な周期については表現論の手法を用いて得られる [Rei09]. また, Donaldson-Thomas 不変量の壁越えの観点からも同じ恒等式が得られる [Nag11, Comments (a), p.5].

Theorem 6.5 (量子 dilogarithm 恒等式の tropical 形 [Kel11])

$$\mathbf{\Psi}_q(\mathsf{Y}^{\varepsilon_1\alpha_1})^{\varepsilon_1}\cdots\mathbf{\Psi}_q(\mathsf{Y}^{\varepsilon_L\alpha_L})^{\varepsilon_L}=1. \tag{6.17}$$

ただし, $\mathsf{Y}^{\varepsilon_1\alpha_1},\dots,\mathsf{Y}^{\varepsilon_L\alpha_L}\in\mathbb{T}(B,\mathsf{Y})$.

なお, [KN11] においては, これ以外にも量子 dilogarithm $\mathbf{\Psi}_q(x)$ に関する恒等式の普遍形, 局所形, Faddeev 量子 dilogarithm $\mathbf{\Phi}_b(z)$ に関する恒等式の tropical 形, 局所形, などの, 量子 dilogarithm 恒等式の (本質的に同値な) さまざまな形が団代数を用いて系統的に得られている.

(IV) 量子 dilogarithm 恒等式 $\Longrightarrow$ 古典 dilogarithm 恒等式

この部分は [KN11] による. Faddeev-Kashaev [FK94] は, 量子 pentagon 関係式 (6.8) に対して変数 U, V が Weyl 代数 (Heisenberg 代数の指数版) をみたすことに注目して, U, V の微分作用素表示 (Heisenberg 表現) を用い, そこで量子学的な手法, 特に半古典極限における鞍点法 (saddle point mathod) を適用し, 古典 pentagon 関係式 (6.5) を導いた. しかし, 一般の場合にこの手法を踏襲するには二つの (技術的な) 問題点がある. 第一は, 一般の量子 dilogarithm 関係式 (6.17) に対する tropical 単項式 $Y^{\epsilon_t\alpha_t}$ は大変複雑になり, しかもそもそもその明示的な公式が存在しない. したがって, この作用素表示を具体的に与えることができない. 第二は, 半古典極限において Euler dilogarithm から Rogers dilogarithm を導く過程の見通しが悪い. この二つの問題は, Fock-Goncharov [FG09c, FG09b] による量子 y 変数の微分作用素表現を用いて, いったん量子 dilogarithm 関係式 (6.17) を tropical 単項式 $Y^{\epsilon_t\alpha_t}$ を含まない形（[KN11] において「局所形 (local form)」と呼ばれるもの) に書き換えることで同時に解決される. 詳細は [KN11] を見られたい.

6.3. 共形場理論における中心荷電等式

最後に, 団代数のさらなる応用として, Y-system の周期性 (Theorem 5.1) と古典 dilogarithm 恒等式 (特に (6.13) の形) を合わせて, 20 年来未解決であった共形場理論における中心荷電等式予想 [Kir89, KR90, BR90, Kun93] の証明が得られることを述べる [Nak11, IIK+10a, IIK+10b].

簡単のため ADE 型の Dynkin 図 X に対する場合を考える. ℓ を 2 以上の整数とする. ペア (X,ℓ) に対して, 変数の族

$$\{Y^{(a)}_m \mid a\in I; m=1,\dots,\ell-1\} \tag{6.18}$$

に対する以下の関数方程式系をレベル ℓ の X 型定常 (constant) Y-system という.

$$(Y^{(a)}_m)^2=\frac{\prod_{b\in I,b\sim a}(1+Y^{(b)}_m)}{(1+Y^{(a)}_{m-1}{}^{-1})(1+Y^{(a)}_{m+1}{}^{-1})}, \tag{6.19}$$

ただし, $Y^{(a)-1}_0=Y^{(a)-1}_\ell=0$ とする. すなわち, これは Y-system (3.2) において「変数 $Y^{(a)}_m(u)$ は u に対して定常的である」という条件を加えたものである. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 6.6 ([NK09]) 方程式 (6.19) に対して, 正の実数解が一意的に存在する.

以下では$Y_m^{(a)}$たちをこの定理により一意的に定まる(6.19)の正の実数解とする.

さて, Theorem 5.1でみたようにY-systemは周期 $2(h^\vee+\ell)$ を持つが, これは対応する団代数の周期から得られるのであった. この団代数の周期に付随する古典dilogatihm恒等式(特に(6.13)の形) を考える, これに対してN_-を具体的に求めることが可能で, さらに, 得られた式を定常Y-systemの解へと特殊化することで以下の等式が得られる.

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{a\in I}\sum_{m=1}^{\ell-1} L\left(\frac{Y_m^{(a)}}{1+Y_m^{(a)}}\right)=\frac{(\ell-1)hn}{h+\ell}. \tag{6.20}$$

ただし, hはXのCoxeter数, また$n=|I|$, すなわちnはXの頂点の数である. (XはADEなので$h=h^\vee$である.) ここで, $\mathfrak{g}$をX型の単純Lie代数とすると, 良く知られているように$\dim\mathfrak{g}=n(h+1)$であり, これを用いて(6.20)の右辺を書き直すと以下の等式が得られる.

Theorem 6.7 ([Nak11])

$$\frac{6}{\pi^2}\sum_{a\in I}\sum_{m=1}^{\ell-1} L\left(\frac{Y_m^{(a)}}{1+Y_m^{(a)}}\right)=\frac{\ell\dim\mathfrak{g}}{h+\ell}-n. \tag{6.21}$$

これが, Kirillovらによる中心荷電等式予想であった. (6.21)の右辺の第1項は, レベルℓのX型Wess-Zumono-Witten模型の中心荷電であり, 右辺全体はレベルℓのX型パラフェルミオン模型の中心荷電である. この等式を用いて, 共形場理論とその変形である可積分模型の間の定量的な関係を与えることができるのある. このことの重要性と等式の不思議さに鑑み, 90年代には多くの研究者がさまざまな方法でこの等式(とその仲間)を理解し証明することを試みたが部分的にしか成功をしなかった(例えば[Nah07]を参照). この等式の背景に「団代数」という構造があることを当時は知る由もなかったのである.

7. おわりに

本稿では, 団代数と可積分系のかかわりとして, とくに, Y-systemの周期性と付随する古典および量子dilogarithm恒等式への応用を述べた. これは, この問題に対して団代数の関与が不可欠であったという点において特筆すべき応用だと考える. しながら, これは団代数と可積分系の関連のある側面にすぎず, 今後研究すべき重要な課題は多々あるであろう. その一つとして, ここではソリトン方程式の離散化であるような方程式の団代数の定式化による研究をあげておこう. そのような研究はすでにA型の離散Toda方程式[GSV11]や離散Lotka-Voltera方程式[IN10]で始められている. 団代数の定式化によるメリットは少なくとも二つある. 第一は, 団代数にはPoisson構造が自動的に組み込まれていることである[GSV03, GSV10, FG09a]. 第二は, たとえばA型の離散Toda方程式はA型特有の双線形性を利用してすでに多くの結果が知られているが, 団代数の観点からは双線形性は必ずしも重要な条件ではない. したがって, 団代数による定式化は双線形性を持たないより広汎な離散方程式の可積分性に対して知見を与えることが期待できる.

最後に個人的な見方ではあるが, Y-systemの周期性予想およびdilogarithm恒等式予想が解決された当初においては, それらに対して団代数の定式化が強力な道具として寄与をしたという印象をもっていた. しかし, その後dilogarithm恒等式がより一般の団代数の周期に付随するという理解を得たことにより, むしろ, これらの予想が団代数の周期現象の重要性の認識とその非自明な例の発見を与えることに寄与をした, という逆の見方のウエイトが高まった. この観点を指摘して本稿の結語としたい.

参考文献

[Ami09] C. Amiot, *Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential*, Annales de l'Institut Fourier **104** (2009), 2525–2590; arXiv:0805.1035 [math.RT].

[BFZ05] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, *Cluster algebras III: upper bounds and double Bruhat cells*, Duke Math. J. **126** (2005), 1–52; arXiv:math/035434 [math.RT].

[BMR$^+$06] A. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, and G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. in Math. **204** (2006), 572–618; arXiv:math/0402054 [math.RT].

[BR90] V. V. Bazhanov and N. Yu. Reshetikhin, *Restricted solid-on-solid models connected with simply laced algebras and conformal field theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 1477–1492.

[BZ05] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Quantum cluster algebras*, Adv. in Math. **195** (2005), 405–455; arXiv:math.QA/0404446.

[Cha05] F. Chapoton, *Functional identities for the Rogers dilogarithm associated to cluster Y-systems*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), 755–760.

[DK09] P. Di Francesco and R. Kedem, *Q-systems as cluster algebras II: Cartan matrix of finite type and the polynomial property*, Lett. Math. Phys. **89** (2009), 183–216; arXiv:0803.0362 [math.RT].

[DWZ08] H. Derksen, J. Weyman, and A. Zelevinsky, *Quivers with potentials and their representations I: Mutations*, Selecta Math. **14** (2008), 59–119; arXiv:0704.0649 [math.RA].

[DWZ10] ———, *Quivers with potentials and their representations II: Applications to cluster algebras*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), 749–790; arXiv:0904.0676 [math.RA].

[Fad95] L. D. Faddeev, *Discrete Hisenberg-Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys. **34** (1995), 249–254; arXiv:hep–th/9504111.

[Fad96] ———, *Current-like variables in massive and massless integrable models*, Quantum groups and their applications in physics (Amsterdam) (L. Castellani and J. Wess, eds.), IOS Press, 1996, pp. 117–135; arXiv:hep–th/9408041.

[FG07] V. V. Fock and A. B. Goncharov, *Dual Teichmüller and lamination spaces*, Handbook of Teichüller theory, Vol. I, Eur. Math. Soc., 2007, pp. 647–684, arXiv:math/0510312 [math.DG].

[FG09a] ———, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Annales Sci. de l'École Norm. Sup. **42** (2009), 865–930; arXiv:math/0311245 [math.AG].

[FG09b] ———, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm II: The intertwiner*, Prog. Math. **269** (2009), 655–673; arXiv:math.0702398.

[FG09c] ———, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, Invent. Math. **172** (2009), 223–286; arXiv:math/0702397 [math.QA].

[FK94] L. D. Faddeev and R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A9** (94), 427–434; arXiv:hep–th/9310070.

[FKV01] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, and A. Yu. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory. I: Algebraic approach and duality*, Commun. Math. Phys. **219** (2001), 199–219, arXiv:hep–th/0006156.

[FR99] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of W-algebras*, Contemp. Math. **248** (1999), 168–205; arXiv:math/9810055 [math.QA].

[FS95] E. Frenkel and A. Szenes, *Thermodynamic Bethe ansatz and dilogarithm identities. I*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 677–693; arXiv:hep–th/9506215.

[FV93] L. D. Faddeev and A. Yu. Volkov, *Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice*, Phys. Lett. **315** (1993), 311–318; arXiv:hep–th/9307048.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497–529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].

[FZ03a] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), 63–121; arXiv:math/0208229 [math.RA].

[FZ03b] ———, *Y-systems and generalized associahedra*, Ann. of Math. **158** (2003), 977–1018; arXiv:hep–th/0111053.

[FZ07] ———, *Cluster algebras IV. Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007), 112–164; arXiv:math/0602259 [math.RT].

[Gin06] V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras*, 2006, arXiv:math/0612139 [math.AG].

[GSV03] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Moskov Math. J. **3** (2003), 899–934; arXiv:math0208033 [math.QA].

[GSV10] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A. Vainshtein, *Cluster algebras and Poisson geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 167, American Mathematical Society, 2010.

[GSV11] M. Gekhtman, M. Shapiro, and A Vainshtein, *Generalized Bäcklund-Darboux transformations for Coxeter-Toda flows from a cluster algebra perspective*, Acta Math. **206** (2011), 245–310; arXiv:0906.1364 [math.QA].

[GT95] F. Gliozzi and R. Tateo, *ADE functional dilogarithm identities and integrable models*, Phys. Lett. **B348** (1995), 677–693; arXiv:hep–th/9411203.

[GT96] F. Gliozzi and R. Tateo, *Thermodynamic Bethe ansatz and three-fold triangulations*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996), 4051–4064; arXiv:hep–th/9505102.

[Hen07] A. Henriques, *A periodicity theorem for the octahedron recurrence*, J. Alg. Combin. **26** (2007), 1–26; arXiv:math/0604289 [math.CO].

[Her06] D. Hernandez, *The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*, J. Reine Angew. Math. (2006), 63–87; arXiv:math/0501202 [math.QA].

[Her07] ———, *Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), 567–608; arXiv:math/0504269 [math.QA].

[HL10] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), 265–341, arXiv:0903.1452 [math.QA].

[IIK+10a] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba, and T. Nakanishi, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r*, 2010, arXiv:1001.1880 [math.QA], to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[IIK+10b] ———, *Periodicities of T and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras II: Types C_r, F_4, and G_2*, 2010, arXiv:1001.1881 [math.QA], to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci.

[IIK+10c] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Periodicities of T and Y-systems*, Nagoya Math. J. **197** (2010), 59–174; arXiv:0812.0667 [math.QA].

[IN10] R Inoue and T. Nakanishi, *Difference equations and lcuster algebras i: Poisson bracket for integrable difference equations*, 2010, arXiv:1012.5574 [math.QA], to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.

[IY08] O. Iyama and Y. Yoshino, *Mutation in triangulated categories and rigid cohen-macaulay modules*, Invent. Math. **172** (2008), 117–168; arXiv:math/0607736 [math.RT].

[Kas97] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997), 269–275; arXiv:q–alg/9601025.

[Kas04] ———, *The q-binomial formula and the Rogers dilogarithm identity*, 2004, arXiv:math.040708 [math.QA].

[Kel10a] B. Keller, *Cluster algebras, quiver representations and triangulated categories*, Triangulated categories (T. Holm, P. Jørgensen, and R. Rouquier, eds.), Lecture Note Series, vol. 375, London Mathematical Society, Cambridge University Press, 2010, pp. 76–160; arXiv:0807.1960 [math.RT].

[Kel10b] ———, *The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams*, 2010, arXiv:1001.1531 [math.RT].

[Kel11] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities*, 2011, arXiv:1102.4148 [math.RT]; to appear in "Representation of Algebras and Related Topics", Proceedings of ICRA XIV, Tokyo, 2010.

[Kir89] A. N. Kirillov, *Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras*, J. Sov. Math. **47** (1989), 2450–2458.

[Kir95] ———, *Dilogarithm identities*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 61–142; arXiv:hep–th/9408113.

[KN92] A. Kuniba and T. Nakanishi, *Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 3487–3494; arXiv:hep–th/9206034.

[KN11] R. M. Kashaev and T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, 2011, arXiv:1104.4630 [math.QA].

[KNS94] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki, *Functional relations in solvable lattice models: I. Functional relations and representation theory*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994), 5215–5266; arXiv:hep–th/9309137.

[KNS09] ———, *T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras*, SIGMA **5** (2009), 108, 23 pages; arXiv:0909.4618 [math.QA].

[KR86] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Exact solution of the Heisenberg XXZ model of spin s*, J. Sov. Math. **35** (1986), 2627–2643.

[KR90] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras,*, J. Sov. Math. **52** (1990), 3156–3164.

[KS08] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, 2008, arXiv:0811.2435 [math.AG].

[Kun93] A. Kuniba, *Thermodynamics of the $U_q(X_r^{(1)})$ Bethe ansatz system with q a root of unity*, Nucl. Phys. **B389** (1993), 209–244.

[Lew81] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[Nag10] K. Nagao, *Donaldson-Thomas theory and cluster algebras*, 2010, arXiv:1002.4884 [math.AG].

[Nag11] ———, *Wall-crossing of the motivic Donaldson-thomas invariants*, 2011, arXiv:1103.2922 [math.AG].

[Nah07] W. Nahm, *Conformal field theory and torsion elements of the Bloch group*, Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 3–65, arXiv:hep–th/0404120.

[Nak03] H. Nakajima, *t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 259–274; arXiv:math/0204185 [math.QA].

[Nak09] H. Nakajima, *Quiver varieties and cluster algebras*, 2009, arXiv:0905.0002.

[Nak10a] T. Nakanishi, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, 2010, arXiv:1006.0632 [math.QA], to appear in "Representation of Algebras and Related Topics", Proceedings of ICRA XIV, Tokyo, 2010.

[Nak10b] T. Nakanishi, *T-systems and Y-systems, and cluster algebras: Tamely laced case*, Proceedings of the Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems (Singapore) (et al. Feigin, B. L., ed.), World Scientific, 2010, pp. 325–355; arXiv:1003.1180 [math.QA].

[Nak10c] Tomoki Nakanishi, *Dilogarithm identities and cluster algebras*, 2010, 第 55 回代数学シンポジウム報告集 (in Japanese), http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/sympo/100809/pdf/nakanishi.pdf.

[Nak10d] ———, *Dilogarithm identities in conformal field theory and cluster algebras*, RIMS Kokyuroku **1714** (2010), 26–31, (in Japanese).

[Nak11] T. Nakanishi, *Dilogarithm identities for conformal field theories and cluster algebras: Simply laced case*, Nagoya Math. J. **202** (2011), 23–43; arXiv:math.0909.5480 [math.QA].

[NK09] W. Nahm and S. Keegan, *Integrable deformations of CFTs and the discrete Hirota equations*, 2009, arXiv:0905.3776 [hep-th].

[NT10] T. Nakanishi and R. Tateo, *Dilogarithm identities for sine-Gordon and reduced sine-Gordon Y-systems*, SIGMA **6** (2010), 085, 34 pages; arXiv:1005.4199 [math.QA].

[NZ11] T. Nakanishi and A. Zelevinsky, *On tropical dualities in cluster algebras*, 2011, arXiv:1101.3736 [math.RA].

[Pla10a] P. Plamondon, *Cluster algebras via cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1004.0830 [math.RT].

[Pla10b] ———, *Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces*, 2010, arXiv:1002.4956 [math.RT].

[Rei09] M. Reineke, *Poisson automorphisms and quiver moduli*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2009), 653–667, arXiv:0804.3214 [math.RT].

[RTV93] R. Ravanini, R. Tateo, and A. Valleriani, *Dynkin TBA's*, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993), 1707–1727; arXiv:hep–th/9207040.

[Sch53] M. P. Schützenberger, *Une interprétation de certaines solution de l'equation functionelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 352–353.

[Sze09] A. Szenes, *Periodicity of Y-systems and flat connections*, Lett. Math. Phys. **89** (2009), 217–230; arXiv:math/0606377 [math.RT].

[Tat95] R. Tateo, *New functional dilogarithm identities and sine-Gordon Y-systems*, Phys. Lett. **B355** (1995), 157–164; arXiv:hep–th/9505022.

[Vol07] A. Y. Volkov, *On the periodicity conjecture for Y-systems*, Commun. Math. Phys. **276** (2007), 509–517; arXiv:hep–th/0606094.

[Wor00] S. L. Woronowicz, *Quantum exponential function*, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 873–920.

[Zag07] D. Zagier, *The dilogarithm function*, Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry II, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 3–65.

[Zam90] Al.B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models. scaling 3-state Potts and Lee-Yang models*, Nucl. Phys. **B342** (1990), 695–720.

[Zam91] Al. B. Zamolodchikov, *On the thermodynamic Bethe ansatz equations for reflectionless ADE scattering theories*, Phys. Lett. **B253** (1991), 391–394.

カイラルハミルトニアン構成法と表現論 – W 代数をめぐって –

荒川 知幸 (京大数理研)

1. W 代数にはいくつかの構成法があるが, カイラルハミルトニアン還元法 (BRST 還元法)[FF1] によるものが最も見通しが良い. この方法により単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその巾零元 $f \in \mathfrak{g}$ に対して, 付随する W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ ($k \in \mathbb{C}$ はレベル) が定義される [KRW]. カイラルハミルトニアン還元法によって定義される W 代数はアフィン Kac-Moody 代数や Virasoro 代数, さらに (スーパーの場合に拡張することにより) 殆んど全てのスーパーコンフォーマル代数を "含む" 代数系であり, 共形場理論を始め可積分系, 量子群, モジュラー表現論, 幾何学的 Langlands 対応, 4 次元のゲージ理論など様々な場面に現れる ([BS, Fre, Wan, Los, AGT, BFRF, Nak] 等を参照のこと). しかし, W 代数は一般には Lie 環ではなく頂点代数であり, その構造は極めて複雑である.

前回 [荒川] では主巾零元に付随する W 代数の表現論について講演させて頂いた. 今回は一般の巾零元に付随する W 代数の表現論を中心に, その後の進展お話ししたい.

以下, A 型の場合に話を限り,

$$G = SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}); \det A = 1\},$$
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} A = 0\}$$

とする. 従って $\mathfrak{g}$ の巾零元の共役類と n の分割の集合とは一対一に対応する.

2. W **代数の例.** $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン Kac-Moody 代数とする. $k \in \mathbb{C}$ について,

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$$

とおく. ただし, $\mathbb{C}_k$ は $\mathfrak{g}[t]$ が自明に, K が k 倍で作用する $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K \subset \widehat{\mathfrak{g}}$ の一次元表現. $V^k(\mathfrak{g})$ には $\mathbf{1} = 1 \otimes 1$ を真空ベクトルとし,

$$Y(x_{(-1)}\mathbf{1}, z) = x(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{(n)} z^{-n-1} \quad (x \in \mathfrak{g}).$$

となる頂点代数の構造が唯一定まる (cf. [Kac, FBZ]). ここで, $x_{(n)} = x \otimes t^n$, $Y(a, z)$ は a に対応する場. $V^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ に付随する普遍アフィン頂点代数と呼ばれる. $V^k(\mathfrak{g})$ 加群であることと, 滑らかな[1]レベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群であることは同値である.

巾零元 f が 0 の時, 定義により

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0) = V^k(\mathfrak{g})$$

である.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, $f \neq 0$, $k \neq -2$ とする. このとき $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は Virasoro 代数に付随する中心電荷 $c = 1 - \frac{6(k+1)^2}{k+2}$ の普遍頂点代数 Vir^c に同型となる[2].

---

[1] $x_{(n)} m = 0$ ($n \gg 0$, $\forall x \in \mathfrak{g}, m \in M$) を満たす $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 M を滑らかな加群と呼ぶ.

[2] (Vic^c 加群であることと, 中心電荷が c の滑らかな Virasoro 代数の加群であることは同値

次に $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$, $f=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(\leftrightarrow [2,1]\vdash 3))$ の場合を考える．このときは, $k\neq -3$ でなければ $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ は中心電荷 $c(k)=(2k+3)(3k+1)/(k+3)$ の Bershadsky-Polyakov 代数 $W_3^{(2)}$[Pol, Ber] に同型であり, 生成元 J_n, L_n $(n\in\mathbb{Z})$, $G_m^{\pm}$ $(m\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z})$ と関係式 (OPE)

$$
\begin{aligned}
&[J_m,J_n]=\frac{2k+3}{2}m\delta_{m+n,0},\quad [G_m^{\pm},G_n^{\pm}]=0,\\
&[J_m,G_n^{\pm}]=\pm G_{m+n}^{\pm},\quad [L_m,J_n]=nJ_{m+n},\quad [L_m,G_n^{\pm}]=(\frac{1}{2}m-n)G_{m+n}^{\pm},\\
&[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n,0}c(k),\\
&[G_m^{+},G_n^{-}]=3(J^2)_{m+n}+\frac{3(k+1)(m-n)}{2}J_{m+n}-(k+3)L_{m+n}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}(m^2-\frac{1}{4})(k+1)(2k+3)\delta_{m+n,0}
\end{aligned}
$$

を持つ．ここで, $J_n^2=\sum_{k<0}J_kJ_{n-k}+\sum_{k\geq 0}J_{n-k}J_k$.

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$, $f=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $(\leftrightarrow [3]\vdash 3))$ の時は $k\neq -3$ でなければ $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ は中心電荷 $2-\frac{24(k+2)^2}{k+3}$ の Zamalochikov の W_3 代数 [Zam] に同型である．

3. 頂点代数とアーク空間． ベクトル空間 V が頂点代数であるとは, $\mathbf{1}\in V$, $T\in\operatorname{End}V$, $Y(?:z):V\to(\operatorname{End}V)[[z,z^{-1}]]$, $a\mapsto a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}z^{-n-1}$, が存在し, 次を満たすことを言う．

- $a_{(n)}b=0$ $(n\gg 0,\ \forall a,b\in V)$
- $Y(Ta,z)=\frac{d}{dz}Y(a,z)$,
- $a_{(n)}\mathbf{1}=0$ $(n\geq 0)$ かつ $Y(a,z)\mathbf{1}|_{z=0}=a_{(-1)}\mathbf{1}=a$ $(\forall a\in V)$,
- $Y(\mathbf{1},z)=\mathrm{id}_V$,
- (Borcherds 恒等式)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\binom{p}{i}(a_{(r+i)}b)_{(p+q-i)}\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\binom{r}{i}\left(a_{(p+r-i)}b_{(q+i)}-(-1)^r b_{(q+r-i)}a_{(p+i)}\right)\quad(\forall p,q,r\in\mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

$\mathbf{1}$, T, $Y(?,z)$ はそれぞれ真空ベクトル, translation 作用素, state-field 対応と呼ばれる．

最も基本的な頂点代数は可換な頂点代数である．ここで, 頂点代数 V が可換であるとは次を満たすことを言う．

$$[a_{(m)},b_{(n)}]=0\quad(\forall a,b\in V,\ m,n\in\mathbb{Z}).$$

このとき V には積 $a.b=a_{(-1)}b$ と微分 $a\mapsto Ta$ により微分環, すなわち微分付きの可換な $\mathbb{C}$ 代数の構造が入る．また逆に, 任意の微分環には自然に可換な頂点代数の構造が入り, この対応によって可換な頂点代数と微分環を同一視することができる ([Bor]).

有限型のスキーム X に対してそのアーク空間 (cf. [石井]) を X_∞ と書く. $\mathcal{O}_{X_\infty}$ は微分環の層, つまり可換な頂点代数の層である. 特に X がアフィンスキーム $\operatorname{Spec} R$ の時, X_∞ の構造環 $R_\infty := \mathbb{C}[X_\infty]$ には可換な頂点代数の構造が入る.

V を一般の (非可換な) 頂点代数とすると, 自然なフィルトレーション

$$V = F^0V \supset F^1V \supset F^2V \supset \dots \quad \bigcap F^pV = 0$$

が存在し, 次が成立する ([Li]).

- $\operatorname{gr} V = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F^pV/F^{p+1}V$ には自然に可換な頂点代数の構造が入る.
-

(1)
$$R_V := V/F^1V = F^0V/F^1V$$

は $\operatorname{gr} V$ の部分環となり, $\operatorname{gr} V$ は微分環として R_V で生成される. すなわち微分環の全射

(2)
$$(R_V)_\infty \twoheadrightarrow \operatorname{gr} V$$

が存在する.

以下,

$$X_V := \operatorname{Spec}(R_V)$$

と定め, X_V を V の随伴多様体と呼ぶ ([A5]).

実際には $\operatorname{gr} V$ には可換な頂点代数の構造だけではなく頂点 Poisson 代数[3]の構造が入る. これを制限することにより $R_V = V/F^1V$ にポアソン代数の構造が入る. 従って V の随伴多様体はポアソンスキームである. 逆に, R が Poisson 代数なら R_∞ は自然に頂点 Poisson 代数の構造が入り, $(R_V)_\infty \twoheadrightarrow \operatorname{gr} V$ は頂点 Poisson 代数の射になる ([A5]). R_V は Zhu の Poisson 代数と呼ばれる.

実際の例では (2) の写像はしばしば同型になる. このような場合, V はその随伴多様体 X_V のアーク空間 $(X_V)_\infty$ の非可換変型とみなすことができる.

例 1 ($V^k(\mathfrak{g}) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, 0)$ の場合). このときは $F^1V^k(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}\{x_{(-n)}v; x \in \mathfrak{g}, n \geq 2, v \in V^k(\mathfrak{g})\}$. となる. 従って,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] = S(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} R_{V^k(\mathfrak{g})}, \quad x^1 \dots x^r \mapsto x^1_{(-1)} \dots x^r_{(-1)}\mathbf{1},$$

つまり $X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$. また $\operatorname{gr} V^k(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*_\infty]$ が成立する. 従って $V^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}^*$ のアーク空間の非可換変型の 1 パラメーター族である.

例 2 (一般の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の場合). $\{e, h, f\}$ を $\mathfrak{g}$ の巾零元 f に付随する $\mathfrak{sl}_2$ トリプルとする. このとき

$$S_f := f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$$

は軌道 $\operatorname{Ad} G.f$ に対する f における Slodowy の横断片と呼ばれる (S_f は各 $x \in S_f$ で G 軌道と横断的に交わる). $\mathfrak{g}^*(= \mathfrak{g})$ の Poisson 構造は S_f の Poisson 構造を誘導する [GG].

次が成立する ([De Sole-Kac, A.]).

(3)
$$R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} \cong \mathbb{C}[S_f], \quad \operatorname{gr} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[(S_f)_\infty]$$

従って $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ ($k \in \mathbb{C}$) は Slodowy の横断片 S_f のアーク空間 $(S_f)_\infty$ の非可換変型の 1 パラメーター族である.

---

[3]Coisson 代数あるいは Courant アルジェブロイドとも呼ばれる.

4. Zhu 代数と有限 W 代数. 次数付けされた頂点代数 $V=\bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_\Delta$ に対して,

$$\mathrm{Zhu}(V)=V/V\circ V$$

とおく. ただし, $V\circ V=\mathrm{span}\{a\circ b; a\in V \text{ は同次}\}$, $a\circ b=\sum_{i\geq 0}\binom{\Delta}{i}a_{(i-2)}b$ $(a\in V_\Delta)$. $a\in V$ の $\mathrm{Zhu}(V)$ での像を $o(a)$ 書くと $\mathrm{Zhu}(V)$ には次で (通常の)$\mathbb{C}$ 代数 $\mathrm{Zhu}(V)$ の構造が入る.

$$o(a).o(b)=\sum_{i\geq 0}\binom{\Delta_a}{i}o(a_{(i-1)}b).$$

$\mathrm{Zhu}(V)$ は V の Zhu 代数と呼ばれる.

V の最高ウエイト[4]既約表現 $M=\bigoplus_{d\geq d_0}M_{d_0}$ に対して, $M_{\mathrm{top}}=M_{d_0}$ とおくと M_{top} には $\mathrm{Zhu}(V)$ が自然に作用し, 対応 $M\mapsto M_{\mathrm{top}}$ により V の最高ウエイト既約表現と $\mathrm{Zhu}(V)$ の既約表現は一対一に対応する ([Zhu])

$\mathbb{C}$ 代数 A に対して $\mathrm{Zhu}(V)=A$ なる頂点代数 V を A のカイラリゼーションと言う.

例 3. $\mathrm{Zhu}(V^k(\mathfrak{g}))=U(\mathfrak{g})$. 従って $V^k(\mathfrak{g})$, $k\in\mathbb{C}$, は $U(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーションの 1 パラメーター族.

Slodowy の横断片 S_f に対し, その自然な量子化が存在することが知られている ([Kos, Lyn, dBT1, Pre1]). これを $(\mathfrak{g},f)$ に付随する有限 W 代数と呼び, $U(\mathfrak{g},f)$ と書く. 現在考察している A 型の場合, $U(\mathfrak{g},f)$ はヤンギアン $Y(\mathfrak{sl}_\mathfrak{n})$ の商代数として実現することができることが知られている ([BK1])

命題 ([FF1, dBT2, A2, DSK])**.** $\mathrm{Zhu}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f))\cong U(\mathfrak{g},f)$. *従って* $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$, $k\in\mathbb{C}$, *は有限* W *代数* $U(\mathfrak{g},f)$ *のカイラリゼーションの 1 パラメーター族.*

一般に Zhu 代数 $\mathrm{Zhu}(V)$ と Zhu の Poisson 代数には次の関係がある. $\mathrm{Zhu}(V)$ の自然なフィルトレーションを考えると Poisson 代数の全射

$$R_V\twoheadrightarrow \mathrm{gr}(\mathrm{Zhu}(V)) \tag{4}$$

が存在する. $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の場合は上の射は同型である.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[(S_f)_\infty] & \xleftarrow{\mathrm{gr}} & \mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)\\ {\scriptstyle\mathrm{Zhu}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{Zhu}}\\ \mathbb{C}[S_f] & \xleftarrow{\mathrm{gr}} & U(\mathfrak{g},f)\end{array}$$

5. カイラルハミルトニアン還元法と W 代数. 与えられた巾零元 f に対し, $\mathfrak{g}$ のパラボリック部分環 $\mathfrak{p}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ であって, f が $\mathfrak{p}$ の Levi 部分環 $\mathfrak{l}$ の主巾零元になるようなものが存在する (A 型の特殊性[5]). M を $\mathfrak{m}$ に対応する G の巾単部分群とする. このとき次のアフィン代数多様体の同型が存在する ([Kos, GG]).

$$M\times S_f\xrightarrow{\sim} f+\mathfrak{m}^\perp,\quad (g.x)\mapsto Ad(g).x. \tag{5}$$

ここで,

$$\mu:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{m}^* \tag{6}$$

[4]以下では ordinary representation の事を最高ウエイト表現と呼ぶ事にする.

[5]一般の場合の W 代数の定義については [KRW, A1] を参照のこと

を制限写像とすると μ は M の作用に関するモーメント写像である. 同型 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$ による巾零元 f の像を χ とすると $\chi|_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}^*$ は一点からなる M 軌道であり, $\mu^{-1}(\chi|_{\mathfrak{m}^*}) = f + \mathfrak{m}^{\perp}$. $\chi|_{\mathfrak{m}^*}$ は μ の正則値であることも分かり, したがって Slodowy の横断片はハミルトニアン還元法により構成される:

$$S_f \cong \mu^{-1}(\chi|_{\mathfrak{m}^*})/M. \tag{7}$$

同様に (5), (6) のアーク空間版 $M_\infty \times (S_f)_\infty \xrightarrow{\sim} (f+\mathfrak{m}^{\perp})_\infty$, $\mu_\infty : \mathfrak{g}^*_\infty \to \mathfrak{m}^*_\infty$ により,

$$(S_f)_\infty \cong \mu_\infty^{-1}(\chi_\infty|_{\mathfrak{m}^*_\infty})/M_\infty$$

を得る.

上のハミルトニアン還元法は BRST コホモロジーを用いて実現することができる ([KS]).

$$\mathbb{C}[S_f] \cong H^0(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m})\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m}^*), \{\bar{Q}, ?\}). \tag{8}$$

ここで $\bar{Q}$ はスーパー Poisson 代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m})\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m}^*)$ の $\{\bar{Q}, \{\bar{Q}, ?\}\} = 0$ を満たすある奇の元である. 0 次以外のコホモロジーの消滅も (5) と $\chi_{|\mathfrak{m}^*}$ が正則値であることから保証される.

これを量子化することも容易である [KS]. すなわち $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m})\otimes \bigwedge^{\bullet}(\mathfrak{m}^*)$ を, その自然な量子化であるスーパー代数 $U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^*)$ に置き換える. また元 $\bar{Q}$ の $U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^*)$ への自然な持ち上げ Q も存在する. Q は $Q^2 = 0$ を満たす奇の元であるので, (スーパーの意味で)$\operatorname{ad} Q^2 = 0$ である. このようにして有限 W 代数が構成される[6].

$$U(\mathfrak{g}, f) := H^0(U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}^*), \operatorname{ad} Q)$$

0 次以外のコホモロジーの消滅は associated graded である (8) の右辺のコホモロジーの消滅が保証する.

以上の構成のカイラリゼーション, あるいはアーク空間版がカイラル Hamiltonian 構成法 [FF1] である. $U(\mathfrak{g})\otimes \mathcal{C}l(\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{m}-)$ をその自然なカイラルゼーションである $V^k(\mathfrak{g})\otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t,t^{-1}])$ に置き換える. このときカイラルモーメント写像

$$V(\mathfrak{m}) \to V^k(\mathfrak{g})$$

($V(\mathfrak{m})$ は $\mathfrak{m}$ に付随するアフィン頂点代数) を用いて W 代数が定義される ([FF1, KRW]).

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) := H^0(V^k(\mathfrak{g})\otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{m}^*), Q_{(0)}).$$

ここで $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{m}^*)$ は $\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{m}^*$ に付随するフェルミオン Fock 空間. 通常の semi-infinite コホモロジーの記号を使うと. 右辺は $H^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathfrak{m}[t,t^{-1}], V^k(\mathfrak{g})\otimes \mathbb{C}_{\widehat{\chi}})$ である. ただし, $\operatorname{ch}\chi(x(m))$ は $\widehat{\chi}(x_{(m)}) = \delta_{m,-1}\chi(m)$ 定義される $\mathfrak{m}[t,t^{-1}]$ の指標. 構成から既に述べた頂点 Poisson 代数の同型 $\operatorname{gr}\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[(S_f)_\infty]$ が成立する ([A4]).

6. 臨界レベルにおける W 代数. $k = cri := -n$ を臨界レベルと言う. 臨界レベルでは $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論は劇的に変わる (cf. [AF1, AF2]).

頂点代数 V について,

$$Z(V) := \{a \in V; [a_{(m)}, b_{(n)}] = 0,\ \forall m, \in \mathbb{Z}, b \in V\}$$

を V の中心と言う. $Z(V)$ は V の可換な部分頂点代数である.

[6]通常の定義とは違うが同値であることを示すことができる [A2, D^{3}HK, BGK]

アフィン頂点代数の中心 $Z(V^k(\mathfrak{g}))$ は臨界レベル以外では自明である．臨界レベルでは次が成立する ([Hay, FF2, BD, EF]).

$$\operatorname{gr} Z(V^{cri}(\mathfrak{g})) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*_\infty]^{G_\infty} = \mathbb{C}[(\mathfrak{g}^*//G)_\infty].$$

f が $\mathfrak{g}$ の主巾零元 $f_{prin}(\leftrightarrow (n) \vdash n)$ の時, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ を $U(\mathfrak{g})$ の中心とすると,

$$U(\mathfrak{g}, f_{prin}) \cong \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$$

が成立することは良く知られている [Kos]. Feigin-Frenkel [FF2] はこの事実のカイラリゼーションとして頂点代数の同型

$$\mathcal{W}^{cri}(\mathfrak{g}, f_{prin}) \cong Z(V^{cri}(\mathfrak{g}))$$

が成立することを示した．

一般の巾零元 f の場合を考えよう．有限 W 代数 $U(\mathfrak{g}, f)$ について次が知られている．

- ([Pre2]) 自然な写像 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to Z(\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, f))$ は同型写像.
- $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ は自由 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ 加群

$U(\mathfrak{g}, f)$ の商代数 $U_{[0]}(\mathfrak{g}, f)$ を

$$U_{[0]}(\mathfrak{g}, f) := U(\mathfrak{g}, f))/Z(\mathfrak{g})_+ U(\mathfrak{g}, f)$$

で定める．このとき, 上の事実から

$$\operatorname{gr} U_{[0]}(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[S_f \cap \mathcal{N}]$$

が成立し, $U_{[0]}(\mathfrak{g}, f)$ は $S_f \cap \mathcal{N}$ の量子化であることが従う．ここで $\mathcal{N}$ は $\mathfrak{g}$ の巾零錘. $S_f \cap \mathcal{N}$ は既約かつ被約, 正規, 完全交差な代数多様体である ([Pre1]). $S_f \cap \mathcal{N}$ のその特異性は canonical であり[7], 従って [Mus], そのアーク空間は "性質の良い" ものになる．

定理 1 ([A6])**.**

(i) 自然な写像 $Z(V^{cri}(\mathfrak{g})) \to Z(\mathcal{W}^{cri}(\mathfrak{g}, f))$ は同型写像．さらに $\mathcal{W}^{cri}(\mathfrak{g}, f))$ は自由 $Z(V^{cri}(\mathfrak{g}))$ 加群.

(ii) $\mathcal{W}_{[0]}(\mathfrak{g}, f) := \mathcal{W}^{cri}(\mathfrak{g}, f)/Z(V^{cri}(\mathfrak{g}))_+ \mathcal{W}^{cri}(\mathfrak{g}, f)$ は単純頂点代数.

(iii) 頂点 *Poisson* 代数として, $\operatorname{gr} \mathcal{W}_{[0]}(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[(S_f \cap \mathcal{N})_\infty]$.

Springer 特異点解消を Slodowy 多様体に制限することによって $S_f \cap \mathcal{N}$ のシンプレクティック特異点解消が得られる [Gin]. Dodd-Kremnizer[DK] は $U(\mathfrak{g}, f)$ 加群を Slodowy 多様体上に局所化した．そのカイラリゼーションとして, 単純頂点代数 $\mathcal{W}_{[0]}(\mathfrak{g}, f)$ を Slodowy 多様体のアーク空間上に局所化することができる ([AKM, 桑原]).

7. W 代数の表現論. 再び k は任意の複素数とする．$V^k(\mathfrak{g})$ 加群 M に対し,

$$H_f^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(M) = H^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t, t^{-1}], M \otimes \mathbb{C}_{\widehat{\chi}})$$

とおく．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(V^k(\mathfrak{g}))$ であったので, 関手

$$V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(M)$$

が定まる．

$\mathcal{O}_k$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の BGG 圏とすると, $\mathcal{O}_k$ は $V^k(\mathfrak{g})$-Mod の充満部分圏とみなすことができる．$\mathbf{KL}_k$ を G 可積分な加群のなす $\mathcal{O}_k$ の充満部分圏とする．

[7] f が副正則元の時は, 良く知られているように (cf. [松澤]), $S_f \cap \mathcal{N}$ は A 型の単純特異点を持つ.

定理 2 ([A4])**.** $H_f^{\frac{\infty}{2}+i}(M)=0$ *($\forall i\neq 0,\ \forall M\in \mathbf{KL}_k$). 従って* $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(?):\mathbf{KL}_k\to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$*-Mod は完全関手.*

$\mathbf{L}_\lambda$ を最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイト既約表現とする. ある種の regularity が満たされれば $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathbf{L}_\lambda)$ が既約 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ 加群であることが示される. しかし, 全ての最高ウエイト既約加群が $\mathbf{L}_\lambda\in \mathbf{KL}_k$ を用いてこのように実現されるわけではない. また, $\mathbf{L}_\lambda$ が G 可積分でなければコホモロジーの消滅は必ずしも成立しない. (ただし $H_f^{\frac{\infty}{2}+i}(M)=0$ $(i>0)$ は成立するので $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(?):\mathcal{O}_k\to\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$-Mod は右完全である).

そこで [FKW] に従い上のコホモロジー関手を少し修正することを考える. $\widehat{\mathfrak{g}}\supset\mathfrak{g}\supset\mathfrak{p}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}$ であった. $\mathcal{O}_{k,0}$ を Levi 部分環 $\mathfrak{l}$ の作用に関して可積分な $\mathcal{O}_k$ の対象からなる充満部分圏とする.

定理 3 ([A3])**.** $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(?)$ *の定義を少し修正することにより次の性質を満たす BRST コホモロジー関手* $H_{f,mod}^{\frac{\infty}{2}+0}(?):\mathcal{O}_{k,0}\to\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$*-Mod を構成することができる.*

(i) $H_{f,mod}^{\frac{\infty}{2}+i}(M)=0$ *($\forall i\neq 0, \forall M\in\mathcal{O}_{k,0}$).*

(ii) $H_{f,mod}^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathbf{L}_\lambda)\neq 0 \iff \mathrm{Dim}((\mathbf{L}_\lambda)_{\mathrm{top}})=\dim\mathfrak{m}(=\frac{1}{2}\dim AdG.f)$*. ただし, $\mathrm{Dim}\,M$ は $\mathfrak{g}$ 加群 M の Gelfand-Kirillov 次元. またこのとき* $H_{f,mod}^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathbf{L}_\lambda)$ *は既約. 更に任意の $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の最高ウエイト既約表現はこのようにして得られる.*

コホモロジーの消滅と Euler-Poincare 原理により $H_{f,mod}^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathbf{L}_\lambda)$ の指標は $\mathbf{L}_\lambda$ の指標を用いて表すことができる. 一方, $k\neq cri$ の時, $\mathbf{L}_\lambda$ の指標は柏原-谷崎 [KT] により決定されている. 従って定理 3 は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の全ての最高ウエイト既約表現の指標を記述する.

注意. 定理の証明において, 定理 (2) の非零性の Gelfand-Kirillov 次元による判定条件は松本 [Mat2] の有限 W 代数に対する同様の結果 (の証明) に帰着する. また既約性と既約表現の分類は Brundan-Kleshchev[BK2] の有限 W 代数に対する同様の結果に帰着する.

8. 許容表現と (Frenkel-)Kac-脇本予想. Kac-Moody 代数や Virasoro 代数の重要性の一つに, それらが可積分表現や極少系列表現のような "性質の良い" 表現を持つことが挙げられる. W 代数がこのような表現を持つかどうかは重要な問題である. 頂点代数の理論においては, この問題は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ は性質の良い単純商を持つか, と言う問いと等価になる.

最も性質の良い頂点 (作用素) 代数は, 有理的かつ C_2 有限な頂点代数である. ここで,

- 頂点代数 V が有理的 $\underset{def}{\iff}$ V 加群は全て完全可約
- 頂点代数 V が C_2 有限 $\underset{def}{\iff}$ $\dim R_V<\infty$ ((1) を見よ).

C_2 有限な頂点代数については以下の事実が知られている.

(i) V の既約表現の同型類は有限個[8]

(ii) V の任意の既約表現は最高ウエイト表現

(iii) 対応する任意のコンパクト Riemann 面上のコンフォーマルブロックはコヒーレント

(iv) テンソル積の理論が構築可能 ([Miy]...)

[8](4) から従う

さらに頂点代数 V が有理的かつ C_2 有限ならその表現の (修正された) 指標の張る空間は自然な $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用について不変となることも知られている [Zhu].

さてアフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ の単純商は (通常の記号で) $\mathbf{L}_{k\Lambda_0}$ である. $\mathbf{L}_{k\Lambda_0}$ には商頂点代数の構造が入る. いつ $\mathbf{L}_{k\Lambda_0}$ が "良い" 性質を持つかを考えよう.

$\widehat{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイト既約表現 $\mathbf{L}_\lambda$ が許容表現 (admissible representation) であるとは次を満たすことを言う ([KW1]).

(i) λ は正則かつ支配的, つまり $\langle \lambda+\widehat{\rho}, \alpha^\vee\rangle \neq 0, -1, -2, \dots$ $(\forall \alpha \in \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}_+)$.

(ii) $\mathbb{Q}\widehat{\Delta}(\lambda) = \mathbb{Q}\widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}$, ここで $\widehat{\Delta}(\lambda) = \{\alpha \in \widehat{\Delta}^{\mathrm{re}}; \langle \lambda+\widehat{\rho}, \alpha^\vee\rangle \in \mathbb{Z}\}$.

定義から許容表現 $\mathbf{L}_\lambda$ は Weyl-Kac 型の指標公式を持つ.

$$\mathrm{ch}\, \mathbf{L}_\lambda = \sum_{w \in \widehat{W}(\lambda)} \frac{(-1)^{\ell_\lambda(w)} e^{w\circ\lambda}}{\prod_{\alpha\in\widehat{\Delta}_+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha}}$$

ここで, $\widehat{W}(\lambda) = \langle s_\alpha; \alpha \in \widehat{\Delta}(\lambda)\rangle \subset \widehat{W}$. $k \in \mathbb{C}$ を固定した時, レベル k の単純な許容表現は高々有限個. またその (修正された) 指標の張る空間は自然な $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で閉じている.

次の事実が知られている ([KW1]).

$$\mathbf{L}_{k\Lambda_0} \text{ が許容表現} \iff k+n = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N},\ (p,q)=1,\ p \geq n.$$

上の条件を満たすとき, k を許容数 (admissible number) と言う.

指標のモジュラー不変性にもかかわらず, 可積分表現でない許容アフィン頂点代数 $\mathbf{L}_{k\Lambda_0}$ は C_2 有限や有理的にはならない (例 4 参照のこと). しかし, 許容表現は C_2 有限かつ有理的な W 代数を創造する, というのが次に述べる Kac-脇本の予想である.

$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の単純商とする.

予想 (Kac-脇本 [KW2]). k を分母が q の許容数とする ($k+n = p/q \in \mathbb{Q}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$, $p \geq n$). f が分割 $\begin{cases} [q,q,\dots,q,r] \vdash n & (q \leq n) \\ [n] \vdash n & (q \geq n) \end{cases}$ に対応した巾零元の時,

(i) $H_f^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathbf{L}_{k\Lambda_0}) \cong \begin{cases} \mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f) & (i=0) \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$

(ii) $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は有理的かつ C_2 有限である.

定理 4 ([A2, A3])**.** 上の予想の *(1)* は正しい.

k と f が予想の条件を満たすとき, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ が指標が $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な表現を持つことは定理 3 から従う.

9. ***W* 代数の随伴多様体.** 我々の設定の下では R_V は有限生成かつ V には次数付けが入っている. $X_V = \mathrm{Spec}(R_V)$ であったので,

$$V \text{ が } C_2 \text{ 有限} \iff \dim X_V = 0 \iff |X_V| = \{pt\} (= \{0\})$$

となる.

注意 ([A5]). $|X_V| = \{0\} \iff |\mathrm{Spec}(\mathrm{gr}\, V)| = \{0\}$. 従って C_2 有限性は自然な有限性条件であると言える.

例 4. $\mathbf{L}_{k\Lambda_0}$ の随伴多様体 $X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}$ は $X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ の G 不変, conic な Poisson scheme. また, 次が成立する.

$$\mathbf{L}_{k\Lambda_0} \text{ が } C_2 \text{ 有限 } (\iff |X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}| = \{0\}) \iff k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \iff \mathbf{L}_{k\Lambda_0} \text{ が可積分}$$

(3) から

$$X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)} \cong S_f$$

である．従って $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)}$ は S_f の部分代数多様体である．この同型の下で $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)}$ への $\mathbb{C}^*$ の作用は $\mathbb{C}^*$ の S_f への自然な作用と一致し，この $\mathbb{C}^*$ の作用に関して，f が S_f の唯一の固定点である (cf. [松澤])．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ の単純商 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)$ の随伴多様体 $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)}$ は $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)}$ の C^* 不変な部分代数多様体であるので，

$$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f) \text{ が } C_2 \text{ 有限} \iff |X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f)}| = \{f\}$$

となる．

定理 5 ([A4])**.** $X_{H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathbf{L}_{k\Lambda_0})} \cong X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}} \cap S_f$.

定理 5 より，特に次が成立する (cf. [Mat1])．

$$H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathbf{L}_{k\Lambda_0}) \neq 0 \iff \overline{\operatorname{Ad} G.f} \subset |X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}| \tag{9}$$

10. Feigin-Frenkel 予想と許容表現の随伴多様体, W 代数の C_2 有限性. 次の事実は Feigin-Frenkel によって予想されていた (未出版, $\mathfrak{sl}_2$ の時には [FM] で証明済)．

定理 6 ([A4])**.** *k を許容数とするとき，$|X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}| \subset \mathcal{N}$.*

(9) より，どの巾零元 f に関して $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathbf{L}_{k\Lambda_0})$ が零になるかを計算できれば，$|X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}|$ がどの巾零軌道を含むか分かる．コホモロジーの消滅 (定理 2) よりこれは可能である．

定理 7 ([A4])**.** *k を分母を $q \in \mathbb{N}$ とする許容数とする ($k+n = p/q$, $(p,q)=1$, $p \geq n$)．このとき，*

$$|X_{\mathbf{L}_{k\Lambda_0}}| = \mathcal{N}_q := \{x \in \mathfrak{g}; (\operatorname{ad} x)^{2q} = 0\}.$$

注意．$\mathcal{N}_1 = \{0\}$ (可積分表現の場合)，$\mathcal{N}_q = \mathcal{N}$ ($q \geq n$, 非退化許容表現の場合) である．

さて．f_q を $\begin{cases} [n] \vdash n & (q \geq n) \\ [q,\dots,q,s] \vdash n & (q \leq n) \end{cases}$ に対応する巾零元とすると

$$\mathcal{N}_q = \overline{\operatorname{Ad} G.f_q}$$

となることが知られている．(特に $\mathcal{N}_q$ は既約である．) この事実と S_f の G 軌道との横断性より

$$\mathcal{N}_q \cap S_{f_q} = \{f_q\}.$$

これと定理 4, 5 より次を得る．

$$|X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f_q)}| = |X_{H_{f_q}^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathbf{L}_{k\Lambda_0})}| = \mathcal{N}_q \cap S_{f_q} = \{f_q\}.$$

以上により (Frenkel)-Kac-脇本予想の C_2 有限性に関する主張が証明された:

定理 8 ([A4])**.** *k を分母を q とするを $\widehat{\mathfrak{g}}$ の許容数とすると，単純頂点作用素代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g},f_q)$ は C_2 有限である．*

References

[AF1] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. On the restricted Verma modules at the critical level. *to appear in Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008. arXiv:0812.3334v1[math.RT].

[AF2] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. The linkage principle for restricted critical level representations of affine Kac-Moody algebras. *preprint*, 2009. arXiv:0909.4214[math.RT].

[AGT] Luis F. Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa. Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 91, No. 2, pp. 167–197, 2010.

[AKM] T. Arakawa, T. Kuwabara, and F. Malikov. *to appear.*

[A1] T. Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, Vol. 130, No. 3, pp. 435–478, 2005.

[A2] T. Arakawa. Representation theory of W-algebras. *Invent. Math.*, Vol. 169, No. 2, pp. 219–320, 2007.

[A3] T. Arakawa. Representation theory of W-algebras, II. *to appear in Adv. Stud. Pure Math.* arXiv:0802.1564v2 [math.QA].

[A4] T. Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2-cofiniteness of W-algebras. *preprint.* arXiv:1004.1554[math.QA].

[A5] T. Arakawa. A remark on the C_2-cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z. (online first)*, 2010. arXiv:1004.1492[math.QA].

[A6] T. Arakawa. W-algebras at the critical level. *preprint*, 2011.

[BD] A. A. Beilinson and V. G. Drinfeld. Quantization of Hitchin's fibration and Langlands' program. In *Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993)*, Vol. 19 of *Math. Phys. Stud.*, pp. 3–7. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[Ber] Michael Bershadsky. Conformal field theories via Hamiltonian reduction. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 139, No. 1, pp. 71–82, 1991.

[BFRF] Alexander Braverman, Boris Feigin, Leonid Rybnikov, and Michael Finkelberg. A finite analog of the AGT relation I: finite W-algebras and quasimaps' spaces. *preprint.* arXiv:1008.3655v1 [math.AG].

[BGK] Jonathan Brundan, Simon M. Goodwin, and Alexander Kleshchev. Highest weight theory for finite W-algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, No. 15, pp. Art. ID rnn051, 53, 2008.

[BK1] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Shifted Yangians and finite W-algebras. *Adv. Math.*, Vol. 200, No. 1, pp. 136–195, 2006.

[BK2] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Representations of shifted Yangians and finite W-algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. 196, No. 918, pp. viii+107, 2008.

[Bor] Richard E. Borcherds. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 83, No. 10, pp. 3068–3071, 1986.

[BS] P. Bouwknegt and K. Schoutens, editors. *$\mathcal{W}$-symmetry*, Vol. 22 of *Advanced Series in Mathematical Physics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1995.

[dBT1] Jan de Boer and Tjark Tjin. Quantization and representation theory of finite W algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 158, No. 3, pp. 485–516, 1993.

[dBT2] Jan de Boer and Tjark Tjin. The relation between quantum W algebras and Lie algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 160, No. 2, pp. 317–332, 1994.

[DK] Christopher Dodd and Kobi Kremnizer. A Localization Theorem for Finite W-algebras. arXiv:0911.2210v1[math.RT].

[D^{3}HK] A. D'Andrea, C. De Concini, A. De Sole, R. Heluani, and V. Kac. Threee equivalent definitions of finite W-algebras. *appendix to* [DSK], 2006.

[DSK] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W-algebras. *Japan. J. Math.*, Vol. 1, No. 1, pp. 137–261, 2006.

[EF] David Eisenbud and Edward Frenkel. Appendix to [Mus]. 2001.

[FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, Vol. 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[FF1] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, Vol. 246, No. 1-2, pp. 75–81, 1990.

[FF2] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel′fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[FKW] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W-algebras via quantized Drinfel′d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 147, No. 2, pp. 295–328, 1992.

[FM] Boris Feigin and Fyodor Malikov. Modular functor and representation theory of $\widehat{\mathrm{sl}}_2$ at a rational level. In *Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, Vol. 202 of *Contemp. Math.*, pp. 357–405, Providence, RI, 1997. Amer. Math. Soc.

[Fre] Edward Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*, Vol. 103 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[GG] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, No. 5, pp. 243–255, 2002.

[Gin] Victor Ginzburg. Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices. *Represent. Theory*, Vol. 13, pp. 236–271, 2009.

[Hay] Takahiro Hayashi. Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. *Invent. Math.*, Vol. 94, No. 1, pp. 13–52, 1988.

[Kac] Victor Kac. *Vertex algebras for beginners*, Vol. 10 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[Kos] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, Vol. 48, No. 2, pp. 101–184, 1978.

[KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 241, No. 2-3, pp. 307–342, 2003.

[KS] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, Vol. 176, No. 1, pp. 49–113, 1987.

[KT] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pp. 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.

[KW1] V. G. Kac and M. Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, Vol. 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[KW2] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W-algebras. *Transform. Groups*, Vol. 13, No. 3-4, pp. 671–713, 2008.

[Li] Haisheng Li. Abelianizing vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 259, No. 2, pp. 391–411, 2005.

[Los] Ian Losev. Finite w-algebras. *preprint*. arXiv:1003.5811.

[Lyn] T. E. Lynch. *Generalized Whittaker vectors and representation theory*. PhD thesis, M.I.T., 1979.

[Mat1] Hisayosi Matumoto. Whittaker vectors and associated varieties. *Invent. Math.*, Vol. 89, No. 1, pp. 219–224, 1987.

[Mat2] Hisayosi Matumoto. Whittaker modules associated with highest weight modules. *Duke Math. J.*, Vol. 60, No. 1, pp. 59–113, 1990.

[Miy] Masahiko Miyamoto. Modular invariance of vertex operator algebras satisfying $C\bar{\mathfrak{b}}2$-cofiniteness. *Duke Math. J.*, Vol. 122, No. 1, pp. 51–91, 2004.

[Mus] Mircea Mustaţă. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Invent. Math.*, Vol. 145, No. 3, pp. 397–424, 2001. With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel.

[Nak] Hiraku Nakajima. Handsaw quiver varieties and finite w-algebras. *preprint*. arXiv:1107.5073.

[Pol] A. M. Polyakov. Gauge transformations and diffeomorphisms. *Internat. J. Modern Phys. A*, Vol. 5, No. 5, pp. 833–842, 1990.

[Pre1] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, Vol. 170, No. 1, pp. 1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.

[Pre2] Alexander Premet. Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal. *J. Eur. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 3, pp. 487–543, 2007.

[Wan] Weiqiang Wang. Nilpotent orbits and finite w-algebras. *preprint*. arXiv:0912.0689.

[Zhu] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 1, pp. 237–302, 1996.

[Zam] , A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory *Teoret. Mat. Fiz.*, Vol. 65, No. 3, pp, 347–359, 1985.

[桑原] 桑原敏郎. 本総合分科会における講演.
[荒川] 荒川知幸. Frenkel-kac-wakimoto 予想 と w 代数の表現論. 2004. 2004 年度秋季総合分科会特別講演 (無限可積分系).
[松澤] 松澤淳一. 特異点とルート系. すうがくの風景 6. 朝倉書店, 2002.
[石井] 石井志保子. 弧空間とナッシュ問題. 「数学」 第 62 巻. 2010.