 日本数学会

2011年度年会

無限可積分系セッション
講演アブストラクト

2011年3月

於 早稲田大学

無 限 可 積 分 系

21日(月) 第V会場

9:30~12:00

- 1 有田親史(九大数理)‡ $U_q(su(2))$ に付随する AKLT 模型の基底状態と相関関数 15
茂木康平(岡山光量子研)
- 2 有田親史(九大数理)‡ 多成分排他過程におけるジェネレータ間の関係式 15
A. Ayer (カリフォルニア大)
K. Mallick (サクレ研)
S. Prohac (ミュンヘン工科大)
- 3 中筋麻貴(津田塾大学芸)‡ Factorial Schur function と six-vertex model 15
D. Bump (Stanford Univ.)
P. McNamara (Stanford Univ.)
- 4 出口哲生(お茶の水女大理)‡ XXZ 鎖のループ代数対称性と超可積分カイラルボツ模型の量子逆散乱
問題 20
- 5 桑野泰宏 ‡ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 対称模型の形状因子 II — $n = 2$ のいくつかの公式 15
(鈴鹿医療科学大医用工)
- 6 T. Lam (Michigan 大)* Box-basket-ball Systems 10
P. Pylyavskyy (Minnesota 大)
坂本玲峰(東京理大理)
- 7 尾角正人(阪大基礎工)* 艦装配位の安定化と Littlewood–Richardson タブロー 10
坂本玲峰(東京理大理)
- 8 小島武夫(山形大工)‡ Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl_N})$ face model の無限転送行列の対角化 10
- 9 高木太一郎(防衛大)‡ Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton
国場敦夫(東大総合文化) 15

13:00~14:00 特別講演

- 荒川知幸(京大数理研)‡ さまざまな W 代数とその表現

22日(火) 第V会場

9:00~12:00

- 10 野邊 厚(千葉大教育)‡ トロピカル Hesse 曲線の加法公式 15
- 11 星野 歩(上智大理工)‡ C_n 型 Macdonald 対称多項式の tableau 和表示 10
柴原 淳(東大数理)
白石潤一(東大数理)
- 12 井ノ口順一(山形大理)‡ 平面離散曲線の edge tangential flow と semi-discrete mKdV 方程式 ... 20
梶原健司(九大数理)
松浦 望(福岡大理)
太田泰広(神戸大理)
- 13 大山陽介(阪大情報)‡ 超幾何型 q -差分方程式の退化について 15

14	竹山美宏 (筑波大数理物質) †	多重ゼータ値の q 類似が満たす 2 次関係式	20
15	名古屋創 (神戸大理) †	量子 Painlevé 方程式と KZ 方程式の関係について	15
16	山田泰彦 (神戸大理) †	量子 Fuji-Suzuki-Tsuda 方程式とインスタントン分配関数	15
17	竹村剛一 (中大理工) †	Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities	20
18	高崎金久 (京大人間環境) †	無分散変形 KP 階層の新しい簡約	15

23日(水) 第V会場

9:00~12:00

19	藤健太 (神戸大理) †	パウルヴェ第3方程式のラックス形式	15
20	鈴木貴雄 (神戸大理) †	$A_{2n+1}^{(1)}$ 型高階パウルヴェ系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解	15
21	津田照久 (九大数理) †	KP/UC階層とパウルヴェ方程式	15
22	津田照久 (九大数理) †	UC階層とモノドロミー保存変形, 超幾何函数	15
23	増田哲 (青学大理工) †	離散冪函数の明示公式	15
24	村田嘉弘 (長崎大経済) †	パウルベ第6方程式の岡本変換群に対応する行列型パウルベ方程式のベックルト変換について	15
25	金子和雄 (四日市大関孝和研) *	2次元退化 Garnier 系 $G(23)$ における対称解と線型モノドロミ	15
26	K. D. Matsumoto (早大基幹理工) †	Relations between dynamical braces and dynamical Yang-Baxter maps	15
27	澁川陽一 (北大理工) †	Dynamical braided monoids and dynamical Yang-Baxter maps	15
28	神谷徳昭 (会津大総合数理) † 澁川陽一 (北大理工)	Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous pre-systems	15

14:15~15:30

29	伊藤雅彦 (東京電機大未来) † 石川雅雄 (鳥取大教育) 岡田聡一 (名大多元数理)	A compound determinant identity for rectangular matrices	15
30	石川雅雄 (鳥取大教育) † 田川裕之 (和歌山大教育) Jiang Zeng (Univ. Lyon 1)	Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants	15
31	渡邊隆子 (お茶の水女大人間文化創成) †	$sl(2)$ ループ代数の可約な有限次元最高ウェイト表現の具体的構成	10
32	河澄響矢 (東大数理) † 久野雄介 (広島大理)	The Lie algebra of linear chord diagrams	15
33	山根宏之 (阪大情報) * N. Andruskiewitsch (コルドバ大) I. Angiono (コルドバ大)	Defining relations of generalized quantum algebras having $ABCD$ -type super root systems	15

16:00~17:00 特別講演

	前野俊昭 (京大工) *	Alcove path と affine Weyl 群上の非可換微分構造	
--	--------------	--------------------------------------	--

$U_q(su(2))$ に付随する AKLT 模型 の基底状態と相関関数

有田親史 (九州大学)

茂木康平 (岡山光量子科学研究所)

代表的な 1 次元量子スピン模型であるハイゼンベルグ鎖は、スピンの半奇数と整数では振る舞いが著しく異なる。スピンの半奇数の場合、無質量励起であるのに対し、整数の場合には有質量励起となる (Haldane gap)。ハイゼンベルグ鎖そのものではないが、整数スピン系の物理的性質を調べるために導入されたのが AKLT (Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki) 模型である。

今回、量子群 $U_q(su(2))$ 対称性をもつ整数スピン- S AKLT 模型

$$\mathcal{H} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_L} \sum_{J=S+1}^{2S} C_J(k, k+1) (\pi_J)_{k, k+1}, \quad (1)$$

について考察した。ここで、 $C_J(k, k+1) > 0$ であり、 $(\pi_J)_{k, k+1}$ は k 番目と $(k+1)$ 番目に作用する $V_S \otimes V_S$ から V_J (V_J は $U_q(su(2))$ の $(2j+1)$ 次元最高ウェイト既約表現空間) への射影演算子

$$\begin{aligned} \pi_J = & \sum_{m_1, m_2, m'_1, m'_2=0}^S \begin{bmatrix} S & S & J \\ m_1 & m_2 & m_1 + m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S & J \\ m'_1 & m'_2 & m'_1 + m'_2 \end{bmatrix} \\ & \times \delta_{m_1+m_2, m'_1+m'_2} |S; m'_1\rangle \langle S; m_1| \otimes |S; m'_2\rangle \langle S; m_2|, \end{aligned} \quad (2)$$

である。ここで、 $|j; k\rangle (\langle j; k|)$, $k = -j, \dots, j$ は V_j の基底 (双対基底) ベクトルであり、 $\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & J \\ m_1 & m_2 & m \end{bmatrix}$ は q -Clebsch Gordan 係数。

この模型の基底状態の厳密な表示を導出した [1,2]。

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N_a}, \quad bb^\dagger - qb^\dagger b = q^{-N_b}, \quad (3)$$

$$[N_a, a] = -a, \quad [N_a, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N_b, b] = -b, \quad [N_b, b^\dagger] = b^\dagger. \quad (4)$$

を満たす q -boson a, b を用いて基底状態 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \prod_{k \in \mathbb{Z}_L} \prod_{m=1}^S (q^m a_k^\dagger b_{k+1}^\dagger - q^{-m} b_k^\dagger a_{k+1}^\dagger) |\text{vac}\rangle, \quad (5)$$

と表わされる。このような表示は Schwinger boson 表示と呼ばれる。更にこの表示は次の行列積表示と等価である

$$|\Psi\rangle = \text{Tr}[g_1 * g_2 * \cdots * g_{L-1} * g_L]. \quad (6)$$

本研究はグローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」および科研費 (若手 (B) 22740106) の支援を受けている。

ここで g_k は k 番目のサイトに作用する、ベクトルを成分に持つ $(S+1) \times (S+1)$ 行列であり、その行列成分は

$$g_k(i, i') = (-1)^{S-i} q^{(i+i'-S)(S+1)/2} \sqrt{\begin{bmatrix} S \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ i' \end{bmatrix} [S-i+i']! [S+i-i']! |S; i'-i\rangle_k} \\ =: h_{ii'} |S; i'-i\rangle_k, \quad (0 \leq i, i' \leq S), \quad (7)$$

で与えられる ($[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$, $[k]! = \prod_{j=1}^k [j]$)。また、二つの $(S+1) \times (S+1)$ ベクトル値行列 $x = (|x_{jk}\rangle)_{j,k=0}^S$, $y = (|y_{jk}\rangle)_{j,k=0}^S$ に対し、 \star は $x \star y = (\sum_{u=0}^S |x_{ju}\rangle \otimes |y_{uk}\rangle)_{j,k=0}^S$ なる演算である。

この行列積表示を元に、相関関数を以下のようにして定式化することができる。行列 g と $g_k^\dagger(i, i') = h_{ii'} |S; i'-i\rangle_k$ を用いて行列 G を

$$G = g^\dagger \otimes g, \quad (8)$$

作用素 A に対する行列 G_A を

$$(G_A) = g^\dagger \otimes (Ag), \quad (9)$$

と定める。このとき、例えば基底状態のノルム、一点関数、二点関数はそれぞれ、

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \text{Tr} G^L, \quad \langle A \rangle = \frac{\text{Tr} G_A G^{L-1}}{\text{Tr} G^L}, \quad \langle A_1 B_r \rangle = \frac{\text{Tr} G_A G^{r-2} G_B G^{L-r}}{\text{Tr} G^L}, \quad (10)$$

と表わされる。上の表示からわかるように、相関関数は G 行列の固有値と固有ベクトルを求めることに帰着するため、これらを明示的に求めることにより、相関関数を厳密に解析した [2]。例えば、スピンスピン相関関数 $\langle S_j^z S_k^z \rangle$ の相関長が

$$\zeta = \left(\ln \frac{[S+2]}{[S]} \right)^{-1}, \quad (11)$$

であることを示すことができた。

References

- [1] K. Motegi, Phys. Lett. A 374 (2010) 3112.
- [2] C. Arita and K. Motegi, arXiv:1009.4018, Spin-spin correlation functions of the q -VBS state of an integer spin model.

多成分排他過程における ジェネレータ間の関係式

有田 親史 (九大数理)*¹
 A. Ayer (カリフォルニア大)
 K. Mallick (サクレー研)
 S. Prolhac (ミュンヘン工大)

1次元非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP) は相互作用する多粒子の確率モデルの典型例である。Yang-Baxter 関係式を満たすという意味で“量子”可積分系の仲間である。ASEPの多成分版(すなわち粒子の種類を増やした場合)であってかつ可積分性が保たれている場合を考える [AR]。

各サイトの状態は自然数値 (= 占有している粒子の種類) として粒子の交換 $xy \rightarrow yx$ が遷移率 $p(x < y)$ または $q(x > y)$ で起こるとする。確率ベクトル $|P\rangle$ の時間発展はマスター方程式 $\frac{d}{dt}|P\rangle = M|P\rangle$ に従う。ジェネレータ行列 M は固有値 0 を持ち、対応する固有ベクトルは定常状態である。0 以外の固有値の実部は負であり、定常状態への緩和を特徴づけている。右固有ベクトルは物理として意味を持っているが、左固有ベクトルは直接物理としての情報を与えてくれないことに注意する。周期境界条件 (サイト数を L とする) では系全体で各種類の粒子数は保存し、それ故に M は各種類 n の粒子数 m_n で指定されるセクター $s = (m_1, \dots, m_{N+1})$ のブロック行列 M_s から成る: $M_s \in \text{End } V_s$, $V_s = \{|j_1 \dots j_L\rangle \mid \#\{j_x = n\} = m_n, m_1 + \dots + m_{N+1} = L\}$ 。伝統的に $N + 1$ 種類目の粒子を空と見なし、 N 成分 ASEP と呼ぶ。

セクター t をセクター $s = (m_1, \dots, m_{N+1})$ の粒子種の同一視によって得られるセクター $t = (m_1, \dots, m_n + m_{n+1}, \dots, m_{N+1})$ とすると $\text{Spec } M_s \supset \text{Spec } M_t$ が成り立つ [AKSS]。ここで Spec は固有値の集合を意味する。証明は自明な同一視行列 φ_{ts} が満たす関係式

$$\varphi_{ts} M_s = M_t \varphi_{ts}$$

による。もし誰かが固有値 E に対応するセクター s の右固有ベクトル $|E\rangle$ ($M_s |E\rangle = E |E\rangle$) の形を知っているならば、ただちに同じ固有値 E を持つセクター t での右固有ベクトル $\varphi_{ts} |E\rangle$ が手に入る。ところが s は t よりも粒子の構成が複雑なセクターであるため s の固有ベクトルを求めるのは t のそれよりも難しい。では逆に t の右固有ベクトルを s へ持ち上げる方法はないだろうか? あるいは

$$M_s \psi_{st} = \psi_{st} M_t \tag{1}$$

を満たす行列 ψ_{st} を構成できるか? というのが本研究のモチベーションである。

[AKSS] とは独立に [PEM] において定常状態が行列積の方法によって求められた。すなわち固有値 0 に対応する固有ベクトルの成分 (配列 $j_1 \dots j_L$ が実現する確

本研究はグローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」および科研費 (若手 (B) 22740106) の支援を受けている。

*¹e-mail: arita@math.kyushu-u.ac.jp

率)は $P(j_1 \cdots j_L) = \text{Tr}(X_{j_1} \cdots X_{j_L})$ と書ける。ここで X_j は無有限次元行列であり次の基本となる行列 δ, ϵ, A および単位行列 $\mathbf{1}$ で構成される:

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & & & \\ & 0 & r_2 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ r_1 & 0 & & & \\ & r_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & q & & & \\ & & q^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

ただし $r_i = \sqrt{1 - q^i}$ 。

[PEM]の方法を拡張し、関係式(1)を満たす行列 ψ_{st} を構成することができた。完全ASEP($q = 0$)の場合、 a_{JK} を $\delta, \epsilon, A, \mathbf{1}$ のテンソル積

$$a_{JK} =$$

$J \setminus K$	1 \cdots $n-1$	n	$n+1$ \cdots N
1 \vdots $n-1$	$A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(K-J-1)}$ $\otimes \epsilon \otimes \mathbf{1}^{\otimes(N-K-1)}$	$A^{\otimes(J-1)} \otimes$ $\delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(N-J-1)}$	$A^{\otimes(J-1)} \otimes \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(K-J-2)}$ $\otimes \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(N-K)}$
n	0	$A^{\otimes(n-1)} \otimes$ $\mathbf{1}^{\otimes(N-n)}$	$A^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{1}^{\otimes(K-n-1)}$ $\otimes \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(N-K)}$
$n+1$	$\mathbf{1}^{\otimes(K-1)} \otimes \epsilon \otimes$ $\mathbf{1}^{\otimes(n-K-1)} \otimes A^{\otimes(N-n)}$	$\mathbf{1}^{\otimes(n-1)} \otimes$ $A^{\otimes(N-n)}$	0
$n+2$ \vdots $N+1$	$\mathbf{1}^{\otimes(K-1)} \otimes \epsilon \otimes \mathbf{1}^{\otimes(J-K-3)}$ $\otimes \epsilon \otimes A^{\otimes(N-J+1)}$	$\mathbf{1}^{\otimes(J-3)} \otimes$ $\epsilon \otimes A^{\otimes(N-J+1)}$	$\mathbf{1}^{\otimes(K-2)} \otimes \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(J-K-2)}$ $\otimes \epsilon \otimes A^{\otimes(N-J+1)}$

$$\delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(-1)} \otimes \epsilon = 1, \quad \delta \otimes \mathbf{1}^{\otimes(-x)} \otimes \epsilon = 0 \quad (x \leq -2)$$

として

$$\langle j_1 \cdots j_L | \psi_{st} | k_1 \cdots k_L \rangle = \text{Tr}(a_{j_1 k_1} \cdots a_{j_L k_L})$$

とおくと、この ψ_{st} は(1)を満たす。ここで $j_1 \cdots j_L$ および $k_1 \cdots k_L$ はそれぞれセクター s, t の粒子配列である。 q が一般の場合で上と同じ表に従って ψ_{st} を構成することができるのは $n = 1$ または N のときのみである。 q も n も一般の場合は a_{JK} を $\delta, \epsilon, A, \mathbf{1}$ のテンソル積の更に和として定義する必要がある。

参考文献

- [AR] F. C. Alcaraz and V. Rittenberg, *Phys. Lett. B* **314**, 377 (1993)
[AKSS] C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai and T. Sawabe, *J. Phys. A* **42** 345002 (2009)
[PEM] S. Prohac, M. R. Evans and K. Mallick, *J. Phys. A* **42** 165004 (2009)

Factorial Schur function と six-vertex model

Daniel Bump (Stanford)
 Peter McNamara (Stanford)
 中筋麻貴 (津田塾大学芸)

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ を任意の複素数とする. $z \in \mathbb{C}$ に対し,

$$(z|\alpha)^r = (z + \alpha_1) \cdots (z + \alpha_r)$$

とする. $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ が effective, すなわち $\mu_i \geq 0$ のとき, nonzero な複素数 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ (スペクトルパラメータ) に対し,

$$A_\mu(\mathbf{z}|\alpha) := \det((z_i|\alpha)^{\mu_j})_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

と定義する. $\rho = (n-1, n-2, \dots, 0)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とすると, Schur function $s_\lambda(\mathbf{z})$ の一般化として, factorial Schur function $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$ が以下のように定義される.

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{A_{\lambda+\rho}(\mathbf{z}|\alpha)}{A_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)}.$$

本研究では, six-vertex model を用いることにより, $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$ をパラメータ t に依存する形で書き下す.

\mathfrak{S} を statistical system, \mathfrak{s} を \mathfrak{S} の state とする. \mathfrak{s} の各点 v における Boltzmann weight を $\beta_{\mathfrak{s}}(v)$ とし, $\beta(\mathfrak{s}) = \prod_v \beta_{\mathfrak{s}}(v)$ とする. ここで, partition function $Z(\mathfrak{S})$ を以下で定義する:

$$Z(\mathfrak{S}) = \sum_{\mathfrak{s}} \beta(\mathfrak{s}).$$

partition $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) に対し, $n + \lambda_1$ (もしくはそれ以下) 個の行と n 個の列からなる長方形 lattice で, 各 edge に [1] で定義される boundary condition に従って ± の符号で label 付けをした system を $\mathfrak{S}_{\lambda,t}$ とする. 各格子点 $v(i\text{-行}, j\text{-列})$ にパラメータ t を持つ以下の Boltzmann weight を対応させる:

Ice						
Boltzmann weight	1	$z_i - t\alpha_{j+1}$	t	$z_i + \alpha_{j+1}$	$z_i(t+1)$	1

このとき、以下の主定理を得た.

Theorem1. ([2])

$$Z(\mathfrak{S}_{\lambda,t}) = \left[\prod_{i < j} (tz_j + z_i) \right] s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha).$$

本定理 (Theorem1) と [1] で証明された Yang-Baxter 方程式から、次が成り立つ.

Theorem2. ([2]) $s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha)$ は z_1, \dots, z_r において対称な多項式である.

一方, Theorem1 において $t = -1$ とすると, σ を $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ のある permutation とし, $(\lambda + \rho)$ の $\sigma(i)$ 番目の元を $(\lambda + \rho)_{\sigma(i)}$ と表したとき, 以下が成り立つ.

Theorem 3.([2])

$$Z(\mathfrak{S}_{\lambda,-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} (z_i|\alpha)^{(\lambda+\rho)_{\sigma(i)}} = A_{\lambda+\rho}(z).$$

また, $t = 0$ とすると, Macdonald [3] によって得られた以下の定理に別証明を与えることができる.

Theorem 4.(Macdonald[3] (6.16)) T を semi-standard Young tableaux とする. $T(i, j)$ を T の i -行, j -列の成分とし, $T^*(i, j) = T(i, j) + j - i$ と定義する. このとき, $(\mathbf{z}|\alpha)^T = \prod_{(i,j)} (z_{T(i,j)} + \alpha_{T^*(i,j)})$ とすると, partition λ に対し,

$$s_{\lambda}(\mathbf{z}|\alpha) = \sum_T (\mathbf{z}|\alpha)^T$$

が成立する. ここで T は shape λ の semi-standard Young tableaux をわたる.

参考文献

- [1] B.Brubaker, D.Bump, and S.Friedberg, Schur polynomials and the Yang-Baxter equation, preprint
- [2] D.Bump, P. McNamara, M.Nakasuji, Factorial Schur functions and the Yang-Baxter equation, preprint
- [3] I.G. Macdonald, Factorial functions: theme and variations. In *Seminaire alotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992)*, volume 498 of *Publ. Inst. Rech. Math. Av.*, Pages 5-39. Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.

XXZ鎖のループ代数対称性と超可積分カイラルポッツ模型の 量子逆散乱問題

The quantum inverse scattering problem of the superintegrable chiral Potts model through the $sl(2)$ loop algebra symmetry of the XXZ spin chain at roots of unity

出口 哲生 (お茶の水女子大学物理)

可積分カイラル・ポッツ模型は2次元イジング模型を最も自然な形で N 状態模型へ拡張する可積分模型である。本講演では、超可積分カイラル・ポッツ模型の相関関数の多重積分表示を導く第一歩として、超可積分カイラル・ポッツ模型の転送行列のヒルベルト空間に関して、局所スピン演算子を量子XXZ鎖の代数的ベテ仮設における大局的演算子 (モノドロミー行列の行列要素) を用いて表す公式を導く。

量子XXZスピン鎖とは、代表的な可積分量子スピン鎖であり、周期的境界条件下でハミルトニアンは次で与えられる。

$$\mathcal{H}_{\text{XXZ}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \left(\sigma_j^X \sigma_{j+1}^X + \sigma_j^Y \sigma_{j+1}^Y + \Delta \sigma_j^Z \sigma_{j+1}^Z \right).$$

ここで σ_j^a ($a = X, Y, Z$) は j 番目の格子点上に定義されたパウリ行列であり、量子的なスピン変数を表す。異方性変数 Δ を変数 q を用いて、 $\Delta = (q + q^{-1})/2$ と表す。 $-1 < \Delta \leq 1$ のとき、 \mathcal{H}_{XXZ} のスペクトルはギャップレスであり、格子点数 L を非常に大きくすると、基底状態と次の励起状態のエネルギー差は $O(1/L)$ となる。

横磁場イジング鎖 (the transverse Ising chain) は2次元イジング模型と等価な1次元量子系である。演算子 A_0 と A_1 を次のように定めると

$$A_0 = \sum_{j=1}^L \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z, \quad A_1 = \sum_{j=1}^L \sigma_j^x$$

横磁場イジング鎖のハミルトン演算子 \mathcal{H} は $\mathcal{H} = A_0 + hA_1$ と表される。ここで興味深いことに、演算子 A_0 と A_1 は次の Dolan-Grady conditions を満たす。

$$[A_i, [A_i, [A_i, A_{1-i}]]] = 16[A_i, A_{1-i}], \quad (i = 0, 1)$$

その結果、オンサーガー代数 (the Onsager algebra) を生成する。オンサーガー代数とは、オンサーガーが2次元イジング模型の厳密解の最初の論文 [1] の中で導入し

た無限次元代数で、生成子 A_m, G_n ($m, n \in \mathbf{Z}$) は次の定義関係式を満たす。

$$\begin{aligned} [A_\ell, A_m] &= 4G_{\ell-m} \\ [G_\ell, A_m] &= 2A_{m+\ell} - 2A_{m-\ell} \\ [G_\ell, G_m] &= 0 \end{aligned}$$

超可積分性の条件下では、Korepanov や Bazhanov-Stroganov によって議論された、カイラル・ポッツ模型を6頂点模型から導くL行列が、高次スピンXXZ鎖の転送行列と等価になる。この事実を応用し、さらに、量子XXZスピン鎖において変数 q が1のべき根のときに出現するループ代数の対称性に着目する。可積分カイラル・ポッツ模型の転送行列はイジング的なスペクトルに分解されるが、さらに超可解性の条件下では、一つのイジングスペクトルのブロックは $sl(2)$ ループ代数の最高ウェイト表現に対応する [2]。そしてループ代数の表現空間がオンサーガー代数の表現空間と対応する、と予想している。

横磁場イジング鎖の N 状態スピンのハミルトン演算子への拡張を考えると、可積分カイラル・ポッツ模型の転送行列に対応する Z_N 対称なハミルトン演算子がこれに相当することが分かる。こうして、 Z_N 対称なハミルトン演算子に対して、局所スピン演算子を大域的な代数的ベータ仮設の大域的演算子で表すことが課題となる。

この課題は、次のように解決される。我々はLyon グループの代数的ベータ仮設の方法を用いて、可積分高次スピン量子XXZ鎖の相関関数の多重積分表示を導出した [3]。特に、任意の相関関数の多重積分のコンパクトな表式が導かれた [3]。また、具体的に相関関数の多重積分を計算した [4]。この研究の中で導入された逆散乱公式を拡張すると、超可解カイラル・ポッツ模型に対する逆散乱公式が導かれる。

参考文献

- [1] L. Onsager, Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition, Phys. Rev. **65** (1944) 117 – 149.
- [2] A. Nishino and T. Deguchi, An algebraic derivation of the eigenspaces associated with an Ising-like spectrum of the superintegrable chiral Potts model, J. Stat. Phys. **133** (2008) pp. 587–615.
- [3] T. Deguchi and C. Matsui, Correlation functions of the integrable higher-spin XXX and XXZ chains through the fusion method, Nucl. Phys. B **831** [FS] (2010) 359–407.
- [4] T. Deguchi and J. Sato, Quantum group $U_q(sl(2))$ symmetry and explicit evaluation of the one-point functions of the integrable spin-1 XXZ spin chain

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 対称模型の形状因子 II — $n = 2$ のいくつかの公式

鈴鹿医療科学大学 桑野泰宏* quanoy@suzuka-u.ac.jp

論文 [1] においてわれわれは, Belavin の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 対称模型 [2] の形状因子の積分表示を与えるために必要な, テール作用素と呼ばれる非局所作用素のボソン化表示を導出した. テール作用素を $\Lambda(u)_{\xi a}^{\xi' a'}$ と書くとき, 相関函数に関する先行する論文 [?] では, 境界条件 ξ, ξ' が等しい場合についてのみ考えていたが, [1] では一般の場合 ($\xi' \neq \xi$) にまで拡張したのであった. (2009 年秋の学会講演で報告済み)

本講演では, $n = 2$ の場合 (8 頂点模型) に, パウリ行列 ($\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$) を局所作用素とする形状因子の積分公式を導出する [4]. 具体的結果は次の通りである.

パウリ行列の $2m$ 点形状因子を $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{\nu_1 \dots \nu_{2m}}$, この量を「頂点・面変換」した量を $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{l_1 \dots l_{2m}}$ とおくと, 後者は $l_j = l - j$ ($1 \leq j \leq 2m$) の場合は積分表示を求めることができる. 「頂点・面逆変換」を考えると, $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{\nu_1 \dots \nu_{2m}}$ は面模型のみに現れる「高さ」 l には依存しないこと, $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{\nu_1 \dots \nu_{2m}} \neq 0$ となるのは

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} \nu_j \equiv \begin{cases} (0 \pmod{2}), & (\mathcal{O} = \sigma^z) \\ (1 \pmod{2}), & (\mathcal{O} = \sigma^x, \sigma^y) \end{cases}$$

のときのみであること, スペクトラル変数 u_1, \dots, u_{2m} に関する擬周期性, 等々が分かる. 最も簡単な場合 ($m = 1$) は, [5, 6] で得られた結果を再現する. また, $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{l-1 \dots l-2m}$ の積分公式が Smirnov の形状因子に関する行列式構造 [7] を想起させることから, $F_m^{(i)}(\mathcal{O}; u_1, \dots, u_{2m})_{\nu_1 \dots \nu_{2m}}$ についても同様の構造が期待できると考えている.

* <http://www015.upp.so-net.ne.jp/quano/quano.htm>

References

- [1] Quano Y.-H: A vertex operator approach for form factors of Belavin's $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ -symmetric model, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 085202(pp1–23), 2010.
- [2] Belavin A A: Dynamical symmetry of integrable quantum systems, *Nucl. Phys.* **B180**[FS2] 189–200, 1981.
- [3] Quano Y.-H: A vertex operator approach for correlation functions of Belavin's $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ -symmetric model, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 165211(pp1–20), 2009.
- [4] Quano Y.-H: A vertex operator approach for form factors of Belavin's $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ -symmetric model and its application, [arXiv.org/abs/1010.4382](https://arxiv.org/abs/1010.4382), 2010.
- [5] Lashkevich, M: Free field construction for the eight-vertex model: representation for form factors. *Nucl. Phys.* **B621** 587–621, 2002.
- [6] Lukyanov S and Terras V: Long-distance asymptotics of spin-spin correlation functions for the XXZ spin chain, *Nucl.Phys.* **B654** 323–356, 2003.
- [7] Smirnov, F. A: *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore, 1992.

Box-Basket-Ball Systems

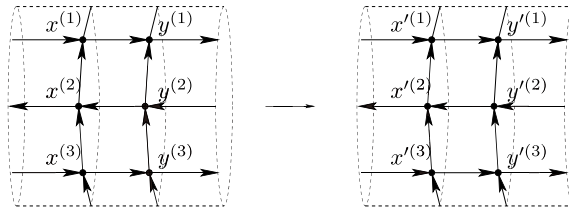
Thomas Lam (Michigan 大)

Pavlo Pylyavskyy (Minnesota 大)

坂本 玲峰 (東京理科大)

最近 Lam–Pylyavskyy [1] によって通常の $A_n^{(1)}$ 型 Kirillov–Reshetikhin(KR) クリスタルを特別な場合として含む新しい幾何クリスタルが発見された。本講演ではその超離散極限として現れるクリスタルについて、特に組み合わせ R 行列の拡張 (whirl 関係式) を用いて得られる離散可積分系について報告する。[2]

Lam–Pylyavskyy の幾何クリスタルは曲面上 (今回考えるのは円柱上) のワイヤーを用いて定義される。円柱を取り巻く垂直方向のワイヤーの向きは一定とする。一方横方向の矢印が全て右向きの場合 $A_n^{(1)}$ 型 KR クリスタルと一致する。本講演では KR クリスタルからのもっとも簡単な拡張として 3本のワイヤーのうち 1本だけが左向きになった下図のような状況を考える。ここで垂直方向の 2本の円周を入れ替



える操作によって whirl 関係式が与えられる。関係式は x, y 達の正係数有理式として与えられ Yang–Baxter 関係式を満たす。

以下超離散極限を取り次のような定義をする。垂直方向の円に対応する各元を (a, b, c) と表示する。各成分は上図水平方向のワイヤーの各々に対応する。 $C = (a, b, c)$, $S = (d, e, f)$, $C' = (a', b', c')$, $S' = (d', e', f')$ と置いたとき whirl 関係式 $R : C \otimes S \simeq S' \otimes C'$ は

$$\begin{aligned} d' &= d + \min(a + b, a + c, b + f) - \min(e + c, d + c, d + b) \\ e' &= e + \min(a + b, a + c, b + f) - \min(a + e, d + f, e + f) \\ f' &= f + \min(e + c, d + c, d + b) - \min(a + e, d + f, e + f) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} a' &= a - \min(a + b, a + c, b + f) + \min(e + c, d + c, d + b) \\ b' &= b - \min(a + b, a + c, b + f) + \min(a + e, d + f, e + f) \\ c' &= c - \min(e + c, d + c, d + b) + \min(a + e, d + f, e + f) \end{aligned}$$

として与えられる。

Box-basket-ball 系の状態空間は $S_i = (a, b, c)$ 達のテンソル積の元で与えられる。ここで c はサイト S_i の玉の個数、 b はバスケットの個数、また $a - b + c$ は箱の容量と解釈する。ここで玉は可能な限りなるべく箱に入っているものと仮定する。玉は 1 つの箱またはバスケットにつき 1 つだけ入ることができるという意味でフェルミ的粒子であるが、バスケットは一つのサイトにいくらかでも入ることができるという意味でボソンの粒子である。この描像では a はそのサイトに後何個の玉が入りうるかという空きスペースを表す。全てのサイトについて $b = 0$ となる場合は元の箱玉系と一致する。

Box-basket-ball 系の時間発展 T_ℓ は箱玉系の場合と同様に定義される。すなわち系の左端に容量 ℓ の真空元 $(\ell, 0, 0)$ をテンソルし同型 R によって右側に移動させる。すると T_ℓ 全体は可換な作用素の族となる。[2] では全てのサイトの箱の容量が 1 の場合に以下の事を明らかにした。

- T_∞ 時間発展のボール、バスケットを用いた組み合わせ論的記述、
- 可能なソリトンの分類とそれらの散乱則の記述、
- ソリトン数の保存や多重散乱の二体散乱への因子化。

参考文献

- [1] T. LAM AND P. PYLYAVSKYY: Crystals and total positivity on orientable surfaces, preprint, 2010; arXiv:1008.1949.
- [2] T. LAM, P. PYLYAVSKYY AND R. SAKAMOTO: Box-basket-ball systems, preprint, 2010; arXiv:1011.5930.

臙装配位の安定化と Littlewood–Richardson タブロー

尾角 正人 (阪大基礎工)

坂本 玲峰 (東理大理)

非例外型アフィンリー代数 \mathfrak{g} に対し I を Dynkin 図の頂点集合、 $I_0 := I \setminus \{0\}$ とする。ただし Dynkin 図には Kac の本に従ってラベル付けする。各 \mathfrak{g} について対応する Kirillov–Reshetikhin クリスタルのテンソル積 (その元を path と呼ぶ) を考える。ここでは特に \tilde{e}_i ($i \in I_0$) に関する最高ウェイト元を考える。また各 \mathfrak{g} に対応して臙装配位 (RC) と呼ばれる組み合わせ論的対象が定義されている。

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{type } \mathfrak{g} \text{ path}\} & & \{\text{type } A_n^{(1)} \text{ path}\} \times \text{LR} \\
 \uparrow \Phi^{\mathfrak{g}} & & \uparrow \Phi^A \\
 \{\text{type } \mathfrak{g} \text{ RC}\} & \xleftrightarrow{\Psi} & \{\text{type } A_n^{(1)} \text{ RC}\} \times \text{LR}
 \end{array}$$

これまでに $A_n^{(1)}$ 型の場合には RC と path の間の一対一対応が確立されており、また他の代数の場合にも部分的に写像が構成されているが、一般の場合はまだ分かっていない。構成された写像は箱玉系の逆散乱形式を与えるなど重要な役割を果たしている。

今回我々は代数 \mathfrak{g} に対し、ランクが十分高い場合に以下の結果を得た。結果を記述するためにまず Dynkin 図における 0 番目の頂点の付き方に対応して以下のように非例外型代数を分類する。その時 RC は本質的に \diamond の種類のみ依存して定まる

表 1:

\diamond	\mathfrak{g} of kind \diamond
\emptyset	$A_n^{(1)}$
\square	$D_{n+1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}$
\square	$C_n^{(1)}$
日	$A_{2n-1}^{(2)}, B_n^{(1)}, D_n^{(1)}$

ことを証明した。

我々の主要な結果は代数のランクが十分大きい場合における RC^\diamond と RC^\emptyset および Littlewood–Richardson タブローの積集合との間の全単射の構成である (上図では Ψ と表した)。写像の概略は以下のとおりである。RC とは一連のヤング図の集まりで更にヤング図の各行に一つずつ整数を添えた構造を持ち、それらにある条件を

課したものの集合である。元来の臙装配位写像 Φ は RC 上左から右に走査して行きあるルールに従って各ヤング図からます目を取り除き、その取り除かれ方に応じて得られる文字を集めると recording tableaux として結晶基底のテンソル積、すなわち Kashiwara–Nakashima タブローの列が得られるというものであった。一方今回の写像 Ψ は Φ と同様のアルゴリズムを左右を入れ替えて行い、結果として得られる recording tableaux が Littlewood–Richardson タブローとなる。その意味で自然なアルゴリズムとなっている。また逆の対応はアルゴリズムの各ステップを全て逆にすることで得られる。

応用として $X = M$ 予想と呼ばれる組み合わせ論的公式の代数のランクが十分高い場合の証明が得られた。証明は以下の事実を組み合わせることによってなされる。

1. 写像 Ψ による RC 上のチャージと呼ばれる量の変化分の公式、
2. Kirillov–Schilling–Shimozono による A 型の場合の $X = M$ 公式、
3. Lecouvey–Okado–Shimozono による X の分解公式。

参考文献

- [1] M. Okado and R. Sakamoto, Stable Rigged Configurations for Quantum Affine Algebras of Nonexceptional Types, arXiv:1008.0460.

Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model の無限転送行列の対角化

小島武夫 山形大学工学部

楕円関数をボルツマン重率にもつ可解格子模型 Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model の無限サイズの転送行列 $T_B(z)$ を考察する。可換な族 $[T_B(z), T_B(w)] = 0$ である無限転送行列 $T_B(z)$ の同時対角化を、楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ の自由場表示を活用して行う。

• Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model

N を 2 以上の整数、 r を $N + 2$ 以上の整数、 $0 < x < 1$ とする。Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model は Yang-Baxter 方程式の楕円関数解および Boundary Yang-Baxter 方程式の楕円関数解をボルツマン重率にもつ可解格子模型である。楕円テータ関数 $[u] = x^{\frac{u^2}{r} - u} \Theta_{x^{2r}}(x^{2u})$, $\Theta_p(z) = (p; p)_\infty (z; p)_\infty (p/z; p)_\infty$ と無限積 $(z; p_1, \dots, p_M)_\infty = \prod_{m_1, \dots, m_M=0}^{\infty} (1 - p_1^{m_1} \cdots p_M^{m_M} z)$ を用いて、Yang-Baxter 方程式の楕円関数解 [1] を次式で定める。

$$\begin{aligned} W \left(\begin{array}{cc|c} a + 2\bar{\epsilon}_\mu & a + \bar{\epsilon}_\mu & u \\ a + \bar{\epsilon}_\mu & a & \end{array} \right) &= R(u), \\ W \left(\begin{array}{cc|c} a + \bar{\epsilon}_\mu + \bar{\epsilon}_\nu & a + \bar{\epsilon}_\mu & u \\ a + \bar{\epsilon}_\nu & a & \end{array} \right) &= R(u) \frac{[u][a_{\mu,\nu} - 1]}{[u - 1][a_{\mu,\nu}]}, \\ W \left(\begin{array}{cc|c} a + \bar{\epsilon}_\mu + \bar{\epsilon}_\nu & a + \bar{\epsilon}_\nu & u \\ a + \bar{\epsilon}_\nu & a & \end{array} \right) &= R(u) \frac{[u - a_{\mu,\nu}][1]}{[u - 1][a_{\mu,\nu}]}, \end{aligned}$$

$$R(u) = z^{\frac{r-1}{r} \frac{N-1}{N}} \frac{\varphi(z^{-1})}{\varphi(z)}, \quad \varphi(z) = \frac{(x^2 z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2r+2N-2} z; x^{2r}, x^{2N})_\infty}{(x^{2r} z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2N} z; x^{2r}, x^{2N})_\infty}.$$

Boundary Yang-Baxter 方程式の楕円関数解 [2] を次式で定める。パラメーター $0 < c < 1$ 。

$$K \left(\begin{array}{c|c} a & \\ a + \bar{\epsilon}_\mu & u \\ b & \end{array} \right) = z^{\frac{r-1}{r} \frac{N-1}{N} - \frac{2}{r} a_1} \frac{h(z)}{h(z^{-1})} \frac{[c - u][a_{1,\mu} + c + u]}{[c + u][a_{1,\mu} + c - u]} \delta_{a,b},$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{(x^{2r+2N-2}/z^2; x^{2r}, x^{4N})_\infty (x^{2N+2}/z^2; x^{2r}, x^{4N})_\infty}{(x^{2r}/z^2; x^{2r}, x^{4N})_\infty (x^{4N}/z^2; x^{2r}, x^{4N})_\infty} \\ &\times \frac{(x^{2N+2c}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2r-2c}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty}{(x^{2N+2r-2c-2}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2c+2}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty} \\ &\times \prod_{j=2}^N \frac{(x^{2r+2N-2c-2a_{1,j}}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2c+2a_{1,j}}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty}{(x^{2r+2N-2c-2a_{1,j}-2}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty (x^{2c+2+2a_{1,j}}/z; x^{2r}, x^{2N})_\infty}. \end{aligned}$$

Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model に対して、無限転送行列と呼ばれる可換な族 $T_B(z)$ が定義される。

$$[T_B(z), T_B(w)] = 0, \quad (\text{for any } z, w).$$

この $T_B(z)$ の対角化を行えば Boundary $U_{q,p}(\widehat{sl}_N)$ face model の相関関数が計算できる。

• **Free field realization** 無限転送行列 $T_B(z)$ は次のボゾン β_m^j , ($1 \leq j \leq N-1$; $m \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$) により Fock 空間 $\mathcal{F}_{l,k}$ 上に自由場表示される [3,5]。交換関係は q -整数 $[a]_x = \frac{x^a - x^{-a}}{x - x^{-1}}$ により、

$$[\beta_m^j, \beta_n^k] = \begin{cases} m \frac{[(r-1)m]_x [(N-1)m]_x}{[rm]_x [Nm]_x} \delta_{m+n,0} & (j=k) \\ -m x^{Nm} \text{sgn}(j-k) \frac{[(r-1)m]_x [m]_x}{[rm]_x [Nm]_x} \delta_{m+n,0} & (j \neq k). \end{cases}$$

このボゾン β_m^j を用いて、転送行列 $T_B(z)$ の固有ベクトル $|B\rangle$ の自由場表示を構成する。

定理 [7] ベクトル $|B\rangle = e^F |k, k\rangle$ は無限転送行列 $T_B(z)$ の固有ベクトルである。

$$T_B(z)|B\rangle = |B\rangle.$$

なお、元 F はボゾン β_m^j により以下のように書かれ、元 $|k, k\rangle \in \mathcal{F}_{k,k}$ は最高ウェイトベクトル。

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{m>0} \sum_{j,k=1}^{N-1} \frac{1}{m} \frac{x^{(j+k)m} [rm]_x}{[(r-1)m]_x} I_{j,k}(m) (\beta_{-m}^j - \beta_{-m}^{j+1}) (\beta_{-m}^k - \beta_{-m}^{k+1}) + \sum_{m>0} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{m} D_j(m) \beta_{-m}^j,$$

$$I_{j,k}(m) = \frac{[jm]_x [(N-k)m]_x}{[m]_x [Nm]_x} = I_{k,j}(m) \quad (1 \leq j \leq k \leq N-1),$$

$$D_j(m) = -\theta_m \left(\frac{[(N-j)m/2]_x [rm/2]_x^+ x^{\frac{(3j-N-1)m}{2}}}{[(r-1)m/2]_x} \right) + \frac{x^{(j-1)m} [(-r+2\pi_{1,j}+2c-j+2)m]_x}{[(r-1)m]_x} \\ + \frac{[m]_x x^{(r-2c+2j-2)m}}{[(r-1)m]_x} \left(\sum_{k=j+1}^{N-1} x^{-2m\pi_{1,k}} \right) + \frac{x^{(2j-N)m} [(r-2\pi_{1,N}-2c+N-1)m]_x}{[(r-1)m]_x}.$$

この $|B\rangle$ に Type-II Vertex operator [6] を作用させて状態空間の対角化が構成できる。論文 [3,4,7] の一般化 (楕円化、高ランク化) がえられた。

参考文献

- [1] M.Jimbo, T.Miwa, M.Okado, *Nucl.Phys.* **B300**, 74-108 (1988).
- [2] M.Batchelor, V.Fridkin, A.Kuniba, Y.Zhou, *Phys.Lett.* **B376**, 266-274 (1996).
- [3] M.Jimbo, R.Kedem, T.Kojima, H.Konno, T.Miwa, *Nucl.Phys.* **B441** 437-470 (1995).
- [4] H.Furutsumi and T.Kojima, *J.Math.Phys.* **41** 4413-4436 (2000).
- [5] Y.Asai, M.Jimbo, T.Miwa, Ya.Pugai, *J.Phys.* **A29** 6595-6616 (1996).
- [6] H.Furutsumi, T.Kojima, Y.Quano, *Int.J.Mod.Phys.* **A15** 1533-1556 (2000).
- [7] T.Miwa and R.Weston, *Nucl.Phys.* **B486** 517-545 (1997).
- [8] T.Kojima, [arXiv.1007.3795], to appear in *J.Math.Phys.* (2010).

Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton

国場敦夫 (東大総合文化), 高木太一郎 (防衛大)

1 主結果

XXZ スピン鎖のベーテ仮設および周期境界をもつ可積分セルオートマトン (周期箱玉系) の等位集合に関する考察から、我々は次式で与えられる新しいフェルミ型公式を得た [1]。

定理 1.

$$\sum_{p \in P_{L,\lambda}^\circ} q^{E_{\text{path}}(p)} = q^{\psi(\lambda)} \frac{[L]}{[p_1]} \prod_{i=1}^s \begin{bmatrix} p_i + m_i - 1 \\ m_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

記号の説明をする。 λ は図 1 のようなヤング図形 (長さ ℓ_i の行が m_i 個ある) である。 L は $L \geq 2 \sum_{j=1}^s \ell_j m_j$ を満たす整数。 $p_i, \psi(\lambda)$ は以下のように与えられる。

$$p_i := L - 2 \sum_{j=1}^s \min(\ell_i, \ell_j) m_j, \quad \psi(\lambda) := \sum_{i,j=1}^s \min(\ell_i, \ell_j) m_i m_j - \sum_{i=1}^s \ell_i m_i$$

また、右辺に現れる括弧たちは以下のものである。

$$[n] = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} \quad (q\text{-binomial coefficient})$$

ただし $(q)_n = (1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)$ 。

左辺に現れる $P_{L,\lambda}^\circ$ はサイズ L の周期箱玉系 [2] の等位集合であり、保存量としてヤング図形 λ で表されるソリトンコンテンツをもつ 1 次元のパス $p = b_1 \dots b_L$ ($b_i \in \{1, 2\}$) 全体からなる集合である。パスのエネルギーを $E_{\text{path}}(p) := \sum_{j=1}^{L-1} j\theta(b_j < b_{j+1})$ で与える。ただし $\theta(\text{true}) = 1, \theta(\text{false}) = 0$ 。

周期境界でない場合の同様の結果については [3] で与えられている。

2 証明のあらすじ

ヤング図形 λ の各行に整数を付与したものを rigged configuration と呼び、 (λ, \mathbf{x}) で表す。ここで $\mathbf{x} = ((x_{i,j})_{1 \leq j \leq m_i})_{1 \leq i \leq s}$ は付与された $\mathcal{N} = m_1 + \cdots + m_s$ 個の整数 (量子数) の

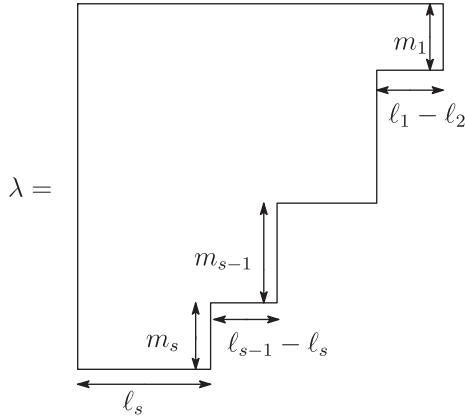


図 1: ヤング図形

リストである。また、rigged configuration (λ, \mathbf{x}) に対してそのエネルギーを $E_{\text{RC}}(\lambda, \mathbf{x}) := \psi(\lambda) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} x_{i,j}$ で与える。

与えられたヤング図形 λ と $L \geq 2 \sum_{j=1}^s \ell_j m_j$ を満たす L に対して次のような量子数の集合を考える。

$$\Omega^\circ(\lambda, L) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{\mathcal{N}} \left| \begin{array}{l} 0 \leq x_{i,1} \leq \dots \leq x_{i,m_i} \leq p_i + \min(x_{i,1}, 2\ell_i - 1) \\ \text{for } 1 \leq i \leq s, \\ x_{j,m_j} - p_j \leq x_{i,1} \text{ for } 1 \leq i < j \leq s, \\ x_{i,m_i} \leq p_i + 2(\ell_i - \ell_j) + x_{j,1} - 1 \text{ for } 1 \leq i < j \leq s \end{array} \right. \right\}$$

主結果は以下の補題から従う。

補題 2. パスの集合 $P_{L,\lambda}^\circ$ と rigged configuration の集合 $\{\lambda\} \times \Omega^\circ(\lambda, L)$ の間に、エネルギーを保存する全単射が存在する。

補題 3. 和 $\sum_{\mathbf{x} \in \Omega^\circ(\lambda, L)} q^{E_{\text{RC}}(\lambda, \mathbf{x})}$ は (1) の右辺に等しい。

参考文献

- [1] Kuniba A and Takagi T, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, arXiv:1011.6426.
- [2] Yoshihara D, Yura F and Tokihiro T 2003 Fundamental cycle of a periodic box-ball system, J. Phys. A: Math. Gen. **36** 99–121
- [3] 国場敦夫、尾角正人、高木太一郎、山田泰彦: 箱玉系の頂点作用素と分配関数, 京都大学数理解析研究所講究録 1302 (2003) pp91–107; Takagi T 2005, Inverse scattering method for a soliton cellular automaton, Nucl. Phys. B **707** 577–601.

トロピカル Hesse 曲線の加公式

野邊厚 (千葉大学教育学部)

梶原-金子-野邊-津田 [1] において導入されたレベル 3 テータ関数

$$\theta_k(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{3\pi i(n + \frac{k}{3} - \frac{1}{6})^2 \tau} e^{6\pi i(n + \frac{k}{3} - \frac{1}{6})(z + \frac{1}{2})} \quad (k = 0, 1, 2)$$

は次の加公式を満たす.

$$\theta_0^2 \theta_1(z+w) \theta_0(z-w) = \theta_1(z) \theta_2(z) \theta_2(w)^2 - \theta_0(z)^2 \theta_0(w) \theta_1(w) \quad (1a)$$

$$\theta_0^2 \theta_1(z+w) \theta_0(z-w) = \theta_0(z) \theta_1(z) \theta_1(w)^2 - \theta_2(z)^2 \theta_0(w) \theta_2(w) \quad (1b)$$

$$\theta_0^2 \theta_2(z+w) \theta_0(z-w) = \theta_0(z) \theta_2(z) \theta_0(w)^2 - \theta_1(z)^2 \theta_1(w) \theta_2(w) \quad (1c)$$

$$\theta_2^2 \theta_0(z+w) \theta_1(z-w) = \theta_0(z) \theta_1(z) \theta_0(w)^2 - \theta_2(z)^2 \theta_1(w) \theta_2(w) \quad (2a)$$

$$\theta_2^2 \theta_1(z+w) \theta_1(z-w) = \theta_0(z) \theta_2(z) \theta_2(w)^2 - \theta_1(z)^2 \theta_0(w) \theta_1(w) \quad (2b)$$

$$\theta_2^2 \theta_2(z+w) \theta_1(z-w) = \theta_1(z) \theta_2(z) \theta_1(w)^2 - \theta_0(z)^2 \theta_0(w) \theta_2(w) \quad (2c)$$

$$\theta_2^2 \theta_0(z+w) \theta_2(z-w) = \theta_0(z) \theta_2(z) \theta_1(w)^2 - \theta_1(z)^2 \theta_0(w) \theta_2(w) \quad (3a)$$

$$\theta_2^2 \theta_1(z+w) \theta_2(z-w) = \theta_1(z) \theta_2(z) \theta_0(w)^2 - \theta_0(z)^2 \theta_1(w) \theta_2(w) \quad (3b)$$

$$\theta_2^2 \theta_2(z+w) \theta_2(z-w) = \theta_0(z) \theta_1(z) \theta_2(w)^2 - \theta_2(z)^2 \theta_0(w) \theta_1(w) \quad (3c)$$

ただし, τ は固定されているものとして $\theta_k(z, \tau)$ および $\theta_k(0, \tau)$ をそれぞれ $\theta_k(z)$ および θ_k のように略記する. さらに, これら加公式から次の関係式が導かれる.

$$\theta_2' (\theta_0(z)^3 + \theta_1(z)^3 + \theta_2(z)^3) + 6\theta_0' \theta_0(z) \theta_1(z) \theta_2(z) = 0$$

したがって, $L_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ を周期格子とすると, 写像 $\varphi: \mathbb{C}/L_\tau \ni z \mapsto (\theta_2(z), \theta_0(z), \theta_1(z)) = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は Hesse の 3 次曲線 E_{t_0, t_1}

$$t_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + t_1 x_0 x_1 x_2 = 0 \quad (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \quad (t_0, t_1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

への同型写像を与える. 同型写像 φ により, 加公式 (1a-3c) を通して, E_{t_0, t_1} に $(\theta_2, \theta_0, \theta_1) = (0, 1, -1)$ を原点とする加法群の構造が入る.

ここで, 正数 $K, \varepsilon > 0$ に対しテータ関数のパラメータ τ を

$$\tau = -\frac{3K}{9K + 2\pi i\varepsilon}$$

とおく. 次で与えられる直線 $l_\varepsilon \subset \mathbb{C}$

$$l_\varepsilon = \left\{ \frac{(1 - i\xi_\varepsilon)u}{9K} \mid u \in \mathbb{R}, \xi_\varepsilon = \frac{2\pi\varepsilon}{9K} \right\}$$

に対し, 円周上の点 $z \in l_\varepsilon/\tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}/L_\tau$ を考えると, $(\theta_2(z), \theta_0(z), \theta_1(z)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ が成り立つ [1, 2]. すなわち, φ の $l_\varepsilon/\tau\mathbb{Z}$ への制限は Hesse の 3 次曲線の実部の (ある連結部分の) parametrization を与える. また, 極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ において次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_\varepsilon/\tau\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/3K\mathbb{Z}$$

次のトロピカル多項式で定められるトロピカル Hesse 曲線 C_K を考えよう (図 1) .

$$F(X_0, X_1, X_2; K) = \max(3X_0, 3X_1, 3X_2, X_0 + X_1 + X_2 + K)$$

ただし, (X, Y) は非斉次座標 $X := X_1 - X_0$, $Y := X_2 - X_0$ である. C_K から三本の半直線を除いた三角形部分を \bar{C}_K とおく. また, \bar{C}_K の各頂点を $V_1 = (K, K)$, $V_2 = (-K, 0)$, $V_3 = (0, -K)$ とおき, 各辺を $E_1 = \overline{V_1V_2}$, $E_2 = \overline{V_2V_3}$, $E_3 = \overline{V_3V_1}$ とおく. 上述の τ, z に対し, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log |\theta_k(z)|$ を $\tilde{\theta}_k(u)$ とおくと, 同型写像 $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}/3K\mathbb{Z} \ni u \mapsto (\tilde{\theta}_2(u), \tilde{\theta}_0(u), \tilde{\theta}_1(u)) = (X_0, X_1, X_2) \in \bar{C}_K$ により, \bar{C}_K に V_1 を原点とする加法群の構造が入る.

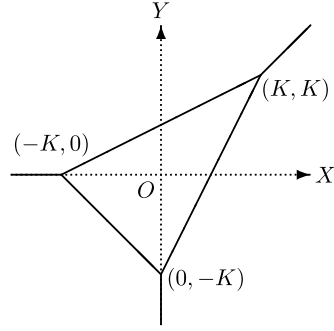


図 1: トロピカル Hesse 曲線 C_K .

このようにして \bar{C}_K の加法 $\oplus: \bar{C}_K \times \bar{C}_K \rightarrow \bar{C}_K$ の存在が分かるが, その明示公式 (定理 1) は i) 直線との交点, もしくは ii) テータ関数の加法公式 (1a-3c) の超離散化を用いて示される. 本講演では ii) の手法について説明する. また, 時間が許せば, Hesse ペンシル $\{E_{t_0, t_1}\}_{(t_0, t_1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ に作用する $PGL(3, \mathbb{C})$ の部分群 (Hessian 群 $G_{216} \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes SL(2, \mathbb{F}_3)$) のトロピカル化についても述べる予定である.

定理 1 点 $P = (X, Y)$ を \bar{C}_K の辺 E_j 上の点とする ($j \in \{1, 2, 3\}$). このとき, 点 $Q = (X', Y')$ との和 $P \oplus Q = (X \oplus X', Y \oplus Y')$ は次のように与えられる.

1. $Q \in E_j \cup E_{j+1}$ のとき

$$\begin{aligned} X \oplus X' &= \max(Y, 2X + X' + Y') - \max(X + 2X', 2Y + Y') \\ Y \oplus Y' &= \max(X + Y + 2Y', X') - \max(X + 2X', 2Y + Y') \end{aligned}$$

2. $Q \in E_j \cup E_{j+2}$ のとき

$$\begin{aligned} X \oplus X' &= \max(X + Y + 2X', Y') - \max(Y + 2Y', 2X + X') \\ Y \oplus Y' &= \max(X, 2Y + X' + Y') - \max(Y + 2Y', 2X + X') \end{aligned}$$

3. $Q \in E_{j+1} \cup E_{j+2}$ のとき

$$\begin{aligned} X \oplus X' &= \max(X + 2Y', 2Y + X') - \max(X + Y, X' + Y') \\ Y \oplus Y' &= \max(Y + 2X', 2X + Y') - \max(X + Y, X' + Y') \end{aligned}$$

ただし, 添え字は mod 3 で考える.

参考文献

- [1] Kajiwara K, Kaneko M, Nobe A and Tsuda T “Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve” *Kyushu J. Math.* **63** (2009) 315-338
- [2] Nobe A “On the addition formula for the tropical Hesse pencil”, to appear in RIMS Kokyuroku

C_n 型 Macdonald 対称多項式の tableau 和表示

星野歩 (上智大理工) 柴原淳 (東大数理) 白石潤一 (東大数理)

n を非負整数、 q, t, T を不定元とし $x = (x_1, \dots, x_n)$ とおく. 文献 [3] の記号に従い、支配的整ウエイト λ に対する C_n 型 Macdonald 対称多項式を $P_\lambda(x; q, t, T)$ と記す.

第一基本ウエイトを Λ_1 とする. 以下、 $T = t^2/q$ 、 $\lambda = r\Lambda_1$ ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) と特殊化した場合、即ち、 $P_{r\Lambda_1}(x; q, t, t^2/q)$ について tableau 和型の表示 (の予想) を紹介する.

$I := \{1, 2, \dots, n, \bar{n}, \overline{n-1}, \dots, \bar{1}\}$ を添数集合とし、添数の順序を

$$1 < 2 < \dots < n < \bar{n} < \overline{n-1} < \dots < \bar{1}$$

と定める. 1行の C 型 semi-standard tableau を、横 1 行のヤング図に対し非減少に添数集合の元を並べて出来る tableau とする. エントリ $-i \in I$ の個数を θ_i とし $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{\bar{1}} = r$ とすると、組 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\bar{1}})$ と長さ r の 1 行の C 型 semi-standard tableau は 1 対 1 に対応する.

記号 $(a; q)_m := \prod_{i=1}^m (1 - aq^{i-1})$ を定める.

Conjecture. C_n 型 Macdonald 対称多項式 $P_{r\Lambda_1}(x; q, t, t^2/q)$ は以下のように記述される:

$$\begin{aligned} P_{r\Lambda_1}(x; q, t, t^2/q) &= \sum_{\substack{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{\bar{1}} \geq 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{\bar{1}} = r}} \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \prod_{k \in I} \frac{(t; q)_{\theta_k}}{(q; q)_{\theta_k}} \\ &\times \prod_{1 \leq l \leq n} \frac{(q^{\theta_l + \theta_{l+1} + \dots + \theta_{l+1}} t^{n-l+1}; q)_{\theta_l} (q^{\theta_{l+1} + \theta_{l+2} + \dots + \theta_{l+1} - 1} t^{n-l+2}; q)_{\theta_l}}{(q^{\theta_l + \theta_{l+1} + \dots + \theta_{l+1} - 1} t^{n-l+2}; q)_{\theta_l} (q^{\theta_{l+1} + \theta_{l+2} + \dots + \theta_{l+1}} t^{n-l+1}; q)_{\theta_l}} x_1^{\theta_1 - \theta_{\bar{1}}} x_2^{\theta_2 - \theta_{\bar{2}}} \dots x_n^{\theta_n - \theta_{\bar{n}}}. \end{aligned}$$

$n = 1$ の場合は文献 [3] で与えられている $P_{r\Lambda_1}(x; q, t, t^2/q)$ の式と等しいことが basic hypergeometric series の変換公式を用いて証明される. また、上式右辺は C_n 型変形 \mathcal{W} 代数の生成元の積の行列要素と等しい.

References

- [1] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials (2nd ed.), Oxford University Press, (1995).
- [2] E. Frenkel and N. Reshetikhin, Deformations of \mathcal{W} -algebras associated to simple Lie algebras, Comm. Math. Phys. **197** (1998), no. 1, 1–32.
- [3] M. Lassalle, Some conjectures for Macdonald polynomials of type B, C, D , Sem. Lothar. Combin. **52** (2004), article B52h.

平面離散曲線の **edge tangential flow** と **semi-discrete mKdV** 方程式

井ノ口 順一 山形大学理学部
 梶原 健司 九州大学大学院数理学研究院
 松浦 望 福岡大学理学部
 太田 泰広 神戸大学大学院理学研究科

■平面離散曲線の edge tangential flow

$\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $l \rightarrow \gamma_l$ をセグメント長 ϵ (定数) の平面離散曲線, すなわち

$$\left| \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon} \right| = 1, \quad \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon} = R(K_l) \frac{\gamma_l - \gamma_{l-1}}{\epsilon}, \quad (1)$$

を満たすものとする. ただし, $R(\varphi)$ は角度 φ の回転行列である. Hoffmann-Kutz[1] は edge tangential vector $\Delta^h \gamma_l$ を $\Delta^h \gamma_l = 2\epsilon \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}}{\|\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}\|^2}$ で導入し, それに平行な flow による離散曲線の運動を考察した.

$$\frac{d\gamma_l}{ds} = 2\epsilon\alpha \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}}{\|\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}\|^2} = \frac{\alpha}{\cos \frac{K_l}{2}} R\left(-\frac{K_l}{2}\right) \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon}. \quad (2)$$

以下, 簡単のため $\alpha = 1$ とする.

命題 [1]

(i) 角関数 Ψ_l を $\frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon} = (\cos \Psi_l, \sin \Psi_l)$ で定義する. このとき, (1) と (2) の両立条件からポテンシャル関数 θ_l が存在し, 次の式が成り立つ.

$$\Psi_l = \frac{\theta_{l+1} + \theta_l}{2}, \quad K_l = \frac{\theta_{l+1} - \theta_{l-1}}{2}, \quad (3)$$

$$\frac{d\theta_l}{ds} = \frac{2}{\epsilon} \tan\left(\frac{\theta_{l+1} - \theta_{l-1}}{2}\right). \quad (4)$$

(ii) 「離散曲率」 κ_l を辺接触円の半径の逆数, すなわち $\kappa_l = \frac{2}{\epsilon} \tan \frac{K_l}{2} = \frac{d\theta_l}{ds}$ で定義すると, κ_l は次の式を満たす.

$$\frac{d\kappa_l}{ds} = \frac{2}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4} \kappa_l^2\right) (\kappa_{l+1} - \kappa_{l-1}). \quad (5)$$

(4), (5) はそれぞれ semi-discrete potential mKdV 方程式, semi-discrete mKdV (self-dual network) 方程式と呼ばれる [2].

■semi-discrete mKdV 方程式の τ 関数と曲線の表現公式 Maruno-Ohta[3] は

$$\frac{du_l}{ds} = \alpha(1 + \beta u_l v_l)(u_{l+1} - u_{l-1}), \quad \frac{dv_l}{ds} = \alpha(1 + \beta u_l v_l)(v_{l+1} - v_{l-1}),$$

と等価な方程式の τ 関数と双線形方程式を議論し, 双線形方程式が本質的に 1 次元戸田格子方程式の Bäcklund 変換と離散 1 次元戸田格子方程式の簡約で得られることを示したが, (5) に帰着させるための条件 $u_l \approx v_l$ と解が両立せず, (5) の解は得られない. 本研究で我々は以下のような結果を得た.

命題

(i) $\tau_l = \tau_l(s; y)$ を次の双線形方程式を満たす τ 函数とする. ただし, $*$ は複素共役を表す.

$$\begin{cases} D_s \tau_l \cdot \tau_l^* = \frac{1}{2\epsilon} (\tau_{l-1}^* \tau_{l+1} - \tau_{l+1}^* \tau_{l-1}), \\ \tau_l \tau_l^* = \frac{1}{2} (\tau_{l-1}^* \tau_{l+1} + \tau_{l+1}^* \tau_{l-1}), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} D_s D_y \tau_l \cdot \tau_l = -\tau_{l+1}^* \tau_{l-1}^*, \\ D_y \tau_{l+1} \cdot \tau_l = -\epsilon \tau_{l+1}^* \tau_l^*. \end{cases} \quad (6)$$

このとき, θ_l, γ_l は以下のように表される:

$$\theta_l = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_l}{\tau_l^*}, \quad \gamma_l = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (\log \tau_l \tau_l^*)_y \\ \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\log \frac{\tau_l}{\tau_l^*} \right)_y \end{bmatrix}. \quad (7)$$

(ii) τ 函数

$$\tau_l(s; y) = e^{-(s+\epsilon l)y} \det (f_{j-1}^{(i)})_{i,j=1,\dots,N}, \quad (8)$$

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n (1 - \epsilon p_i)^{-l} e^{\frac{p_i}{1-\epsilon^2 p_i^2} s + \frac{1}{p_i} y} + \beta_i (-p_i)^n (1 + \epsilon p_i)^{-l} e^{-\frac{p_i}{1-\epsilon^2 p_i^2} s - \frac{1}{p_i} y}, \quad (9)$$

$$\alpha_i, p_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}. \quad (10)$$

は双線形方程式 (6) を満たす.

τ 函数 (8), (9) の連続変数 s は principal chiral field 方程式や Maxwell-Bloch 方程式のような「多極的」な構造 [4] をもっていることを注意しておく. この命題は generic な τ 函数

$$\sigma_k^{l,m}(u, v; y) = \det (f_{k+j-1}^{(i)}(l, m))_{i,j=1,\dots,N}, \quad (11)$$

$$f_k^{(i)}(l, m) = \alpha_i p_i^k (1 - a p_i)^{-l} (1 - b p_i)^{-m} e^{\frac{u}{1-a p_i} + \frac{v}{1-b p_i} + \frac{1}{p_i} y} + \beta_i q_i^k (1 - a q_i)^{-l} (1 - b q_i)^{-m} e^{\frac{u}{1-a q_i} + \frac{v}{1-b q_i} + \frac{1}{q_i} y}, \quad (12)$$

の満たす双線形方程式を導き, それに対して適当な簡約条件および特殊化を課すことで証明される. 上の解はソリトン解でループの運動を表すが, ブリーザー解なども得ることがができる. また講演では, discrete mKdV 方程式で記述される離散曲線の離散的運動からの極限, および mKdV 方程式で記述される連続曲線の運動への極限についても議論する.

参考文献

- [1] T. Hoffmann and N. Kutz, Stud. Appl. Math. **113** (2004) 31–55.
- [2] R. Hirota, J. Phys.Soc. Jpn. **35**(1973) 289–294.
- [3] K. Maruno and Y. Ohta, J. Phys.Soc. Jpn. **75**(2006) 054002.
- [4] S. Kakei and J. Satsuma, J. Phys.Soc. Jpn. **63**(1994) 885–894; 寛三郎, 薩摩順吉, 京都大学数理解析研究所講究録 **868**(1994) 85–97.

超幾何型 q -差分方程式の退化について

大山 陽介 (大阪大学大学院情報科学研究科)

Basic hypergeometric functions の退化を整理する。 q -超幾何級数

$${}_2\varphi_1(a, b; c; q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k (b; q)_k}{(c; q)_k (q; q)_k} x^k$$

の退化級数は、連続の場合よりやや複雑であり、Bessel 函数や Airy 函数にあたるものが複数あるが、統一的な視点はあまりないと思う。ここでは

$$(a_1 + b_1 x)u(xq^2) + (a_2 + b_2 x)u(xq) + (a_3 + b_3 x)u(x) = 0 \quad (1)$$

の形の方程式 (超幾何型 q -差分方程式と呼ぶ) に限定して、差分方程式の退化として分類する。この型の微分方程式の分類は Tricomi F. G., *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese (1954) などにも書いてある。

簡単のため、(1) の解空間を

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; \\ b_1 & b_2 & b_3; \\ x \end{bmatrix}$$

と表す (Hahn, W., *Math. Nachr.* **2** (1949), 340-379.)。むしろ exponent を用いて Riemann スキームの形に書いた方が自然ではある。

次の2つの変換を考える：

(A) 独立変数を $x \rightarrow cx$ に変える

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; \\ b_1 & b_2 & b_3; \\ cx \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; \\ cb_1 & cb_2 & cb_3; \\ x \end{bmatrix}$$

(B) $c = q^\gamma$ として、従属変数を $u \rightarrow x^\gamma u$ に変える

$$x^\gamma \Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; \\ b_1 & b_2 & b_3; \\ x \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} c^2 a_1 & c a_2 & a_3; \\ c^2 b_1 & c b_2 & b_3; \\ x \end{bmatrix}$$

(A)(B) に加えて全係数を定数倍する自由度があるので、実質的なパラメタの数は3つであり、 $a_1 a_3 b_1 b_3 \neq 0$ ならば、(1) は ${}_2\varphi_1(a, b; c; q; x)$ に帰着する。

以下、 $a_1 a_3 b_1 b_3 = 0$ の場合を考えるが、係数スキーム Φ の、ある列が0になる場合は1階方程式に、ある行が0になる場合は定数係数差分方程式になるので除外する。さらに次の変換

本研究は、三菱財団および科研費 (課題番号:21540217) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 33D15

キーワード：超幾何方程式, q -差分方程式

(C) 独立変数を $x \rightarrow 1/x$ に変える

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & \frac{1}{x} \\ b_1 & b_2 & b_3; & x \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1; & x \\ q^2 a_3 & q^2 a_2 & a_1; & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

(D) 従属変数を $u \rightarrow (ax; q)_\infty / (bx; q)_\infty u$ に変える。 $s = \text{lq}(a_3/a_1)$ として

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & x \\ b_1 & b_2 & b_3; & x \end{bmatrix} = x^s \frac{(-b_3x/a_3; q)_\infty}{(-b_1x/a_1q; q)_\infty} \Phi \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1; & x \\ qb_3 & b_2 & q^{-1}b_1; & x \end{bmatrix}$$

により a_1, a_3, b_1, b_3 の間に入替えが存在する。以上の変換のもとで

定理 超幾何型方程式 (1) は、変換 (A)(B)(C)(D) によって、以下のいずれかの方程式に帰着する ($p = \sqrt{q}$) :

1) $a_1 a_3 b_1 b_3 \neq 0$ の時 ${}_2\varphi_1(a, b; c; q; x)$:

$$(c - abqx)u(xq^2) - [c + q - (a + b)qx]u(qx) + q(1 - x)u(x) = 0.$$

2) $b_3 = 0, a_1 a_3 b_1 b_2 \neq 0$ の時 ${}_1\varphi_1(a; c; q; x)$:

$$(c - aqx)u(xq^2) - (c + q - qx)u(qx) + qu(x) = 0.$$

3-1) $b_1 = b_2 = 0, a_3 \cdot a_2 a_1 b_3 \neq 0$ の時 $J_\nu^{(1)}(x; q)$:

$$u(xp^2) - (p^\nu + p^{-\nu})u(xp) + (1 + x^2/4)u(x) = 0.$$

3-2) $b_1 = b_3 = 0, a_2 \cdot a_3 a_1 b_2 \neq 0$ の時 $J_\nu^{(3)}(x; q)$:

$$u(xp^2) + [-(p^\nu + p^{-\nu}) + p^{2-\nu}x^2]u(xp) + u(x) = 0.$$

3-3) $b_3 = a_1 = 0, a_2 b_2 \cdot a_3 b_1 \neq 0$ の時 ${}_1\varphi_1(a; 0; q; x)$

$$axu(xq^2) + (1 - x)u(xq) - u(x) = 0.$$

4-1) $b_1 = a_2 = b_3 = 0$ の時 q -Airy 函数 $E_q(qx)$:

$$u(xq^2) + xu(xq) - u(x) = 0.$$

4-2) $a_1 = b_2 = b_3 = 0$ の時 Ramanujan 函数 $A_q(x)$:

$$qxu(xq^2) - u(xq) + u(x) = 0.$$

講演では、これらの方程式の局所解や簡単な変換などについても話したい。

参考図書： Koekoek, R., Lesky, P. A., Swarttouw, R. F., *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer, 2010.

多重ゼータ値の q 類似が満たす 2次関係式

竹山美宏 (筑波大数理物質)*

多重ゼータ値はリーマンゼータ関数の特殊値の拡張で、次で定義される.

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}.$$

ただし k_1, \dots, k_r は正の整数で, $k_1 \geq 2$ である (収束の条件). 本講演では, 川島関係式と呼ばれる多重ゼータ値の2次関係式 [2] の q 類似について述べる.

多重ゼータ値の q 類似を次で定義する [1, 4].

$$\zeta_q(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + \dots + (k_r-1)m_r}}{[m_1]^{k_1} \cdots [m_r]^{k_r}} \quad (1)$$

ただし $[n]$ は q -integer $[n] := (1 - q^n)/(1 - q)$ である. k_1, \dots, k_r が正の整数で $k_1 \geq 2$ のとき, $|q| < 1$ において (1) の右辺は収束し, $q \rightarrow 1$ の極限でもとの多重ゼータ値に戻る.

川島関係式の q 類似を書き下すために必要な代数的設定を準備する. まず, 係数環 $\mathcal{C} := \mathbb{Q}[[\hbar]]$ を用意し, 文字 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で生成される \mathcal{C} 上の非可換多項式環を \mathfrak{h}^1 とする. \mathfrak{h}^1 の部分 \mathcal{C} 加群 $\mathfrak{h}_{>0}^1, \mathfrak{h}^0$ を次で定義する.

$$\mathfrak{h}_{>0}^1 := \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_r > 0} \mathcal{C} z_{k_1} \cdots z_{k_r}, \quad \mathfrak{h}^0 := \mathcal{C} + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2, \dots, k_r \geq 1}} \mathcal{C} z_{k_1} \cdots z_{k_r}.$$

形式的べき級数環 $\mathbb{Q}[[q]]$ への \mathbb{Q} 線型な \mathcal{C} の作用を $1.f(q) := f(q)$, $\hbar.f(q) := (1 - q)f(q)$ で定め, 以下 $\mathbb{Q}[[q]]$ を \mathcal{C} 加群と見なす. このとき, \mathcal{C} 加群準同型 $Z_q: \mathfrak{h}^0 \rightarrow \mathbb{Q}[[q]]$ を $Z_q(1) = 1$, $Z_q(z_{k_1} \cdots z_{k_r}) := \zeta_q(k_1, \dots, k_r)$ で定める.

\mathfrak{h}^1 上に, 1 を単位元とする \mathcal{C} 双線型な積 $*_+$ を帰納的に次で定義する.

$$(z_i w_1) *_+ (z_j w_2) = z_i (w_1 *_+ z_j w_2) + z_j (z_i w_1 *_+ w_2) + (z_{i+j} + \hbar z_{i+j-1}) (w_1 *_+ w_2) \\ (\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{h}^0). \quad \text{このとき次の等式が成り立つ.}$$

$$Z_q(w_1 *_+ w_2) = Z_q(w_1) Z_q(w_2) \quad (\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{h}^0). \quad (2)$$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で生成される \mathfrak{h}^1 の部分 \mathcal{C} 加群 (1次斉次式全体) を \mathfrak{z} とする. \mathfrak{z} 上に \mathcal{C} 双線型な積 \circ を $z_i \circ z_j := z_{i+j}$ で定義し, \mathfrak{z} を可換な \mathcal{C} 代数と見なす. \mathfrak{z} の \mathfrak{h}^1 への作用 (これも \circ で表す) を

$$z_i \circ 1 := 0, \quad z_i \circ (z_j w) := (z_i \circ z_j) w \quad (w \in \mathfrak{h}^1)$$

文部科学省: 科学研究費補助金 (若手研究 (B)) No. 20740088

* e-mail: takeyama@math.tsukuba.ac.jp

web: <http://researchmap.jp/takeyama/>

で定める.

\mathbb{C} 線形な写像 $d, \phi : \mathfrak{h}^1 \rightarrow \mathfrak{h}^1$ を以下のように定める. まず d は, 帰納的に

$$d(1) := 1, \quad d(z_i w) := z_i d(w) + z_i \circ d(w) \quad (w \in \mathfrak{h}^1)$$

によって定まる写像とする. 次に ϕ を定義する. 単項式 $u = z_{k_1} \cdots z_{k_r}$ に対して, 集合 $I_u = \{\sum_{i=1}^j k_i \mid 1 \leq j < r\}$ を考える. 和 $\sum_{i=1}^r k_i$ 以下の正の整数で I_u に属さないものを, 小さい順に p_1, \dots, p_l とする. このとき, $k'_1 = p_1, k'_i = p_i - p_{i-1}$ ($2 \leq i \leq l$) において $\phi(u) := z_{k'_1} \cdots z_{k'_l}$ と定める. これを \mathbb{C} 線型になるように \mathfrak{h}^1 全体に拡張した写像を ϕ とする.

$\mathfrak{h}_{>0}^1$ 上に \mathbb{C} 双線型な積 \otimes_{\hbar} を

$$(z_i w_1) \otimes_{\hbar} (z_j w_2) := z_{i+j}(w_1 *_+ w_2) \quad (\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{h}^1)$$

と定める. また, \mathfrak{h}^1 上に 1 を単位元とする \mathbb{C} 双線型な積 $\bar{*}$ を帰納的に次で定義する.

$$(z_i w_1) \bar{*} (z_j w_2) = z_i(w_1 \bar{*} z_j w_2) + z_j(z_i w_1 \bar{*} w_2) - z_{i+j}(w_1 \bar{*} w_2)$$

以上の記号の下で, 川島関係式の q 類似は次で与えられる.

Theorem.[3] 任意の $w_1, w_2 \in \mathfrak{h}_{>0}^1$ と $n \geq 1$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$Z_q(d(\phi(w_1 \bar{*} w_2)) \otimes_{\hbar} z_1^n) + \sum_{\substack{k+l=n \\ k, l \geq 1}} Z_q(d(\phi(w_1)) \otimes_{\hbar} z_1^k) Z_q(d(\phi(w_2)) \otimes_{\hbar} z_1^l) = 0 \quad (3)$$

ここで $n = 1$ とすると線型の関係式が得られる:

Corollary. $Z_q(z_1 \circ d(\phi(w_1 \bar{*} w_2))) = 0. \quad (\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{h}_{>0}^1)$

この関係式は川島関係式の線型部分とまったく同じものである. したがって, 川島関係式に含まれる多重ゼータ値の線型関係式(巡回和公式, 大野関係式, 一般導分関係式)が q 類似の場合もそのまま成り立つ. さらに, (3) で $n = 2$ とし, (2) を使って Z_q の 2 次の項を 1 次式に直して得られる等式は, 多重ゼータ値の q 類似の間の新しい (非斉次な) 線型関係式を与えることが確認できる.

参考文献

- [1] Kaneko, M., Kurokawa, N. and Wakayama, M., A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function, *Kyushu J. Math.* **57** (2003), no. 1, 175–192.
- [2] Kawashima, G., A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory* **129** (2009), no. 4, 755–788.
- [3] Takeyama, Y., Quadratic relations for a q -analogue of multiple zeta values, [arXiv:1008.0686](https://arxiv.org/abs/1008.0686).
- [4] Zhao, J., Multiple q -zeta functions and multiple q -polylogarithms, *Ramanujan J.* **14** (2007), no. 2, 189–221.

量子 Painlevé 方程式と KZ 方程式の関 係について

名古屋 創 (神戸大理)*

本講演で考える量子 Painlevé 方程式とは Painlevé 方程式の多項式ハミルトニアン $H_J(q, p, t)$ ($J = \text{II, III, IV, V, VI}$) に対する Schrödinger 方程式

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x) = \widehat{H}_J \left(x, \hbar \frac{\partial}{\partial x}, t \right) \Phi(t, x)$$

のことである. ここで, \hbar は複素定数である.

例として, $J = \text{VI}$ のときは

$$\begin{aligned} t(t-1)\widehat{H}_{\text{VI}} = & \hbar^2 x(x-1)(x-t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ & - \hbar [(a+b)(x-1)(x-t) + cx(x-t) + dx(x-1)] \frac{\partial}{\partial x} \\ & + (b+c+d+h)ax - a(b+\hbar)t \end{aligned}$$

を考える. ここで, a, b, c, d は複素定数である. 掛算作用素 x と微分作用素 $\partial/\partial x$ の順序を入れ替えてもパラメータ a, b, c, d のおかげで \widehat{H}_{VI} の形は不変であることに注意する. 他の量子化されたハミルトニアンについても状況は同じである.

共形場理論の相関関数の満たす微分方程式である (合流型) KZ 方程式は (合流型) Schlesinger 方程式の量子化と見なすことができる. ([1], [2], [3]) 一方で, Painlevé 方程式は (合流型) Schlesinger 方程式から導出される.

本講演では, 量子 Painlevé 方程式と KZ 方程式の直接的な関係を与える.

e, f, h を $sl(2)$ の通常の生成元とする. $i = 1, 2, 3$ に対し, V_i を $sl(2)$ の Verma 表現とし, v_i を最高ウェイトベクトル, λ_i を最高ウェイトとする. すなわち, $h^{(i)}v_i = \lambda_i v_i$. また, $V = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ とする. KZ 方程式は次である.

$$\kappa \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \left(\frac{\Omega^{(1,2)}}{t} + \frac{\Omega^{(2,3)}}{t-1} \right) \Psi(t).$$

ここで, $\Omega^{(i,j)}$ は i 番目と j 番目の tensor product に作用する Casimir 作用素である. 非負整数 m を固定する. $h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)}$ に関して V を固有空間分解し, 固有値が $\sum_{i=1}^3 \lambda_i - 2m$ となる V の固有部分空間を V_m と書く. V_m に含まれる特異ベクトルのなす空間を W_m とする. 最高ウェイト λ_i ($i = 1, 2, 3$) が非負整数でないなら, W_m は \mathbb{C} 上 $m+1$ 次元線形空間であることに注意する.

定理 1. 最高ウェイト λ_i ($i = 1, 2, 3$) は非負整数でないとする. このとき, ある線型同形写像 $T_m : W_m \rightarrow \bigoplus_{i=0}^m \mathbb{C}x^i$ が存在して,

$$T_m \circ \widetilde{H}_{\text{KZ}} = \widehat{H}_{\text{VI}}(m) \circ T_m$$

* Department of Mathematics, Kobe University, Kobe 657-8501, Japan, Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science

e-mail: nagoya@math.kobe-u.ac.jp

が成り立つ. ここで,

$$\kappa^2 \tilde{H}_{\text{KZ}} = \frac{\Omega^{(1,2)}}{t} + \frac{\Omega^{(2,3)}}{t-1} + f(t)$$

である. ただし, $f(t)$ はある函数. また, $\hat{H}_{VI}(m)$ は \hat{H}_{VI} において $a = mh$ としたものを表す.

KZ 方程式のハミルトニアンが W_m を不変に保つのはもちろん, $\hat{H}_{VI}(m)$ も $\bigoplus_{i=0}^m \mathbb{C}x^i$ を不変に保つ. 定理の証明は双方のハミルトニアンの基底への作用を直接計算すれば得られる.

他の場合も同様の主張が成り立つ. ただし, 特異ベクトルのなす空間 W_m を考える必要は無く, 固有空間 V_m 上への合流型 KZ 方程式のハミルトニアンの作用と量子 Painlevé 方程式の $\bigoplus_{i=0}^m \mathbb{C}x^i$ 上への作用が同値となる.

参考文献

- [1] J. Harnad, Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik-Zamolodchikov equations. Symmetries and integrability of difference equations (Estérel, PQ, 1994), 155–161, CRM Proc. Lecture Notes, 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996
- [2] M. Jimbo, H. Nagoya and J. Sun, Remarks on the confluent KZ equation for \mathfrak{sl}_2 and quantum Painlevé equations, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008)
- [3] N. Reshetikhin, The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem, *Lett. Math. Phys.* **26** (1992), 167–177

量子 Fuji-Suzuki-Tsuda 方程式とインスタントン分配関数

山田泰彦 (神戸大学大学院・理学研究科)

• 4次元ゲージ理論のインスタントン・モジュライ空間上の積分により定義される分配関数には Nekrasov による組合せ的公式が知られており, ゲージ場の特異性を許した場合 (「面作用素つき」と言われる) にも類似の公式がある [1][2]. ここでは, ゲージ群が $SU(N)$ で基本表現物質場が $2N$ 個の場合の面作用素付き分配関数 Z_{inst} と, Fuji-Suzuki-Tsuda によるモノドロミー保存系の量子化との関係について1つの予想 [3] を述べる.

• $Z_{\text{inst}}(y; \epsilon_1, \epsilon_2, a, m, \tilde{m})$ の組合せ的公式 [1][2].

Z_{inst} は $y = (y_i)_{i=1}^N$, $a = (a_i)_{i=1}^N$, $m = (m_i)_{i=1}^N$, $\tilde{m} = (\tilde{m}_i)_{i=1}^N$ および ϵ_1, ϵ_2 の関数で, 以下のように入えられる ($\sum_{i=1}^N a_i = 0$).

$$Z_{\text{inst}} = \sum_{\lambda} Z(\lambda) \prod_{i=1}^N y_i^{k_i(\lambda)}, \quad (1)$$

$\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^N)$ の和は, N 個の分割の組 $\{\lambda^i = (\lambda_1^i \geq \lambda_2^i \geq \lambda_3^i \geq \dots \geq \lambda_{l_i}^i > 0)\}_{i=1}^N$ 全体にわたり, $\lambda^i = \lambda^{i+N}$, $\lambda_j^i = 0$ ($j \leq 0$ or $j > l_i$). $|\lambda| = \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1} \lambda_j^i$ とする. 和の中身は

$$k_i(\lambda) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j^{i-j+1}, \quad Z(\lambda) = \frac{n_f(a, \lambda, m) n_{\tilde{f}}(a, \lambda, \tilde{m})}{n_v(a, \lambda)}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} n_f(a, \lambda, m) &= n_{\text{bif}}(m, a, (\phi)^N, \lambda, 0), & n_{\tilde{f}}(a, \lambda, \tilde{m}) &= n_{\text{bif}}(a, \tilde{m}, \lambda, (\phi)^N, 0), \\ n_v(a, \lambda) &= n_{\text{bif}}(a, a, \lambda, \lambda, 0), & n_{\text{bif}}(a, b, \lambda, \mu, x) &= \prod_{t=1}^{|\lambda|+|\mu|} (w_t - x), \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる. 重み w_t は ϵ_i, a_i, b_i の1次式であり, 次の指標公式 [2] (Prop. 4.15)

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{|\lambda|+|\mu|} e^{w_t} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{l' \geq 1} e^{a_k - b_{k-l'}} \sum_{s=1}^{\mu_{l'}^{k-l'}} e^{\epsilon_1 s} - \sum_{l, l' \geq 1} e^{a_{k-l+1} - b_{k-l'}} (e^{\epsilon_1 \mu_{l'}^{k-l'}} - 1) \sum_{s=1}^{\lambda_l^{k-l+1}} e^{\epsilon_1 (s - \lambda_l^{k-l+1})} \right. \\ &+ \left. \sum_{l \geq 1} e^{a_{k-l+1} - b_k} \sum_{s=1}^{\lambda_l^{k-l+1}} e^{\epsilon_1 (s - \lambda_l^{k-l+1})} + \sum_{l, l' \geq 1} e^{a_{k-l+1} - b_{k-l'+1}} (e^{\epsilon_1 \mu_{l'}^{k-l'+1}} - 1) \sum_{s=1}^{\lambda_l^{k-l+1}} e^{\epsilon_1 (s - \lambda_l^{k-l+1})} \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

により求められる, ここで $a_{i+N} = a_i + \epsilon_2$, $b_{i+N} = b_i + \epsilon_2$ とした.

• 微分方程式

Fuji-Suzuki-Tsuda 方程式は次の Hamilton 系として書ける.

$$t(t-1) \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad t(t-1) \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (5)$$

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} H_{\text{VI}}(q_i, p_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N-1} (q_i - 1)(q_j - t) \{ (q_i p_i + *) p_j + p_i (q_j p_j + *) \}, \quad (6)$$

ここで H_{VI} は Painlevé VI の多項式 Hamiltonian である. この系の Schrödinger 量子化

$$\left\{ t(t-1) \frac{\partial}{\partial t} - H(q_i, \frac{\partial}{\partial q_i}) \right\} \Psi(q_1, \dots, q_{N-1}, t) = 0, \quad (7)$$

は, 変数 $y_1 = q_1, y_2 = \frac{q_2}{q_1}, \dots, y_{N-1} = \frac{q_{N-1}}{q_{N-2}}, y_N = \frac{t}{q_{N-1}}$ で表すと, ある「ゲージ変換」を施した後に次の形になる.

$$\boxed{\left\{ (\Delta_N + \sum_{i=1}^N u_i \vartheta_i) + \left(\prod_{j=1}^N y_j \right) (\Delta_N + \sum_{i=1}^N v_i \vartheta_i + \sum_{i=1}^N r_i s_i) + \sum_{i=1}^N (y_i + y_i y_{i+1} + \dots + \prod_{j=0}^{N-2} y_{i+j}) (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i + r_i) (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i + s_i) \right\} Z = 0, \quad (8)}$$

ただし $y_{i+N} = y_i, \vartheta_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \Delta_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vartheta_i - \vartheta_{i+1})^2$. ここでパラメータを次のようにとる.

$$u_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{\epsilon_1}, \quad v_i = \frac{a_{i+1} - a_i + m_{i+1} - m_i + 2 + \tilde{m}_i - \tilde{m}_{i+1}}{\epsilon_1}, \quad r_i = \frac{a_i - m_{i+1} - \epsilon_1}{\epsilon_1}, \quad s_i = \frac{a_i - \tilde{m}_i}{\epsilon_1}, \quad (9)$$

ただし, $x_{i+N} = x_i + \epsilon_2$ for $x = a, m, \tilde{m}$ (u_i, v_i, r_i, s_i は N -周期的).

予想. 分配関数 Z_{inst} は方程式 (8) を満たす.

• 例. ($N = 3$ の場合)

$$\begin{aligned} Z_{\text{inst}} = & 1 - \left(\frac{r_1 s_1}{u_1 + 1} y_1 + \frac{r_2 s_2}{u_2 + 1} y_2 + \frac{r_3 s_3}{u_3 + 1} y_3 \right) + \left(\frac{r_1 (r_1 - 1) s_1 (s_1 - 1)}{2(u_1 + 1)(u_1 + 2)} y_1^2 + \text{cyc.} \right) \\ & + \left(\frac{r_1 s_1 (r_2 s_2 u_1 + r_2 s_2 u_2 + 2r_2 s_2 + r_2 u_2 + r_2 + s_2 u_2 + s_2 - u_1 - u_1 u_2)}{(u_1 + 1)(u_2 + 1)(u_1 + u_2 + 1)} y_1 y_2 + \text{cyc.} \right) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

References

- [1] L. F. Alday and Y. Tachikawa, “Affine $SL(2)$ conformal blocks from $4d$ gauge theories,” arXiv:1005.4469 [hep-th].
- [2] B. Feigin, M. Finkelberg, A. Negut and R. Rybnikov, “Yangians and cohomology rings of Laumon spaces,” arXiv:0812.4656 [math.AG].
- [3] Y. Yamada, “A quantum isomonodromy equation and its application to $\mathcal{N} = 2$ $SU(N)$ gauge theories,” arXiv:1011.0292 [hep-th].

Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities

竹村 剛一 (中大理工)

概要

本講演では、不確定特異点をもつ場合も含めた線形常微分方程式系に対して middle convolution を提示し、index of rigidity の一つの定義を与える。Index が正か 0 の場合に、middle convolution と addition をうまく適用した後に行きつくパターンを、ある条件のもとで分類した。

確定特異点のみの場合の middle convolution

Middle convolution は N. Katz ([2]) によって導入されたものであるが、いろいろな研究者によって研究され、改良されていった。とくに、Dettweiler と Reiter ([1]) は、フックス型微分方程式系

$$\frac{dY}{dz} = \left(\frac{A_1}{z-t_1} + \frac{A_2}{z-t_2} + \dots + \frac{A_r}{z-t_r} \right) Y. \quad (1)$$

に対して、線形代数的に middle convolution mc_ν ($\nu \in \mathbf{C}$) を定義した。定義の背後にはオイラー積分変換がある。

$z = \infty$ での特異性を表わす行列を $A_0 = -(A_1 + \dots + A_r)$ で定める。 $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \dots, A_r)$ という $n \times n$ 行列の組に対し、index of rigidity を $\text{idx}(\mathbf{A}) = \sum_{i=0}^r \dim Z(A_i) - (r-1)n^2$ として定める。この数は、 \mathbf{A} が既約な場合には 2 以下の偶数となることが知られている。また、addition とは、行列 A_1, \dots, A_r に対して、それぞれスカラー行列を加える操作である。Index of rigidity の重要な性質として、addition や middle convolution でその値を変えないことがある。(middle convolution は行列のサイズを変えうる。)

Index of rigidity が 2 のとき、既約なフックス型常微分方程式系は、addition と middle convolution をうまく適用することにより行列のサイズが 1 の場合に帰着される。これは、Katz のアルゴリズム (Katz の定理) と呼ばれている。

不確定特異点を含む場合の middle convolution に関連する事柄

本講演では、不確定特異点を含む場合の middle convolution と index of rigidity の一つの定義を与える。考える方程式系は以下のものである。

$$\frac{dY}{dz} = \left(-\sum_{j=1}^{m_0} A_j^{(0)} z^{j-1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} \frac{A_j^{(i)}}{(z-t_i)^{j+1}} \right) Y. \quad (2)$$

不確定特異点を含む場合の middle convolution に向け、川上 ([3]) は微分方程式系

$$(zI_n - T) \frac{d\Psi}{dz} = A\Psi, \quad (3)$$

を考察した。 T が対角行列の場合は大久保型と呼ばれ、確定特異点のみ現れる場合に対応し、さまざまな研究に用いられてきた。微分方程式系 (3) は T が対角化

本研究は科研費 (課題番号:22740107) の助成を受けたものである。

可能とは限らない場合に一般大久保型と呼ばれる。一般大久保型の微分方程式系 (3) が与えられたとき、 T のジョルダン標準形を見ることにより $m_0 = 0$ の場合の微分方程式系 (2) を対応させることができるが、川上は既約な場合にこの対応の全射性を示した。そして、一般大久保型微分方程式ではオイラー積分変換による方程式の変化が A にスカラー行列を加えることに対応することから、微分方程式系 (2) での middle convolution を一般大久保型微分方程式 (3) との対応から定義した ([3])。また、山川 ([5]) は、川上の考察を発展させて幾何を用いることや Harnad duality との関係を見出すことで不確定特異点を含む場合の middle convolution を研究したが、本講演のものとは構成法が異なっている。

不確定特異点を含む場合の middle convolution の一つの定義

本講演では、微分方程式系 (2) に対しての middle convolution を Dettweiler と Reiter によるものを拡張することで直接的に定義する ([4])。

まず、convolution 行列を、オイラー積分変換と整合的になるように定義する。この行列たちのサイズは、もとの行列たち $A_j^{(i)}$ のサイズ n と $r + \sum_{i=0}^r m_i (= M)$ の積 nM である。この形では一般に既約となっていないので、適切な部分空間で割る必要があり、そうして middle convolution が定義される。この方法では、割る空間が明示的であり、次元の計算がしやすいという利点がある。引き続き、index of rigidity も計算しやすい形で定義できる。

特別な場合の計算

特別な場合として、 $i = 0, 1, \dots, r$ に対して $m_i \leq 1$ であり $A_1^{(i)}$ が対角化可能である場合を考えてみる。この場合、middle convolution によって行列の変化の特徴が解明でき、とくに index of rigidity が不変となることが示される。

Katz のアルゴリズムの類似版として、middle convolution や addition をうまく適用することにより行列のサイズを小さくしていったときの、行きつく先を考えてみる。ここでの仮定のもとで、index of rigidity が正の場合には、行きつく先の微分方程式を 1 階にすることができ、Katz の定理の類似がそのまま成り立っている。Index of rigidity が 0 の場合には、17 パターンのいずれかに帰着される。確定特異点のみの場合は 4 パターンであり、ルート系 $D_4^{(1)}$, $E_6^{(1)}$, $E_7^{(1)}$, $E_8^{(1)}$ と対応している。不確定特異点を含む場合においては、確定特異点のみの場合の行きつく先において特異点を合流させることで得られるもののみでは尽くされていない。

参考文献

- [1] M. Dettweiler and S. Reiter, *J. Symbolic Comput.* (2000) **30** 761–798, *J. Algebra* (2007) **318** 1–24.
- [2] N. M. Katz, *Rigid local systems* (Princeton University Press, Princeton, 1996).
- [3] H. Kawakami, Generalized Okubo Systems and the Middle Convolution *Int. Math. Res. Notices* (2010) 3394–3421.
- [4] K. Takemura, Introduction to middle convolution for differential equations with irregular singularities, arXiv:1002.2535
- [5] D. Yamakawa., Middle Convolution and Harnad Duality, to appear in *Math. Annalen*, arXiv:0911.3863.

無分散変形 KP 階層の新しい簡約

高崎金久 (京都大学大学院人間・環境学研究科)

この講演では無分散変形 KP 階層の新たな簡約について報告する. この簡約は 2 重 Hurwitz 数に関する無分散戸田階層の特殊解の研究 (2010 年秋の秋期総合分科会一般講演で紹介した) の副産物として見いだされたものである.

無分散戸田階層は 1 個の空間変数 s (連続化された格子の座標) と 2 系列の時間変数 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots), \bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ をもつが, $\bar{\mathbf{t}}$ を一定にして \mathbf{t} のみの時間発展を考えれば無分散変形 KP 階層になる. すなわち, 無分散戸田階層の 2 種類の Lax 関数 $\mathcal{L}, \bar{\mathcal{L}}$ と Orlov-Schulman 関数 $\mathcal{M}, \bar{\mathcal{M}}$ のうち

$$\mathcal{L} = p + \sum_{n=1}^{\infty} u_n p^{-n+1}, \quad \mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} n t_n \mathcal{L}^n + s + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \mathcal{L}^{-n}$$

はそれらで閉じた Lax 方程式系と正準 Poisson 関係式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{L}\}, \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \mathcal{M}\}, \quad \{\mathcal{L}, \mathcal{M}\} = \mathcal{L} \quad (1)$$

を満たす. ここで $\mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n)_{\geq 0}$ (\mathcal{L}^n の p に関する非負べき部分) であり, Poisson 括弧は

$$\{F, G\} = p \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial s} - p \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial G}{\partial p}$$

と定義される. これらは無分散変形 KP 階層の Lax 形式に他ならない.

2 重 Hurwitz 数に関する無分散戸田階層の特殊解をこのような意味で無分散変形 KP 階層の特殊解とみなして, $\bar{\mathbf{t}}$ のうち最初の有限個 $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ を残して他をすべて 0 におけば, Lax 関数は

$$\mathcal{L} = p \exp(a_1 p^{-1} + \dots + a_N p^{-N}) \quad (2)$$

(a_1, \dots, a_N は s, \mathbf{t} の関数) という特殊な形をとることがわかる. 特に, $N = 1$ の場合の \mathcal{L} と p の関数関係 $\mathcal{L} = p e^{a_1 p^{-1}}$ は実質的には Lambert の W 関数 (Hurwitz 数のさまざまな側面で重要な役割を果たす) を定義するものである.

ここで提案する簡約は (2) を簡約条件 (従属変数を本来の無限系列 u_1, u_2, \dots から有限個の a_1, \dots, a_N に減らす) として定義されるものである. 実際, 次のことが容易に証明できる.

補題 \mathcal{L} の関数形 (2) は Lax 方程式による時間発展のもとで保たれる.

これを示すには $\log \mathcal{L}$ に対する Lax 方程式

$$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial t_n} = \{\mathcal{B}_n, \log \mathcal{L}\} = -\{\mathcal{B}_n^-, \log \mathcal{L}\}$$

に (2) を代入して (ここで \mathcal{B}_n^- は \mathcal{L}^n の負べき部分を表す), これが a_1, \dots, a_N に対する発展方程式として閉じることを確かめればよい.

特に $N = 1$ (従属変数は a_1 のみである) のときには, これらの Lax 方程式は

$$\frac{\partial a_1}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{(na_1)^{n+1}}{(n+1)!} \right) = \frac{n^{n+1} a_1^n}{n!} \frac{\partial a_1}{\partial s} \quad (3)$$

に帰着する (Lambert 関数と関係の深い数 $n^n/n!$ が見えている). (3) は素朴なホドグラフ法によってただちに解ける. すなわち, 1 変数任意関数 F を含むホドグラフ関係式

$$s + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{n^{n+1} a_1^n}{n!} = F(a_1) \quad (4)$$

によって (3) の解 $a_1 = a_1(s, t)$ が陰関数として得られる.

N が一般の場合には, Gibbons–Tsarev の一般化ホドグラフ法にならってホドグラフ解を構成することができる. そのために $\mathcal{L} = \mathcal{L}(p)$ の臨界点 (すなわち $\mathcal{L}'(p) = 0$ となる点) を p_1, \dots, p_N , そこでの $\mathcal{L}(p)$ の値 (すなわち臨界値) を $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ と表して, 臨界値の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ を $\mathcal{L}(p)$ のモジュライ空間の新たな座標とみなす. p_j, a_j はそれらの関数 $p_j = p_j(\boldsymbol{\lambda}), a_j = a_j(\boldsymbol{\lambda})$ になる. Lax 方程式から $\boldsymbol{\lambda}$ に対する方程式

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_n} = \chi_{nj} \frac{\partial \lambda_j}{\partial s} \quad (j = 1, \dots, N, \quad \chi_{nj} := p_j \mathcal{B}'_n(p_j)) \quad (5)$$

が導かれる. χ_{nj} を $\boldsymbol{\lambda}$ の関数 $\chi_{nj} = \chi_{nj}(\boldsymbol{\lambda})$ とみなせば, (5) は閉じた微分方程式系として意味をなす. 一般化ホドグラフ法ではこの方程式の解 $\lambda_j = \lambda_j(s, t)$ を

$$s + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{nj}(\boldsymbol{\lambda}) = F_j(\boldsymbol{\lambda}) \quad (j = 1, \dots, N) \quad (6)$$

というホドグラフ関係式によって陰関数として求める. ただし, 陰関数定理を適用するための非退化条件 $\det \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{\partial \chi_{nk}}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial F_k}{\partial \lambda_j} \right) \neq 0$ を仮定する. (3) の場合と違って, $F_j(\boldsymbol{\lambda})$ は任意関数ではなく, 次の主結果に述べる条件 (7) を満たすものとする.

定理 $F_j = F_j(\boldsymbol{\lambda})$ が方程式

$$\frac{\partial F_k}{\partial \lambda_j} = (F_j - F_k) V_{jk} \quad (j \neq k, \quad V_{jk} := \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_j} \frac{p_j}{(p_j - p_k)^2}) \quad (7)$$

を満たすならば, ホドグラフ関係式 (6) は非退化性条件の下で (5) の解 $\lambda_j = \lambda_j(s, t)$ を与える. それを $a_j = a_j(\boldsymbol{\lambda})$ に代入すれば, \mathcal{L} に対して Lax 方程式が成立する.

証明には $\mathcal{L}(p)$ が $\boldsymbol{\lambda}$ に関して Löwner 型方程式を満たすことを利用する. それによって, (7) を満たす F_j が次のような周回積分で得られることもわかる:

$$F_j = \oint_{\Gamma} \frac{F(\mathcal{L}(p))}{(p - p_j)^2} \frac{dp}{2\pi i} \quad (F(z) \text{ は適当な正則関数, } \Gamma \text{ は適当な積分路}) \quad (8)$$

パルヴェ第3方程式のラックス形式

藤 健太 (神戸大学理学研究科)

1. パルヴェ第3方程式のラックス形式

パルヴェ第3方程式のラックス形式が 3×3 と 4×4 の行列によるものが得られた。

3×3 行列 M, B_1, B_2 を次のようにとる。

$$M = \begin{pmatrix} t_2 z & 0 & -q \\ fz & 0 & 0 \\ \frac{(1-\beta_1)t_2}{q} z & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{g+2\xi q}{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & \frac{2g+3\xi q}{t_1} + \frac{t_2}{q} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{-g-2\xi q+1}{t_2} + z & 0 & -\frac{g}{t_2} \\ \frac{f}{t_2} z & 0 & -\frac{t_1 q}{t_2} \\ \frac{1-\beta_1}{q} z & 0 & \frac{-2g-3\xi q+1}{t_2} - \frac{t_1}{q} \end{pmatrix}$$

ここで q, p は t_1 と t_2 の関数で, β_1, β_2, ξ はパラメータとし,

$$f = q\{q(p + \xi) + \beta_2\} + t_1 t_2, \quad g = 2qp + \beta_1 + \beta_2,$$

とおいた. 4×4 行列 N, C_1, C_2 を次のようにとる。

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{t_2}{2} z & 0 & \frac{1}{2} \beta_1 q & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{t_2}{2} z & -\frac{f}{t_2} & -\frac{1}{2} \beta_1 q \\ -\frac{t_2}{q} z & 0 & \frac{1}{2} + \frac{t_2}{2} z & 0 \\ 0 & -\frac{t_2}{q} z & 0 & \frac{1}{2} - \frac{t_2}{2} z \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{t_2}{q} + \frac{g}{2t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{q} & \frac{\xi q}{t_1} + \frac{g}{2t_1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\xi q}{t_1} - \frac{g}{2t_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{q} & -\frac{t_2}{q} - \frac{g}{2t_1} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{t_1}{q} + \frac{g}{2t_2} - \frac{1}{2} z & 0 & \frac{\beta_1 q}{2t_2} & 0 \\ \frac{t_1}{t_2 q} & -\frac{1-\xi q}{t_2} + \frac{g}{2t_2} + \frac{1}{2} z & -\frac{t_1}{t_2} - \frac{f}{t_2^2} & \frac{\beta_1 q}{2t_2} \\ -\frac{1}{q} z & 0 & \frac{1-\xi q}{t_2} - \frac{g}{2t_2} + \frac{1}{2} z & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q} & \frac{t_1}{t_2 q} & -\frac{t_1}{q} - \frac{g}{2t_2} - \frac{1}{2} z \end{pmatrix}$$

これらの行列に対して次のラックス形式を考える.

$$\left[z \frac{d}{dz} - M, \frac{\partial}{\partial t_i} - B_i \right] = 0, \quad (1)$$

$$\left[z \frac{d}{dz} - N, \frac{\partial}{\partial t_i} - C_i \right] = 0. \quad (2)$$

それぞれの式から $\frac{\partial}{\partial t_i} p$ と $\frac{\partial}{\partial t_i} q$ を書き下すと, $i = 1$ の場合は,

$$H_1 = \frac{q^2 p(p + \xi)}{t_1} + t_2 p + \frac{\beta_1 \xi q}{t_1} + \frac{(\beta_1 + \beta_2) q p}{t_1}$$

をハミルトニアンとするハミルトン系であることが分かり, $i = 2$ の場合は,

$$H_2 = \frac{q^2 p(p + \xi)}{t_2} + t_1 p + \frac{\beta_1 \xi q}{t_2} + \frac{(\beta_1 + \beta_2) q p}{t_2}$$

をハミルトニアンとするハミルトン系である.

H_1, H_2 ともにパンルヴェ第3方程式のハミルトニアンに一致している.

Remark 1. 4×4 のラックス形式 (2) は, $D_3^{(2)}$ 型のアフィンリー代数によって表現されていると見なせる.

2. 構成方法

パンルヴェ第5方程式のラックス形式が 3×3 行列の場合と 4×4 行列の場合に作ることができることが知られている. これらのラックス形式に対してラプラス変換を施したのももパンルヴェ第5方程式のラックス形式である.

ラプラス変換を施したラックス形式に対して, パンルヴェ第5方程式からパンルヴェ第3方程式への退化を適用させることによってパンルヴェ第3方程式のラックス形式を得ることができる.

Remark 2. パンルヴェ第3方程式からパンルヴェ第2方程式への退化をラックス形式 (1), (2) に適用させることによってパンルヴェ第2方程式のラックス形式を得ることができる.

参考文献

- [1] V. G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras, Cambridge University Press (1990).
- [2] T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei, Similarity reduction of the modified Yajima-Oikawa equation, J. Phys. A: Math. Gen., **36** (2003) 11465-11480.
- [3] S. Kakei and T. Kikuchi, The sixth Painleve equation as similarity reduction of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ generalized Drinfeld-Sokolov hierarchy. Lett. Math. Phys. 79 (2007), no. 3, 221-234.
- [4] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, (2009).

$A_{2n+1}^{(1)}$ 型高階パンルヴェ系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解

神戸大学理学研究科 鈴木 貴雄 (Takao SUZUKI)

概要

現在までにパンルヴェVI方程式の高階化がいくつか提出されている. その中で, $A_{2n+1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つものについては, 一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ で記述される特殊解を持つことが最近の研究で明らかになった. この結果の詳細を報告することが本講演の目的である.

1 $A_{2n+1}^{(1)}$ 型高階パンルヴェ系

本研究において考察する対象は, $A_{2n+1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ次のハミルトン系である:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, \dots, n), \\ H &= \frac{1}{t} \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{1}{2} x_i^2 y_i^2 - \alpha_{2i+2}^{(2n-2i-1)} x_i y_i + \sum_{j=0}^{i-1} x_i (x_i y_i + \alpha_{2i+1}) y_j \right\} + \frac{1}{1-t} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i (x_i y_i + \alpha_{2i+1}) y_j. \end{aligned} \quad (1.1)$$

ここで, パラメータは次のように定める:

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_{2n+1} = 1, \quad \alpha_{k+2n+2} = \alpha_k, \quad \alpha_k^{(l)} = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{k+l}.$$

また, 従属変数の間には次の関係式が常に成り立つと仮定しておく:

$$\sum_{i=0}^n x_i y_i + \eta = 0. \quad (1.2)$$

本研究の目的は, この方程式が一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ によって記述される特殊解を持つことを示すことである.

注 1.1. ハミルトン系 (1.1) は関係式 (1.2) を用いた変数分離法によって, $2n$ 階のハミルトン系を導く. この得られたハミルトン系は結合型パンルヴェVI系として記述される [1].

2 超幾何函数解

命題 2.1. ハミルトン系 (1.1) の下で特殊化

$$y_i = 0 \quad (i = 0, \dots, n), \quad \eta = 0,$$

を課す. このとき $\mathbf{x} = {}^t[x_0, \dots, x_n]$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の線形微分方程式系

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \left(\frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{1-t} \right) \mathbf{x}, \\ A_0 &= - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{2i+2}^{(2n-2i-1)} E_{i,i} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \alpha_{2j+1} E_{i,j}, \quad A_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{2j+1} E_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

を満たす. ただし, $E_{i,j} = [\delta_{i,k} \delta_{j,l}]_{k,l=0}^n$ は行列単位とする.

一般超幾何微分方程式 (2.1) の $t = 0$ での基本解を、フロベニウスを用いて級数解の形で与える。次のようなゲージ変換を考える:

$$\mathbf{x}^k = t^{\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} O & t^{-1}I_{n-k} \\ I_{k+1} & O \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (k = 0, \dots, n).$$

このとき、各 k に対して (2.1) は次のように変換される:

$$\frac{d\mathbf{x}^k}{dt} = \left(\frac{A_0^k}{t} + \frac{A_1^k}{1-t} \right) \mathbf{x}^k, \quad (2.2)$$

ただし、 A_0^k, A_1^k は A_0, A_1 中のパラメータの添字を全て $2k+2$ 増やしたものとす。

方程式系 (2.2) の級数解は次のようにして求まる。べき級数

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}_i^k t^i,$$

を (2.2) に代入すると漸化式

$$A_0^k \mathbf{x}_0^k = \mathbf{0}, \quad \{A_0^k - (i+1)I_{n+1}\} \mathbf{x}_{i+1}^k = (A_0^k - A_1^k - iI_{n+1}) \mathbf{x}_i^k \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

が得られる。この漸化式は係数行列に関する次元定理より 1 次元分の解を持つので、後はその解を見つければ良い。

定理 2.2 ([2]). 領域 $|t| < 1$ において、一般超幾何微分方程式 (2.1) は次の基本解を持つ:

$$\mathbf{x} = t^{-\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} f^{k,k} \\ \vdots \\ f^{k,0} \\ t f^{k,n} \\ \vdots \\ t f^{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (k = 0, \dots, n), \quad f^{k,l} = \prod_{i=1}^l \frac{\alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}}{\alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_0)_i (a_1)_i \dots (a_n)_i}{(1)_i (b_1)_i \dots (b_n)_i} t^i.$$

ここで、一般超幾何関数のパラメータは次で与えられる:

$$a_i = 1 + \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \quad b_i = 1 + \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \quad (i = 1, \dots, l),$$

$$a_i = \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \quad b_i = \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \quad (i = l+1, \dots, n), \quad a_0 = \alpha_{2k-2n+1}^{(2n)}.$$

注 2.3 ([3]). 上記の結果は津田照久氏によっても独立に得られている。ただし積分表示を用いた形で与えられており、本研究とはアプローチが全く異なる。

参考文献

- [1] T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, preprint (arXiv:1002.2685).
- [2] T. Suzuki, A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$, SIGMA **6** (2010), 078.
- [3] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math., in press. (preprint: arXiv:1005.4130)

KP/UC 階層とパルルヴェ方程式

津田 照久 (九大数理)

KP 階層は、自然数の重みを備えた無限個の時間発展を持つ斉次な無限次元可積分系である。それに対して、UC 階層とは、KP 階層の斉次性を保ったまま負の次数の無限変数を付け加えた拡張とすることができる。本講演では、対象を KP 階層を超えて UC 階層にまで広げることによって、第 VI 型から第 I 型まで全てのパルルヴェ方程式をソリトン理論の枠組みで捉える一つのアプローチについて紹介する。[10] 参照。

1 普遍指標

ヤング図形の組 $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l)$, $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{l'})$ に対し、普遍指標 $S_{[\lambda, \mu]}$ を捻れたヤコビ・トゥルデイ公式 [4]

$$S_{[\lambda, \mu]} = \det \begin{pmatrix} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}, & i \leq l' \\ p_{\lambda_i-\mu_{-i+j}}, & i > l' \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq l+l'}$$

によって定義する。但し $p_n = p_n(\mathbf{x})$ は母函数

$$e^{\xi(\mathbf{x}, k)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(\mathbf{x}) k^n, \quad \xi(\mathbf{x}, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$$

で決まる変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ のみに関する多項式とし、一方 $q_n = q_n(\mathbf{y})$ は p_n において単純に \mathbf{x} を \mathbf{y} に置き換えたものとする。各変数の次数を $\deg x_n = n$, $\deg y_n = -n$ と勘定すると、例えば

$$S_{[0, \emptyset]} = 1, \quad S_{[(1), \emptyset]} = x_1, \quad S_{[(1), (1)]} = x_1 y_1 - 1, \\ S_{[(2, 1), (1)]} = \left(\frac{x_1^3}{3} - x_3 \right) y_1 - x_1^2, \quad \dots$$

のように $S_{[\lambda, \mu]}$ は次数がヤング図形の面積の差 $|\lambda| - |\mu|$ に等しいような斉次式になる。普遍指標は、シューア函数の自然な拡張¹であって、一般線形群の既約有理表現の指標を与える²。

¹ 実際 $\mu = \emptyset$ の場合、普遍指標は文字通りシューア函数に帰着する： $S_{[\lambda, \emptyset]} = \det(p_{\lambda_i - i + j}) = S_{\lambda}$ 。

² GL_r の既約有理表現は、 $l+l' \leq r$ なるヤング図形の組 $[\lambda, \mu]$ で指定できる。それを $\rho_{[\lambda, \mu]}$ と表すと、 $\text{tr} \rho_{[\lambda, \mu]} = S_{[\lambda, \mu]}$ が成り立つ。但し変数の対応は $g \in GL_r$ の固有値 (t_1, \dots, t_r) を用いて、 $x_n = \sum_{i=1}^r t_i^n / n$, $y_n = \sum_{i=1}^r t_i^{-n} / n$ とした。

2 KP 階層と UC 階層

無限次元可積分系の理論と一般線形群の表現論は密接に関係している。(些か標語的だが) KP 階層はシューア函数を特徴付ける無限次元可積分系と考えられ、その普遍指標への対応物が UC 階層に他ならない。

互いに可換な頂点作用素の組を導入する。

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n^{\pm} k^n = e^{\pm \xi(\mathbf{x} - \bar{\partial}_y, k)} e^{\mp \xi(\bar{\partial}_x, k^{-1})}, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_n^{\pm} k^{-n} = e^{\pm \xi(\mathbf{y} - \bar{\partial}_x, k^{-1})} e^{\mp \xi(\bar{\partial}_y, k)}.$$

ここで、記号 $\bar{\partial}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right)$ を用いた。

定義 1 ([9]). 未知函数 $\tau = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対する 2 連立双線形方程式

$$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = \sum_{i+j=-1} Y_i^- \tau \otimes Y_j^+ \tau = 0$$

を UC 階層 (の双線形恒等式) と呼ぶ。

函数 τ が変数 \mathbf{y} に依存しない場合、UC 階層は KP 階層に帰着する。UC 階層の解空間は佐藤グラスマン多様体 (= KP 階層の解空間) の直積を成し、特に斉次多項式解は普遍指標の集合に一致する。実は、多項式とは限らない一般の斉次解を考えることからパルルヴェ方程式への繋がりが見えてくる。

3 パルルヴェ方程式の導出

頂点作用素で結ばれた KP/UC 階層の隣接する解の列には、元の双線形恒等式に由来する類似の関係式が成り立つ³。例えば KP 階層の場合は

$$\sum_{i+j=-2} X_i^- \tau_n \otimes X_j^+ \tau_{n+1} = 0$$

なる双線形方程式であり、UC 階層の場合は

$$\tau_{m,n} \otimes \tau_{m+1,n+1} = \sum_{i+j=0} X_i^- \tau_{m+1,n} \otimes X_j^+ \tau_{m,n+1}$$

³ しばしば「変形…階層」と呼ばれる。UC 階層の場合に添字が $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ と 2 次元分あるのは、互いに可換な頂点作用素の存在の反映である。

表1 KP階層からパンルヴェ方程式へ

周期	変数 x の特殊化	パンルヴェ方程式	$z = k^\ell$ に関する線形常微分方程式
$\ell = 2$	$x_n = 0 \ (n \neq 1, 3)$	P_{II}	2×2 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個 (rk = 3/2)
$\ell (\geq 3)$	$x_n = 0 \ (n \neq 1, 2)$	$P(A_{\ell-1}^{(1)})$; $\ell = 3 \Rightarrow P_{IV}$ $\ell = 4 \Rightarrow P_V$	$\ell \times \ell$ 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個 (rk = 2/\ell)
$\ell (\geq 2)$	$x_1 = t + a$ $x_n = a/n \ (n \neq 1)$	P_{III} -鎖: $\ell = 2 \Rightarrow P_{III}$	$\ell \times \ell$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個 (rk = 1/\ell)

表2 UC階層からパンルヴェ方程式へ

周期	変数 (x, y) の特殊化	パンルヴェ方程式	$z = k^\ell$ に関する線形常微分方程式
(ℓ, ℓ)	$x_n = t + a/n$ $y_n = -t + a/n$	$P(A_{2\ell-1}^{(1)})$; $\ell = 2 \Rightarrow P_V$	$\ell \times \ell$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個 (rk = 1)
(ℓ, ℓ)	$x_n = (a + bt^n)/n$ $y_n = (a + bt^{-n})/n$	P_{VI} -鎖: $\ell = 2 \Rightarrow P_{VI}$	$\ell \times \ell$ 系 (フックス型) 確定特異点 4 個

等である。そこで、KP/UC階層の解の列 $\{\tau_n\}$, $\{\tau_{m,n}\}$ に対する付帯条件として斉次性: $E\tau_n = d_n\tau_n$, $E'\tau_{m,n} = d_{m,n}\tau_{m,n}$ と周期性: $\tau_{n+\ell} = \tau_n$, $\tau_{m+\ell,n} = \tau_{m,n+\ell} = \tau_{m,n}$ ($\ell \geq 2$) を課す。但し

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad E' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nx_n \frac{\partial}{\partial x_n} - ny_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)$$

は次数を測る微分作用素である⁴。最後に、常微分方程式を得るためには適当な時間発展の方向を定める必要がある(独立変数の特殊化)。以上の操作をKP/UC階層に対する相似簡約化(similarity reduction)という。

定理2. パンルヴェ方程式 P_{II} , $P(A_{\ell-1}^{(1)})$, P_{III} -鎖は、各々KP階層の周期2, $\ell (\geq 3)$, $\ell (\geq 2)$ の相似簡約である⁵。また、 $P(A_{2\ell-1}^{(1)})$ と P_{VI} -鎖は、UC階層の周期 (ℓ, ℓ) の相似簡約である。表1, 2 参照。

但し定理2のKP階層と P_{II} 及び $P(A_{\ell-1}^{(1)})$ の関係については、それぞれ [1] と [6, 7] によって、既によく知られている結果である。

注. 記号 $P(A_{\ell-1}^{(1)})$ は $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型の高階パンルヴェ方程式 [5], または周期 ℓ のダルブー鎖 [2, 11] を表す。 P_{III} -鎖は P_{III} の高階拡張 ($2\ell - 2$ 階) で、元々はKP階層と異なる文脈から発見された [8, 12]。 P_{VI} -鎖はあるクラスのシュレジンジャー系に等価な P_{VI} の高階拡張 ($2\ell - 2$ 階) である⁶。

⁴ 実際 $E'S_{[\lambda,\mu]} = (|\lambda| - |\mu|)S_{[\lambda,\mu]}$ となる。

⁵ P_I の導出はやや例外的でKP階層に対して、2-被約条件: $\partial\tau/\partial x_{2n} \equiv 0$ と斉次性: $L\tau = c\tau$ と特殊化: $x_1 = t$, $x_5 = 4/5$, $x_n = 0 \ (n \neq 1, 5)$ を課すことで得られる。ここでピラソロ作用素 $L (= L_{-2}) = x_1^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x_{n+2}\partial/\partial x_n$ を用いた。

⁶ P_{VI} -鎖はその後ドリinfeld・ソコロフ階層から得られた方程式系 [3] と同定されている。

定理2によって、パンルヴェ方程式の持つ様々な性質がKP/UC階層から自然に従う。例えば、(i) τ 関数と広田の双線形形式 (\because KP/UC階層の双線形恒等式);

(ii) 指標多項式による解 ($\because S_{[\lambda,\mu]}$ は斉次式);

(iii) ワイル群対称性 (\because 頂点作用素の置換);

(iv) 線形補助問題 (\because KP/UC階層の波動関数)。

参考文献

- [1] Ablowitz, M.J., Segur, H.: Exact linearization of a Painlevé transcendent. Phys. Rev. Lett. **38**, 1103–1106 (1977)
- [2] Adler, V.E.: Nonlinear chains and Painlevé equations. Phys. D **73**, 335–351 (1994)
- [3] Fuji, K., Suzuki, T.: Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems. Funkcial. Ekvac. **53**, 143–167 (2010)
- [4] Koike, K.: On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters. Adv. Math. **74**, 57–86 (1989)
- [5] Noumi, M., Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_\ell^{(1)}$. Funkcial. Ekvac. **41**, 483–503 (1998)
- [6] Noumi, M., Yamada, Y.: Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials. Nagoya Math. J. **153**, 53–86 (1999)
- [7] Schiff, J.: Bäcklund transformations of MKdV and Painlevé equations. Nonlinearity **7**, 305–312 (1994)
- [8] Shabat, A.B.: Third version of the dressing method. Theoret. and Math. Phys. **121**, 1397–1408 (1999)
- [9] Tsuda, T.: Universal characters and an extension of the KP hierarchy. Comm. Math. Phys. **248**, 501–526 (2004)
- [10] Tsuda, T.: From KP/UC hierarchies to Painlevé equations. Preprint, arXiv:1004.1347
- [11] Veselov, A.P., Shabat, A.B.: A dressing chain and the spectral theory of the Schrödinger operator. Funct. Anal. Appl. **27**, 81–96 (1993)
- [12] Willox, R., Hietarinta, J.: Painlevé equations from Darboux chains. I. P_{III} - P_V . J. Phys. A **36**, 10615–10635 (2003)

UC 階層とモノドロミー保存変形, 超幾何関数

津田 照久 (九大数理)

本講演では, UC 階層の相似簡約から現れるモノドロミー保存変形型の有限次元可積分系について論じる. 得られた方程式 (= シュレジンジャー系) は, パンルヴェ VI 型方程式やガルニエ系を含むような興味深いクラスを成し, 多項式ハミルトン系による統一的表示を持つ. また, 積分表示と捻れドラム理論に基づいた超幾何関数解の構成についても紹介する. [5, 6] 参照.

1 変形理論

L 連立一階線形微分方程式

$$(F) \quad \frac{d\Psi}{dz} = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{A_i}{z - s_i} \Psi \quad (A_i : L \times L \text{ 行列})$$

はリーマン球面上に $N+3$ 個の確定特異点 $\{s_0 = 1, s_1, \dots, s_N, s_{N+1} = 0, s_{N+2} = \infty\}$ を持つフックス型方程式である. 特異点の位置 s_i を動かしたとき, (F) のモノドロミーが不変になるように係数 $A_j = A_j(s)$ の s 依存性を決定しよう.

定理 1 (古典的). (F) のモノドロミーが s_i に依らない \iff ある z の有理関数 $B_i(z)$ が存在して,

$$(D) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s_i} = B_i \Psi.$$

(F) と (D) の完全積分可能条件から, A_j に対する s についての非線形偏微分方程式系 (モノドロミー保存変形) が得られる¹.

2 UC 階層の相似簡約

UC 階層の解の列 $\{\tau_{m,n}(x, y)\}$ に対し, 斉次性: $E' \tau_{m,n} = d_{m,n} \tau_{m,n}$ と周期性: $\tau_{m+L,n} = \tau_{m,n+L} = \tau_{m,n}$ を課す. さらに, 独立変数 x_k, y_k を新しい

¹ 適当な規格化の下, 有理関数 $B_i(z)$ は A_j で具体的に表される. 通例, 無限遠点の留数行列 $A_{N+2} = -\sum_{i=0}^{N+1} A_i$ を対角化しておいて, $B_i = A_i/(s_i - z)$ を得る. 結局, (F) のモノドロミー保存変形はシュレジンジャー系 [3]

$$\frac{\partial A_i}{\partial s_i} = -\sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial s_j} = \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j} \quad (i \neq j)$$

によって記述される.

変数 $t = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ の「冪和」

$$x_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^N \theta_i t_i^k, \quad y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^N \theta_i t_i^{-k}$$

で読み替えて得られる方程式を $S_{L,N}$ と記す.

定理 2. $S_{L,N}$ はモノドロミー保存変形である.

証明. UC 階層の双線形恒等式から, 波動関数

$$\psi_{m,n} = \frac{\tau_{m,n-1}(x - [k^{-1}], y - [k])}{\tau_{m,n}(x, y)} e^{\xi(x,k)}$$

(k : スペクトル変数) の満たす方程式として,

$$\begin{cases} \text{フックス型方程式 (F)} & (z = k^L) \\ \text{変形方程式 (D)} & (s_i = t_i^L) \end{cases}$$

の両方が自然に導かれる. \square

正確には「 $N+3$ 個の確定特異点のうち $N+1$ 個の近傍で $L-1$ 次元の正則解を持つ」ような (F) が生じる². $S_{L,N}$ は多時間ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}^3$

$$\frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \quad \begin{cases} 1 \leq i, j \leq N \\ 1 \leq n \leq L-1 \end{cases}$$

の形に表される. 但しハミルトン関数 H_i は

$$\begin{aligned} s_i H_i &= \sum_{n=0}^{L-1} e_n q_n^{(i)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0}^N \sum_{0 \leq m < n \leq L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)} \\ &+ \sum_{j=0}^N \frac{s_j}{s_i - s_j} \sum_{m,n=0}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)} \end{aligned}$$

なる正準変数についての多項式である⁴.

² 各特異点での留数行列の固有値の縮退の様子をヤング図形の組で表して, スペクトル型と呼ぶ. この場合は

$$(1, 1, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1), \underbrace{(L-1, 1), \dots, (L-1, 1)}_{N+1 \text{ 個}}$$

³ $N=2$ の時はガルニエ系, さらに $N=1$ とすれば非自明な最初の例である P_{VI} を得る.

⁴ ここで $s_0 = q_n^{(0)} = q_0^{(0)} = 1$, $p_n^{(0)} = \kappa_n - \sum_{i=1}^N q_n^{(i)} p_n^{(i)}$, $p_0^{(i)} = \theta_i - \sum_{n=1}^{L-1} q_n^{(i)} p_n^{(i)}$ なる略記法を用いた. $\therefore H_i$ は q と p に関して各々 3 次と 2 次である. 複素パラメータ $(e, \kappa, \theta) = (e_0, \dots, e_{L-1}, \kappa_0, \dots, \kappa_{L-1}, \theta_0, \dots, \theta_N)$ には 2 つの関係 $\sum_{n=0}^{L-1} e_n = (L-1)/2$, $\sum_{n=0}^{L-1} \kappa_n = \sum_{i=0}^N \theta_i$ が付くので, 正味 $2L+N-1$ 個. これらは (F) の特異点での指数に対応している. なお正準変数と UC 階層の τ 関数との関係は

$$\begin{aligned} q_n^{(i)} &= \left(\frac{t_i}{t_0}\right)^n \frac{\tau_{n,-n}(\theta_i + 1) \tau_{0,0}(\theta_0 + 1)}{\tau_{0,0}(\theta_i + 1) \tau_{n,-n}(\theta_0 + 1)}, \\ q_n^{(i)} p_n^{(i)} &= \frac{\theta_i \tau_{n-1,-n-1}(\theta_i - 1) \tau_{n,-n}(\theta_i + 1)}{L \tau_{n,-n-1} \tau_{n-1,-n}}. \end{aligned}$$

3 超幾何関数 $F_{L,N}$

多重指数 $s^m = \prod_{i=1}^N s_i^{m_i}$ の記法の下, 無限級数

$$F_{L,N} = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha_1)_{|m|} \cdots (\alpha_{L-1})_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|m|} \cdots (\gamma_{L-1})_{|m|} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_N}} s^m$$

で超幾何関数 $F_{L,N}(\alpha, \beta, \gamma; s)$ を導入する. 定義より $y = F_{L,N}$ の満たす超幾何微分方程式⁵

$$\left\{ s_i (\beta_i + \delta_i) \prod_{k=1}^{L-1} (\alpha_k + \mathcal{D}) - \delta_i \prod_{k=1}^{L-1} (\gamma_k - 1 + \mathcal{D}) \right\} y = 0$$

が直ちに従うが⁶, 以下ではオイラー型積分表示

$$F_{L,N} = \prod_{k=1}^{L-1} \frac{\Gamma(\gamma_k)}{\Gamma(\alpha_k)\Gamma(\gamma_k - \alpha_k)} \times \int_{\Delta_0} \Phi \varphi_0$$

を出発点にして等価な線形パフ系を構成しよう. まず上記積分表示において, 被積分形式は

$$\Phi = \prod_{k=1}^{L-1} u_k^{\lambda_k} (u_{k-1} - u_k)^{\mu_k} \prod_{i=1}^N (1 - s_i u_{L-1})^{v_i}$$

($u_0 = 1$) なる $U = \mathbb{C}^{L-1} \setminus D$ 上の多価函数に

$$\varphi_0 = \frac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_{L-1}}{u_{L-1} \prod_{k=1}^{L-1} (u_{k-1} - u_k)} \in \Omega^{L-1}(*D)$$

を乗じたものであり⁶, 積分域 $\Delta_0 = \{0 \leq u_{L-1} \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{L-1}$ は $L-1$ 単体である. 函数 $1/\Phi$ (の多価性) が決める U 上の局所系を \mathcal{L} (その双対を \mathcal{L}^\vee) と記す. この局所系を係数とする (コ) ホモロジー群の構造は次の通り:

$$(i) \dim H^p(U, \mathcal{L}) = \dim H_p(U, \mathcal{L}^\vee) = \begin{cases} N(L-1) + 1 & (p = L-1) \\ 0 & (p \neq L-1). \end{cases}$$

(ii) $H^{L-1}(U, \mathcal{L}) \cong \Omega^{L-1}(*D)/\nabla \Omega^{L-2}(*D)$ の基底⁷:

$$\varphi_0, \quad \varphi_n^{(i)} = \frac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_{L-1}}{u_{L-1} (1 - s_i u_{L-1}) \prod_{k \neq n} (u_{k-1} - u_k)}.$$

(iii) $H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ の基底 = $U \cap \mathbb{R}^{L-1}$ の有界な部屋.

⁵但し $\delta_i = s_i \partial / \partial s_i$, $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^N \delta_i$. 例えば $F_{L,N}$ は $(L, N) = (2, 1), (L, 1), (2, N)$ の場合, 各々ガウスの超幾何関数 ${}_2F_1$, トマエの ${}_L F_{L-1}$, アペル・ロリチェラの F_D に帰着する.

⁶但し

$$D = \bigcup_{k=1}^{L-1} (\{u_k = 0\} \cup \{u_k = u_{k-1}\}) \cup \bigcup_{i=1}^N \{u_{L-1} = 1/s_i\},$$

$\Omega^p(*D)$ = 高々 D のみに極を持つ有理 p 次微分形式の空間. また, パラメタの対応は以下の通り:

$$\lambda_k = \begin{cases} \alpha_k - \gamma_{k+1} & (k \neq L-1) \\ \alpha_{L-1} & (k = L-1) \end{cases}, \quad \mu_k = \gamma_k - \alpha_k, \quad v_i = -\beta_i.$$

⁷ $\nabla = d + d \log \Phi \wedge$ は共変微分作用素.

さて, $\forall \Delta \in H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ に対し超幾何積分

$$y_0 = \int_{\Delta} \Phi \varphi_0, \quad y_n^{(i)} = \int_{\Delta} \Phi \varphi_n^{(i)}$$

を並べたベクトル値函数 $\vec{y} = \vec{y}(s; \Delta) = \mathbf{T}(y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_{L-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(N)}, \dots, y_{L-1}^{(N)})$ を考える.

定理 3. \vec{y} は階数 $N(L-1) + 1$ の線形パフ系

$$(P) \quad d\vec{y} = \sum_{0 \leq i < j \leq N+1} C_{ij} d \log(s_i - s_j) \vec{y}$$

を満たす (C_{ij} はパラメタ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ の一次式).

4 $\mathcal{H}_{L,N}$ の超幾何函数解

多項式ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$ の相空間の次元 $2N(L-1)$ は, 対応するフックス型方程式 (F) のアクセサリ・パラメタの数に丁度等しい. $\mathcal{H}_{L,N}$ の初期値の空間は一般に複雑な代数多様体であるが⁸, 定数パラメタがある超平面上にある場合, 射影空間 $\mathbb{P}^{N(L-1)}$ の点で怪数づけられるような特殊解の族が存在する⁸. 実際, 次が示される.

定理 4. $\kappa_0 - \sum_{i=1}^N \theta_i = 0$ のとき $\mathcal{H}_{L,N}$ は特殊解

$$q_n^{(i)} = 0, \quad p_n^{(i)} = -\theta_i \frac{y_n^{(i)}}{y_0}$$

を持つ. 但し $\{y_0, y_n^{(i)}\}$ は (P) の任意の解である⁹.

注 (パウルヴェ系と超幾何系). $P_{V1} (= \mathcal{H}_{2,1})$, ガルニエ系 ($\mathcal{H}_{2,N}$) の超幾何函数解はそれぞれ [1] と [2] で与えられた. P_{V1} -鎖 ($\mathcal{H}_{L,1}$) についても最近 [4] によって独立に考察されている.

参考文献

- [1] Fuchs, R.: Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. Math. Ann. **63**, 301–321 (1907)
- [2] Okamoto, K., Kimura, H.: On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables. Quart. J. Math. **37**, 61–80 (1986)
- [3] Schlesinger, L.: Über eine klasse von differentialsystemen beliebiger ordnung mit festen kritischen punkten. J. Reine Angew. Math. **141**, 96–145 (1912)
- [4] Suzuki, T.: A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$. SIGMA **6**, 078 (2010)
- [5] Tsuda, T.: Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type. Quart. J. Math. (2010), doi:10.1093/qmath/haq040
- [6] Tsuda, T.: UC hierarchy and monodromy preserving deformation. Preprint, arXiv:1007.3450

⁸次元の勘定を表にまとめると,

ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$	相空間の次元 = $2N(L-1)$ 定数パラメタ $2L + N - 1$ 個
$F_{L,N}$ の超幾何系 (P)	パフ系の階数 = $N(L-1) + 1$ 定数パラメタ $2L + N - 2$ 個

⁹パラメタの対応は $\alpha_n = e_n - e_0, \beta_i = -\theta_i, \gamma_n = e_n - e_0 - \kappa_n$.

離散冪函数の明示公式

増田 哲 (青山学院大学 理工学部)*

Bobenko および Pinkall は, 離散正則函数の定義 (のひとつ) として, 以下を提案した [3].

定義 写像 $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ を考える. 任意の $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ に対し,

$$\frac{(f_{n,m} - f_{n+1,m})(f_{n+1,m+1} - f_{n,m+1})}{(f_{n+1,m} - f_{n+1,m+1})(f_{n,m+1} - f_{n,m})} = -1 \quad (1)$$

が成り立つとき, f は離散正則であるという. ここで, $f_{n,m} = f(n, m)$ と記した.

条件 (1) は, Cauchy-Riemann 関係式の離散類似である. この定義による離散正則函数の例としては, 指数函数, 対数函数, 冪函数の離散版くらいしか知られていない. このうち, 離散冪函数については, やはり Bobenko, Pinkall [4] によりその定義が与えられている.

定義 写像 $f : \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{C}$ は離散正則であるとする. $0 < \gamma < 2$ に対し, $f_{n,m}$ が差分方程式

$$\begin{aligned} \gamma f_{n,m} = 2n \frac{(f_{n+1,m} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n-1,m})}{f_{n+1,m} - f_{n-1,m}} \\ + 2m \frac{(f_{n,m+1} - f_{n,m})(f_{n,m} - f_{n,m-1})}{f_{n,m+1} - f_{n,m-1}} \end{aligned} \quad (2)$$

および初期条件

$$f_{0,0} = 0, \quad f_{1,0} = 1, \quad f_{0,1} = e^{\gamma\pi i/2}$$

を満たすとき, $f = f_{n,m}$ を離散冪函数と呼ぶ.

差分方程式 (2) は連続極限において, $\gamma f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ ($= z \frac{\partial f}{\partial z}$) に帰着する. これは, 冪函数 $f(z) = z^\gamma$ が満たす微分方程式である.

$m = 0$ または $n = 0$ の場合は, 差分方程式 (2) が三項間漸化式に帰着するため, 解は簡単に求まる. また, $m = 1$ または $n = 1$ の場合の解は Agafonov [2] により構成されており, Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ の特殊値を用いて表されることが知られている. 本講演では, 一般の $(n, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ に対する離散冪函数の明示公式について紹介する.

本研究は科研費 (課題番号:21740126) の助成を受けたものである.

キーワード: 離散冪函数, Painlevé VI 方程式, 超幾何タウ函数

*e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

まず, 函数 $\tau_{n'}(a, b, c; t)$ ($n' \in \mathbb{Z}_+$) を

$$\tau_{n'}(a, b, c; t) = \det(\varphi(a+i-1, b+j-1, c; t))_{1 \leq i, j \leq n'}$$

および

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, c; t) &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b, c; t) \\ &\quad + \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(2-c)} t^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; t) \end{aligned}$$

で導入しよう. 主結果は以下の通りである (紙数の都合上, $n \leq m$ の場合についてのみ記す).

定理 各 $(n, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ に対し, $f_{n,m}$ は以下の表示を持つ.

(I) $n+m$ が偶数なら, $N = \frac{n+m}{2}$ として,

$$f_{n,m} = e^{\pi i(r-n)} N \frac{(r+1)_{N-1}}{(-r+1)_N} \frac{\tau_n(-N, -r-N+1, -r; e^{\pi i})}{\tau_n(-N+1, -r-N+2, -r+2; e^{\pi i})}$$

である. ここで, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ および $\gamma = 2r$ である.

(II) $n+m$ が奇数なら, $N = \frac{n+m-1}{2}$ として,

$$f_{n,m} = e^{\pi i(r-n)} \frac{(r+1)_N}{(-r+1)_N} \frac{\tau_n(-N, -r-N, -r; e^{\pi i})}{\tau_n(-N+1, -r-N+1, -r+2; e^{\pi i})}$$

である.

定義域が「第1象限」 \mathbb{Z}_+^2 に限られ, 冪指数 γ の範囲にも $0 < \gamma < 2$ が課されているが, これらはある幾何的な要請に由来する [1]. そうした幾何をいったん忘れれば, γ がとり得る値の範囲は任意の複素数にまで拡張できる. また, 定義域についても, Riemann 面の離散類似というべきものに拡張できる. 講演では, 時間が許せば, これらの点についても触れる予定である.

参考文献

- [1] S. I. Agafonov, Imbedded circle patterns with the combinatorics of the square grid and discrete Painlevé equations, *Discrete Comput. Geom.* **29** (2003) 305–319.
- [2] S. I. Agafonov, Discrete Riccati equation, hypergeometric functions and circle patterns of Schramm type, *Glasg. Math. J.* **47** (2005) 1–16.
- [3] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discrete isothermic surfaces, *J. Reine Angew. Math.* **475** (1996) 187–208.
- [4] A. I. Bobenko and U. Pinkall, Discretization of surfaces and integrable systems, *Discrete integrable geometry and physics (Vienna, 1996)*, 3–58, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **16**, Oxford Univ. Press, New York, 1999.

パンルベ第6方程式の岡本変換群に対
応する行列型パンルベ方程式のベック
レント変換について

村田 嘉弘 (長崎大学経済学部)*

$M_0(2,4) = \{Z \in M(2,4) | \text{rank} Z = 2\}$ に対し, $Gr(2,4) = GL(2) \backslash M_0(2,4)$ とし, その開集合

$$\mathcal{U}_\lambda = \left\{ Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & w \\ 0 & 1 & \tilde{w} & z \end{bmatrix} \mid \det \begin{bmatrix} \tilde{z} & w \\ \tilde{w} & z \end{bmatrix} \neq 0, \tilde{z}w\tilde{w}z \neq 0 \right\} \cong \mathbf{C}^4 = \{(\tilde{z}, w, \tilde{w}, z)\}$$

を考える。 \mathcal{U}_λ は PH_λ -不変である。ここに λ は Young diagram であり, $\lambda = (1, 1, 1, 1)$ とする。また, PH_λ は射影的 Jordan 群とする。

\mathcal{U}_λ 上で, 計量 $ds^2 = 2(dz d\tilde{z} - dw d\tilde{w})$ を考え, guage potential $\Phi = \Phi_{\tilde{z}} d\tilde{z} + \Phi_w dw + \Phi_{\tilde{w}} d\tilde{w} + \Phi_z dz$ ($\Phi_{\tilde{z}}, \dots, \Phi_z \in \mathfrak{sl}(2, (\mathbf{C}))$) が反自己双対条件 $*F = -F$ を満たすとすると, \mathcal{U}_λ 上の反自己双対 Yang-Mills 方程式

$$(YM) \begin{cases} \partial_z \Phi_w - \partial_w \Phi_z + [\Phi_z, \Phi_w] = 0 \\ \partial_{\tilde{z}} \Phi_{\tilde{w}} - \partial_{\tilde{w}} \Phi_{\tilde{z}} + [\Phi_{\tilde{z}}, \Phi_{\tilde{w}}] = 0 \\ \partial_z \Phi_{\tilde{z}} - \partial_{\tilde{z}} \Phi_z - \partial_w \Phi_{\tilde{w}} + \partial_{\tilde{w}} \Phi_w + [\Phi_z, \Phi_{\tilde{z}}] - [\Phi_w, \Phi_{\tilde{w}}] = 0 \end{cases}$$

を得る。 $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda / \text{PH}_\lambda$ とおき, Fibration

$$\pi: \mathcal{U}_\lambda \rightarrow \mathcal{D}_\lambda, Z \rightarrow t = \pi(Z) = \frac{\tilde{z}z}{\tilde{w}w}$$

を考える。ちなみに $\lambda = (1, 1, 1, 1)$ のとき, $\mathcal{D}_\lambda = \mathbf{C} - \{0, 1\}$ である。

\mathcal{D}_λ の任意の点 t に対し, $S_t = \pi^{-1}(t)$ とおく。 S_t はそこに含まれる点の PH_λ -orbit である。ここで, 以下の条件 (a), (b) を満たす写像 ι_λ を構成する。

$$\iota_\lambda: \mathbf{C}^3 \times \mathcal{D}_\lambda \rightarrow \mathcal{U}_\lambda, (p, q, r, t) \rightarrow Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & w \\ 0 & 1 & \tilde{w} & z \end{bmatrix}$$

ただし,

(a) $\iota_\lambda: \tilde{z} = e^{-q}, w = e^{-p}, \tilde{w} = e^{r-q}, z = te^{r-p}$ は双正則

(b) 任意の $t \in \mathcal{D}_\lambda$ に対し, $\iota_\lambda(\mathbf{C}^3 \times \{t\}) = S_t$

PH_λ -不変な Φ のうち, $\iota_\lambda^* \Phi = Pdp + Qdq + Rdr$ と表示されるもののみに限定し, その満たす方程式を $\mathbf{C}^3 \times \mathcal{D}_\lambda$ 上で考える。 P, Q, R は t のみの関数であり, この方程式は \mathcal{D}_λ 上の常微分方程式とみなせる。これは

$$L_\lambda: P' = 0, tQ' = [R, Q], t(1-t)R' = [tP + Q, R] \dots (M_6)$$

本研究は科研費(課題番号:19540219)の助成を受けたものである。

*e-mail: ymurata@nagasaki-u.ac.jp

とかける。ただし,

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_4 + 1 & 0 \\ 0 & -(v_4 + 1) \end{bmatrix} \quad (v_4 \in \mathbf{C})$$

である。 L_λ はそれぞれ3個の第1積分:

$$\text{tr}Q^2 = \frac{1}{2}(v_2)^2, \quad \text{tr}R^2 = \frac{1}{2}(v_1 + 1)^2, \quad \text{tr}(P + Q + R)^2 = \frac{1}{2}(v_3)^2$$

を持つ。 $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbf{C}^4$ はパンルベ第6方程式のパラメータである。

M_6 はパンルベシステム $S_6(v_1, v_2, v_3, v_4)$ と同値である。 $S_6(v_1, v_2, v_3, v_4)$ は解の変換群である岡本変換群

$$G = \langle w_i, l_3, x_j \rangle \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3)$$

を持つ。本報告では,

S_6 の岡本変換群のgeneratorに対応する M_6 のベックルント変換のいくつかを、 \mathcal{U}_λ 上の共形変換と L_λ のゲージ変換によって構成されることを報告する。

2次元退化 Garnier 系 G(23) における 対称解と線型モノドロミ

金子 和雄 (四日市大学 関孝和数学研究所)

2次元退化 Garnier 系 $\mathcal{G}_2\{K_1, K_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, t_1, t_2\}$ (23) は第4 Painlevé 方程式の拡張として Riemann 球面上の2点 $x=0$ および ∞ に不確定特異点をもつ, 2階非 Fuchs 型常微分方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{\eta t_2}{x^2} + \frac{2-\alpha_0}{x} - \frac{1}{2}x - t_1 - \frac{1}{x-\lambda_1} - \frac{1}{x-\lambda_2} \right] \frac{d\psi}{dx} - \left[\frac{\nu}{2} + \frac{K_1}{2x} + \frac{t_2 K_2}{x^2} - \frac{\lambda_1 \mu_1}{x(x-\lambda_1)} - \frac{\lambda_2 \mu_2}{x(x-\lambda_2)} \right] \psi = 0, \quad (1)$$

$$P \left(\begin{array}{cccc} x=0 & x=\lambda_1 & x=\lambda_2 & x=\infty \\ \underbrace{0 \quad 0}_{\eta t_2 \quad \alpha_0} & 0 & 0 & \underbrace{0 \quad 0 \quad \nu}_{\frac{1}{4} \quad t_1 \quad 1-\nu-\alpha_0}; x \end{array} \right).$$

のモノドロミ保存変形から導かれ, 適当な正準変換により 2次元退化 Garnier 系 $\mathcal{H}_2\{H_1, H_2, q_1, q_2, p_1, p_2, s_1, s_2\}$ (23) を得る. \mathcal{H}_2 は Painlevé 性を持ち, 次のような多項式ハミルトン構造をもつ [1,2,3,4].

$$\begin{aligned} H_1 &= (q_1 - s_1)p_1^2 + 2q_2p_1p_2 - \frac{1}{2}\{q_1(q_1 - s_1) - q_2 + 2(\alpha_0 - 1)\}p_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}(q_1q_2 - 2\eta s_2)p_2 - \frac{1}{2}\nu q_1, \\ -s_2H_2 &= q_2p_1^2 - q_2^2p_2^2 - \frac{1}{2}(q_1q_2 - 2\eta s_2)p_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}\{q_2^2 - 2\eta s_2(q_1 - s_1) - 2(\alpha_0 - 1)q_2\}p_2 - \frac{1}{2}\nu q_2. \end{aligned}$$

G(23) には対称変換が存在し, 次の定理を得る.

定理

2次元退化 Garnier 系 \mathcal{H}_2 (23) は, 変換

$$q_1 \rightarrow -q_1, p_1 \rightarrow -p_1, q_2 \rightarrow q_2, p_2 \rightarrow p_2, s_1 \rightarrow -s_1, s_2 \rightarrow -s_2$$

に対し不変であり, 原点の近傍にて正則な対称解 (23-a-1) をもつ.

$$\begin{aligned} q_1 &= \sum_{i+j+1 \in 2\mathbb{N}} a_{i,j} s_1^i s_2^j = \frac{\eta \alpha_0}{(\alpha_0 + 2\nu)(\alpha_0 + 2\nu - 2)} s_2 + a_{1,2} s_1 s_2^2 + \cdots, \\ p_1 &= \sum_{i+j+1 \in 2\mathbb{N}} \tilde{a}_{i,j} s_1^i s_2^j = \frac{-\eta \nu}{2(\alpha_0 + 2\nu)(\alpha_0 + 2\nu - 1)} s_2 + \tilde{a}_{1,2} s_1 s_2^2 + \cdots, \end{aligned}$$

$$q_2 = \sum_{i+j \in 2\mathbb{N}_{\geq 0}} b_{i,j} s_1^i s_2^j = 2(\alpha_0 + 2\nu - 1) + b_{1,1} s_1 s_2 + \cdots,$$

$$p_2 = \sum_{i+j \in 2\mathbb{N}_{\geq 0}} \tilde{b}_{i,j} s_1^i s_2^j = \frac{-\nu}{2(\alpha_0 + 2\nu - 1)} + \tilde{b}_{1,1} s_1 s_2 + \cdots.$$

モノドロミの計算は、解を G_2 における解に変換した後、線型方程式 (1) に代入し、 $(t_1, t_2) \rightarrow (0, 0)$ とする第 1 極限と、独立変数 x を $\eta t_2 / \zeta$ に変換後 解を代入し極限をとる第 2 極限操作により求める。線型方程式 (1) は解 (23-a-1) に対しては第 1 極限により見かけの特異点をもつ退化した方程式に帰着され、原点が確定特異点となった状態でモノドロミが求まる。原点での不確定性を保った状態での第 2 極限にて、線型方程式 (1) は Kummer の合流型超幾何方程式に帰着され、具体的にモノドロミが計算可能となる。

定理 線型方程式 (1) は、対称解 (23-a-1) に対し次のモノドロミデータをもつ

$$e^{2\pi i T_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \alpha_0} \end{pmatrix}, S_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2\pi i e^{\alpha_0 \pi i}}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\alpha_0-\nu)} & 1 \end{pmatrix}, S_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2\pi i e^{-2\pi i \alpha_0}}{\Gamma(1-\nu)\Gamma(\alpha_0+\nu)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\nu)e^{\nu\pi i}}{\Gamma(\alpha_0+\nu)} & \frac{\Gamma(1-\alpha_0-\nu)e^{\pi i(1-\alpha_0-\nu)}}{\Gamma(1-\nu)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e^{2\pi i T_\infty} = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \nu} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i(\alpha_0+\nu)} \end{pmatrix},$$

$$S_1^{(\infty)} = S_2^{(\infty)} = S_3^{(\infty)} = S_4^{(\infty)} = I_2,$$

$$C S_1^{(0)} S_2^{(0)} e^{2\pi i T_0} C^{-1} \prod_{j=1}^4 S_j^{(\infty)} e^{2\pi i T_\infty} = I_2,$$

対称解 (23-a-1) は無限遠点における Stokes 行列 $S_j^{(\infty)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) を I_2 にする解である。また $G(23)$ には極を持つ対称解も存在する。

Reference

- [1] Okamoto, K. Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A, Math.*, **33** (1986), 575–618.
- [2] Kimura, H. The Degeneration of the Two Dimensional Garnier System and Polynomial Hamiltonian Structure, *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)*, Vol. CLV(1989), 25–74.
- [3] Iwasaki, K. Kimura, H. Shimomura, S. Yoshida, M. From Gauss to Painlevé, Vieweg, 1991.
- [4] Suzuki, M. Spaces of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, *J. Math. Soc. Japan*, Vol. **58** (2006), 1079–1117.

Relations between Dynamical Braces and Dynamical Yang-Baxter Maps

Matsumoto Diogo Kendy (早稲田大学基幹理工学研究科 D1)

brace とは (Jacobson) radical 環と呼ばれる環を一般化した代数系である。brace は W.Rump[3] により導入され, brace から非退化でユニタリなヤン・バクスター写像 (YB 写像) が構成できることが示されている。

本講演では, brace をダイナミカル brace に拡張し左非退化でユニタリなダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (DYB 写像) が構成できることを示す。

定義 1. (Y. Shibukawa[4]) H, X を集合, $\phi : H \times X \rightarrow H$ とし, 写像 $R(\lambda) : X \times X \rightarrow X \times X$ ($\lambda \in H$) が次の方程式を満たす時, $R(\lambda)$ は H, X, ϕ に付随する DYB 写像と呼ばれる。

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\phi(\lambda, X^{(2)}))R_{12}(\lambda) = R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))R_{13}(\lambda)R_{23}(\phi(\lambda, X^{(1)})) \quad (\forall \lambda \in H).$$

ここで $R_{12}(\lambda), R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)})), \dots$ は次のように定義される $X \times X \times X$ から $X \times X \times X$ への写像である。

$$R_{12}(\lambda)(a, b, c) = (R(\lambda)(a, b), c),$$

$$R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))(a, b, c) = (R(\phi(\lambda, c))(a, b), c) \quad (a, b, c \in X).$$

$R(\lambda)$ がダイナミカルパラメータ λ から独立な時は単に YB 写像である。

定義 2. (W.Rump[3]) 加法群 $A = (A, +)$ がさらに積 $\cdot : A \times A \rightarrow A$ を持ち, 次の 3 つの条件を満たす時 $(A, +, \cdot)$ を brace という。

1. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2. $a \cdot (b \cdot c + b + c) = (a \cdot b) \cdot c + a \cdot b + a \cdot c$
3. 写像 $\gamma(b) : a \mapsto a \cdot b + a$ は全単射 ($\forall b \in A$)

注 1. brace $(A, +, \cdot)$ は加法群 $(A, +)$ が右分配的な積 \cdot を持ち, 積 $a * b := a \cdot b + a + b$ ($a, b \in A$) に関して $(A, *)$ が群をなすことと同値である。特に brace A が環となる時 (Jacobson) radical 環と呼ぶ。

定理 1. (W.Rump[3]) $(A, +, \cdot)$ を brace とすると

$$R(\lambda)(a, b) := (\gamma(\gamma(a)(b))^{-1}(a), \gamma(a)(b)) \quad (a, b \in A)$$

は非退化でユニタリな YB 写像を与える。

次に brace の一般化であるダイナミカル brace を導入する。

定義 3. H を集合, $A = (A, +)$ を加法群, $\phi : H \times A \rightarrow H$ とする, A がさらにパラメータ付き積 $\cdot_\lambda : A \times A \rightarrow A$ ($\lambda \in H$) を持ち, 次の 3 つの条件を満たす時 $(A, +, \{\cdot_\lambda\}_{\lambda \in H}, \phi)$ をダイナミカル brace という。

1. $(a + b) \cdot_{\lambda} c = a \cdot_{\lambda} c + b \cdot_{\lambda} c$
2. $a \cdot_{\lambda} (b \cdot_{\lambda} c + b + c) = (a \cdot_{\phi(\lambda,c)} b) \cdot_{\lambda} c + a \cdot_{\phi(\lambda,c)} b + a \cdot_{\lambda} c$
3. 写像 $\gamma_{\lambda}(b) : a \mapsto a \cdot_{\lambda} b + a$ は全単射 ($\forall b \in A$)

本講演における主結果は次の通りである.

定理 2. $(A, +, \{\cdot_{\lambda}\}_{\lambda \in H}, \phi)$ をダイナミカル brace とすると

$$R(\lambda)(a, b) := (\gamma_{\lambda}(\gamma_{\lambda}(a)(b)))^{-1}(a, \gamma_{\lambda}(a)(b)) \quad (a, b \in A)$$

は左非退化でユニタリな DYB 写像 $R(\lambda) : A \times A \rightarrow A \times A (\lambda \in H)$ を与える.

定理 3. G を群, $A = (A, +, \cdot)$ を G の作用をもつ brace とし $\lambda \in G$ の作用を f_{λ} で表す. この時 $\lambda \in G$ に対して A 上のパラメータ付き積 \cdot_{λ} を

$$a \cdot_{\lambda} b = f_{\lambda}^{-1}(f_{\phi(\lambda,b)}(a) \cdot f_{\lambda}(b) + f_{\phi(\lambda,b)}(a)) - a \quad (\lambda \in G)$$

で定義すると, 写像 $\phi : G \times A \rightarrow G$ が次の条件

$$\phi(\lambda, b *_{\lambda} a) = \phi(\phi(\lambda, a), b) \quad (a, b \in A)$$

を満たす時, $A = (A, +, \{\cdot_{\lambda}\}_{\lambda \in G}, \phi)$ はダイナミカル brace となる (ここで積 $*_{\lambda}$ は $a *_{\lambda} b := a \cdot_{\lambda} b + a + b$ で定義される).

定理 2 と定理 3 より群 G の作用を持つ brace から DYB 写像が得られることがわかる.

さらに, brace に関しては A.Caranti et al.[1] の結果を拡張して, 次のことが得られており, 今後の方針としてダイナミカル brace の幾何学的な位置づけを考察する予定である.

命題 1. A を加法群とすると, A 上の brace 構造とアフィン群 $A \rtimes GL_{\mathbf{Z}}(A)$ ($GL_{\mathbf{Z}}(A)$ は A の自己同型群) の正則部分群は一対一に対応する.

注 2. $A \rtimes GL_{\mathbf{Z}}(A)$ の部分群 G が正則であるとは, 任意の $a \in A$ が与えられた時, 各 $b \in A$ に対して $g \cdot a = b$ を満たす $g \in G$ が一意的に存在する時を言う (\cdot は G の作用を表す).

命題 1 については F.Catino et al.[2] に類似の結果があり, F -ベクトル空間 V (F は任意の体) 上の brace 構造 ([2] では radical circle algebra と呼ぶ) とアフィン群 $V \rtimes GL_F(V)$ の正則部分群の間の一対一関係が示されている.

参考文献

- [1] A.Caranti, F.Dalla Volta, M.Sala, ABELIAN REGULAR SUBGROUPS OF THE AFFINE GROUP AND RADICAL RINGS , Publ.Math.Debrecen 69(2006), no.3,297-308
- [2] F.Catino, R.Rizzo, REGULAR SUBGROUPS OF THE AFFINE GROUP AND RADICAL CIRCLE ALGEBRAS , Bull.Aust.Math.Soc. 79(2009),103-107
- [3] W.Rump, Braces,radical rings,and the quantum Yang-Baxter equation , J.Algebra 307(2007),153-170
- [4] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps , Internat. Math. Res. Not.36 (2005) 2199-2221.

Dynamical braided monoids and dynamical Yang-Baxter maps

渋川 陽一 (北海道大学理学部数学)

1. Introduction

matched pair of groups, および braided group とは, 次のようなものである.

Definition 1.1. (1) S, B を群 (群 S, B の単位元を, それぞれ 1_S and 1_B と書く), $\sigma : S \times B \ni (s, b) \mapsto (s \rightarrow b, s \leftarrow b) \in B \times S$ を $S \times B$ から $B \times S$ への写像とする. (S, B, σ) が次の条件を満たすとき, matched pair of groups という.

$$\begin{aligned} s \rightarrow (t \rightarrow b) &= (st) \rightarrow b; (st) \leftarrow b = (s \leftarrow (t \rightarrow b))(t \leftarrow b); \\ (s \leftarrow b) \leftarrow c &= s \leftarrow (bc); s \rightarrow (bc) = (s \rightarrow b)((s \leftarrow b) \rightarrow c); \\ 1_S \rightarrow b &= b; s \leftarrow 1_B = s \quad (\forall s, t \in S, \forall b, c \in B). \end{aligned}$$

(2) 群 G と写像 $\sigma : G \times G \rightarrow G \times G$ の組 (G, σ) が次の条件を満たすとき, braided group であるという.

- (a) (G, G, σ) は matched pair of groups である;
- (b) $(y', x') = \sigma(x, y)$ ならば必ず $y'x' = xy$ となる $(x, y, x', y' \in G)$.

(S, B, σ) が matched pair of groups であるとき, 集合の直積 $B \times S$ は次の積に関して群をなす.

$$(b, s)(c, t) = (b(s \rightarrow c), (s \leftarrow c)t) \quad ((b, s), (c, t) \in B \times S).$$

実際, $(1_B, 1_S)$ が単位元, $(b, s) \in B \times S$ の逆元が $(s^{-1} \rightarrow b^{-1}, s^{-1} \leftarrow b^{-1})$ となる.

論文[1]において, Lu, Yan, および Zhu は次を証明した.

Theorem 1.2. (G, σ) が braided group ならば, σ は次の braid relation を満たす.

$$(\sigma \times \text{id}_G) \circ (\text{id}_G \times \sigma) \circ (\sigma \times \text{id}_G) = (\text{id}_G \times \sigma) \circ (\sigma \times \text{id}_G) \circ (\text{id}_G \times \sigma).$$

本講演では, dynamical Yang-Baxter map の場合にも, Lu, Yan, Zhu による上記定理の類似が成立することを報告する [2].

2. Tensor category Set_H and dynamical Yang-Baxter maps

Set_H は, 空でない集合 H に付随して定義される tensor category である.

object: 空でない集合 X と写像 $\cdot_X : H \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot_X x \in H$ の組 (X, \cdot_X) .

morphism: 条件 $\lambda \cdot_Y f(\lambda)(x) = \lambda \cdot_X x \quad (\forall \lambda \in H, \forall x \in X)$ を満たす写像 $f : H \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ を morphism $f : (X, \cdot_X) \rightarrow (Y, \cdot_Y)$ とする.

tensor product of objects: Set_H の object $X = (X, \cdot_X), Y = (Y, \cdot_Y)$ の tensor product $X \otimes Y$ は, 集合の直積 $X \times Y$ と次のように定義される写像 $\cdot : H \times (X \times Y) \rightarrow H$ の組 $(X \times Y, \cdot)$ のことである.

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot_X x) \cdot_Y y \quad (\lambda \in H, (x, y) \in X \times Y).$$

tensor product of morphisms: \mathbf{Set}_H の射 $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$ の tensor product $f \otimes g$ は, $(f \otimes g)(\lambda)(x, y) = (f(\lambda)(x), g(\lambda x)(y))$ ($\lambda \in H, (x, y) \in X \times Y$) と定義する.

dynamical Yang-Baxter map は, この tensor category \mathbf{Set}_H における braid relation の解である (煩雑さを避けるため, 以下, associativity constraint は省略する).

Definition 2.1. \mathbf{Set}_H の射 $\sigma : X \otimes X \rightarrow X \otimes X$ が次の braid relation を満たすとき, σ を dynamical Yang-Baxter map という.

$$(\sigma \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \text{id}_X) = (\text{id}_X \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma).$$

3. Dynamical braided monoids

本セクションでは, braided group に対応する概念である dynamical braided monoid を定義する.

Definition 3.1. tensor category \mathbf{Set}_H の monoid (X, m_X, η_X) の tensor product 上の射 $\sigma : X \otimes X \rightarrow X \otimes X$ が, 次の条件を満たしているとき, 組 (X, σ) を dynamical braided monoid という.

$$\begin{aligned} (\text{id}_X \otimes m_X) \circ (\sigma \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma) &= \sigma \circ (m_X \otimes \text{id}_X); \\ (m_X \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma) \circ (\sigma \otimes \text{id}_X) &= \sigma \circ (\text{id}_X \otimes m_X); \\ (\text{id}_X \otimes m_X) \circ (\sigma \otimes \text{id}_X) \circ (\eta_X \otimes \text{id}_{X \otimes X}) &= l_{X \otimes X}; \\ (m_X \otimes \text{id}_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma) \circ (\text{id}_{X \otimes X} \otimes \eta_X) &= r_{X \otimes X}. \end{aligned}$$

射 $m_{X \otimes X} : (X \otimes X) \otimes (X \otimes X) \rightarrow X \otimes X$ と $\eta_{X \otimes X} : I \rightarrow X \otimes X$ を,

$$m_{X \otimes X} = (m_X \otimes m_X) \circ (\text{id}_X \otimes \sigma \otimes \text{id}_X); \eta_{X \otimes X} = (\eta_X \otimes \eta_X) \circ l_I^{-1}$$

と定めると, $(X \otimes X, m_{X \otimes X}, \eta_{X \otimes X})$ は \mathbf{Set}_H における monoid となる (l_I は \mathbf{Set}_H の unit object I の left unit constraint).

4. Dynamical Yang-Baxter map の構成

ある条件を満たす dynamical braided monoid から dynamical Yang-Baxter map を構成できる.

Theorem 4.1. dynamical braided monoid (X, σ) が, 条件

$$\forall \lambda, \lambda' \in H, \exists_1 x \in X \text{ such that } \lambda x = \lambda' \quad (1)$$

を満たしているならば, σ は dynamical Yang-Baxter map である.

上記定理の証明において, principal homogeneous space を利用することなどについては, 講演の際に説明する予定である.

参考文献

- [1] Lu, J.-H., Yan, M., Zhu, Y.-C.: On the set-theoretical Yang-Baxter equation. Duke Math. J. **104** (2000), no. 1, 1–18.
- [2] Shibukawa, Y.: Dynamical braided monoids and dynamical Yang-Baxter maps. RIMS 講究録 **1714** (2010), 80–89.

Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous pre-systems

神谷 徳昭 (会津大学)

渋川 陽一 (北海道大学理学部数学)

1. Introduction

dynamical Yang-Baxter map は, ある種の quantum dynamical Yang-Baxter equation の set-theoretical な解である.

Definition 1.1. H, X を空でない集合とし, $H \times X \rightarrow H$ の写像を $(\cdot) : H \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in H$ と書く. 写像 $R(\lambda) : X \times X \rightarrow X \times X$ ($\lambda \in H$) が $X \times X \times X$ 上定義された次の式を満たすとき, $(H, X, (\cdot))$ に付随した dynamical Yang-Baxter map という.

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\lambda \cdot X^{(2)})R_{12}(\lambda) = R_{12}(\lambda \cdot X^{(3)})R_{13}(\lambda)R_{23}(\lambda \cdot X^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in H).$$

ここで, $R_{12}(\lambda), R_{12}(\lambda \cdot X^{(3)}), R_{23}(\lambda \cdot X^{(1)})$ などは, $X \times X \times X$ からそれ自身への次のような写像である: $u, v, w \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda)(u, v, w) &= (R(\lambda)(u, v), w); R_{12}(\lambda \cdot X^{(3)})(u, v, w) = R_{12}(\lambda \cdot w)(u, v, w); \\ R_{23}(\lambda \cdot X^{(1)})(u, v, w) &= (u, R(\lambda \cdot u)(v, w)). \end{aligned}$$

本講演では, ある条件を満たす reductive homogeneous space の代数的部分である homogeneous system [3] を一般化して定義される homogeneous pre-system [1] の中で特別な性質を持つものから, dynamical Yang-Baxter map が構成できることを報告する.

2. Homogeneous pre-systems

homogeneous pre-system とは次のような 3 項演算を伴った空でない集合のことである.

Definition 2.1. (1) 空でない集合 M と 3 項演算 $\mu : M \times M \times M \rightarrow M$ の組 (M, μ) を ternary system という.

(2) ternary system $G = (G, \eta)$ が次の条件を満たすとき, homogeneous pre-system という.

$$\begin{aligned} \eta(x, y, x) &= y \quad (\forall x, y \in G); \\ \eta(x, y, \eta(u, v, w)) &= \eta(\eta(x, y, u), \eta(x, y, v), \eta(x, y, w)) \quad (\forall x, y, u, v, w \in G). \end{aligned}$$

(3) homogeneous pre-system $G = (G, \eta)$ が, 条件

$$\eta(x, x, y) = y; \eta(x, y, \eta(y, x, z)) = z \quad (\forall x, y, z \in G)$$

を満たすとき, homogeneous system という.

上の homogeneous system は, ある条件を満たす reductive homogeneous space と関係している [2, I: Theorem 1].

3. Dynamical Yang-Baxter maps from homogeneous pre-systems

空でない集合 L と, それ上の 2 項演算 (\cdot) が条件

$$\forall u, w \in L, \exists_1 v \in L \text{ s.t. } u \cdot v = w$$

を満たすとき, $L = (L, \cdot)$ を left quasigroup という.

Theorem 3.1. homogeneous pre-system $G = (G, \eta)$ が

$$\eta(x, y, z) = \eta(w, \eta(x, y, w), z) \quad (\forall x, y, z, w \in G)$$

を満たすならば, この homogeneous pre-system G , およびこれと (集合論的に) 同型な left quasigroup $L = (L, \cdot)$ を用いて, dynamical Yang-Baxter map $R(\lambda) : L \times L \rightarrow L \times L$ ($\lambda \in L$) を構成することができる.

このようにして構成された dynamical Yang-Baxter map の特徴付けなどについては, 講演の際に説明する予定である.

参考文献

- [1] N. Kamiya and Y. Shibukawa: Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous pre-systems. to appear in J. Gen. Lie Th. Appl.
- [2] M. Kikkawa: On homogeneous systems I–V. Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Natur. Sci. **11** (1977), 9–17; Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **12** (1978), 5–13; **14** (1980), 41–46; **15** (1981), 1–7; **17** (1983), 9–13.
- [3] M. Kikkawa: 多様体上のある 3 項系 (homogeneous system) について. RIMS 講究録 **308** (1977), 12–31.

A Compound Determinant Identity for Rectangular Matrices

石川 雅雄 (鳥取大学・教育センター)

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部・数学系列)

岡田 聡一 (名古屋大学・大学院多元数理科学研究科)

Cauchy (1812) または Sylvester (1851) の次の有名な行列式が知られている.
(例えば, [1] p.277, 定理 8.21 参照.) $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq s}$ が任意の正方行列のとき

$$\det (\det A_J^I)_{I, J} = (\det A)^{\binom{s-1}{n-1}}.$$

ここで, 左辺の行列式の添字 I, J は $[s] = \{1, 2, \dots, s\}$ の n -元部分集合全体を動き, 辞書式順序に並べる. また $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$, $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$ に対して小行列 A_J^I を $A_J^I = (a_{i_k, j_\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ で定義する.

以前の数学会 (無限可積分系セッション, 08' 秋, 東工大) において『コーシー・シルヴェスターの行列式公式の BC_n 型ジャクソン積分への応用 (伊藤, 岡田)』の表題で, 上記公式の応用を紹介した [3].

この講演では, 定理 1 に述べる Cauchy-Sylvester タイプの行列式の等式を証明する. また, 定理 1 の応用として A, B, C, D 型のシューア多項式及びマクドナルド多項式の公式も述べる. このシューア多項式の公式は, [3] の場合と同様に BC_n 型ジャクソン積分のロンスキー行列式を計算する際に必要となる ([2] Corollary 1.5, Proposition 1.6 参照).

有限集合 S の r -元部分集合全体の集合を $\binom{S}{r}$ と書く. $\binom{[N]}{r}$ の元 $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$, $J = \{j_1 < \dots < j_r\}$ に対して辞書式順序 (全順序) $I < J$ を

$$\exists k : i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}, i_k < j_k.$$

によって定める. s, n が正整数のとき, n の composition で長さ s のもの全体の集合を $Z_{s,n}$ と書く. すなわち

$$Z_{s,n} = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Z}^s \mid \mu_1 \geq 0, \dots, \mu_s \geq 0, \mu_1 + \dots + \mu_s = n\}.$$

また, $Z_{s,n}$ の composition のうち成分が全て正であるもの全体の集合を $Z_{s,n}^0$ と書く. すなわち

$$Z_{s,n}^0 = \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in \mathbb{Z}^s \mid \mu_1 > 0, \dots, \mu_s > 0, \mu_1 + \dots + \mu_s = n\}.$$

長さが s の n の composition 全体の集合 $Z_{s,n}$ に次の全順序を入れる. $\lambda, \mu \in Z_{s,n}$, に対して $\lambda < \mu$ を次によって定義する.

$$\exists k : \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{k-1} = \mu_{k-1}, \lambda_k > \mu_k.$$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \in Z_{s,n}$ に対して n -元部分集合 $\iota_{s,n}(\mu) \in \binom{[sn]}{n}$ を

$$\iota_{s,n}(\mu) = \bigsqcup_{i=1}^s [(i-1)n+1, (i-1)n+\mu_i].$$

によって定義する. ただし記号 $[i, j] = \{i, i+1, \dots, j\}$ とする. このとき $\iota_{s,n} : Z_{s,n} \rightarrow \binom{[sn]}{n}$, は単射であり, $\lambda, \mu \in Z_{s,n}$ に対して $\iota_{s,n}(\lambda) < \iota_{s,n}(\mu)$ と $\lambda < \mu$ は同値である.

定理 1. s, n が正整数で, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq s+n-1, 1 \leq j \leq sn}$ を $(s+n-1) \times sn$ 型の矩形行列とする.

$$\mathcal{R} = \binom{[s+n-1]}{n}, \quad \mathcal{C} = \{\iota_{s,n}(\mu) \mid \mu \in Z_{s,n}\}, \quad \mathcal{C}^0 = \{\iota_{s,n}(\mu) \mid \mu \in Z_{s,s+n-1}^0\}.$$

とおく. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$\det (\det A_J)_{I \in \mathcal{R}, J \in \mathcal{C}} = \prod_{J \in \mathcal{C}^0} \det A_J,$$

ここで, 左辺の行列式の添字 I, J は上の全順序 $<$ で小さい順に並べる. また $A_J = A_J^{[s+n-1]}$ とする.

この定理の応用として, 次のような古典群の指標に関する等式が得られる. 次の系では sn 個の変数 $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots, x_1^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}$ を考え, $\mu \in Z_{s,n}$ に対して次のように書く.

$$X_\mu = (x_1^{(1)}, \dots, x_{\mu_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_{\mu_2}^{(2)}, \dots, x_1^{(s)}, \dots, x_{\mu_s}^{(s)}).$$

系 2. s, n が正整数のとき, 次の等式が成り立つ.

$$\det (\mathbf{GL}_n(\lambda; X_\mu))_{\lambda \in ((s-1)^n), \mu \in Z_{s,n}} = \prod_{1 \leq k < l \leq s} \prod_{i,j=1}^n (x_i^{(k)} - x_j^{(l)})^{\binom{s+n-i-j-1}{s-2}},$$

$$\det (\mathbf{Sp}_{2n}(\lambda; X_\mu))_{\lambda \in ((s-1)^n), \mu \in Z_{s,n}} = \prod_{1 \leq k < l \leq s} \prod_{i,j=1}^n \left\{ \frac{(x_j^{(l)} - x_i^{(k)})(1 - x_i^{(k)} x_j^{(l)})}{x_i^{(k)} x_j^{(l)}} \right\}^{\binom{s+n-i-j-1}{s-2}}.$$

ここで, $\mathbf{GL}_n(\lambda; X)$ はシューア関数であり, $\mathbf{Sp}_{2n}(\lambda; X)$ は Symplectic 群の既約指標である.

参考文献

- [1] 高木貞治, 代数学講義 (改訂新版), 共立出版.
- [2] K. Aomoto and M. Ito, “A determinant formula for a holonomic q -difference system associated with Jackson integrals of type BC_n ”, *Adv. Math.* **221** (2009), 1069–1114.
- [3] M. Ito and S. Okada, “An application of Cauchy–Sylvester’s theorem on compound determinants to a BC_n -type Jackson integral”, in *Proceedings of the Conference on Partitions, q -Series and Modular Forms (University of Florida, Mar. 12–16, 2008)*, to be published in the Springer book series Developments in Mathematics.

Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants

石川 雅雄 (鳥取大学・教育センター)

田川 裕之 (和歌山大学・教育学部)

Jiang Zeng (Institut Camille Jordan, University of Lyon)

直交多項式 $p_n(x)$ と内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対して, $\mu_n = \langle x^n, 1 \rangle$ を n 次のモーメントという. モーメント列 $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ に対してハンケル行列式 $\det(a_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ の値は直交多項式の古典的理論により, モーメント列の連分数展開の係数で記述される. また, カタラン数のハンケル行列式の値など, lattice path による組合せ論的証明も知られている. ここでは, その Pfaffian analogue と応用について述べる.

ここでは, q -shifted factorial の記号

$$(x; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), \quad (x; q)_n = \frac{(x; q)_\infty}{(xq^n; q)_\infty}$$

を使う. この講演では, ハンケル行列式の Pfaffian analogue として

$$\text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \mu_{i+j+r-2}(q) \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \quad (\#)$$

を考察する. Little q -Jacobi 多項式のモーメントを考えると, 次の主結果が得られる.

定理 1. $n \geq 1$, r が整数のとき

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \left((q^{i-1} - q^{j-1}) \frac{(aq; q)_{i+j+r-2}}{(abq^2; q)_{i+j+r-2}} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \\ &= a^{n(n-1)} q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r} \prod_{k=1}^{n-1} (bq; q)_{2k} \prod_{k=1}^n \frac{(q; q)_{2k-1} (aq; q)_{2k+r-1}}{(abq^2; q)_{2(k+n)+r-3}}. \end{aligned}$$

特に $q \rightarrow 1$ という特殊化によって次の式が得られる.

$$\text{Pf} \left((j-i) C_{i+j+r-2} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(4k+1)!}{(2k)!} \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)!(4k+2r-2)!}{(2k+r-1)! \{2(k+n)+r-2\}!}.$$

ここで $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ はカタラン数である.

反対称行列 $A = (a_{ij}^i)_{1 \leq i, j \leq n}$, $1 \leq r_1, r_2, \dots, r_m \leq n$ に対して

$$A_{[r_1, r_2, \dots, r_m]} = (a_{r_j}^{r_i})_{1 \leq i, j \leq m}$$

とおき, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 定理 1 を証明するために, 次のような反対称行列の分解を考える.

補題 2. A を $2n$ 次の反対称行列で, $1 \leq k \leq n$ に対して, $\text{Pf}(A_{[1, 2, \dots, 2k]}) \neq 0$ とする. このとき, A は次のような形の行列 V と T を用いて

$$A = {}^t V T V$$

と一意的に表わされる.

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & T_2 & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & T_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} J_2 & V_2^1 & \dots & V_n^1 \\ O_2 & J_2 & \dots & V_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & J_2 \end{pmatrix}.$$

ただし, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i < j \leq n$ に対して

$$T_k = \begin{pmatrix} 0 & t_k \\ -t_k & 0 \end{pmatrix}, \quad V_j^i = \begin{pmatrix} v_{2j-1}^{2i-1}(i) & v_{2j}^{2i-1}(i) \\ v_{2j-1}^{2i}(i) & v_{2j}^{2i}(i) \end{pmatrix}$$

という 2×2 行列で, その成分 $t_k, v_l^k(i)$ は

$$t_k = \frac{\text{Pf}A_{[1, 2, \dots, 2k]}}{\text{Pf}A_{[1, 2, \dots, 2k-2]}}, \quad v_l^k(i) = \frac{\text{Pf}A_{[1, 2, \dots, 2i-2, k, l]}}{\text{Pf}A_{[1, 2, \dots, 2i]}}$$

とパフィアンで与えられる.

補題 2 を使うと 定理 1 は, ${}_6\phi_5$ の q -Dougall 公式に帰着する. 定理 1 の応用として shifted reverse plane partition の重み付数え上げ公式, また, 他のモーメント列に関する予想なども得られている.

参考文献

- [1] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Ziang, “A q -analogue of Catalan Hanken determinants”, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19-42.
- [2] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Ziang, “Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants”, [arxiv:1011.5941v1](https://arxiv.org/abs/1011.5941v1).

sl(2) ループ代数の可約な有限次元最高ウェイト表現の具体的構成

お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科 渡邊隆子・出口哲生

“An explicit construction of reducible finite-dimensional highest weight representations of the sl(2) loop algebra ”

Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University,
Takako Watanabe and Tetsuo Deguchi

可解量子スピン模型を代表する模型である量子 XXZ スピン鎖は、変数 q が 1 の冪根のとき、sl(2)ループ代数に関する対称性を持つ。ここで変数 q は量子群の q 変数に対応し、量子 XXZ スピン鎖の R 行列は、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ の R 行列で与えられる。

量子 XXZ スピン鎖のハミルトニアンは非常に大きな次元の縮退固有空間を持つ。これは sl(2)ループ代数が無限次元リー代数であるためと思われる。量子 XXZ スピン鎖の sl(2)ループ代数に関する対称性により、このモデルのハミルトニアンの固有値の縮退度は、sl(2)ループ代数の適当な有限次元表現の次元に等しい[2]。各有限次元表現は、適当な有限次元最高ウェイト表現たちの直和になることが予想され[1]、従って、固有値の縮退が生じるハミルトニアンに対応する sl(2)ループ代数の有限次元最高ウェイト表現の次元から分かると期待される。

また、対応する有限次元最高ウェイト表現は大部分が既約であるが、稀に可約なものも出現することが確かめられていた[2]。しかし、その可約表現の次元を求める一般的な方法は未だ提示されていない。(既約表現は既に分類済み[3])そこで、各最高ウェイトに対する有限次元最高ウェイト表現を全て構成する為のアルゴリズムが考案された[1]。しかし、このアルゴリズムにはループ代数の生成演算子に関するある予想 (conjectures) に基づいており、未完成であった。

実際、アルゴリズムからは構成出来ない表現が出現することが、最近、確かめられた。本講演ではそのことについて説明する。

本研究ではそれら conjectures の一つである次式

$$\sum_{k=1}^n k w_{j^{k+1}}(\hat{a}) w_{j^{n+1-k}}(\hat{a}) \Omega = 0$$

の検証を行い、実際に $sl(2)$ ループ代数の有限次元最高ウェイト表現を具体的に構成する研究を行い、アルゴリズムに改訂を加えた。

参考文献

- [1] T.Deguchi, Irreducibility criterion for a finite-dimensional highest weight representation of the $sl(2)$ loop algebra and the dimensions of reducible representations, J.Stat.Mech. (2007) P05007 (math - ph/0610002)
- [2] Deguchi T., Regular XXZ Bethe states at roots of unity as highest weight vectors of the sl_2 loop algebra, J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 40 (2007) pp. 7473--7508 (cond-mat/0503564).
- [3] Chari V, Integrable representations of affine Lie algebras, 1986 Invent. Math.85 pp. 317

The Lie algebra of linear chord diagrams

河澄響矢 (東大数理)

久野雄介 (広島大理)

線型コード図式 (linear chord diagram, lcd と略する) 全体の張る線型空間に Lie 代数の構造が入ることが分かったので報告する。Goldman Lie 代数の中心の計算 [KK] の副産物として見つかった¹のであるが、この Lie 代数自体には、どんな応用があるのか不明である。

種数 $g(\geq 1)$ の有向閉曲面を Σ_g と表す。第一 homology 群 $H := H_1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ には交叉形式が定義されている。それは、standard basis $\{A_i, B_i\}_{i=1}^g \subset H$ について $A_i \cdot B_j = -B_j \cdot A_i = \delta_{ij}$, $A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0$, $1 \leq i, j \leq g$, という値をとる。symplectic 形式 $\omega := \sum_{i=1}^g A_i \otimes B_i - B_i \otimes A_i \in H^{\otimes 2}$ は standard basis のとり方によらずに決まる。 H とその双対 $H^* = \text{Hom}(H, \mathbb{Q})$ は交叉形式によって $H \cong H^*$, $X \mapsto (Y \mapsto Y \cdot X)$, のように同一視される。 $T := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n}$ を H の生成する tensor 代数 (非可換多項式環) とする。 $p \geq 1$ について $T_p := \bigoplus_{n \geq p} H^{\otimes n}$ は T の両側 ideal をなす。代数 T の導分全体のなす Lie 代数 $\text{Der}(T)$ は、 H への制限写像と交叉形式を使って、線型空間として次のように同一視される

$$\text{Der}(T) \cong H^* \otimes T \cong H \otimes T = T_1.$$

他方、 T には symplectic 群 $Sp := Sp_{2g}(\mathbb{Q})$ が作用している。Weyl の古典的結果 [W] によって T の Sp 不変部分は ω の代数的結合で表されるが、これは lcd によって記述される。 $m \geq 1$ について m 本の lcd とは、集合 $\{1, 2, \dots, 2m\}$ の位数 2 の部分集合の disjoint 和への分割のことであった。つまり条件 $\{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m\} = \{1, 2, \dots, 2m\}$ をみたす集合 $C = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$ のことである。ここで $i_\alpha < j_\alpha$, $1 \leq \forall \alpha \leq m$, となるようにとっておく。この C に Sp -不変 tensor

$$a(C) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ i_1 & j_1 & \cdots & i_m & j_m \end{pmatrix} \omega^{\otimes m} \in (H^{\otimes 2m})^{Sp}$$

を対応させる。 \mathcal{LC}_m を m 本の lcd 全体の張る \mathbb{Q} -vector 空間とする。このとき Weyl により、写像 $a : \mathcal{LC}_m \rightarrow (H^{\otimes 2m})^{Sp}$, $C \mapsto a(C)$, は $m \leq g$ のとき同型であり $(H^{\otimes 2m+1})^{Sp} = 0$ である。つまり、写像

$$a : \mathcal{LC} := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathcal{LC}_m \rightarrow \text{Der}(T)^{Sp}$$

は「安定同型」であることが分かる。この安定同型を使って Lie 代数 $\text{Der}(T)^{Sp}$ の bracket を空間 \mathcal{LC} に遺伝させると、 \mathcal{LC} 上の bracket は、

¹[KK] について R.Penner 氏 (Caltech/Aarhus 大学) と 3 人で議論している際に見つかった。

C および D を m および n 本の lcd とするとき

$$[C, D] = - \sum_{j=2}^{2n} C *_j D + \sum_{i=2}^{2m} D *_i C$$

と書ける。ここで $C *_j D, 2 \leq j \leq 2n$, は次のように定義される $m+n-1$ 本の lcd である:

- (1) C における 1 の相手を $\bar{1}$ 、 D における j の相手を \bar{j} とする。
- (2) D から j を取り除き、その隙間に C から 1 を取り除いたものを挿入する。
- (3) C の $\bar{1}$ と D の \bar{j} とを chord で結ぶ。

$D *_i C, 2 \leq i \leq 2m$, も同様に定義される。

トポロジストとして最初に気になるのは Lie 代数 \mathcal{LC} の homology である。 $E_0 := -\frac{1}{2}\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{LC}_1$ とおく。 \mathcal{LC}_m が、ちょうど $\text{ad}(E_0)$ の固有値 $m-1$ の固有空間に一致する。任意の lcd C について $(-2E_0) *_i C = C *_2 (-2E_0) = C$ となるからである。この固有分解を使うと \mathcal{LC} の homology が円周 S^1 の homology に同型であること $H_*(\mathcal{LC}) = H_*(S^1; \mathbb{Q})$ および \mathcal{LC} の中心が自明であること $Z(\mathcal{LC}) = 0$ が分かる。

さらに、Lie 代数 \mathcal{LC} は一変数の多項式 vector 場の Lie 代数 $L_0 := x\mathbb{Q}[x] \frac{d}{dx}$ への全射準同型

$$\kappa : \mathcal{LC} \rightarrow L_0, \quad (m \text{ 本の lcd}) \mapsto -2x^m \frac{d}{dx},$$

をもつ。 $\kappa(E_0) = x \frac{d}{dx}$ は Euler 作用素に他ならない。Gel'fand-Fuks cohomology で重要な役割を果たす $L_1 := x^2\mathbb{Q}[x] \frac{d}{dx}$ の類似として、Lie 部分代数 $\mathcal{LC}^1 := \bigoplus_{m=2}^{\infty} \mathcal{LC}_m$ が考えられる。その homology 群 $H_*(\mathcal{LC}^1)$ は E_0 の作用で固有分解する。固有値 k の固有空間を $H_*(\mathcal{LC}^1)_{(k)}$ と書くことにする。これは現状ではほとんど何も分かっていない。ただし、すべての $k \geq 1$ について $H_1(\mathcal{LC}^1)_{(k)} \neq 0$ であって、その次元は $k \rightarrow \infty$ で無限大に発散する。また、Euler 標数の母関数 $\sum_{k=1}^{\infty} \chi(H_*(\mathcal{LC}^1)_{(k)}) x^k$ は低い次数のところでは次のようになっている

$$-3x - 12x^2 - 61x^3 - 570x^4 - 6600x^5 - 91910x^6 - 1460655x^7 - 26064990x^8 - \dots$$

Lie 代数 L_1 の homology $[G]$ とはかなり様相が異なっている。

参考文献.

- [G] L.V. Goncharova, "Cohomology of Lie algebra of formal vector fields on the line," Functional Anal. Appl., **7** (2) (1973) 6–14.
- [KK] N. Kawazumi and Y. Kuno, "The Chas-Sullivan conjecture for a surface of infinite genus," preprint, arXiv: 1009.4985.
- [W] H. Weyl, 'The classical groups,' Princeton University Press, 2nd. ed. Princeton (1953).

Defining relations of generalized quantum algebras having $ABCD$ -type super root systems

Nicolás Andruskiewitsch (Cordoba Univ.), Iván Angiono (Cordoba Univ.),
Hiroyuki Yamane (Osaka Univ.)

First we give the definition of the \mathbb{C} -algebra $U(\chi)$, see, e.g., [2] for detail. For $x, y \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, let $\mathfrak{J}_{x,y} := \{z \in \mathbb{Z} | x \leq z \leq y\}$. Then $\mathbb{N} = \mathfrak{J}_{1,+\infty}$ and $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathfrak{J}_{0,+\infty}$. Let $\mathfrak{M}^\times := \mathfrak{M} \setminus \{0\}$ for a \mathbb{Z} -module \mathfrak{M} . Let $\ell \in \mathbb{N}$, and $I := \mathfrak{J}_{1,\ell}$. Let $P = \mathbb{Z}\Pi$ be a free \mathbb{Z} module having a base $\Pi = \{\alpha_i | i \in I\}$ with $|\Pi| = \ell$. Let $P_+ := \mathbb{Z}_{\geq 0}\Pi$. Let $\chi : P \times P \rightarrow \mathbb{C}^\times$ be a map such that

$$(1) \quad \chi(\lambda, \mu + \nu) = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda, \nu), \quad \chi(\lambda + \mu, \nu) = \chi(\lambda, \nu)\chi(\mu, \nu)$$

for all $\lambda, \mu, \nu \in P$. Let $\tilde{U}(\chi)$ be the \mathbb{C} -algebra defined with generators

$$(2) \quad K_\lambda, L_\lambda (\lambda \in P), \quad E_i, F_i (i \in I)$$

and relations $K_0 = L_0 = 1_{\tilde{U}}$, $K_\mu K_\lambda = K_{\lambda+\mu}$, $L_\mu L_\lambda = L_{\lambda+\mu}$, $K_\lambda L_\mu = L_\mu K_\lambda$, $K_\lambda L_\mu E_i = \chi(\lambda, \alpha_i)\chi(-\alpha_i, \mu)E_i K_\lambda L_\mu$, $K_\lambda L_\mu F_i = \chi(\lambda, -\alpha_i)\chi(\alpha_i, \mu)F_i K_\lambda L_\mu$, and $E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij}(-K_{\alpha_i} + L_{\alpha_i})$. We use the convention that if $r = 0$, we mean $E_{i_1} \cdots E_{i_r} := F_{i_1} \cdots F_{i_r} := 1_{\tilde{U}}$. Then, the elements

$$(3) \quad E_{i_1} \cdots E_{i_r} K_\lambda L_\mu F_{j_1} \cdots F_{j_k}$$

($\lambda, \mu \in P$, $r, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i_x \in I$ ($x \in \mathfrak{J}_{1,r}$), $j_y \in I$ ($y \in \mathfrak{J}_{1,k}$)) form a \mathbb{C} -basis of $\tilde{U}(\chi)$. For $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i \in P_+$ with $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, let $|\lambda| := \sum_{i \in I} \lambda_i$, and let $\tilde{U}^+(\chi)_\lambda$ (resp. $\tilde{U}^-(\chi)_{-\lambda}$) be the \mathbb{C} -subspaces of $\tilde{U}(\chi)$ spanned by the elements $E_{i_1} \cdots E_{i_{|\lambda|}}$ (resp. $F_{i_1} \cdots F_{i_{|\lambda|}}$) with $|\{m \in \mathfrak{J}_{1,|\lambda|} | i_m = j\}| = \lambda_j$ for all $j \in I$. Let $\tilde{U}^0(\chi) := \bigoplus_{(\lambda, \mu) \in P^2} \mathbb{C} K_\lambda L_\mu$, and $\tilde{U}^\pm(\chi) := \bigoplus_{\lambda \in P_+} \tilde{U}^\pm(\chi)_{\pm\lambda}$. For $\lambda \in P_+^\times$, let

$$(4) \quad \begin{aligned} J_\lambda^+ &:= \{X \in \tilde{U}^+(\chi)_\lambda | \forall i \in I, X F_i - F_i X \in J_{\lambda - \alpha_i}^+(\mathbb{C} K_{\alpha_i} + \mathbb{C} L_{\alpha_i})\}, \\ J_\lambda^- &:= \{Y \in \tilde{U}^-(\chi)_{-\lambda} | \forall i \in I, E_i Y - Y E_i \in (\mathbb{C} K_{\alpha_i} + \mathbb{C} L_{\alpha_i}) J_{-\lambda + \alpha_i}^-\}, \end{aligned}$$

where $J_{\pm\mu}^\pm := \{0\}$ for $\mu \notin P_+^\times$. We have $\dim J_\lambda^+ = \dim J_{-\lambda}^-$. Let $J^\pm := \bigoplus_{\lambda \in P_+^\times} J_{\pm\lambda}^\pm$, and let $J := J^+ \tilde{U}^0(\chi) \tilde{U}^-(\chi) + \tilde{U}^+(\chi) \tilde{U}^0(\chi) J^-$. Then J^+, J^-, J are the ideals of the \mathbb{C} -algebras $\tilde{U}^+(\chi)$, $\tilde{U}^-(\chi)$, $\tilde{U}(\chi)$ respectively. We define $U(\chi)$ as the \mathbb{C} -algebra $\tilde{U}(\chi)/J$. Let $\pi : \tilde{U}(\chi) \rightarrow U(\chi)$ be the canonical projection. Define the map $h : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ by $\mathfrak{J}_{1,h(\lambda)} = \{m \in \mathbb{N} | \sum_{r \in \mathfrak{J}_{1,m}} \chi(r\lambda, \lambda) \neq 0\}$. By Kharchenko's theory, there exist $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, a map $\varphi : \mathfrak{J}_{1,N} \rightarrow P_+^\times$, a bijective map $\psi : \mathfrak{J}_{1,N} \rightarrow \mathfrak{J}_{1,N}$, and maps $\bar{E}, \bar{F} : \mathfrak{J}_{1,N} \rightarrow U(\chi)$ such that $\bar{E}(m) \in \pi(\tilde{U}^+(\chi)_{\varphi(m)})^\times$ and $\bar{F}(m) \in \pi(\tilde{U}^-(\chi)_{-\varphi \circ \psi(m)})^\times$ for all $m \in \mathfrak{J}_{1,N}$, and the elements

$$(5) \quad \bar{E}(1)^{s_1} \cdots \bar{E}(r)^{s_r} K_\lambda L_\mu \bar{F}(1)^{t_1} \cdots \bar{F}(r)^{t_r}$$

$(\lambda, \mu \in P, r \in \mathbb{N}, s_x, t_x \in \mathfrak{J}_{0,h(\varphi(x))} (x \in \mathfrak{J}_{1,r}))$ form a \mathbb{C} -basis of $U(\chi)$. Let $R^+(\chi) := \varphi(\mathfrak{J}_{1,N})$. If $|R^+(\chi)| < +\infty$, then φ is injective, see, e.g., [2, Theorem 4.5].

For $i, j \in I$ with $i \leq j$, let $\alpha_{i,j} := \sum_{k \in \mathfrak{J}_{i,j}} \alpha_k$. Let $R_A^+ := \{\alpha_{i,j} | i, j \in I, i \leq j\}$. We say that χ is *type A_ℓ* if $R^+(\chi) = R_A^+$. We say that χ is *type B_ℓ* if $\ell \geq 2$ and $R^+(\chi) = R_A^+ \cup \{\alpha_{i,\ell} + \alpha_{j,\ell} | 1 \leq i < j \leq \ell\}$. We say that χ is *super-type C_ℓ* if $\ell \geq 3$ and there exists a subset of S_C of $I \setminus \{\ell\}$ such that $R^+(\chi) = R_A^+ \cup \{\alpha_{i,\ell} + \alpha_{j,\ell-1} | 1 \leq i < j \leq \ell-1\} \cup \{\alpha_{i,\ell} + \alpha_{i,\ell-1} | i \in S_C\}$. For $i \in I \setminus \{\ell\}$, let $\alpha'_{i,\ell} := \alpha_\ell + \sum_{k \in \mathfrak{J}_{i,\ell-2}} \alpha_k$. Note $\alpha'_{\ell-1,\ell} = \alpha_\ell$. We say that χ is *super-type D_ℓ* if $\ell \geq 3$, there exists a subset of S_D of $I \setminus \{\ell\}$ such that $R^+(\chi) = (R_A^+ \setminus \{\alpha_{\ell-1,\ell}\}) \cup \{\alpha'_{i,\ell} | 1 \leq i \leq \ell-2\} \cup \{\alpha'_{i,\ell} + \alpha_{j,\ell-1} | 1 \leq i < j \leq \ell-1\} \cup \{\alpha_{i,\ell-1} + \alpha'_{i,\ell} | i \in S_D\}$, and χ is not type A_ℓ .

For $X \in \tilde{U}^+(\chi)_\lambda$ and $Y \in \tilde{U}^+(\chi)_\mu$, let $[X, Y]_c := XY - \chi(\lambda, \mu)YX$. For $t \in \mathfrak{J}_{2,+\infty}$ and $i_s \in I$ ($s \in \mathfrak{J}_{1,t}$), let $E_{i_1, \dots, i_t} := [E_{i_1}, E_{i_2, \dots, i_t}]_c$. For $i, j \in I$, let $q_{ij} := \chi(\alpha_i, \alpha_j)$, and $Q_{ij} := q_{ij}q_{ji}$.

Theorem 1. [1] *Assume that χ is type A_ℓ , type B_ℓ , super-type C_ℓ , or super-type D_ℓ . The ideal J^+ of the \mathbb{C} -algebra $\tilde{U}^+(\chi)$ is generated by the following elements:*

- (i) *Here let $i \in I$ be such that $h(\alpha_i) \neq \infty$; $E_i^{h(\alpha_i)+1}$.*
- (ii) *Here we assume $i \neq j$; E_{ij} ($Q_{ij} = 1$), E_{ii} ($q_{ii}Q_{ij} = 1, q_{ii} \neq -1$), E_{iii} ($q_{ii}^2Q_{ij} = 1, q_{ii}^2 + q_{ii} + 1 \neq 0$).*
- (iii) *Here we assume $i \neq j \neq k \neq i$; E_{jjk} ($q_{jj} = -1, Q_{ik} = Q_{ij}Q_{jk} = 1$), $q_{ji}Q_{jk}(1 - Q_{ik})E_{ijk} + (1 - Q_{jk})E_{jik}$ ($Q_{ij}Q_{jk}Q_{ik} = 1$).*
- (iv) *Here we assume χ is super-type C_ℓ ; $[[E_{\ell-2,\ell-1}, E_{\ell-2,\ell-1,\ell}]_c, E_{\ell-1}]_c$ ($q_{\ell-2,\ell-2} = q_{\ell-1,\ell-1} = -1$), $[E_{\ell-3,\ell-2,\ell-1,\ell,\ell-1,\ell-2}, E_{\ell-1}]_c$ ($q_{\ell-2,\ell-2} \neq q_{\ell-1,\ell-1} = -1$), $[E_{\ell-2,\ell-1,\ell,\ell-1}, E_{\ell-1}]_c$ ($q_{\ell-1,\ell-1}^2 + q_{\ell-1,\ell-1} + 1 = 0$).*
- (v) *Here we assume χ is type B_ℓ and $q_{\ell,\ell}^2 + q_{\ell,\ell} + 1 = q_{\ell-1,\ell-1} + 1 = 0$; $[E_{\ell-1,\ell}, E_{\ell-1,\ell,\ell}]_c, [E_{\ell-2,\ell-1,\ell}, E_{\ell-1,\ell}]_c$.*
- (vi) *Here let $\alpha \in R^+(\chi) \setminus \Pi$ be such that $h(\alpha) \neq +\infty$, and let $E_\alpha \in (\tilde{U}^+(\chi)_\alpha)^\times$ be the q -root vector defined as in [1, Section 2.3]; $E_\alpha^{h(\alpha)+1}$. (In many cases, this is redundant; for example, it is redundant if $\chi(\alpha, \alpha) = -1$ and there exist $i, j \in I$ with $(q_{ij}^2 + 1)(q_{ij} + 1)(q_{ij}^2 + q_{ij} + 1) \neq 0$.)*

REFERENCES

- [1] Nicolás Andruskiewitsch, Iván Angiono, and Hiroyuki Yamane, On pointed Hopf superalgebras, to appear in the Proceedings of the VII Workshop in Lie Theory and its Applications (Cordoba, Argentina, 2009) for Contemporary Mathematics (arXiv:1009.5148)
- [2] István Heckenberger, and Hiroyuki Yamane, Drinfel'd double and Shapovalov determinants to appear in the Proceedings of the quantum 2009 meeting in La Falda (Cordoba, Argentina, 2009) for Revista de la Unfon Matemática Argentina Vol. 51-2, (2010), 105-144 (arXiv:0810.1621)

さまざまな W 代数とその表現

荒川 知幸 (京大・数理研)

1.1. W 代数にはいくつかの構成法が存在するが、BRST 構成法によるものが最も見通しが良い。 W 代数の BRST 構成法は最初に Feigin-Frenkel [FF2] によって導入され、Kac-Roan-脇本 [KRW] によって最も一般的な枠組みへ拡張された。これにより、一般の単純 Lie 環 \mathfrak{g} とその中零元 f に対して、対応するレベル k の W 代数 $W^k(\mathfrak{g}, f)$ が定義される。

良く知られているのは f が主中零元の場合の W 代数 [Z, FL, FF2] であると思われるが、一般の中零元 f に対応する W 代数も負けずに面白い。例えば最近話題の Alday-Gaiottox-Tachikawa (AGT) 予想 [AGT] 及びその一般化にもこれらの W 代数は現れるようである ([BFRF, W]).

1.2. 頂点代数とカイラリゼーション。 W 代数は有限 W 代数のカイラリゼーションであると理解することができる ([A2, DSK]). したがって、まず頂点代数やカイラリゼーションについて例を用いて説明することにした。

頂点代数 V に付随する頂点 Poisson 代数, Zhu 代数, Zhu の Poisson 代数をそれぞれ $\text{gr } V$, $\text{Zhu}(V)$, R_V とかく¹:

$$\begin{array}{ccc} \text{gr } V & \xleftarrow{\text{次数化}} & V \\ \text{部分環} \downarrow & & \text{Zhu 代数} \downarrow \\ R_V & & \text{Zhu}(V) \end{array}$$

定義は述べないが $\text{Zhu}(V)$ は通常の多元環であり、 V の既約表現と $\text{Zhu}(V)$ の既約表現の間には一対一対応が存在する。多元環 A に対し、 $\text{Zhu}(V) \cong A$ を満たす頂点代数を A のカイラリゼーションと言う。また $\text{gr } V = \bigoplus_p F^p V / F^{p+1} V$ は Li フィルトレーションと呼ばれる自然な (降下) フィルター付け $[L]\{F^p V\}$ に関する次数化であり、 V の頂点代数の構造は $\text{gr } V$ の頂点 Poisson 代数 [FBZ] の構造²を与える。 Zhu の Poisson 代数 R_V は $\text{gr } V$ の部分空間 $V/F^1 V$ として定義され、 $\text{gr } V$ の頂点 Poisson 代数の構造は R_V に (通常) Poisson 代数の構造を誘導する。

頂点 Poisson 代数は特に可換な頂点代数であり、したがって微分付き可換環³である。可換環はスキームに対応するが、微分付き可換環はジェットスキームに対応する⁴: 有限型のスキーム X に対してその m 次ジェットスキームを X_m が $\text{Hom}(\text{Spec } A, X_m) \cong \text{Hom}(\text{Spec } A[t]/(t^{m+1}), X)$ によって定義され、その射影極限 $X_\infty = \varprojlim X_m$ が (無限) ジェットスキーム、あるいは X の弧空間と呼ばれる。 X がアフィンスキーム $\text{Spec } R$ の時、 X_∞ はアフィンスキームになりその構造環 $R_\infty := \mathbb{C}[X_\infty]$ は微分付き可換環の構造が入る。 R が Poisson 代数のときには R_∞ には R の Poisson 構造から誘導される自然な頂点 Poisson 代数の構造が入る ([A4, Proposition 2.3.1]).

¹標準的な記号ではない。

²頂点 Poisson 代数は coisson 代数や courand algebrinds とも呼ばれる。

³可換な頂点代数と微分付き可換環とは同じものである

⁴ジェットスキームについては [石井] を参照のこと

$\text{gr } V$, R_V , $\text{Zhu } V$ の間には次のような関係がある. R_V は $\text{gr } V$ の部分環であるが, 頂点 Poisson 代数の全射準同型

$$(1) \quad (R_V)_\infty \rightarrow \text{gr } V$$

が存在する ([L, A4]). また $\text{Zhu}(V)$ には自然なフィルトレーションが存在し Poisson 代数の全射準同型

$$(2) \quad R_V \rightarrow \text{Zhu}(V)$$

が存在する. (1), (2) は一般には同型にならないが, V が PBW 基底を持つときには両者とも同型になる.

これらのことはスーパー頂点代数に対しても自然に拡張される.

例 1.1 (ワイル代数のカイラリゼーション). $\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n)$ を階数 n の $\beta\gamma$ システム, つまり OPE

$$a_i(z)a_j^*(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad a_i(z)a_j(w) \sim 0, \quad a_i^*(z)a_j^*(w) \sim 0$$

を満たす $2n$ 個の場合 $a_1(z), \dots, a_n(z), a_1^*(z), \dots, a_n^*(z)$ で生成される頂点代数とする. このとき $\text{Zhu}(\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n))$ は階数 n の Weyl 代数 $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$ に同型になる. また, $R_{\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n)} \cong \mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^n]$, $\text{gr } \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{C}[(T^*\mathbb{C}^n)_\infty]$ が成立する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[(T^*\mathbb{C}^n)_\infty] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n) \\ \uparrow \text{ジェットスキーム} & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^n] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

例 1.2 (クリフォード代数のカイラリゼーション). E を n 次元ベクトル空間とするとき, $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(E[t, t^{-1}])$ で E に付随する semi-infinite 形式の空間, つまり OPE

$$\psi_i(z)\psi_j^*(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad \psi_i(z)\psi_j(w) \sim \psi_i^*(z)\psi_j^*(w) \sim 0$$

を満たす $2n$ 個の奇の場合で生成されるスーパー頂点代数を表すこととする. このとき, $\text{Zhu}(\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(E[t, t^{-1}]))$ は $E \oplus E^*$ に付随する Clifford 代数 $\text{Cl}(E \oplus E^*)$ に同型になる. また, $R_{\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(E)} \cong \bigwedge^\bullet(E) \otimes \bigwedge^\bullet(E^*)$ が成立する. ただし Poisson スーパー代数の構造は次で与えられる. $\{\psi_i, \psi_j^*\} = \delta_{ij}$, $\{\psi_i, \psi_j\} = \{\psi_i^*, \psi_j^*\} = 0$. ここで, $\{\psi_i\}$ は E の基底, $\{\psi_i^*\}$ はその双対基底, ブラケット積はスーパーの意味である. また $\text{gr } \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(E) \cong (\bigwedge^\bullet(E) \otimes \bigwedge^\bullet(E^*))_\infty := \bigwedge^\bullet(E \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}) \otimes \bigwedge^\bullet(E^* \otimes \mathbb{C}[t^{-1}])$ となる.

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^\bullet(E \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]t^{-1}) \otimes \bigwedge^\bullet(E^* \otimes \mathbb{C}[t^{-1}]) & \xrightarrow{\text{量子化}} & \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(E[t, t^{-1}]) \\ \uparrow \text{ジェットスキーム} & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \bigwedge^\bullet(E) \otimes \bigwedge^\bullet(E^*) & \xrightarrow{\text{量子化}} & \text{Cl}(E \oplus E^*) \end{array}$$

例 1.3 (\mathcal{D}_X のカイラリゼーション). X を \mathbb{C} 上の滑らかな代数多様体であって, その一次 Pontryagin 類が消えているものとする. このとき X 上にはカイラル微分作用素の層 (cdo) と呼ばれる頂点作用素の層 $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ が存在する [MSV, GMS2, BD]. $U \cong \mathbb{C}^n \subset X$ の時 $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}(U) \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n)$ となるので, 大雑把に言って $\mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ は $\beta\gamma$ システムを張り合わせたものと考えることができる. 対応する Zhu 代数の層を $\text{Zhu } \mathcal{D}_X^{\text{ch}}$ と書くと $\text{Zhu}(\mathcal{D}_X^{\text{ch}}) \cong$

\mathcal{D}_X が成立する [ACM]. 又, $R_{\mathcal{D}_X^{\text{ch}}} \cong \pi_* \mathcal{O}_{T^*X}$ 及び $\text{gr } \mathcal{D}_X^{\text{ch}} \cong (\pi_\infty)_* \mathcal{O}_{(T^*X)_\infty}$ が成立する. ここで, $\pi : T^*X \rightarrow X$, $\pi_\infty : (T^*X)_\infty \rightarrow X$ は自然な射影.

$$\begin{array}{ccc} (\pi_\infty)_* \mathcal{O}_{(T^*X)_\infty} & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}_X^{\text{ch}} \\ \text{ジェットスキーム} \uparrow & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \pi_* \mathcal{O}_{T^*X} & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{D}_X. \end{array}$$

例 1.4 ($U(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーション). \mathfrak{g} を有限次元単純 Lie 環, $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ を対応する Kac-Moody 代数,

$$V^k(\mathfrak{g}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] + \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k \quad (k \in \mathbb{C})$$

とする. ここで \mathbb{C}_k は K が k 倍で作用し $\mathfrak{g}[t]$ が自明に作用する $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ の一次元表現. $V^k(\mathfrak{g})$ には自然な頂点代数の構造が入り, \mathfrak{g} に付随するレベル k の普遍アフィン頂点代数と呼ばれる. $V^k(\mathfrak{g})$ 加群とは滑らかな⁵レベル k の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現に他ならない. $V^k(\mathfrak{g})$ に関して, $\text{Zhu}(V^k(\mathfrak{g})) \cong U(\mathfrak{g})$, $R_{V^k(\mathfrak{g})} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$, $\text{gr } V^k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty^*]$ が成立する.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty^*] & \xrightarrow{\text{量子化}} & V^k(\mathfrak{g}) \\ \text{ジェットスキーム} \uparrow & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] & \xrightarrow{\text{量子化}} & U(\mathfrak{g}). \end{array}$$

$V^k(\mathfrak{g})$ はコンフォーマルウェイトによって次数付けされている.

$$(3) \quad V^k(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\Delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V^k(\mathfrak{g})_\Delta, \quad V^k(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}.$$

例 1.5 ($\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーション). h^\vee の \mathfrak{g} の双対 Coxeter 数とすると, $k = -h^\vee$ は臨界レベルと呼ばれる. 臨界レベルの普遍頂点代数 $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は Feigin-Frenkel center と呼ばれる大きな (頂点代数としての) 中心を持つ [FF3, F]. これを $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ と書く. $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の可換な部分頂点代数であり,

$\text{Zhu}(\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})) \cong \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, $R_{\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G$, $\text{gr } \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}_\infty^*]^G = \mathbb{C}[(\mathfrak{g}^* // G)_\infty]$ が成立する ([FF3, BD, EF, F]). ここで, $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は $U(\mathfrak{g})$ の中心, G は \mathfrak{g} の随伴群.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[(\mathfrak{g}^* // G)_\infty] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \\ \text{ジェットスキーム} \uparrow & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[\mathfrak{g}^* // G] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \end{array}$$

良く知られているように, $U(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 上自由である ([K1]). この事実のカイラリゼーションとして, $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群として自由であることも Frenkel-Gaitsgory [FG] によって知られている⁶.

例 1.6 ($U_{[0]}(\mathfrak{g})$ のカイラリゼーション). $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+ = \bigoplus_{\Delta > 0} \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_\Delta$ とおく. ここで, $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_\Delta = \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \cap V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})_\Delta$. $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ は $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の中心なので, $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+ + V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は $V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の頂点代数としてのイデアルである. したがって商頂点代数を

$$(4) \quad V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) := V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}) / \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+ + V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$$

⁵任意の元 m が $xt^n \cdot m = 0$ ($\forall x \in \mathfrak{g}, n \gg 0$) を満たす表現.

⁶Feigin-Frenkel center は可換な頂点代数なので特に可換環である.

と定めることができる⁷. Frenkel-Gaitsgory[FG] により, $V_{\text{res}}(\mathfrak{g})$ は単純であり, $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としては最高ウエイト $-h^\vee \Lambda_0$ の既約表現 $\mathbf{L}_{-h^\vee \Lambda_0}$ に同型になることが知られている. $V_{\text{res}}(\mathfrak{g})$ について, 次が成立する: $R_{V_{\text{res}}(\mathfrak{g})} \cong \mathbb{C}[\mathcal{N}]$, $\text{gr } V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{C}[\mathcal{N}_\infty]$, $\text{Zhu}(V_{\text{res}}(\mathfrak{g})) \cong U_{[0]}(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g})/\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+ U(\mathfrak{g})$. ただし, \mathcal{N} は \mathfrak{g} の巾零錐.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{N}_\infty] & \xrightarrow{\text{量子化}} & V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) \\ \uparrow \text{ジェットスキーム} & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[\mathcal{N}] & \xrightarrow{\text{量子化}} & U_{[0]}(\mathfrak{g}). \end{array}$$

例 1.7 ($U_{[0]}(\mathfrak{g})$ の Beilinson-Bernstein 局所化のカイラリゼーション). \mathcal{B} を \mathfrak{g} の Borel 部分代数の集合, つまり旗多様体とし, $\mu : T^*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}$ を Springer の特異点解消とする. \mathcal{N} は正規なので同型 $\mathbb{C}[\mathcal{N}] \cong \Gamma(T^*X, \mathcal{O}_{T^*X}) = \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_{T^*X})$ が成立する. Beilinson-Bernstein[BB] による同型 $U_{[0]}(\mathfrak{g}) \cong \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathcal{B}})$ はこの事実の量子化を与える. さて \mathcal{B} 上には例 1.3 で挙げた cdo $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\text{ch}}$ がユニークに存在する ([GMS1, AG, GMS2]). $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\text{ch}}$ は頂点代数の層であるのでその大域切断は頂点代数の構造を持つが, 頂点代数としての同型

$$V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\text{ch}})$$

が成立する [ACM]⁸.

1.3. Slodowy の横断片とその量子化. $f \in \mathfrak{g}$ を巾零元, $\mathbb{O}_f = \text{Ad } G \cdot f$ とする. f を \mathfrak{sl}_2 トリプル $\{e, h, f\}$ に埋め込んだとき, アフィン空間

$$\mathbb{S} = f + \mathfrak{g}^e$$

は \mathbb{O}_f と f で横断的に交わることが知られている [S]. ここで $\mathfrak{g}^e = \{x \in \mathfrak{g}; [x, e] = 0\}$. \mathbb{S} は Slodowy の横断片と呼ばれる.

さて $\mathfrak{g}_j = \{x \in \mathfrak{g}; [h, x] = 2jx\}$ とおくことにより \mathfrak{g} の次数付け $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ が定まる. このとき $\mathfrak{g}_{1/2} \times \mathfrak{g}_{1/2} \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto (f|[x, y])$, は $\mathfrak{g}_{1/2}$ にシンプレクティック形式を定めるが, これに関する Lagrangian 部分空間を ℓ とし, $\mathfrak{m} = \ell \oplus \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{g}_j$ とおく. \mathfrak{m} は \mathfrak{g} の巾零部分環であるが, 対応する G の巾単部分群を M と書く. このとき, $\mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto (f|x)$, は \mathfrak{m} の指標であり, したがって M の指標を定める.

\mathfrak{m}^\perp を \mathfrak{g} の中の不変内積に関する \mathfrak{m} の直交部分空間とすると, $f + \mathfrak{m}^\perp$ は M の随伴作用で保たれる. さらに, 次のアフィン代数多様体の同型が成立する ([K2, 松澤, GG])

$$(5) \quad M \times \mathbb{S} \xrightarrow{\sim} f + \mathfrak{m}^\perp, \quad (g, x) \mapsto \text{Ad}(g)x.$$

さて, $\mu : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{m}^*$ を制限写像とすると, これは M の作用に関するモーメント写像に他ならない. 内積による同一視 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$ のもとで $f \in \mathfrak{m}^*$ は一点からなる M 軌道となるが, $\mu^{-1}(f) = f + \mathfrak{m}^\perp$ であり, (5) から $\mu^{-1}(f)/M \cong \mathbb{S}$ となる. つまり \mathbb{S} は Hamiltonian 還元法によって実現することができる. 特に \mathfrak{g}^* の Kirillov-Kostant Poisson 構造は \mathbb{S} 上の Poisson 構造を誘導する.

⁷ $V_{\text{res}}(\mathfrak{g})$ 加群とは臨界レベルにおける滑らかな $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現であって, $z \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+$ に対応する場が自明に作用するものに他ならない.

⁸ただし, 高次コホモロジーの消滅は成立せず, 次の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての同型が存在する ([AM]):

$$H^i(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{\text{ch}}) \cong \bigoplus_{w \in W} \mathbf{L}_{-h^\vee \Lambda_0 - \langle w \circ 0, \rho^\vee \rangle} \delta.$$

ここで W は \mathfrak{g} の Weyl 群である.

この Hamiltonian 還元法では $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \mapsto \mathbb{C}[f + \mathfrak{m}^\perp]$, $\mathbb{C}[f + \mathfrak{m}^\perp] \mapsto \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ の二度の操作が行われているが, BRST コホモロジーを用いるとこれを一度の操作にまとめることができ [KS], 結果として Poisson 代数 $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ は次のように実現される.

$$(6) \quad \mathbb{C}[\mathcal{S}] = H^0(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}^*), \{\bar{Q}, ?\})$$

ここで \bar{Q} は $\{\bar{Q}, \{\bar{Q}, ?\}, \} = 0$ を満たす $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}^*)$ の奇の元である. \mathcal{S} の横断性 (とそれから従う (5)) によって消滅

$$(7) \quad H^i(\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}^*), \{\bar{Q}, ?\}) = 0 \quad (i < 0 \text{ or } i > 0)$$

も成立している.

実現 (6) を持ちいると $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ の量子化は容易である ([KS]). $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ を $U(\mathfrak{g})$ に, $\bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}^*)$ を $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*$ に付随する Clifford 代数 $\mathcal{Cl}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)$ に量子化し, \bar{Q} を $Q^2 = 0$ を満たす $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{Cl}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)$ の奇の元に持ち上げれば良い. このようして得られる代数

$$(8) \quad \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) := H^0(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{Cl}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*), \text{ad } Q)$$

は Lynch [Ly], Premet[P1] によって定義された有限 W 代数に他ならない ([A2, DSK]). 量子化された BRST コホモロジーの消滅は量子化される前の消滅によって保証され, 定義により

$$\text{gr } \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}]$$

が成立する.

注意 1.8. \mathbb{C}_f を指標 $f \in \mathfrak{m}^*$ によって定義される \mathfrak{m} の一次元表現とした時, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_f$ は一般化された Gelfand-Graev 表現と呼ばれる [Ka] が, 有限 W 代数は通常この準同型環として定義される:

$$(9) \quad \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) = \text{End}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_f)^{\text{op}}.$$

定義 (8) と (9) が同じであることは以下のようにして分かる (詳しくは [A2] を見よ): (8) のおける右辺の複体 $C = U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{Cl}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)$ のコホモロジー次数はベクトル空間の同型 $\mathcal{Cl}(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*) \cong \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathfrak{m}^*)$ を用いて以下で与えられる.

$$C^n = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i \leq 0, j \geq 0}} C_{i,j}, \quad C_{i,j} = U(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{-i}(\mathfrak{m}) \otimes \bigwedge^j(\mathfrak{m}^*).$$

これから

$$\text{ad } Q = d_- + d_+, \quad d_-(C_{i,j}) \subset C_{i+1,j}, \quad d_+(C_{i,j}) \subset C_{i,j+1}$$

と分解することが分かり, $(\text{ad } Q)^2 = 0$ から $\{d_+, d_-\} = d_+^2 = d_-^2 = 0$ が成立することも分かる. したがって $d_0 = d_-, d_1 = d_+$ となるスペクトル系列 $E_r \Rightarrow H^\bullet(C, \text{ad } Q)$ が存在する. このスペクトル系列において E_1 項を取る操作は Hamiltonian 還元法において $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ から $\mathbb{C}[f + \mathfrak{m}^\perp]$ を得る操作に対応しており, E_1 項の高次の項の消滅と零次に Gelfand-Graev 表現を得る ($\text{gr}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{m})} \mathbb{C}_f) \cong \mathbb{C}[f + \mathfrak{m}^\perp]$ である). E_1 項から E_2 項を取る操作は $\mathbb{C}[f + \mathfrak{m}^\perp]$ から M 不変式として $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ を取る操作に対応しており, 結果として $E_2 = E_\infty$ として Gelfand-Graev 表現の Whittaker ベクトル, すなわち Gelfand-Graev 表現の準同型環を得, またこの対応が代数としての同型を与えていることも容易に確かめる事ができる.

1.4. 有限 W 代数から真の W 代数へ. 大雑把に言って, W 代数を定義するには (8) において $U(\mathfrak{g})$, $\mathcal{C}l(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}^*)$ をそれぞれ例 1.4, 1.2 におけるカイラリゼーション $V^k(\mathfrak{g})$, $\bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t, t^{-1}])$ に置き換え, Q を頂点代数 $V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t, t^{-1}])$ の奇の場 $Q(z)$ のゼロモード $Q_{(0)}$ に持ち上げる⁹:

$$(10) \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \stackrel{\text{“}=\text{”}}{=} H^0(V^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t, t^{-1}]), Q_{(0)}) \\ \cong H^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{m}[t, t^{-1}], V^k(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}_f).$$

ここで, \mathbb{C}_f は $\mathfrak{m}[t, t^{-1}]$ の次の指標によって定義される $\mathfrak{m}[t, t^{-1}]$ の一次元表現である.

$$(11) \quad \mathfrak{m}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}, \quad xt^n \mapsto \text{Res}_{t=0}(f|x)t^n.$$

ただし, 技術的な理由により実際には次に述べるような定義を行う ([KRW]). $V^k(\mathfrak{g})$ 加群 M に対し

$$(12) \quad H_f^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(M) = H^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathfrak{g}_{>0}[t, t^{-1}], M \otimes \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^m)), \quad m = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}_{1/2}$$

とおき,

$$(13) \quad \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) := H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f))$$

と定義する. ただし, $\mathfrak{g}_{>0} = \bigoplus_{j>0} \mathfrak{g}_j$ であり, $\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^m)$ は次のようにして $\mathfrak{g}_{\geq 1}[t, t^{-1}]$ 加群とみなす (詳しくは [A1, §3] を参照のこと): $\mathfrak{g}_{\geq 1} = \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{g}_j$ とすると (11) の $\mathfrak{g}_{\geq 1}[t, t^{-1}]$ への制限も指標になる. このとき, $xt^n - \text{Res}_{t=0}(f|x)x^n$ ($x \in \mathfrak{g}_{\geq 1}$) で生成される $U(\mathfrak{g}_{>0}[t, t^{-1}])$ の左イデアルは両側イデアルになることが分かる. そこで $U(\mathfrak{g}_{>0}[t, t^{-1}])$ をこのイデアルで割ってできる代数を A とおく. A は $\mathfrak{g}_{1/2}[t, t^{-1}]$ の像で生成される. A の $xt^n \mathbf{1} = 0$ ($x \in \mathfrak{g}_{1/2}$, $n \geq 0$) を満たす元 $\mathbf{1}$ で生成される既約表現を考えると, これは $\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^m)$ に同型になる. A は $U(\mathfrak{g}_{>0}[t, t^{-1}])$ の商代数なのでこれで $\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^m)$ に $U(\mathfrak{g}_{>0}[t, t^{-1}])$ 加群の構造が入る.

巾零元 f が偶, つまり $\mathfrak{g}_{1/2} = 0$ の時は (10) と (13) は同じである. そうでないときも, (13) は意味としては (10) である.

一方 (5) から次が直ちに従う ([石井, 命題 3.3]).

$$(14) \quad M_{\infty} \times \mathbb{S}_{\infty} \xrightarrow{\sim} (f + \mathfrak{m}^{\perp})_{\infty}.$$

このことと定義から¹⁰,

$$R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)} \cong \mathbb{C}[\mathbb{S}], \quad \text{gr } \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[\mathbb{S}_{\infty}], \quad \text{Zhu}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$$

とコホモロジーの消滅が従う ([A2, DSK, A5])¹¹. とくに, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ ($k \in \mathbb{C}$) は有限 W 代数 $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ のカイラリゼーションの 1 パラメーター族である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathbb{S}_{\infty}] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \\ \uparrow \text{ジェットスキーム} & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[\mathbb{S}] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) \end{array}$$

菅原構成法により, 臨界レベル以外では $V^k(\mathfrak{g})$ はコンフォーマルである. これにより, 臨界レベル以外では $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ もコンフォーマルである (ただしそのままでは

⁹ただし (??) 同型が成立するように持ち上げる.

¹⁰本当はスペクトル系列の収束性の問題は非自明なのだがここでは触れないことにする.

¹¹ただし, f が偶でないときには $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の次数付けが半整数になるので $\text{Zhu}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f))$ としては Ramond twisted な Zhu 代数をとる ([DSK])

$Q_{(0)}$ と可換ではないので可換になるように $T(z)$ は少しずらす). その中心電荷は次の公式で与えられる [KRW].

$$c(\mathfrak{g}, f, k) = \dim \mathfrak{g}_0 - \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}_{1/2} - \frac{12}{k+h^\vee} |\rho - (k+h^\vee)x_0|^2$$

ただし, $x_0 = h/2$ ($\{e, h, f\}$ は \mathfrak{sl}_2 トリプル). また $R_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)} \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}] \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}^e]$ であるので $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は \mathfrak{g}^e の基底に対応する生成元を持つ. $\mathfrak{g}_j^e = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}_j$ とおくと, \mathfrak{g}_j^e に対応する $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ のコンフォーマルウエイトは $j+1$ である. これらの元の間 OPE は原理的には計算可能だが, 一般的な公式は知られていない.

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の交換関係 (OPE) は軌道 \mathbb{O}_f の次元が高くなればなるほど複雑になる. したがって f が極小巾零元 f_θ のときが最も簡単になるが, この場合の OPE は Kac-Roan-脇本 [KRW], Kac-脇本 [KW1] によって知られている. 彼らは $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\min})$ の定義を \mathfrak{g} がスーパー Lie 環の場合に拡張する¹² ことにより, ほとんど全てのスーパーコンフォーマル代数が $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_\theta)$ として現れることを発見した

注意 1.9. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ とする. 巾零元 f が長方形の分割 $(m^r) \vdash n$ に対応する時は $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ はレベル r の Yangian $Y(\mathfrak{sl}_m)$ に同型になる [RS]. したがって, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は Yangian $Y(\mathfrak{sl}_m)$ のある種のアフィン化であるとみなすことができる. この場合, 証明はしていないが, k を特殊な値にとれば $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ から最高ウエイト Λ_0 を持つ \mathfrak{sl}_m の可積分表現への頂点代数の全射準同型が存在する (Yangian の evaluation 表現の類似).

f が一般の分割の場合も $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ はやはり RTT 関係式で定義される shifted Yangian と呼ばれる Yangian の部分代数に同型になることが知られている [BK].

1.5. 臨界レベルにおける \mathcal{W} 代数. 定義 (8) より対応 $z \mapsto z \otimes 1$ は写像 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ を定める. Kostant [K2] により, f が主巾零元 f_{prin} の時これは同型

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}})$$

を与える事が知られている. Feigin-Frenkel [FF3] はこの事実のカイラリゼーションとして, 同型

$$(15) \quad \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}})$$

が成立することを示した.

一般の巾零元 f の場合に (15) の類似を考えよう. 一般の f の場合は同型

$$(16) \quad \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f))$$

が成立することが知られている [P2]¹³. また $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ が $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ 上自由であることも分かる (cf. [G]). この事実のカイラリゼーションとして, 次が成立する.

定理 1.10 ([A7]). 頂点代数の埋め込み $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \hookrightarrow V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ は頂点代数の同型

$$\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f))$$

を誘導する. さらに, $\mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)$ は自由 $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群.

さて,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap \mathcal{N}$$

とおく. \mathcal{S} は次元が $\dim \mathcal{N} - \dim \mathbb{O}_f$ の, 被約かつ既約, 正規完全交差な代数多様体であることが知られている ([P1], 注意 1.11 参照).

¹² \mathfrak{g} が基本古典型のスーパー Lie 環, f のパリティが偶のとき, $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は定義される.

¹³[P2] の中で Premet は証明は Ginzburg によると述べている.

注意 1.11. 良く知られているように ([松澤]), \mathfrak{g} が ADE 型で f が副正則元の時, \mathcal{S} は $f \in \mathcal{S}$ で \mathfrak{g} と同じ型の単純特異点を持つ.

同型 (5) を制限することにより, 同型

$$(17) \quad M \times \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} (f + \mathfrak{m}^\perp) \cap \mathcal{N}$$

が得られる. 従って, \mathcal{S} も Hamiltonian 還元法で実現することができる [G]. そこで $\mathcal{W}_{[0]}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) = \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) / \mathcal{Z}(\mathfrak{g})_+ \mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ とおく. このとき

$$(18) \quad \text{gr } \mathcal{W}_{[0]}(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}],$$

$$(19) \quad H^i(U_{[0]}(\mathfrak{g}) \otimes \text{Cl}(\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^*), Q) \cong \begin{cases} \mathcal{W}_{[0]}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) & (i = 0) \\ 0 & (i \neq 0) \end{cases}$$

が成立する. つまり $\mathcal{W}_{[0]}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ は $\mathbb{C}[\mathcal{S}]$ の量子化であり, $\mathcal{W}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ 同様, 量子 Hamiltonian 還元法により実現することができる [G].

臨界レベルの W 代数 $\mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g}, f)$ を $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}})_+$ で生成されるイデアルで割った商頂点代数を $\mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f)$ で表す (例 1.6 を参照のこと).

定理 1.12. [A7] $\mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f)$ は単純で $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(V_{\text{res}}(\mathfrak{g}))$ に同型である. また頂点 Poisson 代数としての同型 $\text{gr } \mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f) \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}_\infty]$ が成立する. また $\text{Zhu}(\mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f)) \cong \mathcal{W}_{[0]}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f)$, $R_{\mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f)} \cong \mathbb{C}[\mathcal{S}]$ である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathcal{S}_\infty] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f) \\ \uparrow \text{ジェットスキーム} & & \uparrow \text{カイラリゼーション} \\ \mathbb{C}[\mathcal{S}] & \xrightarrow{\text{量子化}} & \mathcal{W}_{[0]}^{\text{fin}}(\mathfrak{g}, f) \end{array}$$

注意 1.13. 臨界レベルにおける $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現論は Feigin-Frenkel 予想 [AF] によって小さな量子群の表現論, あるいは正標数における \mathfrak{g} の表現と密接に関係する. この意味で, 臨界レベルにおける W 代数の表現論と, 正標数における有限 W 代数の表現論 (= 正標数におけるある種の \mathfrak{g} の表現 [P2]) との関係は今後の興味深い研究課題である.

1.6. W 代数の自由場表示. 応用上, 自由場表示を与えることは重要である. W 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の自由場表示は Feigin-Frenkel [FF1, F] による $\widehat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現から関手的に得ることができる [A7]. 以下, これを説明する.

\mathcal{F}_k を最高ウエイト $k\Lambda_0$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現とする. \mathcal{F}_k は自然な頂点代数の構造を持ち, 頂点代数としては次の同型が成立する.

$$\mathcal{F}_k \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n) \otimes \pi_{k+h^\vee}^l.$$

ここで $n = \frac{1}{2} \dim \mathcal{N}$ であり, また $\pi_{k+h^\vee}^l$ は階数 $l := \text{rank } \mathfrak{g}$, レベル $k + h^\vee$ の Heisenberg 頂点代数. Feigin-Frenkel [FF1, F] により任意の k に対して頂点代数の埋め込み

$$(20) \quad V^k(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{F}_k$$

が成立することが知られている.

臨界レベル $k = -h^\vee$ では $\mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{F}_{-h^\vee}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の作用で閉じている. これを (最高ウエイト $k\Lambda_0$) の制限脇本加群と呼び, \mathcal{F}_{res} で表すことにする. このとき (20) は頂点代数の埋め込み

$$(21) \quad V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\text{res}}$$

を誘導する.

注意 1.14. \mathcal{B} を例 1.7 同様 \mathfrak{g} の旗多様体とし, $U \subset \mathcal{B}$ を big cell とする. このとき $V_{\text{res}}(\mathfrak{g}) = \Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{\text{ch}})$ 加群としての同型 $\Gamma(U, \mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^{\text{ch}}) \cong \mathcal{F}_{\text{res}}$ が存在する.

$\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{\text{res}}$ はそれぞれ $V^k(\mathfrak{g}), V_{\text{res}}(\mathfrak{g})$ を部分頂点代数として含むので, 対応する BRST コホモロジ $H_f^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathcal{F}_k), H_f^{\frac{\infty}{2}+\bullet}(\mathcal{F}_{\text{res}})$ にも自然に頂点代数の構造が入る.

補題 1.15 ([A7]). (i) $H_f^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathcal{F}_{\text{res}}) = 0$ ($i \neq 0$), かつ頂点代数として $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_{\text{res}}) \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^{m_f})$. ここで, $m_f = \dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{N} - \dim \mathbb{O}_f$.

(ii) $H_f^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathcal{F}_k) = 0$ ($i \neq 0$), かつ頂点代数として $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_k) \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^{m_f}) \otimes \pi_{k+h^\vee}^l$.

定理 1.16 ([A7]). (i) 任意の $k \in \mathbb{C}$ について (20) は頂点代数の埋め込み

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \hookrightarrow H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_k) \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^{m_f}) \otimes \pi_{k+h^\vee}^l$$

を誘導する.

(ii) (21) は頂点代数の埋め込み

$$\mathcal{W}_{\text{res}}(\mathfrak{g}, f) \hookrightarrow H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_{\text{res}}) \cong \mathcal{D}^{\text{ch}}(\mathbb{C}^{m_f})$$

を誘導する.

注意 1.17. k がジェネリックの時には次の形の完全列が存在することが知られている [F].

$$0 \longrightarrow V^k(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{F}_k \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^l S_i} \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{F}_{k, -\alpha_i}.$$

ここで $\mathcal{F}_{k, -\alpha_i}$ は最高ウエイト $-\alpha_i + k\Lambda_0$ の脇本表現で, S_i は遮断作用素. 定理 1.16 と $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(?)$ の右完全性 ([AM]) より, 関手 $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(?)$ を作用させることにより次の完全列を得る.

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \longrightarrow H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_k) \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^l H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(S_i)} \bigoplus_{i=1}^l H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_{k, -\alpha_i})$$

したがって $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は遮断作用素 $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(S_i)$ の核の共通部分である.

特に $f = f_{\text{prin}}$ の場合は $m_f = 0$, したがって $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(\mathcal{F}_k) \cong \pi_l^{k+h^\vee}$ となり, $H_f^{\frac{\infty}{2}+0}(S_i)$ は通常遮断作用素となることを確かめることができる.

1.7. W 代数の表現論. $k = -h^\vee$ を除く $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の全ての最高ウエイト既約表現の指標は, 以下の場合¹⁴完全に決定されている.

- (i) f が極少巾零元の場合 ([A1]),
- (ii) f が主巾零元の場合 ([A2]),
- (iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合 ([A3]),

また最近 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の可積分性や有理性に関する Kac-脇本予想 [KW2] に関する進展も得られた [A5, A6]. しかし既に紙面が尽きてしまったので, これらについては講演中に述べたいと思う.

¹⁴これ以外の場合有限 W 代数の有限次元表現のパラメータ付けが既に未解決問題である.

REFERENCES

- [ACM] T. Arakawa, D. Chebotarov, and F. Malikov. Algebras of twisted chiral differential operators and affine localization of \mathfrak{g} -modules. *Sel. Math. New Ser.*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–46, 2011.
- [AF] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. On the restricted Verma modules at the critical level. to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008. arXiv:0812.3334v1[math.RT].
- [AG] S. Arkhipov and D. Gaiatsgory. Differential operators on the loop group via chiral algebras. *Int. Math. Res. Not.*, No. 4, pp. 165–210, 2002.
- [AGT] Luis F. Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa. Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 91, No. 2, pp. 167–197, 2010.
- [AM] Tomoyuki Arakawa and Fyodor Malikov. A chiral Borel-Weil-Bott theorem. *preprint*, 2009. arXiv:0903.1281[math.AG].
- [A1] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, Vol. 130, No. 3, pp. 435–478, 2005.
- [A2] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W -algebras. *Invent. Math.*, Vol. 169, No. 2, pp. 219–320, 2007.
- [A3] T. Arakawa. Representation theory of W -algebras, II: Ramond twisted representations. *preprint*, 2008. arXiv:0802.1564v2 [math.QA].
- [A4] T. Arakawa. A remark on the C_2 -cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z. (online first)*, 2010. arXiv:1004.1492[math.QA].
- [A5] T. Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2 -cofiniteness of W -algebras. *preprint*. arXiv:1004.1554[math.QA].
- [A6] T. Arakawa. Rationality of W -algebras, I: Bershadsky-Polyakov vertex algebras. *preprint*, 2010. arXiv:1005.0185[math.QA].
- [A7] T. Arakawa. Free field realization and W -algebras at the critical level. *preprint*, 2011.
- [BB] Alexandre Beilinson and Joseph Bernstein. Localisation de g -modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 292, No. 1, pp. 15–18, 1981.
- [BD] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigensheaves. *preprint*, available at <http://www.math.uchicago.edu/benzvi>.
- [BFRF] Alexander Braverman, Boris Feigin, Leonid Rybnikov, and Michael Finkelberg. A finite analog of the AGT relation I: finite W -algebras and quasimaps’ spaces. *preprint*. arXiv:1008.3655v1 [math.AG].
- [BK] Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev. Shifted Yangians and finite W -algebras. *Adv. Math.*, Vol. 200, No. 1, pp. 136–195, 2006.
- [DSK] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W -algebras. *Japan. J. Math.*, Vol. 1, No. 1, pp. 137–261, 2006.
- [EF] David Eisenbud and Edward Frenkel. Appendix to [M]. 2001.
- [FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, Vol. 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.
- [FF1] Boris L. Feigin and Edward V. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 128, No. 1, pp. 161–189, 1990.
- [FF2] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel’d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, Vol. 246, No. 1-2, pp. 75–81, 1990.
- [FF3] Boris Feigin and Edward Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel’fand-Dikiĭ algebras. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 197–215. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.
- [FG] Edward Frenkel and Dennis Gaiatsgory. D -modules on the affine Grassmannian and representations of affine Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 125, No. 2, pp. 279–327, 2004.
- [FL] V. A. Fateev and S. L. Lykhanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry. *Internat. J. Modern Phys. A*, Vol. 3, No. 2, pp. 507–520, 1988.
- [F] Edward Frenkel. Wakimoto modules, opers and the center at the critical level. *Adv. Math.*, Vol. 195, No. 2, pp. 297–404, 2005.
- [GG] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, No. 5, pp. 243–255, 2002.

- [G] Victor Ginzburg. Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices. *Represent. Theory*, Vol. 13, pp. 236–271, 2009.
- [GMS1] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. On chiral differential operators over homogeneous spaces. *Int. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 26, No. 2, pp. 83–106, 2001.
- [GMS2] Vassily Gorbounov, Fyodor Malikov, and Vadim Schechtman. Gerbes of chiral differential operators. II. Vertex algebroids. *Invent. Math.*, Vol. 155, No. 3, pp. 605–680, 2004.
- [Ka] N. Kawanaka. Generalized Gel'fand-Graev representations and Ennola duality. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, Vol. 6 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 175–206. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [K1] Bertram Kostant. Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. Math.*, Vol. 85, pp. 327–404, 1963.
- [K2] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, Vol. 48, No. 2, pp. 101–184, 1978.
- [KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 241, No. 2-3, pp. 307–342, 2003.
- [KS] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, Vol. 176, No. 1, pp. 49–113, 1987.
- [KW1] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. Quantum reduction and representation theory of superconformal algebras. *Adv. Math.*, Vol. 185, No. 2, pp. 400–458, 2004.
- [KW2] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W -algebras. *Transform. Groups*, Vol. 13, No. 3-4, pp. 671–713, 2008.
- [L] Haisheng Li. Abelianizing vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 259, No. 2, pp. 391–411, 2005.
- [Ly] T. E. Lynch. *Generalized Whittaker vectors and representation theory*. PhD thesis, M.I.T., 1979.
- [MSV] Fyodor Malikov, Vadim Schechtman, and Arkady Vaintrob. Chiral de Rham complex. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 204, No. 2, pp. 439–473, 1999.
- [M] Mircea Mustața. Jet schemes of locally complete intersection canonical singularities. *Invent. Math.*, Vol. 145, No. 3, pp. 397–424, 2001. With an appendix by David Eisenbud and Edward Frenkel.
- [P1] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, Vol. 170, No. 1, pp. 1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.
- [P2] Alexander Premet. Enveloping algebras of Slodowy slices and the Joseph ideal. *J. Eur. Math. Soc.*, Vol. 9, No. 3, pp. 487–543, 2007.
- [RS] E. Ragoucy and P. Sorba. Yangian realisations from finite W -algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 203, No. 3, pp. 551–572, 1999.
- [S] Peter Slodowy. *Simple singularities and simple algebraic groups*, Vol. 815 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [W] Niclas Wyllard. Instanton partition functions in $n = 2$ $su(n)$ gauge theories with a general surface operator, and their W -algebra duals. *preprint*. arXiv:1012.1355v1 [hep-th].
- [Z] A. B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, Vol. 65, No. 3, pp. 347–359, 1985.
- [松澤] 松澤淳一. 特異点とルート系. すうがくの風景 6. 朝倉書店, 2002.
- [石井] 石井志保子. 弧空間とナッシュ問題. 「数学」, Vol. 62, No. 3, pp. 346–365, 2010.

Alcove path と affine Weyl 群上の非可換 微分構造

前野 俊昭 (京都大学)*

Affine Weyl 群 W_{aff} の標準的な鏡映表現に対し、 W_{aff} の作用の基本領域は alcove と呼ばれる。Alcove path とは 隣り合う alcove の列であり、affine Weyl 群の元の鏡映の積への分解の情報を反映している。このような情報は、Schubert calculus のコンテキストでは旗多様体の交叉理論における Chevalley 型の公式に現れ、また可積分系の理論においても互いに可換な作用素の構成に現れることが知られている。本講演では、主に Schubert calculus における alcove path の役割について概観し、(affine) Weyl 群上の非可換微分構造を用いた 旗多様体や affine Grassmannian 上の交叉理論 (Pontryagin 環) の model の構成への応用について紹介したい。ここで紹介する内容は主に [6], [12] の結果に基づいている。

以下、次のような記号を用いることにする。 G は連結かつ単連結な半単純 Lie 群とし、 \mathfrak{g} をその Lie 環とする。 G の Borel 部分群 B を一つ固定する。これにより、 G の root 系 Δ は正 root の集合 Δ_+ と負 root の集合 Δ_- の和集合として表され、単純 root の集合 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ が選ばれたことになる。また、 Δ の weight 格子を P 、root 格子を Q とする。 $P_{\mathbb{R}} := P \otimes \mathbb{R}$ とすると、 G の Weyl 群 W は $P_{\mathbb{R}}$ に標準的な鏡映表現として作用している。Affine Weyl 群は、 W と coroot 格子 Q^\vee の半直積 $W_{\text{aff}} = W \ltimes Q^\vee$ として定められる。

1. Alcove path

$\alpha \in \Delta$ と $k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $P_{\mathbb{R}}$ の超平面 $H_{\alpha,k}$ を $H_{\alpha,k} := \{\lambda \in P_{\mathbb{R}} \mid \langle \lambda, \alpha \rangle = k\}$ と定める。 $P_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,k}$ の各連結成分を alcove と言う。 W_{aff} は alcove たちの集合に単純推移的に作用している。

Definition 1.1. [7] (1) Alcove の列 (A_0, \dots, A_l) であって、 A_i と A_{i+1} が互いに隣り合っているものを alcove path という。

(2) $\gamma = (A_0, \dots, A_l)$ を alcove path とする。 γ が A_0 と A_l をつなぐ alcove path たちのうちで最小の長さ l を持つとき、 γ は既約 (reduced) であるという。

(3) A_i と A_{i+1} が $H_{\beta,k}$ という形の壁を共有しているとき、 $A_i \xrightarrow{\beta,k} A_{i+1}$ という記号を用いる。ここで β は A_i から A_{i+1} へ向かう向きのもをとる。

Remark 1.1. Ram と Yip [15] は Macdonald 多項式を alcove walk と呼ばれるものを用いて表す組合せ的な公式を与えた。Alcove path と alcove walk は類似の概念だが、「壁で反射される」状況を許しているかどうかの違いがある。Alcove path

本研究は科研費 (課題番号:22540015) の助成を受けたものである。

* 〒606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学 大学院工学研究科

e-mail: maeno@kuee.kyoto-u.ac.jp

においては壁での反射は許していないが, alcove walk では壁で反射されることも考慮に入れているのが違いである.

超平面 $H_{\alpha,k}$ に関する鏡映を $s_{\alpha,k}$ と表すことにする. Δ の highest root を θ とし, $\alpha_0 := -\theta$ とおく. $s_0 := s_{\alpha,-1}$ とし, $s_1 := s_{\alpha_1,0}, \dots, s_r := s_{\alpha_r,0}$ とおくと, affine Weyl 群 W_{aff} は次のように Coxeter 群としての表示を持つ.

$$W_{\text{aff}} = \langle s_0, \dots, s_r \mid s_0^2 = \dots = s_r^2 = 1, (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

$\langle \lambda, \alpha_0 \rangle \geq -1, \langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq 0, 1 \leq i \leq r$ という不等式系で定められる alcove A° を基本 alcove という. $\lambda \in P$ に対し, A° と $A^\circ - \lambda$ をつなぐ alcove path $A_0 = A^\circ \xrightarrow{\beta_1, k_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2, k_2} \dots \xrightarrow{\beta_l, k_l} A_l = A^\circ - \lambda$ が与えられた時, (k_1, \dots, k_l) のほうは無視して) $(-\beta_1, \dots, -\beta_l)$ を λ -chain という. これは, 所謂 Littelmann path [8] の離散類似と見なすことができるものである.

$x \in W_{\text{aff}}$ に対し, A° と $x(A^\circ)$ を結ぶ alcove path

$$\gamma : A_0 = A^\circ \xrightarrow{\beta_1, k_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2, k_2} \dots \xrightarrow{\beta_l, k_l} A_l = x(A^\circ)$$

を考えると, ここから二つの情報を読み取ることができる. 一つは, x の鏡映への分解 $x = s_{\beta_l, k_l} \dots s_{\beta_1, k_1}$ である. もう一つは, x の単純鏡映への分解である. 基本 alcove A° の壁には affine の単純 root たち $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ が対応している. そこで, A° の各壁に $0, 1, \dots, r$ の label を付け, それを W_{aff} の作用を用いて任意の alcove の壁の label 付けに拡張する. 上で取った alcove path γ において A_i と A_{i+1} が共有する壁の label を j_i とすると, $x = s_{j_1} \dots s_{j_l}$ である.

2. Nichols-Woronowicz 代数

(Affine) Weyl 群上の非可換微分構造を記述するための言葉として, Nichols-Woronowicz 代数というものを導入する. これは対称代数の braided な状況での類似物とみなすことができる概念である.

\mathbb{Q} 上の線型空間 M とその上の braiding $\psi : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ の組を考える. 即ち, $M^{\otimes n}$ の第 i 成分と第 $(i+1)$ 成分に ψ を施して得られる線型写像 ψ_i たちの間に braid 関係式 $\psi_i \psi_{i+1} \psi_i = \psi_{i+1} \psi_i \psi_{i+1}$ が成り立っているものとする.

n 次対称群 S_n の元 w の最短表示 $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ を考える. ここで $s_i = (i, i+1)$ は i と $(i+1)$ の単純互換である. このとき, braid 関係式より, $M^{\otimes n}$ 上の線型写像 $\Psi_w := \psi_{i_1} \dots \psi_{i_l}$ は w の最短表示の取り方に依らず定まることが分かる. これを用いて $M^{\otimes n}$ 上の Woronowicz symmetrizer を $\sigma_n(\psi) := \sum_{w \in S_n} \Psi_w$ と定義する. これが Woronowicz [16] により導入された symmetrizer の braided 類似である.

Definition 2.1. (see [2], [9], [16]) (M, ψ) に付随した Nichols-Woronowicz 代数 $\mathcal{B}(M)$ とは tensor 代数 $T(M)$ を ideal $I := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ker}(\sigma_n(\psi))$ により割って得られる代数のことである.

Remark 2.1. 自明な事実ではないが, I は $T(M)$ の両側 ideal となっている. また, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, x \in M$ で定まる余積により $T(M)$ には braided Hopf 代

数の構造が入るが, I はその Hopf ideal にもなっている. 従って $\mathcal{B}(M)$ も braided Hopf 代数の構造を持つ.

一方, 原始的元で生成されるような Hopf 代数の構造については Nichols [10] による研究があり, Andruskiewitsch と Schneider は次のように Nichols 代数というものをご定義している.

Definition 2.2. [1] 次数付き braided Hopf 代数 $\mathcal{B} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{B}_i$ が次の 3 条件を満たすとき Nichols 代数という.

- (1) $\mathcal{B}_0 = \mathbb{Q}$,
- (2) $\mathcal{B}_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$,
- (3) \mathcal{B} は \mathbb{Q} -代数として \mathcal{B}_1 で生成される.

実は, Nichols 代数は上述の Woronowicz による対称代数の braided 類似と同値な概念であることが知られている [9]. (\mathcal{B}_1 は Definition 2.1 の M と同一視される.) ここでは, [2] に従って Nichols-Woronowicz 代数と呼んでおくことにする.

以下では, Yetter-Drinfeld 加群と呼ばれる型の braided vector space に付随した Nichols-Woronowicz 代数を中心に考える.

Definition 2.3. Γ を群とする. \mathbb{Q} -線型空間 M が次の 3 条件を満たしているとき Γ 上の Yetter-Drinfeld 加群と言う.

- (1) M は Γ -加群.
- (2) M は Γ -graded, 即ち M は Γ の元で添字付けられた部分線型空間の直和として $M = \bigoplus_{g \in \Gamma} M_g$ と表される.
- (3) $h \in \Gamma$ と $v \in M_g$ に対し, $h(v) \in M_{hgh^{-1}}$.

M が群 Γ 上の Yetter-Drinfeld 加群であるとき, $\psi(x \otimes y) = g(y) \otimes x$, $x \in M_g$, $y \in M$ と定めることで自然な braiding $\psi : M^{\otimes 2} \rightarrow M^{\otimes 2}$ が定まる.

Affine Weyl 群 W_{aff} 上の Yetter-Drinfeld 加群 $M_{W_{\text{aff}}}$ を

$$M_{W_{\text{aff}}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cdot [\alpha, k] / ([\alpha, k] + [-\alpha, -k])$$

と定める. $w \in W$ の $M_{W_{\text{aff}}}$ への作用を $w[\alpha, k] = [w(\alpha), k]$ と定め, $\lambda \in Q^\vee$ による translation t_λ の作用を $t_\lambda[\alpha, k] = [\alpha, k + \langle \lambda, \alpha \rangle]$ と定めることで, W_{aff} の作用が定まる. また, $[\alpha, k]$ の W -degree は $s_{\alpha, k}$ で与えられる. $[\alpha] := [\alpha, 0]$, $\alpha \in \Delta$ で生成される部分空間 M_W は W 上の Yetter-Drinfeld 加群になっている. こうして得られた $M_{W_{\text{aff}}}$ や M_W に付随した Nichols-Woronowicz 代数 $\mathcal{B}_{\text{aff}} := \mathcal{B}(M_{W_{\text{aff}}})$, $\mathcal{B}_W := \mathcal{B}(M_W)$ が以下の考察の中心的な話題となる.

Example 2.1. n 次元 Euclid 空間の正規直交基底 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ をとり, A_{n-1} 型 root 系の標準的な実現 $\alpha_{ij} := \varepsilon_i - \varepsilon_j$ をとっておく. このとき, 対応する Nichols-Woronowicz 代数 $\mathcal{B}_{A_{n-1}}$ において次のような 2 次関係式が成り立っている.

- (1) $[\alpha_{ij}]^2 = 0$,
- (2) $[\alpha_{ij}][\alpha_{kl}] = [\alpha_{kl}][\alpha_{ij}]$, if $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$,

$$(3) [\alpha_{ij}][\alpha_{jk}] + [\alpha_{jk}][\alpha_{ki}] + [\alpha_{ki}][\alpha_{ij}] = 0.$$

この関係式は Fomin-Kirillov [4] で導入された 2 次代数 \mathcal{E}_n の定義関係式と同じものである。従って、代数の全射 $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{B}_{A_{n-1}}$ が存在する。この写像は同型であろうと予想されている。

次に rank 2 の root 系に対し、次のような標準的な実現をとっておく。 $\{\varepsilon_i\}$ は正規直交系である。

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_1) : \Delta_+^{A_1 \times A_1} &= \{a_1 := \varepsilon_1, a_2 := \varepsilon_2\}, \\ (A_2) : \Delta_+^{A_2} &= \{a_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, a_2 := \varepsilon_1 - \varepsilon_3, a_3 := \varepsilon_2 - \varepsilon_3\}, \\ (B_2) : \Delta_+^{B_2} &= \{a_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, a_2 := \varepsilon_1, a_3 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, a_4 := \varepsilon_2\}, \\ (C_2) : \Delta_+^{C_2} &= \{a_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, a_2 := 2\varepsilon_1, a_3 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2, a_4 := 2\varepsilon_2\}, \\ (G_2) : \Delta_+^{G_2} &= \{a_1 := \varepsilon_1 - \varepsilon_2, a_2 := \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3, a_3 := -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ & a_4 := -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3, a_5 := -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, a_6 := -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}. \end{aligned}$$

Lemma 2.1. \mathcal{B}_W の元の族 $h_\alpha := 1 + [\alpha]$, $\alpha \in \Delta$ は Yang-Baxter 方程式を満たす。即ち, Δ が $X = A_1 \times A_1, A_2, B_2, C_2, G_2$ のいずれかと同型な部分ルート系 Δ' を含むとき, $h_\alpha, \alpha \in \Delta'$, は次の関係式を満たす。

$$\begin{aligned} (A_1 \times A_1) : h_{a_1} h_{a_2} &= h_{a_2} h_{a_1}, & (A_2) : h_{a_1} h_{a_2} h_{a_3} &= h_{a_3} h_{a_2} h_{a_1}, \\ (B_2, C_2) : h_{a_1} h_{a_2} h_{a_3} h_{a_4} &= h_{a_4} h_{a_3} h_{a_2} h_{a_1}, \\ (G_2) : h_{a_1} h_{a_2} h_{a_3} h_{a_4} h_{a_5} h_{a_6} &= h_{a_6} h_{a_5} h_{a_4} h_{a_3} h_{a_2} h_{a_1}. \end{aligned}$$

一般に braided vector space M の元は $\mathcal{B}(M^*)$ に braided 微分作用素として作用することが知られている ([2], [9]). $M_{W_{\text{aff}}}^*$ と $M_{W_{\text{aff}}}$ を次のような W_{aff} -不変な内積 $(,)$ で同一視しておく。

$$([\alpha, k], [\beta, l]) = \begin{cases} 1, & \text{if } \alpha = \beta \text{ and } k = l, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで, $\alpha, \beta \in \Delta_+, k, l \in \mathbb{Z}$ である。この場合, (右からの) 微分作用素 $\overleftarrow{D}_{[\alpha, k]}$, $[\alpha, k] \in M_{W_{\text{aff}}}$ は, 次のような特徴付けで定まるものになっている。

$$\begin{aligned} (0) (c) \overleftarrow{D}_{[\alpha, k]} &= 0, c \in \mathbb{Q}, \\ (1) ([\alpha, k]) \overleftarrow{D}_{[\beta, l]} &= ([\alpha, k], [\beta, l]), \\ (2) (FG) \overleftarrow{D}_{[\alpha, k]} &= F(G \overleftarrow{D}_{[\alpha, k]}) + (F \overleftarrow{D}_{[\alpha, k]}) s_{\alpha, k}(G). \end{aligned}$$

ここで, $\alpha, \beta \in \Delta, k, l \in \mathbb{Z}, F, G \in \mathcal{B}_{\text{aff}}$.

以下, $\overleftarrow{D}_0 := \overleftarrow{D}_{[\alpha_0, -1]}$, $\overleftarrow{D}_i := \overleftarrow{D}_{[\alpha_i, 0]}$, $i = 1, \dots, r$ とおく。 $x \in W_{\text{aff}}$ の最短表示 $x = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を一つ取ったとき, \mathcal{B}_{aff} に右から作用する微分作用素 \overleftarrow{D}_x が

$$\overleftarrow{D}_x := \overleftarrow{D}_{i_1} \cdots \overleftarrow{D}_{i_r}$$

により定義できる。 \overleftarrow{D}_i たちが braid 関係式を満たしていることから, \overleftarrow{D}_x は x の最短表示に依らずに定まっている。

また, $x \in W_{\text{aff}}$ に対し, A° と $x^{-1}(A^\circ)$ をつなぐ既約 alcove path

$$\gamma : A_0 = A^\circ \xrightarrow{\beta_1, k_1} A_1 \xrightarrow{\beta_2, k_2} \dots \xrightarrow{\beta_l, k_l} A_l = x^{-1}(A^\circ)$$

をとり, $[\gamma] := [-\beta_1, -k_1] \cdots [-\beta_l, -k_l]$ と定義する. このとき, 次の補題が得られる.

Lemma 2.2. $([\gamma]) \overline{D}_x = 1$

3. 旗多様体の cohomology 環と K 環

旗多様体 $X = G/B$ の交叉理論を組合せ論的に研究することは Schubert calculus の中心的なテーマである. 旗多様体の cohomology 環 $H^*(X, \mathbb{Q})$ が次のような W の余不変式代数としての表示を持つことは良く知られている.

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \cong \text{Sym} P_{\mathbb{Q}} / (f_1, \dots, f_r)$$

ここで, f_1, \dots, f_r は基本 W -不変式である. 同様に, K -環 $K(X)$ も, P の群環 $\mathbb{Z}\langle P \rangle = \bigoplus_{\lambda \in P} \mathbb{Z} \cdot e^\lambda$ を用いて

$$K(X) = \mathbb{Z}\langle P \rangle / (f - \epsilon(f) | f \in \mathbb{Z}\langle P \rangle^W)$$

と表示される. ここで, $\epsilon : \mathbb{Z}\langle P \rangle \rightarrow \mathbb{Z}$ は, $e^\lambda \mapsto 1$ で与えられる環準同型である.

$w \in W$ に対し, X の Schubert 部分多様体 X_w を, w の B^- -軌道の閉包として定める. Schubert 部分多様体に対応する dual class たち $\{[X_w]\}_{w \in W}$ は $H^*(X, \mathbb{Q})$ の線型基底を成し, 同様に Schubert 部分多様体の構造層が定める類たち $\{[\mathcal{O}_{X_w}]\}_{w \in W}$ も $K(X)$ の線型基底をなす.

Weyl 群の元で形式的に生成される加群 $\mathbb{Z}\langle W \rangle := \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} \cdot w$ を考える. $\alpha \in \Delta_+$ に対し, $\mathbb{Z}\langle W \rangle$ に作用する Bruhat 作用素 π_α を次のように定められる線型作用素として定義する.

$$\pi_\alpha w = \begin{cases} ws_\alpha, & \text{if } l(ws_\alpha) = l(w) + 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\alpha \in \Delta_-$ に対しては, $\pi_\alpha := -\pi_{-\alpha}$ と定める. このような作用素は A -型のとき [4], 一般の root 系に対しては [3] で考察されている.

$[X_w] \in H^*(X)$ や $[\mathcal{O}_{X_w}] \in K(X)$ を w と同一視することにより, Bruhat 作用素たちは $H^*(X, \mathbb{Q})$ や $K(X)$ に作用するものと考えてよい.

3.1. Cohomological case

Cohomology 環 $H^*(X)$ の構造定数に関しては, 次のような公式が知られている. 単純 root α_i に対応する基本 weight を ω_i とする.

Theorem 3.1.

$$[X_{s_i}][X_w] = \sum_{\beta \in \Delta_+, l(ws_\beta) = l(w) + 1} \omega_i(\beta^\vee)[X_{ws_\beta}]$$

実はこの公式にも alcove path の構造が潜んでいる。 $\lambda \in P$ が定める X 上の直線束を \mathcal{L}_λ とする。 λ -chain $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ を一つとると、上の公式は

$$c_1(\mathcal{L}_\lambda) \cdot [X_w] = (\pi_{\beta_1} + \dots + \pi_{\beta_l})[X_w]$$

と書けるからである。

Bazlov [2] は、 $H^*(X)$ を Nichols-Woronowicz 代数 \mathcal{B}_W の部分代数として実現する model を次のように構成した。 まず、 W -加群の準同型 $\mu : P_{\mathbb{Q}} \rightarrow M_W$ を $\mu(\lambda) := \sum_{\beta \in \Delta_+} \lambda(\beta^\vee)[\beta]$ と定める。 このとき、 $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ に対し、 $\mu(\lambda_1), \mu(\lambda_2)$ は \mathcal{B}_W の元として互いに可換になっていることが分かる。 従って、 μ は代数の準同型として $\mu : S = \text{Sym}P_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathcal{B}_W$ へと拡張される。 次の補題は、 \mathcal{B}_W 上の braided 微分作用素と差分商作用素との関係を示すものとして興味深い。

Lemma 3.1. ([2]) $f \in S$, $\alpha \in \Delta_+$ に対し、 $\mu(f)\overline{D}_{[\alpha]} = \mu(\partial_\alpha f)$. ここで、 $\partial_\alpha f = (f - s_\alpha f)/\alpha$.

この補題を用いて次の定理が証明される。

Theorem 3.2. ([2]) $\text{Ker } \mu$ は基本 W -不変式で生成される ideal. 即ち、 μ の像は $H^*(X)$ と同型。

A 型のとき、二次代数 \mathcal{E}_n を用いた $H^*(Fl_n)$ の model は Fomin-Kirillov [4] により与えられた。 上記 Bazlov の結果は \mathcal{B}_W を用いて一般の root 系 (実は有限 Coxeter 群でもよい) へ拡張したものになっている。

3.2. K -theoretic case

Lenart と Postnikov [7] は $K(X)$ における Chevalley 型の公式を次のように alcove path を用いた形で表した。 λ -chain $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ が与えられた時、 $\Pi^\lambda := (1 + \pi_{\beta_1}) \cdots (1 + \pi_{\beta_l})$ と定める。 この Π^λ は対応する λ -chain の取り方に依らない (既約でなくても同じ作用素が得られる)。 Cohomology 群の場合に現れた作用素 $\pi_{\beta_1} + \dots + \pi_{\beta_l}$ が加法的なものであるのに対し、 Π^λ の定義は乗法的で、 β_1, \dots, β_l の現れる順序が本質的に重要であることに注意。

Theorem 3.3. ([7]) $[\mathcal{L}_\lambda] \cdot [\mathcal{O}_{X_w}] = \Pi^\lambda[\mathcal{O}_{X_w}]$

この公式と類似の構造を利用して、 [6] では $K(X)$ の Nichols-Woronowicz model を構成した。 まず、 $\lambda \in P$ に対して λ -chain $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ をとり、 $\Xi^{[\lambda]} \in \mathcal{B}_W$ を

$$\Xi^{[\lambda]} = h_{\beta_1} \dots h_{\beta_l}$$

と定義する。 この $\Xi^{[\lambda]}$ が λ だけで決まり、 λ -chain の取り方に依らないことは Lemma 2.1 の Yang-Baxter 方程式から従う。 さらに、 $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ に対し、 $\Xi^{[\lambda_1]}\Xi^{[\lambda_2]} = \Xi^{[\lambda_1+\lambda_2]}$ であることも分かり、 代数の準同型 $\nu : \mathbb{Z}\langle P \rangle \rightarrow \mathcal{B}_W$ が $\nu(e^\lambda) := \Xi^{[\lambda]}$ で定まることになる。

Theorem 3.4. ([6]) $\text{Ker } \nu$ は $f - \epsilon(f)$, $f \in \mathbb{Z}\langle P \rangle^W$ で生成される。 即ち、 $\text{Im } \nu \cong K(X)$.

4. Affine nil-Hecke 代数と affine Grassmannian の homology

Definition 4.1. Affine nil-Coxeter 代数 \mathbb{A}_0 とは τ_0, \dots, τ_r で生成され, 次の関係式で定義される結合的代数である.

$$\tau_0^2 = \dots = \tau_r^2 = 0, \quad (\tau_i \tau_j)^{[m_{ij}/2]} \tau_i^{\nu_{ij}} = (\tau_j \tau_i)^{[m_{ij}/2]} \tau_j^{\nu_{ij}},$$

ここで, $\nu_{ij} := m_{ij} - 2[m_{ij}/2]$.

Definition 4.2. ([5]) Nil-Hecke 代数 \mathbb{A} とは, \mathbb{A}_0 と S の cross 積 $\mathbb{A}_0 \times S$ のことである. ここで, cross 関係式は

$$\tau_i f = \partial_{\alpha_i}(f) + s_i(f) \tau_i \quad f \in S, i = 1, \dots, r$$

で与えられる.

Affine Grassmannian $\widehat{\text{Gr}} := G(\mathbb{C}((t)))/G(\mathbb{C}[[t]])$ は極大 compact 部分群 $K \subset G$ の loop 群 ΩK と homotopy 同値であることが知られている. 極大 torus $T \subset B$ に関する T -同変 homology 群 $H_*^T(\widehat{\text{Gr}}) \cong H_*^T(\Omega K)$ には群演算

$$\Omega K \times \Omega K \rightarrow \Omega K$$

から誘導される積 (Pontryagin 積) が定まり, これにより結合代数の構造を持つ. この代数 $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ は可換代数であり, Pontryagin 環と呼ばれる. 以下, S を $H_T^*(pt)$ と同一視することにより, $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ を S -代数と見なすことにする. 対角埋め込み

$$\Omega K \rightarrow \Omega K \times \Omega K$$

により $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ には余積が定まっていて, Hopf 代数としての構造も入っている.

Proposition 4.1. ([14]) T -同変 homology $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ は \mathbb{A} における S の centralizer $Z_{\mathbb{A}}(S)$ と Hopf 代数として同型.

\mathcal{B}_{aff} と S との cross 積 $\mathcal{B}_{\text{aff}}(S) = \mathcal{B}_{\text{aff}} \times S$ を cross 関係式

$$[\alpha, k]f = \partial_{\alpha}f + s_{\alpha,0}(f)[\alpha, k], \quad [\alpha, k] \in V_{\text{aff}}, f \in S$$

で定義する. 微分作用素 $\overline{D}_{[\alpha,k]}$ も, 交換関係式 $f \cdot \overline{D}_{[\alpha,k]} = \overline{D}_{[\alpha,k]} \cdot s_{\alpha,k}(f)$, $f \in S$ により $\mathcal{B}_{\text{aff}}(S)$ 上に作用するものとして拡張できる.

以下, [12] での結果を紹介する.

Proposition 4.2. $\tau_0 \mapsto [\alpha_0, -1]$, $\tau_i \mapsto [\alpha_i, 0]$, $i = 1, \dots, r$, 及び, $f \mapsto f$, $f \in S$ で定められる代数の準同型 $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{aff}}(S)$ が存在.

Lemma 2.2 から次の主張が示される.

Theorem 4.1. 代数準同型 $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{aff}}(S)$ は単射.

さらに Proposition 4.1 より, Pontryagin 環 $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ は nil-Hecke 代数の部分代数だから, 次の系を得る.

Corollary 4.1. T -同変 Pontryagin 環 $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ は $\mathcal{B}_{\text{aff}}(S)$ の部分代数.

また, non-equivariant limit を取れば,

Corollary 4.2. Pontryagin 環 $H_*(\widehat{\text{Gr}})$ は \mathcal{B}_{aff} の部分代数.

Remark 4.1. 旗多様体の T -同変量子 cohomology 環 $QH_T^*(X)$ は, 対応する affine Grassmannian の Pontryagin 環 $H_*^T(\widehat{\text{Gr}})$ と同型になることが Peterson [14] により主張された. ([13] も参照されたい.) この Peterson 同型を Nichols-Woronowicz model の言葉で定式化し, 「量子化写像」 ([11]) を braided 微分作用素を用いて構成することも可能である. それにより, [4] で与えられた二次代数 \mathcal{E}_n^q を用いた $QH^*(Fl_n)$ の model の構成の根拠についても説明を与えることができるが, 詳しくは [12] を参照されたい.

参考文献

- [1] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf algebras*, New directions in Hopf algebras, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **43**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, 1-68.
- [2] Y. Bazlov, *Nichols-Woronowicz algebra model for Schubert calculus on Coxeter groups*, J. Algebra, **297** (2006), 372-399.
- [3] F. Brenti, S. Fomin and A. Postnikov, *Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups*, Int. Math. Res. Notices, **1999**, no. 8, 419-441.
- [4] S. Fomin and A. N. Kirillov, *Quadratic algebras, Dunkl elements and Schubert calculus*, Advances in Geometry, (J.-L. Brylinski, R. Brylinski, V. Nistor, B. Tsygan, and P. Xu, eds.) Progress in Math., **172**, Birkhäuser, 1995, 147-182.
- [5] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G* , Adv. in Math. **62** (1986), 187-237.
- [6] C. Lenart and T. Maeno, *Alcove path and Nichols-Woronowicz model of the equivariant K -theory of generalized flag varieties*, Int. Math. Res. Notices **2006**, Art. ID 78356, 14pp.
- [7] C. Lenart and A. Postnikov, *Affine Weyl groups in K -theory and representation theory*, Int. Math. Res. Notices **2007**, no. 12, Art. ID rnm038, 65pp.
- [8] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math., **142** (1995), 499-525.
- [9] S. Majid, *Free braided differential calculus, braided binomial theorem, and the braided exponential map*, J. Math. Phys., **34** (1993), 4843-4856.
- [10] W. D. Nichols, *Bialgebras of type one*, Comm. Alg. **6** (1978), 1521 - 1552.
- [11] A. N. Kirillov and T. Maeno, *A note on quantization operators on Nichols algebra model for Schubert calculus on Weyl groups*, Lett. Math. Phys., **72** (2005). 233-241.
- [12] A. N. Kirillov and T. Maeno, *Affine nil-Hecke algebras and braided differential structure on affine Weyl groups*, preprint, math.QA/1008.3593
- [13] T. Lam and M. Shimozono, *Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian*, Acta Math., **24** (2010), 49-90.
- [14] D. Peterson, Lecture notes at MIT, 1997.

- [15] A. Ram and M. Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math. **226** (2011), 309-331.
- [16] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys., **122** (1989), 125-170.