日本数学会

2012年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2012年9月

於　九州大学

日本数学会

2012年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2012年9月

於　九州大学

無限可積分系

9月18日(火)　第VII会場

9:30〜11:45

				(分)	頁
1	金子和雄 *	(四日市大関孝和数学研)	Special solutions to the four dimensional Painlevé type equations $21, 21, 111, 111$ and $31, 22, 22, 1111$	(15)	1
2	西岡斉治	(山形大理)♯	Poincaré の新しい関数の有理関数による近似	(15)	3
3	佐々木良勝	(広島大理)♯	Third-degree superintegrable system solved by the sixth Painlevé transcendents	(15)	5
4	名古屋創	(神戸大理)♯	Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations by fractional calculus	(15)	7
5	名古屋創 山田泰彦	(神戸大理)♯ (神戸大理)	Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations	(15)	9
6	長谷川浩司	(東北大理)♯	量子差分パンルベ VI 型方程式の Lax 形式について	(20)	11
7	黒木 玄	(東北大理)♯	A 型の量子 Weyl 群双有理作用の Sato–Wilson 表示	(30)	13

14:15〜14:45

				(分)	頁
8	E. Langmann ♯ 竹村剛一	(Roy. Inst. of Tech. Sweden) (中大理工)	Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems	(15)	15
9	野海正俊 白石潤一	(神戸大理) (東大数理)	Ruijsenaars–Macdonald q 差分作用素の双スペクトル問題	(15)	17

15:00〜16:00　特別講演

				(分)	頁
	白石潤一	(東大数理)♯	Vertex operators, Nekrasov partition functions and Macdonald polynomials		19

9月19日(水)　第VII会場

10:30〜11:50

				(分)	頁
10	高木太一郎	(防衛大)♯	トロピカル周期戸田格子における可換な時間発展	(15)	39
11	国場敦夫 S. Sergeev	(東大総合文化)♯ (Univ. of Canberra)	Tetrahedron equation and quantum R matrices for spin representations	(10)	41
12	小寺諒介	(京大数理研)*	Self-extensions and prime factorizations for simple $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$-modules	(15)	43
13	村上 順	(早大理工)♯	Quantum $6j$-symbols for non-integral highest weight representations of $\mathcal{U}_q(sl_2)$ at root of unity	(15)	45
14	石井基裕	(筑波大数理物質)♯	一般 Kac–Moody Lie 環の表現のパス模型	(15)	47

13:30〜14:30　特別講演

				(分)	頁
	木村嘉之	(阪市大数学研)♯	箙多様体と量子クラスター代数		49

Infinite Analysis

September 18th (Tue) Conference Room VII

9:30–11:45

			(min)	page
1	Kazuo Kaneko (Yokkaichi Univ.) *	Special solutions to the four dimensional Painlevé type equations $21, 21, 111, 111$ and $31, 22, 22, 1111$	(15)	1
2	Seiji Nishioka (Yamagata Univ.) ♯	Approximation of Poincaré's new functions by rational functions	(15)	3
3	Yoshikatsu Sasaki (Hiroshima Univ.) ♯	Third-degree superintegrable system solved by the sixth Painlevé transcendents	(15)	5
4	Hajime Nagoya (Kobe Univ.) ♯	Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations by fractional calculus	(15)	7
5	Hajime Nagoya (Kobe Univ.) ♯ Yasuhiko Yamada (Kobe Univ.)	Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations	(15)	9
6	Koji Hasegawa (Tohoku Univ.) ♯	Lax form for quantum discrete Painlevé VI equation	(20)	11
7	Gen Kuroki (Tohoku Univ.) ♯	Sato–Wilson formalisms for quantum birational Weyl group actions of type A	(30)	13

14:15–14:45

8	Edwin Langmann ♯ (Roy. Inst. of Tech. Sweden) Kouichi Takemura (Chuo Univ.)	Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems	(15)	15
9	Masatoshi Noumi (Kobe Univ.) Jun'ichi Shiraishi (Univ. of Tokyo)	Bispectral problem for the Ruijsenaars–Macdonald q-difference operators	(15)	17

15:00–16:00 Talk invited by Infinite Analysis Special Session

	Junichi Shiraishi (Univ. of Tokyo) ♯	Vertex operators, Nekrasov partition functions and Macdonald polynomials		19

September 19th (Wed) Conference Room VII

10:30–11:50

10	Taichiro Takagi ♯ (Nat. Defense Acad. of Japan)	Commuting time evolutions in the tropical periodic Toda lattice	(15)	39
11	Atsuo Kuniba (Univ. of Tokyo) ♯ Sergey Sergeev (Univ. of Canberra)	Tetrahedron equation and quantum R matrices for spin representations	(10)	41
12	Ryosuke Kodera (Kyoto Univ.) *	Self-extensions and prime factorizations for simple $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$-modules	(15)	43
13	Jun Murakami (Waseda Univ.) ♯	Quantum $6j$-symbols for non-integral highest weight representations of $\mathcal{U}_q(sl_2)$ at root of unity	(15)	45
14	Motohiro Ishii (Univ. of Tsukuba) ♯	Path model for representations of generalized Kac–Moody algebras	(15)	47

13:30–14:30 Talk invited by Infinite Analysis Special Session

Yoshiyuki Kimura (Osaka City Univ.)$^\sharp$ Quiver varieties and quantum cluster algebras · 49

Special solutions to the four dimensional Painlevé type equations 21,21,111,111 and 31,22,22,1111

Kazuo Kaneko (Seki kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi Univ.)

４次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 および 31,22,22,1111 は, ともに第 6 Painlevé 方程式の拡張として導かれた. 前者は藤, 鈴木により Drinfel'd-Sokolov 階層からの相似簡約から発見され [1], 津田により UC 階層から導かれた [2]. 後者は笹野により第 6 Painlevé 方程式の初期値空間の高階化から得られた [3]. また両者とも坂井により Fuchs 型方程式のモノドロミ保存変形からも導かれている [4]. 坂井による行列型表示式によれば, 前者は 3 行 3 列型, 後者は 4 行 4 列型で表され, スペクトル表示も異なるが, これらから導かれた Hamiltonian はよく似ている.

本講演では, 特異点近傍における有理型解を比較することにより, 得られた両者の違いについて報告する.

1) 線型方程式の Riemann scheme はそれぞれ次のとおりであり,

$$[21,21,111,111] \qquad\qquad [31,22,22,1111]$$

$$P\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1 \\ \theta^0_1 & 0 & 0 & \kappa_2 \\ \theta^0_2 & \theta^1 & \theta^t & \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad P\begin{pmatrix} x=0 & x=1 & x=t & x=\infty \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \theta^1 & \theta^t & \kappa_3 \\ \theta^0 & \theta^1 & \theta^t & \kappa_4 \end{pmatrix},$$

$$\theta^0_1+\theta^0_2+\theta^1+\theta^t+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=0, \qquad \theta^0+2\theta^1+2\theta^t+\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4=0,$$

2) Hamiltonian は第 6Painlevé 方程式の Hamiltonian H_{VI} を用いて与えられる.

$$(1)\quad t(t-1)H\begin{bmatrix} 21,21,111 \\ 111 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta^0_1,\theta^0_2,\theta^1,\theta^t & ;t; & q_1,q_2 \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 & & p_1,p_2 \end{pmatrix} = t(t-1)H_{VI}\begin{pmatrix} \alpha,\beta,\gamma & ;t;q_1,p_1 \\ \delta,\ \varepsilon & \end{pmatrix}$$

$$+t(t-1)H_{VI}\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma} & ;t;q_2,p_2 \\ \widetilde{\delta},\ \widetilde{\varepsilon} & \end{pmatrix} + (q_1-t)(q_2-1)\{(q_1p_1-\varepsilon)p_2+(q_2p_2-\widetilde{\varepsilon})p_1\}+g(t),$$

$$\alpha=\theta^0_1-\theta^0_2, \quad \beta=\theta^1+\kappa_3, \quad \gamma=\theta^t+\kappa_3, \quad \delta=\theta^0_2+\kappa_1-\kappa_3, \quad \varepsilon=\theta^0_2+\kappa_2,$$

$$\widetilde{\alpha}=\theta^0_1-\theta^0_2-\kappa_2, \quad \widetilde{\beta}=\theta^1+\theta^0_2+\kappa_2, \quad \widetilde{\gamma}=\theta^t+\theta^0_2+\kappa_2, \quad \widetilde{\delta}=\kappa_1, \quad \widetilde{\varepsilon}=\kappa_3,$$

$$(2)\quad t(t-1)H\begin{bmatrix} 31,\ 22,\ 22 \\ 1111 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta^0,\theta^1,\theta^t, & ;t; & q_1,q_2 \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4 & & p_1,p_2 \end{pmatrix} = t(t-1)H_{VI}\begin{pmatrix} \alpha',\beta',\gamma' & ;t;q_1,p_1 \\ \delta',\ \varepsilon' & \end{pmatrix}$$

$$+t(t-1)H_{VI}\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}',\widetilde{\beta}',\widetilde{\gamma}' & ;t;q_2,p_2 \\ \widetilde{\delta}',\ \widetilde{\varepsilon}' & \end{pmatrix} + 2(q_1-t)p_1q_2\{(q_2-1)p_2-\widetilde{\varepsilon}'\}+g(t),$$

$$\alpha'=-\theta^1-\theta^t-\kappa_1-\kappa_4, \quad \beta'=-\theta^0-\theta^t-\kappa_1-\kappa_4, \quad \gamma'=-\theta^1-\kappa_2-\kappa_3,$$

$$\delta'=-\theta^1-\theta^t+\kappa_1-\kappa_2, \quad \varepsilon'=\theta^1+\theta^t+\kappa_2+\kappa_4,$$

$$\widetilde{\alpha}'=\theta^0, \quad \widetilde{\beta}'=\theta^1-\theta^0-\kappa_1+\kappa_2-\kappa_3+\kappa_4, \quad \widetilde{\gamma}'=\theta^t,$$

$$\widetilde{\delta}'=-\theta^1-\theta^t+\kappa_1-\kappa_2-\kappa_4, \quad \widetilde{\varepsilon}'=\kappa_3.$$

ここに H_{VI} は以下で与えられる：

$$t(t-1)H_{VI}\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,\,e \end{matrix};t\,;q,p\right)=q(q-1)(q-t)p^2+\{(a{+}1)q(q-1)$$
$$+(d{-}e{-}1)q(q-t)+c(q{-}1)(q{-}t)\}p+e(b+e)q-t(c+d)c-ac,$$
$$a+b+c+d+e=0.$$

4 次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 に対しては, 過去 2 回の学会講演 [5] の内容を補完することによりつぎの定理を得る.

定理 4 次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 には, 含まれるパラメータが一般の値をとるとき、特異点 $t=0$ の近傍につぎの 12 個の有理型解 (0-1), (0-2), $\cdots$, (0-12) が存在する.

$$q_1=\ \sum_{j=0}^{\infty}a_jt^j,\ p_1=\ \sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{a}_jt^j,\quad q_2=\sum_{j=0}^{\infty}b_jt^j,\ p_2=\sum_{j=0}^{\infty}\widetilde{b}_jt^j,$$

$$(0\text{-}1):a_0=\ 0,\ a_1=\frac{\theta^t}{\theta^t{+}\theta_1^0{-}\theta_2^0},\cdots,$$
$$\widetilde{a}_0=\ \frac{(\theta_2^0{+}\kappa_2)(\theta_2^0{+}\theta^1{+}\kappa_2{+}\kappa_3)(\theta^t{+}\theta_1^0{+}1{+}\kappa_3)}{(\theta^t{+}\theta_1^0{+}1)(\theta^t{+}\theta_1^0{-}\theta_2^0{+}1)},\ \cdots,$$
$$b_0=\ 0,\ b_1=\frac{\theta^t(\kappa_2{+}\theta^t{+}\theta_1^0)}{(\theta^t{+}\theta_1^0)(\theta^t{+}\theta_1^0{-}\theta_2^0)},\ \widetilde{b}_0=\frac{\kappa_3(\theta_2^0{+}\theta^1{+}\kappa_2{+}\kappa_3)}{(\theta^t{+}\theta_1^0{+}1)},\ \cdots,$$
$$(0\text{-}2):a_0=\ 0,\quad a_1=\frac{\theta^t{+}\kappa_1{-}1}{\theta_1^0{-}\theta_2^0{+}\theta^t{+}\kappa_1{-}1},\cdots,$$
$$\widetilde{a}_0=\ \frac{(\kappa_2{+}\theta_2^0)(\kappa_2{+}\theta_2^0{+}\theta^1)(\kappa_2{+}\kappa_3{+}\theta_2^0{+}\theta^1)}{(\kappa_1{+}\theta_1^0{-}\theta_2^0{+}\theta^t)(1{-}\kappa_1{+}\kappa_2{+}\kappa_3{+}\theta_2^0{+}\theta^1)},\cdots,$$
$$b_0=\ \frac{(1{-}\kappa_1{+}\kappa_2{+}\kappa_3{+}\theta_2^0{+}\theta^1)}{(\kappa_2{+}\theta_2^0{+}\theta^1)},\ \tilde{b}_0=\frac{(\kappa_2{+}\theta_2^0+\theta^1)(\kappa_2{+}\kappa_3{+}\theta_2^0{+}\theta^1)}{(1{-}\kappa_1{+}\kappa_2{+}\kappa_3{+}\theta_2^0{+}\theta^1)},\cdots,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$(0\text{-}12):q_1=\ \frac{a_{-n}}{t^n}+\sum_{j=-n+1}^{\infty}a_jt^j,p_1=\sum_{j=n}^{\infty}\widetilde{a}_jt^j,q_2=\frac{b_{-n}}{t^n}+\sum_{j=-n+1}^{\infty}b_jt^j,p_2=\sum_{j=n}^{\infty}\widetilde{b}_jt^j,$$
$$\widetilde{a}_n=\ \frac{\varepsilon a_{-n}{-}\widetilde{\beta}b_{-n}}{a_{-n}(a_{-n}{-}b_{-n})},\ \widetilde{b}_n=\frac{\beta a_{-n}{-}\widetilde{\varepsilon}b_{-n}}{b_{-n}(a_{-n}{-}b_{-n})},\quad n\in\mathbb{N},$$
$$\forall a_{-n},b_{-n}\in\{\mathbb{C}^{\times}|a_{-n}{\neq}b_{-n}\}.$$

31,22,22,1111 に対しても同様の計算により, 特異点に近傍における有理型解の分類が可能である.

Reference

[1] K. Fuji and T. Suzuki, Funkcial.Ekvac.**53** (2010), 143–167,

[2] T. Tsuda, `arXiv:1007.3450`.

[3] Y. Sasano, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B5** (2008), 137–152,

[4] H. Sakai, Graduate School of Math. Sci. Univ. of Tokyo, preprint **17** (2010).

[5] 日本数学会 2011 年度秋季総合学会 (信州大), 2012 年度年会 (東京理科大).

Poincaréの新しい関数の有理関数による近似

西岡　斉治　(山形大学)*

次の形の乗法的差分方程式（q差分方程式）を扱う．

$$\begin{cases} \varphi_1(mx) = R_1(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)), \\ \varphi_2(mx) = R_2(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)), \\ \qquad \vdots \\ \varphi_n(mx) = R_n(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)). \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$R_1, R_2, \dots, R_n \in \mathbb{C}(X_1, X_2, \dots, X_n)$で，$m \in \mathbb{C}$は$|m| > 1$をみたすとする．Poincaréは論文[1]で，この方程式に一定の条件を課して有理型関数解を構成し，それらが新しいクラスを成すと主張した．実際，いくつかのq-Painlevé方程式が若干の変形によりPoincaréの条件をみたすことが確認できる．この講演ではPoincaréの解を有理関数で近似する手法を紹介する．

まず，指数関数を使って着想を説明する．指数関数$\varphi(x) = \mathrm{e}^x$は次の方程式をみたす．

$$\varphi(2x) = \varphi(x)^2$$

これを，

$$\varphi(x) = R(\varphi(x/2)), \quad R(X) = X^2$$

と書き換える．この式の形を使って，

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(x) &= 1 + x, \\ \varphi^{(1)}(x) &= R(\varphi^{(0)}(x/2)) = (1 + x/2)^2, \\ \varphi^{(2)}(x) &= R(\varphi^{(1)}(x/2)) = (1 + x/2^2)^{2^2}, \\ \varphi^{(3)}(x) &= R(\varphi^{(2)}(x/2)) = (1 + x/2^3)^{2^3}, \\ &\vdots \\ \varphi^{(k)}(x) &= R(\varphi^{(k-1)}(x/2)) = (1 + x/2^k)^{2^k}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

と計算すると，$\{\varphi^{(k)}(x)\}_k$は$\varphi(x) = \mathrm{e}^x$に収束することがわかる．方程式の形を表す$R(X)$と$\mathrm{e}^x$の1次の近似多項式$\varphi^{(0)}(x)$から，$\mathrm{e}^x$を近似する多項式関数列が得られた．

一般に，(1)の形の乗法的差分方程式を考えよう．Poincaréは次の二つの仮定の下で有理型関数解を構成した．まず，任意のiに対して$R_i(0, 0, \dots, 0) = 0$であること．そ

本研究は科研費(課題番号:20 · 4941, 23 · 5166)の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 33E30, 41A20, 39A13
キーワード：Poincaré's multiplication formula, double angle formula, q-difference equation, meromorphic function, approximation by rational functions

* 〒990-8560 山形市小白川町 1-4-12　山形大学 理学部 数理科学科
e-mail: `nishioka@sci.kj.yamagata-u.ac.jp`

して，

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta_{ik} = \frac{\partial R_i}{\partial X_k}(0, 0, \ldots, 0)$$

とし，$F(s) = \det(B - sI_n)$ とおくと，$F(m) = 0$ かつ $F(m^p) \neq 0$ $(p = 2, 3, 4, \ldots)$ であること．解 $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \neq 0$, $\varphi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ik} x^k$ がPoincaréの解である．

指数関数の例と同様に，Poincaréの解に対して次のように近似関数列を作る．

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(0)} &= \sum_{k=1}^{p_1} \alpha_{ik} x^k, \\ \varphi_i^{(1)} &= R_i(\varphi_1^{(0)}(x/m), \varphi_2^{(0)}(x/m), \ldots, \varphi_n^{(0)}(x/m)), \\ &\vdots \\ \varphi_i^{(k)} &= R_i(\varphi_1^{(k-1)}(x/m), \varphi_2^{(k-1)}(x/m), \ldots, \varphi_n^{(k-1)}(x/m)), \\ &\vdots \end{aligned}$$

次の定理を得た．

Theorem 1 p_1 が $|m| \leq \|B\| < |m|^{p_1}$ をみたすとする．ここで $\|\cdot\|$ は l_∞ ベクトルノルムによって誘導される行列ノルムとする．

1. $\varphi_i^{(j)}$ たちは有理関数である．
2. 任意の $1 \leq i \leq n$, $r > 0$ に対して，$x_1, x_2, \ldots, x_s \in \overline{D}(0; r)$ が存在し，$\{\varphi_i^{(j)}\}_j$ は $\overline{D}(0; r) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ で φ_i に局所一様収束する．ここで $\overline{D}(0; r)$ は原点を中心とする半径 r の閉円板．

指数関数の例では R はPoincaréの条件をみたしていないが，$\varphi(x) = \mathrm{e}^x - 1$, $R(X) = (1 + X)^2 - 1$ と変形するとPoincaréの条件をみたす．さらに $p_1 \geq 2$ のとき定理の条件をみたす．このように，適当な変形を施すと，より一般の乗法的差分方程式の級数解にこの手法が適用できる場合がある．q 差分方程式に関しては，$|q| < 1$ であっても双有理的なら $m = 1/q$ として適用できる場合があり，特に線形 q 差分方程式や q-Painlevé 方程式は双有理的である．

参考文献

[1] H. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes*, Journal de mathématiques pures et appliquées 4$^{\mathrm{e}}$ série, tome 6 (1890), 313–366.

Third-degree superintegrable system solved by the sixth Painlevé transcendents

Yoshikatsu SASAKI* (jointwork with R. CONTE)

A systematic search by P. Winternitz and his coworkers for integrable and superintegrable systems with third degree integrals of motion in both classical and quantum mechanics was initiated in [1].

Consider the 2-dim. quantum system which has 3 conserved quantities:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y),\ \ X = L^2 + 2S(\theta),$$
$$Y = D_0L^3 + C_1\{L^2, p_x\} + \{g_1(x,y), p_x\} + \{g_2(x,y), p_y\},$$

where $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, L = xp_y - yp_x$, and $V(x,y) = R(r) + S(\theta)/r^2$ with functions $R(r), S(\theta)$.

In [2], Winternitz et al. obtained that if $D_0 = 0, C_1 = 1, R(r) = 0$, then the system is superintegrable with $S(\theta) = T'$, $g_1 = \beta_1 + (2 + \sin^2\theta)T', g_2 = \beta_2 - (T + T'\cos\theta\sin\theta)$and $T = T(\theta)$ is a solution to the equation

$$T^{(4)}\sin\theta + 4T^{(3)}\cos\theta - 6T''\sin\theta - 4T'\cos\theta - 4T''(3T'\sin\theta + T\cos\theta)$$
$$-8T'(2T'\cos\theta - T\sin\theta) - 4(\beta_1\sin\theta - \beta_2\cos\theta) - 8(\beta_1\cos\theta + \beta_2\sin\theta) = 0,$$

which is reduced to F-VII [3] with one of two parameters vanished by the change of variables $\tan\theta = 2\sqrt{t(1-t)}/(1-2t)$, $T = \beta_2 + \{8\hbar^2W + (\hbar^2 + 4\beta_1)(1-2t)\}/8\sqrt{t(1-t)}$. F-VII is an equation of 2nd order obtained by elimination of two of four parameters of SD-I.a which is the first canonical subcase of SD-I [4], and solved by the sixth Painlevé equation $P_{\rm VI}$.

$P_{\rm VI}$ has the symmetry group S generated by 3 transformations T_1 (resp. T_2, T_3) which exchange the monodromy exponents θ_0 and θ_1 (resp. θ_t, θ_∞) [5]. Because the solution given in [2] restricts the monodromy exponents of $P_{\rm VI}$ on $\theta_0 = \theta_1$, if we can lift up the action of T_2 or T_3 to the superintegrable system, then we can throw away the restriction and obtain the full $P_{\rm VI}$.

Theorem. The action of T_3 can be lift up to the superintegrable system.

References

[1] Gravel S and Winternitz P, *J. Math. Phys.* **43**(2002), 5902.
[2] Tremblay F and Winternitz P, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**(2010), 175206.
[3] Cosgrove C M, *Stud. Appl. Math.* **116**(2006), 321-413.
[4] Cosgrove C M and Scoufis G, *Stud. Appl. Math.* **88**(1993), 25-87.
[5] Iwasaki K et al., *From Gauss to Painlevé* Vieweg, 1991.

---

[*] Hiroshima-University, 1-3-1 Kagamiyama Higashi-Hiroshima 739-8526 JAPAN e-mail: sasakiyo@hiroshima-u.ac.jp

4

Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations by fractional calculus

名古屋　創　(神戸大学)*

Painlevé 方程式は Hamiltonian 系として書くことができ, Bäcklund 変換として, アフィン Weyl 群の作用を持つことは良く知られている. 例えば, $\mathrm{P_{II}}(\alpha)$ は Hamiltonian

$$H_{\mathrm{II}}(q,p,t,\alpha)=\frac{p^2}{2}-\left(q^2+\frac{t}{2}\right)p-\alpha q$$

を用いて,

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H_{\mathrm{II}}}{\partial p},\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H_{\mathrm{II}}}{\partial q}$$

と書ける. $\mathrm{P_{II}}(\alpha)$ の解 (q,p) に対して, 双有理正準変換 s,π を

$$\begin{aligned}s(q,p)&=(q+\frac{\alpha}{p},p),\\ \pi(q,p)&=(-q,-p+2q^2+t)\end{aligned}$$

で定める. $s(q,p)$ は $\mathrm{P_{II}}(-\alpha)$, $\pi(q,p)$ は $\mathrm{P_{II}}(1-\alpha)$ の解である.

さて, Painlevé 方程式は Hamiltonian 系であるから, その正準量子化は自然に考えられる. 例えば, $\mathrm{P_{II}}$ の一つの正準量子化は次の Schrödinger 方程式

$$\begin{aligned}\kappa\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x)=&H_{\mathrm{II}}\left(x,\frac{\partial}{\partial x},t,\alpha\right)\Psi(t,x)\\ =&\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\alpha x\right)\Psi(t,x)\end{aligned}\tag{1}$$

で与えられる. 文献 [1], [2], [3] において, アフィン Weyl 群の作用を持つ Painlevé 方程式の正準量子化 (Heisenberg 表示) が代数的に構成された.

本講演では, 文献 [1], [2], [3] で構成されていたアフィン Weyl 群対称性を量子 Painlevé 方程式の Schrödinger 表示 (量子 $\mathrm{P_{II}}$ の場合は (1)) に実現することによって, 無限個の超幾何型積分表示解が得られることについて述べる. 以下では, 量子 $\mathrm{P_{II}}$ の場合に, 主結果を述べる.

本研究は科研費 (課題番号: 22・2255) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17B80, 33C70, 34M55, 81R12, 81T40
キーワード：affine Weyl groups, quantum Painlevé equations, Knizhnik-Zamolodchikov equations, hypergeometric integrals

*Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science. 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学 大学院理学研究科
e-mail: `nagoya@math.kobe-u.ac.jp`
web: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/nagoya/`

定義 1. $\Psi(t,x)$ を量子 $\mathrm{P_{II}}(\alpha)$ の解とする. このとき, 解の変換 $R_s(\alpha)$, R_π を

$$R_s(\alpha)\,(\Psi(t,x)) = \int_\Delta (x-u)^{\alpha-1}\Psi(t,u)du,$$
$$R_\pi\,(\Psi(t,x)) = \exp\left(\frac{2}{3}x^3 + xt\right)\Psi(t,-x)$$

で定義する. 積分路 Δ は適切に選ぶ. □

上の積分変換は Euler 変換 (あるいは Riemann-Liouville 積分) と呼ばれている.

命題 2. $\Psi(t,x)$ を量子 $\mathrm{P_{II}}(\alpha)$ の解とする. このとき, $R_s(\alpha)\Psi(t,x)$ は量子 $\mathrm{P_{II}}(-\alpha)$, $R_\pi\,(\Psi(t,x))$ は量子 $\mathrm{P_{II}}(-\kappa-\alpha)$ の解である. □

量子 $\mathrm{P_{II}}(-1)$ の解 1 に $R_s(\alpha)R_\pi$ を繰り返し作用させることによって, 次の定理を得る.

定理 3. n を自然数とする. 次の積分表示

$$\int_\Delta (x-u_n)^{-n\kappa}\prod_{i=1}^{n-1}(u_{i+1}+u_i)^{-i\kappa}\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{2}{3}u_i^3 + u_i t\right)du_1\wedge\cdots\wedge du_n$$

は量子 $\mathrm{P_{II}}(-1+n\kappa)$ の解である. ただし Δ はツイストサイクル.

参考文献

[1] H. Nagoya, Quantum Painlevé Systems of Type $A_\ell^{(1)}$, *Int. J. Math.* **15** (2004), 1007–1031

[2] M. Jimbo, H. Nagoya and J. Sun, Remarks on the confuent KZ equation for $\mathfrak{sl}_2$ and quantum Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008)

[3] H. Nagoya, A quantization of the sixth Painlevé equation, Noncommutativity and singularities, 291–298, *Adv. Stud. Pure Math.* **55** *Math. Soc. Japan, Tokyo* (2009)

[4] H. Nagoya, Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations by fractional calculus, Lett. Math. Phys. (2012)

5

Symmetries of quantum Lax equations for the Painlevé equations

名古屋　創　(神戸大理)[*1]
山田　泰彦　(神戸大理)[*2]

Painlevé 方程式が線形微分方程式のモノドロミー保存変形を記述する方程式であることはよく知られている. 例えば、2 階単独線形微分方程式

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\left(2x^2+t+\frac{1}{x-q}\right)\frac{\partial}{\partial x}-2(\alpha+1)x-2H_{\mathrm{II}}(q,p,t,\alpha+1)+\frac{p}{(x-q)}\right)y(x)=0$$

のモノドロミー保存変形を記述する方程式は $\mathrm{P_{II}}(\alpha+1)$ である. ここで, $\mathrm{P_{II}}$ の Hamiltonian は

$$H_{\mathrm{II}}(q,p,t,\alpha)=\frac{p^2}{2}-\left(q^2+\frac{t}{2}\right)p-\alpha q$$

で定まるものとする. 量子 $\mathrm{P_{II}}$ の Hamiltonian を $H_{\mathrm{II}}(q,p,t,\alpha)$ の正準量子化で与える:

$$H_{\mathrm{II}}\left(x,\frac{\partial}{\partial x},t,\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial x}-\alpha x.$$

量子 $\mathrm{P_{II}}$ の Hamiltonian を用いると, 上記の 2 階単独線形微分方程式は

$$\left(H_{\mathrm{II}}\left(x,\frac{\partial}{\partial x},t,\alpha\right)-H_{\mathrm{II}}(q,p,t,\alpha+1)-\frac{1}{2(x-q)}\left(\frac{\partial}{\partial x}-p\right)\right)y(x)=0$$

と書き換えられる.

本講演では, Painlevé 方程式に対する Lax 方程式の量子化を導入し, 量子 Lax 方程式の対称性について述べる. 時間があれば, 解についても述べたい. 以下では, $\mathrm{P_{II}}$ の場合に主結果を述べる.

P_{II} に対する量子 Lax 作用素を次で定める.

$$\begin{aligned}L_{\mathrm{II}}(\alpha)=&H^x_{\mathrm{II}}(\alpha_0,\alpha_1)-H^q_{\mathrm{II}}(\alpha_0+\kappa,\alpha_1+\kappa)-\frac{\kappa}{2(x-q)}\left(\epsilon_1\frac{\partial}{\partial x}-\epsilon_2\frac{\partial}{\partial q}\right),\\ B_{\mathrm{II}}(\alpha)=&\epsilon_2H^x_{\mathrm{II}}(\alpha_0,\alpha_1)-\epsilon_1H^q_{\mathrm{II}}(\alpha_0+\kappa,\alpha_1+\kappa)-\kappa\epsilon_1\epsilon_2\frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}&H^x_{\mathrm{II}}(\alpha_0,\alpha_1)=H_{\mathrm{II}}\left(x,\epsilon_1\frac{\partial}{\partial x},t,\alpha_1\right),\quad H^q_{\mathrm{II}}(\alpha_0+\kappa,\alpha_1+\kappa)=H_{\mathrm{II}}\left(q,\epsilon_2\frac{\partial}{\partial q},t,\alpha_1+\kappa\right),\\ &\alpha_0=-\alpha_1-\kappa,\quad \kappa=\epsilon_1-\epsilon_2.\end{aligned}$$

本研究は科研費 (課題番号: 22・2255, 21340036) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 17B80, 33C70, 34M55, 81R12, 81T40
キーワード：affine Weyl groups, quantum Lax equations, Painlevé equations

[*1] Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science. 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学 大学院理学研究科
e-mail: `nagoya@math.kobe-u.ac.jp`
web: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/nagoya/`
[*2] e-mail: `yamaday@math.kobe-u.ac.jp`

これらの量子 Lax 作用素は共形場理論から導きだすこともできる．古典極限を $\epsilon_2 \to 0$, $\epsilon_2\partial/\partial q \to p$ としてとれば，量子 Lax 方程式から Painlevé 方程式の Lax 方程式が得られる．

$\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_q$ を x, q に関する Laplace 変換とする．変換 $R^x_{s_1}(\alpha_1), R_\pi$ を次で定める．

$$R^x_{s_1}(\alpha_1) = \mathcal{L}_x^{-1} \circ \mathrm{Ad}(x^{-\frac{\alpha_1}{\epsilon_1}}) \circ \mathcal{L}_x,$$
$$R_\pi = (x \mapsto -x, q \mapsto -q) \circ \mathrm{Ad}\left(\exp\left(\left(-\frac{2}{3}x^3 - xt\right)\frac{1}{\epsilon_1}\right)\right) \circ \mathrm{Ad}\left(\exp\left(\left(-\frac{2}{3}q^3 - qt\right)\frac{1}{\epsilon_2}\right)\right).$$

変換 $R^q_{s_1}(\alpha_1)$ を $R^x_{s_1}(\alpha_1)$ において，x, ϵ_1 を q, ϵ_2 で置き換えたものとして定める．

平行移動 $T_{\pi s_1}$ と Schlesinger 変換 S を次で定義する．

$$T_{\pi s_1} = R^x_{s_1}(-\alpha_1 - \kappa) R_\pi R^q_{s_1}(\alpha_1 + \kappa),$$
$$S = \mathrm{Ad}(D(\alpha_1)^{-1}) R^x_{s_1}(\alpha_1) R^q_{s_1}(\alpha_1 + \kappa).$$

ただし，

$$D(\alpha_1) = \epsilon_1\epsilon_2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{(\alpha_1 + \epsilon_1)\epsilon_1}{x - q}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\alpha_1 + \epsilon_1)\epsilon_2}{q - x}\frac{\partial}{\partial q}.$$

定理. ゲージ変換 R_π, 平行移動 $T_{\pi s_1}$, Schlesinger 変換 S は量子 Lax 作用素 $L_{\mathrm{II}}(\alpha)$, $B_{\mathrm{II}}(\alpha)$ に次のように作用する．

R_π に対して，

$$R_\pi \left(L_{\mathrm{II}}(\alpha), B_{\mathrm{II}}(\alpha)\right) = \left(L_{\mathrm{II}}(\pi(\alpha)), B_{\mathrm{II}}(\pi(\alpha))\right).$$

$T_{\pi s_1}$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\left((x-q)p - \alpha_2 - \kappa\right) y R^x_{s_1}(-\alpha_1 - \kappa)\mathrm{Ad}\left(\exp\left(\left(-\frac{2}{3}x^3 - xt\right)\frac{1}{\epsilon_1}\right)\right)((x-q)L_{\mathrm{II}}(\alpha)) \\
&= -\left((x-q)y + \alpha_2 + \kappa\right) p R^q_{s_1}(-\alpha_1 - \kappa) \\
&\circ (x \mapsto -x, q \mapsto -q)\,\mathrm{Ad}\left(\exp\left(\left(-\frac{2}{3}q^3 - qt\right)\frac{1}{\epsilon_2}\right)\right)((x-q)L_{\mathrm{II}}(\pi s_1(\alpha))\,, \\
&T_{\pi s_1}\left(B_{\mathrm{II}}(\alpha)\right) = B_{\mathrm{II}}\left(\pi s_1(\alpha)\right).
\end{aligned}$$

S に対して，

$$\begin{aligned}
&yp\left(R^x_{s_1}(\alpha_1) R^q_{s_1}(\alpha_1 + \kappa)\left((x-q)L_{\mathrm{II}}(\alpha)\right)\right) D(\alpha_1) = ((x-q)yp + (\alpha_1 + \kappa - \epsilon_2)y + (\epsilon_1 - \alpha_1)p) \\
&\times \left(D(\alpha_1) - \frac{(\alpha_1 + \epsilon_1)(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{(x-q)^2}\right) L_{\mathrm{II}}(\alpha_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2, -\alpha_1 - 2\epsilon_1), \\
&S\left(B_{\mathrm{II}}(\alpha)\right) = B_{\mathrm{II}}(\alpha_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2, -\alpha_1 - 2\epsilon_1) - D(\alpha_1)^{-1}\frac{2(\alpha_1 + \epsilon_1)}{(x-q)^2} L_{\mathrm{II}}(\alpha_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2, -\alpha_1 - 2\epsilon_1).
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] H. Nagoya, Quantum Painlevé Systems of Type $A_l^{(1)}$, *Int. J. Math.* **15** (2004), 1007–1031

[2] H. Nagoya, A quantization of the sixth Painlevé equation, Noncommutativity and singularities, 291–298, *Adv. Stud. Pure Math.* **55** *Math. Soc. Japan, Tokyo* (2009)

[3] H. Nagoya, Hypergeometric solutions to Schrödinger equations for the quantum Painlevé equations, *J. Math. Phys.* **52** (2011)

[4] H. Nagoya, Realizations of affine Weyl group symmetries on the quantum Painlevé equations by fractional calculus, Lett. Math. Phys. (2012)

量子差分パンルベVI型方程式のLax形式について

長谷川浩司　(東北大学)

差分パンルベVI型方程式 [3] の量子化を [2] で構成した．$D_5^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性に基づいた構成であったが (cf.[4]), 神保-坂井と類似のLax表示も得られ同じ方程式を与える．両者の対応について報告する．

1. $\widehat{qP_{IV}}$

q を複素数 $(|q|<1)$ とし、$D_5^{(1)}$ 格子の群環の生成元を $q^{\alpha_j}=a_i$ とする：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_0 & & & & & \alpha_5 & & \delta-e_1-e_2 & & & & & e_4+e_5 \\
 & \backslash & & & / & & & & \backslash & & & / & \\
 & & \alpha_2 & - & \alpha_3 & & = & & & e_2-e_3 & - & e_3-e_4 & \\
 & / & & & \backslash & & & & / & & & \backslash & \\
\alpha_1 & & & & & \alpha_4 & & e_1-e_2 & & & & & e_4-e_5
\end{array}$$

$W{=}W(D_5^{(1)}){=}\langle s_i|i=0,\cdots,5\rangle$ が $\mathbf{C}(a_0,\cdots,a_5)$ に作用し，$\sigma: a_0\leftrightarrow a_1^{-1}$, $a_4\leftrightarrow a_5^{-1}, a_j\leftrightarrow a_j^{-1}(j=2,3)$ で $\langle W,\sigma\rangle$ に拡張される．F,G を非可換な文字とする斜体を $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}(a_0,\cdots,a_5)\langle F,G\rangle$ とする (a_i は中心的; 後で $FG=q^2GF$ とする)．$\boldsymbol{K}$ には

$$s_2(F){=}F\frac{a_0a_1^{-1}G+a_2^2}{a_0a_1^{-1}a_2^2G+1}, s_j(F){=}F\ (j{\neq}2),\ s_3(G){=}\frac{a_3^2a_4a_5^{-1}F+1}{a_4a_5^{-1}F+a_3^2}G, s_j(G){=}G\ (j{\neq}3)$$

および $\sigma: F\leftrightarrow q^{-2}F^{-1}, G\leftrightarrow q^{-2}G^{-1}$, で $\langle W,\sigma\rangle$ が作用する．$FG=q^2GF$ ならば，作用はHamiltonians をもつ：$s_i(\phi)=S_i\phi S_i^{-1}, \sigma(\phi)=\Sigma\phi\Sigma^{-1}(\forall\phi)$.

定理/定義 ($\widehat{qP_{VI}}$) $T_3:=s_2s_1s_0s_2s_3s_4s_5s_3\sigma$ 作用が以下で与えられ $\langle s_i(i\neq 2,3), s_2s_3s_2\rangle$ と可換である．$p(=q^\delta):=a_0a_1a_2^2a_3^2a_4a_5$, $t:=q^{2e_3}=a_3^2a_4a_5$ とおく。

$$T_3(a_0,a_1,t,p,a_4,a_5)=(a_0,a_1,t/p,p,a_4,a_5),$$

$$T_3(F)=p^2t^{-2}\frac{G+p^{-1}a_1^{-2}t}{G+p^3a_0^{-2}t^{-1}}\cdot\frac{G+p^{-1}a_1^2t}{G+p^3a_0^2t^{-1}}F^{-1},$$

$$T_3^{-1}(G)=t^2\frac{F+a_4^2\,t}{F+a_5^2\,t^{-1}}\cdot\frac{F+a_4^{-2}\,t}{F+a_5^{-2}\,t^{-1}}G^{-1}.$$

2. Lax形式

$U_q(A_1^{(1)})$ の上/下部分 $U_q^{\pm}(A_1^{(1)})$ の $\boldsymbol{C}[e^{\pm\alpha_0},e^{\pm\alpha_1}]$ 上の表現 $\rho^{\pm}$ (複号同順) を次で定める．

$$e_i^{\pm}\mapsto-(q-q^{-1})e^{\pm\alpha_i}=:E_i^{\pm},\ h_i\mapsto h_i,\ c\mapsto c^{\pm}\in\boldsymbol{C}$$

$\square_z$ を2次元の evaluation 表現，$\mathcal{R}$ を普遍 R 行列, $k:=q^{h_1},\Delta^{\pm}=E_0^{\pm}E_1^{\pm}$ とし

$$L_z^+(\Delta^+){:=}(\rho^+\otimes\square_z)(\mathcal{R}){=}\frac{(q^4z^{-1}\Delta^+,q^4)_\infty}{(q^2z^{-1}\Delta^+,q^4)_\infty}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{z}E_0^+\\ E_1^+ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & k^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}q^{-c^+d}$$

$$L_z^-(\Delta^-){:=}(\square_z\otimes\rho^-)(\mathcal{R}){=}\frac{(q^4z\Delta^-,q^4)_\infty}{(q^2z\Delta^-,q^4)_\infty}\begin{bmatrix}1 & E_1^-\\ zE_0^- & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & k^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}q^{-c^-d}$$

とおく．$\mathcal{T}:=\frac{1}{2}h\otimes h+c^+\otimes d+d\otimes c^-$ と書けば

$R(\Delta^+,\Delta^-){:=}(\rho^+\otimes\rho^-)(\mathcal{R}){=}(qE_1^+\otimes E_1^-,q^2)_\infty^{-1}(q^2\Delta^+\otimes\Delta^-,q^4)_\infty^{-1}(qE_0^+\otimes E_0^-,q^2)_\infty^{-1}q^{-\mathcal{T}}$ により

$$L_z^+(\Delta^+)R(\Delta^+,\Delta^-)L_z^-(\Delta^-)=L_z^-(\Delta^-)R(\Delta^+,\Delta^-)L_z^+(\Delta^+)$$

であり，$q^d\Delta^\pm q^{-d}{=}q^{\pm1}\Delta^\pm$ である．$L^\pm$ を交互に配置した格子 Lax 行列を考え

$$\mathcal{L}_z(1^-1^+2^-2^+)\quad:=\quad L_z^-(\Delta_1^-)^{-1}L_z^+(\Delta_1^+)L_z^-(\Delta_2^-)^{-1}L_z^+(\Delta_2^+)$$

等とする．$\mathcal{H}_e{:=}\cdots R_{1^+1^-}R_{2^+2^-}\cdots,\mathcal{H}_o{:=}\cdots R_{2^+1^-}R_{3^+2^-}\cdots$ による時間発展を考える：

$$T:=Ad(\mathcal{H}^{-1}),\ \mathcal{H}:=\mathcal{H}_e\mathcal{H}_o. \qquad\qquad (cf.[1])$$

定理 (1) $w_i(a^+b^-){:=}\begin{cases}E_{ia}^+{\otimes}E_{ib}^- & (a{\equiv}b(2))\\(E_i^+k_i)_a{\otimes}(k_i^{-1}E_i^-)_b & (\text{else})\end{cases}$, $\Delta(a^+b^-){:=}\Delta_a^+\otimes\Delta_b^-$ とおけば,

$$T(w_0(1^+1^-))w_0(2^+0^-)=\frac{w_0(1^+0^-){-}q\Delta(1^+0^-)}{w_0(1^+0^-){-}q}\cdot\frac{w_0(2^+1^-){-}q\Delta(2^+1^-)}{w_0(2^+1^-){-}q},$$

$$T^{-1}(w(2^+1^-))w_0(1^+2^-)=\frac{w_0(1^+1^-){-}q\Delta(1^+1^-)}{w_0(1^+1^-){-}q}\cdot\frac{w_0(2^+2^-){-}q\Delta(2^+2^-)}{w_0(2^+2^-){-}q}.$$

(2) $c_a^\pm{=}c_{a+2}^\pm$ ならば T は条件 $w_i(a^+b^-){=}w_i((a+2)^+(b+2)^-)$ を保つ．そして

(3) $\mathcal{L}(1^-1^+2^-2^+)\mathcal{B}(z)=\mathcal{B}(zq^{-c})\mathcal{L}(1^+2^-2^+1^-)$ $(\mathcal{B}(z):=\mathcal{H}_e\mathcal{L}_z(2^-)\mathcal{H}_o)$ が成り立つ.

(3) はモノドロミー保存条件の離散化 ([3] 参照) の量子版である.

3. 両者の対応

(2) の周期条件の下で，(1) は先の $\widehat{qP_{VI}}$ と一致する：$w_i^{ab}:=w_i(a^+b^-)$ と書くと，両者は $-F=\sqrt[4]{\frac{w_0^{11}w_0^{22}}{w_1^{22}w_1^{11}}}$, $-G=\sqrt[4]{\frac{w_0^{10}w_0^{21}}{w_1^{21}w_1^{10}}}$ $(\Rightarrow FG=q^2GF)$ および

$$a_0^4=\frac{w_0^{21}}{w_0^{10}},\ a_1^4=\frac{w_1^{21}}{w_1^{10}},\ a_2^4=\frac{1}{\Delta^{21}},\ a_3^4=\Delta^{11},\ a_4^4=\frac{w_1^{22}}{w_1^{11}},\ a_5^4=\frac{w_0^{22}}{w_0^{11}}$$

で同一視でき，特に $\langle W,\sigma\rangle$ 作用が次で与えられる: $\sigma:w_0^{11}\mapsto q^{-2}w_1^{11},\ w_0^{21}\mapsto q^{-2}w_1^{21}$,

$$s_0:w_0^{11}\mapsto w_0^{11},\ w_0^{21}\mapsto w_0^{10}, \qquad\qquad s_5:w_0^{11}\mapsto w_0^{22},\ w_0^{21}\mapsto w_0^{21},$$

$$s_2:w_0^{11}\mapsto w_0^{11}\frac{w_0^{21}-1}{w_0^{21}-\Delta^{21}},\ w_0^{21}\mapsto\frac{1}{w_1^{21}},\ s_3:w_0^{11}\mapsto\frac{1}{w_1^{11}},\ w_0^{21}\mapsto\frac{w_0^{11}-1}{w_0^{11}-\Delta^{11}}w_0^{10},$$

$$s_1:w_0^{11}\mapsto w_0^{11},\ w_0^{21}\mapsto w_0^{21}, \qquad\qquad s_4:w_0^{11}\mapsto w_0^{11},\ w_0^{21}\mapsto w_0^{21}.$$

参考文献

[1] L. Faddeev and A. Volkov, Abelian current algebra and the Virasoro algebra on the lattice. Phys. Lett. B **3150**, 311-318 (1993)

[2] K. Hasegawa, math.QA/0703036; published in ASPM Tsuchiya volume 2011

[3] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation. Lett. Math. Phys. 38, 145-154 (1996)

[4] T.Tsuda and T. Masuda, q-Painlevé VI equation arising from q-UC hierarchy, Comm. Math. Phys. **262**(2006), 595-609

A型の量子Weyl群双有理作用のSato-Wilson表示

黒木玄　(東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

Noumi-Yamada [3] はべき零 Poisson 整域の分数体への Weyl 群作用 (双有理作用) を構成した. 筆者は [1] でその Weyl 群作用を量子化し, さらに [2] において量子 τ 変数をパラメーター変数の正準共役変数の指数函数として導入し, Weyl群作用を量子 τ 変数まで拡張した. この講演では A 型の量子化された Weyl 群作用の Lax 表示および Sato-Wilson 表示について報告する. この要旨では最も基本的な A_∞ 型の q 差分化された量子 Weyl 群双有理作用の場合のみを扱う.

1. A_∞ 型の量子 Weyl 群双有理作用

A^{pa} は f_i, t_i $(i \in \mathbb{Z})$ と p から生成される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数で以下の基本関係式で定義されたものであるとする: $\quad t_i a = a t_i, \quad pa = ap \quad (a \in A^{\mathrm{pa}})$,

$$f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0, \qquad f_i f_j = f_j f_i \quad (j \neq i \pm 1).$$

形式的に $t_i = q^{-\varepsilon_i^\vee}$, $p = q^{-\delta^\vee}$ と書く. さらに $\alpha_i^\vee = \varepsilon_i^\vee - \varepsilon_{i+1}$ とおく. すなわち $q^{-\alpha_i^\vee} = t_i/t_{i+1}$. このとき A^{pa} は Ore 整域になるので, その分数斜体を K^{pa} と書く. f_i を量子従属変数と呼び, t_i と p をパラメーター変数と呼ぶ. (記号 $(\ )^{\mathrm{pa}}$ はパラメーター変数付きの代数を意味する.)

$D(K^{\mathrm{pa}})$ は K^{pa} と $\tau_i^{\pm1}$ $(i \in \mathbb{Z})$ で生成される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数で以下の関係式で定義されたものであるとする: $\quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i \tau_i^{-1} = \tau_i^{-1} \tau_i = 1$,

$$\tau_i t_j \tau_i^{-1} = \begin{cases} q^{-1} t_j & (j \leqq i), \\ t_j & (j > i), \end{cases} \qquad \tau_i p \tau_i^{-1} = q^{-1} p, \quad \tau_i f_j \tau_i^{-1} = f_j.$$

つまり $D(K^{\mathrm{pa}})$ は K^{pa} に作用する q 差分作用素環である. τ_i を量子 τ 変数と呼ぶ.

$D(K^{\mathrm{pa}})$ の代数自己同型 π, s_i を以下の条件で定めることができる:

$$\begin{aligned}
&\pi(f_i) = f_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}, \quad \pi(p) = p, \quad \pi(\tau_i) = \tau_{i+1}, \\
&s_i(f_j) = \frac{q a_i - q^{-1} a_i^{-1}}{q - q^{-1}} f_j + \frac{a_i^{-1} - a_i}{q - q^{-1}} f_i f_j f_i^{-1} \quad (j = i \pm 1), \\
&s_i(f_j) = f_j \quad (j \neq i \pm 1), \\
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_j) = t_j \quad (j \neq i, i+1), \quad s_i(p) = p, \\
&s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1} \tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (j \neq i).
\end{aligned}$$

ここで $a_i = q^{-\alpha_i^\vee} = t_i/t_{i+1}$. これによって $D(K^{\mathrm{pa}})$ に A_∞ 型の拡大 Weyl 群 $\widetilde{W} = \langle s_i, \pi | i \in \mathbb{Z} \rangle$ の作用が定まる. (これは [2] の結果の特別な場合とみなせる. 論文 [2] では f_i の非整数べきを用いてWeyl 群作用を構成している.)

本研究は科研費 (課題番号:23540003) の助成を受けたものである.

[*] e-mail: `kuroki@math.tohoku.ac.jp`
web: `http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/index-j.html`

2. Lax 表示と Sato-Wilson 表示

$f_{ij} \in A^{\mathrm{pa}}$ $(i < j)$ を j に関して帰納的に $f_{i,i+1} = (q - q^{-1})f_i$, $f_{i,j+1} = f_j f_{ij} - q^{-1} f_{ij} f_j$ と定め, 無限行列 $\widetilde{L}$, D_t, M を次のように定める:

$$\widetilde{L} = 1 + \sum_{i<j} f_{ij} E_{ij}, \quad D_t = \sum_i t_i E_{ii}, \quad M = D_t \widetilde{L} D_t.$$

ここで 1, E_{ij} はそれぞれ無限サイズの単位行列と行列単位である. $\widetilde{L}$ は A_∞ 型の普遍 L 作用素をその Cartan 部分で割ったものになっている. 対角成分がすべて 1 の上三角行列 U で M を $M = UD_t^2U^{-1}$ と対角化するものが一意に存在する. $g_i = -[\alpha_i^\vee]_q/f_i$, $[\alpha_i^\vee]_q = (a_i^{-1} - a_i)/(q - q^{-1})$ とおくと, U の $(i, i+1)$ 成分は $-g_i^{-1}$ になる. さらに $z_i = \tau_i/\tau_{i-1}$ とおき, 無限行列 D_Z, Z, Λ, G_i, S_i^g, S_i を次のように定める:

$$D_Z = \sum_i z_i E_{ii}, \quad Z = UD_Z, \quad \Lambda = \sum_i E_{i,i+1}, \quad G_i = 1 + g_i E_{i+1,i},$$

$$S_i^g = g_i^{-1} E_{i,i+1} - g_i E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk},$$

$$S_i = -[\alpha_i^\vee - 1]_q^{-1} E_{i,i+1} + [\alpha_i^\vee + 1]_q E_{i+1,i} + \sum_{k \neq i,i+1} E_{kk}.$$

ここで $[\alpha_i^\vee \pm 1]_q = (q^{\pm 1} a_i^{-1} - q^{\mp 1} a_i)/(q - q^{-1})$. このとき $M = q^2 Z D_t^2 Z^{-1}$ が成立している. 行列 X の各成分への拡大 Weyl 群の元 w の作用させた結果を $w(X)$ と書くことにする. 主定理は次の通り.

定理 (Lax 表示と Sato-Wilson 表示)**.** 以下の公式が成立している:

$$s_i(M) = G_i M G_i^{-1}, \quad \pi(M) = \Lambda M \Lambda^{-1}; \quad s_i(Z) = G_i Z S_i, \quad \pi(Z) = \Lambda Z \Lambda^{-1}.$$

これらをそれぞれ量子 Weyl 群双有理作用の Lax 表示と Sato-Wilson 表示と呼ぶ. $\square$

注意. (1) $s_i(U) = G_i U S_i^g$, $s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i$, $s_i(D_t) = (S_i^g)^{-1} D_t S_i^g = S_i^{-1} D_t S_i$.

(2) $n \geqq 3$ ならば A_∞ の場合の n 簡約で $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合の Lax 表示と Sato-Wilson 表示が得られる.

(3) すべてが可換な古典の場合には, Weyl 群双有理作用の Sato-Wilson 表示から, Weyl 群の任意の元 w に対する $w(\tau_i)$ の Jacobi-Trudi 型公式が得られ, $w(\tau_i)$ が f_i について多項式になること (正則性) がただちに導かれる. しかし, 量子化された非可換な場合はそう簡単ではない. (非可換行列式は一般に成分の非可換多項式ではなく, 非可換有理函数になる.) 筆者は [2] において量子化された場合の $w(\tau_i)$ の正則性を表現論における translation functor の理論に帰着して証明している. $\square$

参考文献

[1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics, 289–325, Adv. Stud. Pure Math., 61, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011. `arXiv:0808.2604`

[2] Kuroki, Gen. Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions. Preprint 18 June, 2012. `arXiv:1206.3419`

[3] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. `arXiv:math.QA/0012028`

Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems

Edwin Langmann　(スウェーデン王立工科大学)
竹村　剛一　(中央大学理工学部)

概　要

BC$_N$ 型 Inozemtsev 系において核関数 (kernel function) を得た。これに関連して source identity を導入した。また、積分変換への応用ができた。

量子 BC_N 型 Inozemtsev 系は N 粒子の量子力学系であり、以下の形の Hamiltonian をもつ。

$$H = H_N(x;\{g_\nu\}_{\nu=0}^3,\lambda) = \sum_{j=1}^{N}\Big(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \sum_{\nu=0}^{3} g_\nu(g_\nu-1)\wp(x_j+\omega_\nu)\Big) \\ + \sum_{1\leq j<k\leq N} 2\lambda(\lambda-1)\left\{\wp(x_j-x_k)+\wp(x_j+x_k)\right\}. \tag{1}$$

ここで $\wp(x)$ は基本周期が $(2\omega_1, 2\omega_3)$ の二重周期関数であり、$\{\omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$ $(\omega_0 = 0,\ \omega_2 = -\omega_1-\omega_3)$ は半周期である。この模型は量子 Liouville 可積分である。つまり $H, H^{\langle 2\rangle},\dots,H^{\langle N\rangle}$ という N 個の独立な可換な微分作用素が存在することが知られている。また、$N=1$ のときの BC_1 型 Inozemtsev 系において、$H_1(x;\{g_\nu\}_{\nu=0}^3)f(x) = Ef(x)$ という定常シュレディンガー方程式は、ホインの微分方程式と等価になっていることが知られている。

Inozemtsev 系の核関数　核関数を定義するために以下の関数を定める。

$$\Psi_N(x;\{g_\nu\}_{\nu=0}^3,\lambda) = \left(\prod_{j=1}^{N}\prod_{\nu=0}^{3}\theta_{\nu+1}(x_j)^{g_\nu}\right)\prod_{j<k}\theta_1(x_j-x_k)^\lambda\theta_1(x_j+x_k)^\lambda \tag{2}$$

ここで $\theta_1(x)\,\theta_2(x),\ \theta_3(x),\ \theta_4(x)$ はテータ関数であり、ゼロ点において $\theta_{\nu+1}(\omega_\nu)=0$ をみたすものである。

また、ω_1 は固定し、$\beta = 2\omega_1\omega_3/(\pi\sqrt{-1})(=2\omega_1^2\tau/(\pi\sqrt{-1}))$ とおく。ここで $\tau = \omega_3/\omega_1$ である。

Theorem 1 N, M を自然数、$\tilde{g}_\nu = \lambda - g_\nu$ $(\nu = 0,1,2,3)$ とし、

$$\Psi_{N,M}(x,y) = \frac{\Psi_N(x;\{g_\nu\}_{\nu=0}^3,\lambda)\Psi_M(y;\{\tilde{g}_\nu\}_{\nu=0}^3,\lambda)}{\prod_{j=1}^N\prod_{k=1}^M\theta_1(x_j-y_k)^\lambda\theta_1(x_j+y_k)^\lambda}, \tag{3}$$

とおく。$A_{N,M} = 4\lambda(N-M-1)+2(g_0+g_1+g_2+g_3)$ とおき、$C_{N,M}$ をとある定数とすると、以下の等式が成り立つ。

$$\left\{A_{N,M}\frac{\partial}{\partial\beta} + H_N(x;\{g_\nu\},\lambda) - H_M(y;\{\tilde{g}_\nu\},\lambda) - C_{N,M}\right\}\Psi_{N,M}(x,y) = 0. \tag{4}$$

本研究は科研費 (課題番号:22740107) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 34M35, 33E10, 34M55

別の核関数も得た。

Theorem 2 N, M を自然数、$\tilde{g}'_\nu = (2g_\nu + 1 - \lambda)/(2\lambda) \quad (\nu = 0, 1, 2, 3)$ とし、

$$\tilde{\Psi}_{N,M}(x, y) = \left(\prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{M} \theta_1(x_j - y_k)\theta_1(x_j + y_k) \right) \Psi_N(x; \{g_\nu\}, \lambda)\Psi_M(y; \{\tilde{g}'_\nu\}, 1/\lambda).$$

とおく。 $\tilde{A}_{N,M} = 4\lambda(N-1) + 4M + 2(g_0 + g_1 + g_2 + g_3)$ とおき、$\tilde{C}_{N,M}$ をとある定数とすると、以下の等式が成り立つ。

$$\left\{ \tilde{A}_{N,M} \frac{\partial}{\partial \beta} + H_N(x; \{g_\nu\}, \lambda) + \lambda H_M(y; \{g'_\nu\}, 1/\lambda) - \tilde{C}_{N,M} \right\} \tilde{\Psi}_{N,M}(x, y) = 0. \quad (5)$$

Source identity Theorem 1, 2 は、以下の等式を特殊化することで得られる。

Lemma 3 (source identity) $\mathcal{N}$ を自然数とし、$m_J \neq 0$ $(J = 1, 2, \ldots, \mathcal{N})$ とする。

$$\Phi_0(X) = \left(\prod_{J=1}^{\mathcal{N}} \prod_{\nu=0}^{3} \theta_{\nu+1}(X_J)^{g_{\nu,J}} \right) \prod_{J<K} \theta_1(X_J - X_K)^{m_J m_K \lambda} \theta_1(X_J + X_K)^{m_J m_K \lambda}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{J=1}^{N} \frac{1}{m_J} \left(-\frac{\partial^2}{\partial X_J^2} + \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu,J}(g_{\nu,J} - 1)\wp(X_J + \omega_\nu) \right)$$
$$+ \sum_{1 \le J < K \le \mathcal{N}} \gamma_{J,K} \left\{ \wp(X_J - X_K) + \wp(X_J + X_K) \right\}$$

とおく。$\gamma_{J,K} = \lambda(m_J + m_K)(\lambda m_J m_K - 1)$, $g_{\nu,J} = m_J d_\nu + \frac{\lambda}{2} m_J^2$ という条件のもと、ある定数 $\mathcal{E}_0$ に対して以下の等式が成り立つ。

$$\left\{ \left(4\lambda \sum_{J=1}^{\mathcal{N}} m_J + 2 \sum_{\nu=0}^{3} d_\nu \right) \frac{\partial}{\partial \beta} + \mathcal{H} - \mathcal{E}_0 \right\} \Phi_0(X) = 0. \quad (6)$$

核関数の応用 ここでは積分変換を挙げる。

Proposition 4 Theorem 1 の設定のもと、ある定数 E において関数 $\tilde{f}(y)$ が

$$\left(A_{N,M} \frac{\partial}{\partial \beta} + H_M(y; \{\tilde{g}_\nu\}, \lambda) - E \right) \tilde{f}(y) = 0 \quad (7)$$

を満たすとする。適切な径路 $\mathcal{C}$ に対して

$$f(x) = \int_{\mathcal{C}} \Psi_{N,M}(x, y) \tilde{f}(y) d^M y \quad (8)$$

とすると、これは以下の等式を満たす。

$$\left(A_{N,M} \frac{\partial}{\partial \beta} + H_N(x; \{g_\nu\}, \lambda) - E - C_{N,M} \right) f(x) = 0. \quad (9)$$

とくに $M = 1$, $A_{N,1} = 0$ であって、ホインの微分方程式 $(H_1(y; \{\tilde{g}_\nu\}, \lambda) - E)\tilde{f}(y) = 0$ の解が明示的に書けるとき、式 (8) で定まる $f(x)$ は、Inozemtsev Hamiltonian $H_N(x; \{g_\nu\}, \lambda)$ の固有値 $E + C_{N,M}$ の固有関数となる。

参考文献

[1] E. Langmann, K. Takemura, Source identity and kernel functions for Inozemtsev-type systems (arXiv:1202.3544 [math-ph])

Ruijsenaars-Macdonald q 差分作用素の双スペクトル問題

野海 正俊　(神戸大・理)
白石 潤一　(東大・数理)

この講演では, Ruijsenaars-Macdoanld q 差分作用素 (GL_n 型) の双スペクトル問題を考察し, その有理型函数解の基本的な性質を論じる. 級数展開の明示公式, 特異性, 対称性, Jackson 積分及び行型q差分作用素による帰納的構成法等について, [3] の結果の概要を紹介する. この種の双スペクトル問題については, Cherednik [1], van Meer-Stokman [2] などの先行研究がある.

0: 双スペクトル問題. 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に関する Ruijsenaars-Macdonald q 差分作用素の可換族を

$$D_r^x = t^{\binom{n}{2}} \sum_{|I|=r} \prod_{i \in I;\, j \notin I} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} T_{q,x_i} \qquad (r = 0, 1, \dots, n) \tag{1}$$

で表し, その母函数を $D^x(u) = \sum_{r=0}^n (-u)^r D_r^x$ と記す. 双対変数を $s = (s_1, \dots, s_n)$ で表し, 変数 $(x; s)$ の有理型函数 $f(x; s)$ に対して, 双スペクトル問題

$$D^x(u)\, f(x; s) = f(x; s) \prod_{i=1}^n (1 - us_i), \quad D^s(u)\, f(x; s) = f(x; s) \prod_{i=1}^n (1 - ux_i) \tag{2}$$

を考える. 領域 $|x_1| \gg \cdots \gg |x_n|$, $|s_1| \gg \cdots \gg |s_n|$ での双スペクトル問題を考察するために, 変数 $(x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1})$ についての有理函数体と形式冪級数環をそれぞれ$\mathbb{C}(x^{-Q_+}) = \mathbb{C}(x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1})$, $\mathbb{C}[[x^{-Q_+}]] = \mathbb{C}[[x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}]]$ と略記する. Q_+ は 単純ルート $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n-1)$ の生成する錐を表す. 以下, 0 でない複素数 $q, t \in \mathbb{C}^*$ を固定し, $|q| < 1$ とする.

1: 固有値問題の形式解. (2) の第 1 の方程式, 即ち x 変数の同時固有値問題については, 主係数 $\varphi_0(s)$ を指定する毎に, 形式解

$$f(x; s) = x^\lambda \varphi(x; s), \quad \varphi(x; s) = \sum_{\mu \in Q_+} x^{-\mu}\, \varphi_\mu(s) \in \mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]] \tag{3}$$

が一意に定まる. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は, 関係式 $s_i = t^{n-i} q^{\lambda_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ で定義される複素パラメータである. 主係数を 1 に規格化すれば, 任意の $\mu \in Q_+$ に対して, 係数の有理函数 $\varphi_\mu(s)$ は原点 $s_{i+1}/s_i = 0$ $(i = 1, \dots, n-1)$ で正則であり, $q^{k+1} s_j/s_i = 1$ $(1 \le i < j \le n; k = 0, 1, 2, \dots)$ のみに高々1位の極をもつことが示せる. ゲージ変換

$$\varphi(x; s) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(qx_j/x_i; q)_\infty}{(qx_j/tx_i; q)_\infty}\, \psi(x; s) \tag{4}$$

を施せば, $\psi(x; s)$ は, パラメータの入替え $t \leftrightarrow q/t$ に関して不変となる.

2: 同時固有函数の明示公式. $n = 1, 2, \dots$ に対して, 非負整数を成分とする $n \times n$ の狭義の上三角行列全体を M_n で表し, 各 $\theta = (\theta_{ij})_{ij} \in M_n$ に対して, s 変数の有理函数

$$\prod_{k=2}^n \prod_{1 \le i < j \le k} \frac{(q^{\sum_{a>k}(\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} ts_j/s_i; q)_{\theta_{i,k}}}{(q^{\sum_{a>k}(\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} qs_j/s_i; q)_{\theta_{i,k}}} \prod_{1 \le i \le j < k} \frac{(q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a>k}(\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} qs_j/ts_i; q)_{\theta_{i,k}}}{(q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a>k}(\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} s_j/s_i; q)_{\theta_{i,k}}} \tag{5}$$

を $c_n(\theta;s|q,t)$ で表す. これを用いて

$$p_n(x;s|q,t)=\sum_{\theta\in M_n}c_n(\theta;s|q,t)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j/x_i)^{\theta_{ij}}\in\mathbb{C}(s^{-Q_+})[[x^{-Q_+}]] \tag{6}$$

と定義すると, $f(x;s)=x^\lambda p_n(x;s|q,t)$ は x 変数についての形式的同時固有函数となる. t が一般なら, λ が分割のとき $x^\lambda p_n(x;t^\delta q^\lambda|q,t)$ は Macdonald 多項式に一致する.

3: 双スペクトル問題の形式解. 変数 $(x;s)$ についての (多価な) 有理型函数 $e_n(x;s)$ で, 対称性の条件 $e_n(x;s)=e_n(s;x)$ と q 差分方程式 $T_{q,x_i}e_n(x;s)=e_n(x;s)s_it^{-n+i}$, $T_{q,s_i}e_n(x;s)=e_n(x;s)x_it^{-n+i}$ $(i=1,\ldots,n)$ を満たすものを固定する. そこで

$$\begin{aligned}
&f_n(x;s|q,t)=e_n(x;s)\,\varphi_n(x;s|q,t),\\
&\varphi_n(x;s|q,t)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(qs_j/s_i;q)_\infty}{(qs_j/ts_i;q)_\infty}p_n(x;s|q,t)\in\mathbb{C}[[s^{-Q_+}]][[x^{-Q_+}]]
\end{aligned} \tag{7}$$

と定義すれば, $f_n(x;s|q,t)$ は双スペクトル問題 (2) の形式解であって, $f_n(x;s|q,t)=f_n(s;x|q,t)$ を満たす. このことは Jackson 積分及び行型 q 差分作用素による帰納的構成法を用いて示せる. 詳しくは講演中に述べる.

4: 形式解の収束. 上記の $\varphi_n(x;s|q,t)$ は, 変数 $(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1};s_2/s_1,\ldots,s_n/s_{n-1})$ についての形式冪級数であるが, 十分小さな半径の多重円板では絶対収束し, そこで正則函数を定める. この正則函数は $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{n-1}$ 上の有理型函数に解析接続され,

$$F_n(x;s|q,t)=\prod_{1\le i<j\le n}(qx_j/tx_i)_\infty(qs_j/ts_i)_\infty\ \varphi_n(x;s|q,t) \tag{8}$$

は, 変数 $(x_2/x_1,\ldots,x_n/x_{n-1};s_2/s_1,\ldots,s_n/s_{n-1})$ についての整函数となる. この整函数は $F_n(x;s|q,t)=F_n(s;x|q,t)$, $F_n(x;s|q,t)=F_n(x;s|q,q/t)$ なる対称性をもつ. これは (6) の級数 $p_n(x;s|q,t)$ がある種の変換公式をもつことを意味する.

5: $\boldsymbol{n=2,3}$ の場合. $n=2$ の場合には, $\varphi_2(x;s|q,t)$ を

$$\varphi_2(x;s|q,t)=\frac{(t;q)_\infty(qx_2s_2/x_1s_1;q)_\infty}{(qx_2/tx_1;q)_\infty(qs_2/ts_1;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}qx_2/tx_1,qs_2/ts_1\\qx_2s_2/x_1s_1\end{matrix};q,t\right]\quad(|t|<1) \tag{9}$$

と表せる. この表示から有理型函数としての特異性や, x, s に関する双対性があらわに見える. 一般の n ではそのような表示はまだ得られていないが, $n=3$ の場合には, q 超幾何級数の変換公式を駆使して, 次の表示を得た.

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x,s|q,t)=&\sum_{k\ge0}\frac{(q/t;q)_k(q/t;q)_k}{(q;q)_k(t;q)_k}(qx_3s_3/x_1s_1)^k\\
&\times\prod_{1\le i<j\le3}\frac{(t;q)_\infty(qx_js_j/x_is_i;q)_\infty}{(qx_j/tx_i;q)_\infty(qs_j/ts_i;q)_\infty}\,{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}qx_j/tx_i,qs_j/ts_i\\qx_js_j/x_is_i\end{matrix};q,q^kt\right]\quad(|t|<1).
\end{aligned} \tag{10}$$

参考文献

[1] I. Cherednik: Difference Macdonald-Mehta conjecture, Int. Math. Res. Not. IMRN 1997, 449–467.

[2] M. van Meer and J. Stokman: Double affine Hecke algebras and bispectral quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations, Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, 969–1040.

[3] M. Noumi and J. Shiraishi: A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars-Macdonald q-difference operators, preprint 2012.

Vertex operators, Nekrasov partition functions and Macdonald polynomials

白石　潤一　(東大数理)

1. Introduction

本講演では, Iqbal, Kozçaz, Vafa の refined topological vertex $C_{\lambda\mu\nu}(t,q)$ [IKV] ないし Awata, Kanno の vertex $C_{\lambda\mu}{}^{\nu}(q,t)$ [AK2] と, Ding-Iohara, Miki によって導入された代数$\mathcal{U}$[DI], [Mi] の Fock 表現との関係を論ずる [AFS]. 代数$\mathcal{U}$の Fock 表現が Nekrasov 分配関数 [N], [FP], [NY1], [NY2], [GNY] と関係することは, refined topological vertex と Nekrasov 分配関数の関係を論じた文献 [IKV], [T], [AK2] の結果からの帰結となる.

Macdonald 多項式の基礎的な事項 [Ma] （ノルム公式や skew 対称関数に関する性質等）と Heisenberg 代数を用いて定められる一連の vertex operator 達の間の演算子積公式が代数$\mathcal{U}$の Fock 表現の中においてうまく調和していることが観察される.

この Fock 表現の特徴は, 基本的な 3 点の intertwining operator の成分達（primary 場とその descendants の類似）の成す空間に関して所謂 nuclear democracy（核民主主義）が成立することである. これは, 共形場の理論の q,t 類似の概念的な理解において, 従来欠けていた点である.

2. Preliminaries

2.1. Macdonald 多項式

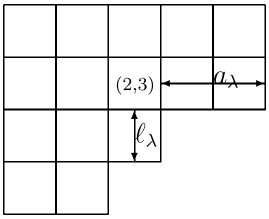
Macdonald 多項式について必要となることを思い出す. 記法は文献 [Ma] に従う. 分割 λ とは非負正数の非減少列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$, $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots$ であり, かつ零でない成分は有限個なものとする. 分割 λ に対して $|\lambda|$, $n(\lambda)$, $\ell(\lambda)$ を次のように定める：$|\lambda|=\sum_{i\geq 1}\lambda_i$, $n(\lambda):=\sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$, $\lambda_l>0$ かつ $\lambda_{l+1}=0$ のとき $\ell(\lambda)=l$ と定める. $\ell(\lambda)$ を λ の length と呼ぶ, 零のみよりなる列を $\emptyset$ と書く. 分割全体の集合の上に優順序 $\lambda\geq\mu$ を次のように定める： $\lambda\geq\mu \Leftrightarrow |\lambda|=|\mu|$ かつ $\sum_{k=1}^{i}\lambda_k\geq\sum_{k=1}^{i}\mu_k$ $(i=1,2,\ldots)$.

分割 λ は Young 図と対応させられる. Young 図の座標 (i,j) は次のように定める： i (the row index) は下へ増加し, j (the column index) は右へ増加するものとする. 座標 (i,j) に位置する箱を $\square=(i,j)$ と書く. Young 図 λ の転置を λ' と記す. 箱 $\square=(i,j)$ と分割 λ に対して arm length $a_\lambda(\square)$ と leg length $\ell_\lambda(\square)$ を

$$a_\lambda(\square)=\lambda_i-j,\quad \ell_\lambda(\square)=\lambda'_j-i \tag{1}$$

と定める. 以下では箱 $\square=(i,j)$ が必ずしも Young 図 λ に含まれない場合も考える必要がある. そのような場合, $a_\lambda(\square)$, $\ell_\lambda(\square)$ は負の整数になる.

例:



$\lambda = (5,5,3,2)$ $|\lambda| = 30$

$\lambda' = (4,4,3,2,2)$ $n(\lambda) = 17$

$a_\lambda(2,3) = 2$ $n(\lambda') = 24$

$\ell_\lambda(2,3) = 1$

q,t を独立な不定元とし $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ とおく．Λ を $x = (x_1, x_2, \ldots)$ を無限個の変数とする $\mathbb{Z}$ 上の対称関数環とし, $\Lambda_{\mathbb{F}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ とおく．$m_\lambda = \sum_{\alpha:\lambda\text{の相異なる置換}} x^\alpha$ を monomial 対称関数と呼ぶ. 冪和対称関数を $p_n = \sum_{i\geq 1} x_i^n$ と定める．分割 λ に対して, $p_\lambda = \prod_i p_{\lambda_i}$ とおく．$\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上に Macdonald の内積を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}, \qquad z_\lambda = \prod_{i\geq 1} i^{m_i} \cdot m_i!, \tag{2}$$

によって定める．ここに, m_i は 列 λ に含まれる i の数を表す.

Fact 2.1. Macdonald 対称関数 $P_\lambda(x;q,t)$ は次の 2 条件で一意的に定められる [Ma, Chap. VI, (4.7)].

$$P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu \qquad (u_{\lambda\mu} \in \mathbb{Q}(q,t)), \tag{3}$$

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0 \qquad (\lambda \neq \mu). \tag{4}$$

(P_λ) は $\Lambda_{\mathbb{F}}$ の基底である．$Q_\lambda := P_\lambda / \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t}$ と定めれば, (Q_λ) と (P_λ) は $\Lambda_{\mathbb{F}}$ の双対基底となる：$\langle P_\lambda, Q_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu}$. ノルムについての公式

$$\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t} = c'_\lambda / c_\lambda, \tag{5}$$

$$c_\lambda := \prod_{\square\in\lambda} (1 - q^{a_\lambda(\square)} t^{\ell_\lambda(\square)+1}), \quad c'_\lambda := \prod_{\square\in\lambda} (1 - q^{a_\lambda(\square)+1} t^{\ell_\lambda(\square)}). \tag{6}$$

が知られている [Ma, Chap. VI, (6.19)] . 整形式 J_λ を $J_\lambda = c_\lambda P_\lambda = c'_\lambda Q_\lambda$ と定める [Ma, Chap. VI, (8.1),(8.1′),(8.3)].

2 つの無限個の変数の組 $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ を考える．skew Macdonald 対称関数 $P_{\lambda/\mu}$ は $P_\lambda(x,y) = \sum_\mu P_\mu(x) P_{\lambda/\mu}(y)$ を満たす [Ma, Chap. VI, (7.9′)].

2.2. Heisenberg 代数

$\mathbb{F}$ 上の Heisenberg 代数 $\mathcal{H}$ を生成元 $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ と交換関係

$$[a_m, a_n] = m \frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}} \delta_{m+n,0}\, a_0 \tag{7}$$

によって定める．真空 $|0\rangle$ を $a_n|0\rangle = 0$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ を満たすものと定める．分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ に対して, $|a_\lambda\rangle = a_{-\lambda_1} a_{-\lambda_2} \cdots |0\rangle$ と記す．Fock 空間 $\mathcal{F}$ を基底 $(|a_\lambda\rangle)$ で張られる次数付き線形空間とする.

次数付き線形空間として $|a_\lambda\rangle \mapsto p_\lambda$ によって $\Lambda_{\mathbb{F}}$ と $\mathcal{F}$ は同一視される. $\Lambda_{\mathbb{F}}$ に対して左 $U(\mathcal{H})$ 加群の構造を次のように与えることができる：$a_0 v = v$,

$$a_{-n}v = p_n v, \quad a_n v = n\frac{1-q^n}{1-t^n}\frac{\partial v}{\partial p_n}, \qquad (n > 0, v \in \Lambda_{\mathbb{F}}). \tag{8}$$

真空の双対 $\langle 0|$ を $\langle 0| a_n = 0$ $(n \in \mathbb{Z}_{<0})$, と $\langle a_\lambda| = \langle 0| a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \cdots$ で定め, 双対 Fock 空間 $\mathcal{F}^*$ を基底 $(\langle a_\lambda|)$ を持つ線形空間とする. $\Lambda_{\mathbb{F}}$ を対称関数を Fock 空間 $\mathcal{F}$ (ないし双対 Fock 空間 $\mathcal{F}^*$) と同一視するとき, $\alpha \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ に対応する元を $|\alpha\rangle \in \mathcal{F}$ (ないし $\langle\alpha| \in \mathcal{F}^*$) と記す. 混乱の恐れが無いときにはこれを単に α と書くこともある. このとき, 任意の $\mathcal{O} \in U(\mathcal{H})$ に対して $\langle P_\lambda| \mathcal{O} |P_\mu\rangle = \langle P_\lambda, \mathcal{O}P_\mu\rangle_{q,t}$ となる.

2.3. 代数 $\mathcal{U}$

q, t は独立な不定元, $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ としたが, 以下必要に応じて $\widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{Q}(q^{1/4}, t^{1/4})$ の上で考える. 代数 $\mathcal{U}$[DI][Mi] の定義を, 我々の目的に必要な状況で, [DI] に従って述べる. 構造関数を

$$g(z) = \frac{G^+(z)}{G^-(z)} \in \mathbb{Q}(q,t)[[z]], \qquad G^\pm(z) = (1-q^{\pm 1}z)(1-t^{\mp 1}z)(1-q^{\mp 1}t^{\pm 1}z), \tag{9}$$

と定める.

Definition 2.2. $\mathbb{F}$ 上の単位的結合代数 $\mathcal{U}$ を生成元

$$x^\pm(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^\pm_n z^{-n}, \qquad \psi^\pm(z) = \sum_{\pm n\in\mathbb{N}} \psi^\pm_n z^{-n}, \qquad \gamma^{\pm 1/2}, \tag{10}$$

と次の関係式で定める:

$$\gamma^{\pm 1/2} \text{ は中心}, \tag{11}$$

$$\psi^\pm(z)\psi^\pm(w) = \psi^\pm(w)\psi^\pm(z), \tag{12}$$

$$\psi^+(z)\psi^-(w) = \frac{g(\gamma^{+1}w/z)}{g(\gamma^{-1}w/z)}\psi^-(w)\psi^+(z), \tag{13}$$

$$\psi^+(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}w/z)^{\mp 1}x^\pm(w)\psi^+(z), \tag{14}$$

$$\psi^-(z)x^\pm(w) = g(\gamma^{\mp 1/2}z/w)^{\pm 1}x^\pm(w)\psi^-(z), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&[x^+(z), x^-(w)] \\ &\quad = \frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t}\Big(\delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w) - \delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w)\Big),\end{aligned} \tag{16}$$

$$G^\mp(z/w)x^\pm(z)x^\pm(w) = G^\pm(z/w)x^\pm(w)x^\pm(z), \tag{17}$$

ここに $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$.

Proposition 2.3. $\mathcal{U}$ に Hopf 代数の構造を与えることができる.
coproduct Δ:

$$\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}, \tag{18}$$

$$\Delta(x^+(z)) = x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2} z) \otimes x^+(\gamma_{(1)} z), \tag{19}$$

$$\Delta(x^-(z)) = x^-(\gamma_{(2)} z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2} z) + 1 \otimes x^-(z), \tag{20}$$

$$\Delta(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2} z), \tag{21}$$

ここに $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} = \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1$, $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$.
antipode a:

$$a(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\mp 1/2}, \tag{22}$$

$$a(x^+(z)) = -\psi^-(\gamma^{-1/2} z)^{-1} x^+(\gamma^{-1} z), \tag{23}$$

$$a(x^-(z)) = -x^-(\gamma^{-1} z) \psi^+(\gamma^{-1/2} z)^{-1}, \tag{24}$$

$$a(\psi^\pm(z)) = \psi^\pm(z)^{-1}. \tag{25}$$

counit ε:

$$\varepsilon(\gamma^{\pm 1/2}) = 1, \qquad \varepsilon(\psi^\pm(z)) = 1, \qquad \varepsilon(x^\pm(z)) = 0. \tag{26}$$

Remark 2.4. この coproduct Δ, antipode a は生成元の無限和で与えられているので通常の意味での Hopf 代数が定められているのではない. $\mathcal{U}$ のテンソル積表現が定義されるためにはこの無限和が収束する場合に限られる.

Remark 2.5. $\psi_0^\pm$ は $\mathcal{U}$ の中心に属する.

Definition 2.6. M を $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上の左 $\mathcal{U}$ 加群とする. 中心元 $\gamma^{1/2}, (\psi_0^+)^{-1}\psi_0^-$ の作用がある正数の組 $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ によって

$$\gamma^{1/2}\alpha = (t/q)^{l_1/4}\alpha, \qquad (\psi_0^+)^{-1}\psi_0^-\alpha = (t/q)^{l_2}\alpha \qquad (\forall \alpha \in M) \tag{27}$$

と与えられるとき, M を level (l_1, l_2) の加群と呼ぶ.

2.4. Level $(0,1)$ 加群 $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$

Definition 2.7. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ と $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $A^{\pm}_{\lambda,i} \in \mathbb{Q}(q,t), B^{\pm}_{\lambda}(z) \in \mathbb{Q}(q,t)[[z]]$ を次のように定める：

$$A^+_{\lambda,i} = (1-t)\prod_{j=1}^{i-1}\frac{(1-q^{\lambda_i-\lambda_j}t^{-i+j+1})(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+1}t^{-i+j-1})}{(1-q^{\lambda_i-\lambda_j}t^{-i+j})(1-q^{\lambda_i-\lambda_j+1}t^{-i+j})}, \tag{28}$$

$$A^-_{\lambda,i} = (1-t^{-1})\frac{1-q^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}}{1-q^{\lambda_{i+1}-\lambda_i+1}t^{-1}}\prod_{j=i+1}^{\infty}\frac{(1-q^{\lambda_j-\lambda_i+1}t^{-j+i-1})(1-q^{\lambda_{j+1}-\lambda_i}t^{-j+i})}{(1-q^{\lambda_{j+1}-\lambda_i+1}t^{-j+i-1})(1-q^{\lambda_j-\lambda_i}t^{-j+i})}, \tag{29}$$

$$B^+_{\lambda}(z) = \frac{1-q^{\lambda_1-1}tz}{1-q^{\lambda_1}z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1-q^{\lambda_i}t^{-i}z)(1-q^{\lambda_{i+1}-1}t^{-i+1}z)}{(1-q^{\lambda_{i+1}}t^{-i}z)(1-q^{\lambda_i-1}t^{-i+1}z)}, \tag{30}$$

$$B^-_{\lambda}(z) = \frac{1-q^{-\lambda_1+1}t^{-1}z}{1-q^{-\lambda_1}z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{(1-q^{-\lambda_i}t^{i}z)(1-q^{-\lambda_{i+1}+1}t^{i-1}z)}{(1-q^{-\lambda_{i+1}}t^{i}z)(1-q^{-\lambda_i+1}t^{i-1}z)}. \tag{31}$$

条件 $\lambda_i = \lambda_{i-1}$ が満たされるならば $A^+_{\lambda,i} = 0$ となる, また $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ のときには $A^-_{\lambda,i} = 0$ となる. 条件 $\lambda_i < \lambda_{i-1}$ が満たされるとき, λ の i 行目に箱をひとつ加えても分割となる. 簡単のためこれを $\lambda + \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \ldots)$ と記す. また, $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ の場合には i 行目から箱をひとつ取り除いても分割となる. それを $\lambda - \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \ldots)$ と書く.

Proposition 2.8. u を不定元とする. Fock 空間 $\mathcal{F}$ に $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上の左 $\mathcal{U}$ 加群の構造を次のように与えることができる [FT], [FFJMM]：

$$\gamma^{1/2}P_\lambda = P_\lambda, \tag{32}$$

$$x^+(z)P_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A^+_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i}t^{-i+1}u/z)P_{\lambda+\mathbf{1}_i}, \tag{33}$$

$$x^-(z)P_\lambda = q^{1/2}t^{-1/2}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A^-_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i-1}t^{-i+1}u/z)P_{\lambda-\mathbf{1}_i}, \tag{34}$$

$$\psi^+(z)P_\lambda = q^{1/2}t^{-1/2}B^+_\lambda(u/z)P_\lambda, \tag{35}$$

$$\psi^-(z)P_\lambda = q^{-1/2}t^{1/2}\,B^-_\lambda(z/u)P_\lambda. \tag{36}$$

これは level $(0,1)$ 加群である. この $\mathcal{U}$ 加群を $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ と記す.

2.5. Level $(1,N)$ module $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$

Definition 2.9. $U(\mathcal{H})[[z,z^{-1}]]$ の元 $\eta(z),\xi(z),\varphi^{\pm}(z)$ を次のように定める [FHHSY]:

$$\eta(z)=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{n}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{n}}{n}a_{n}z^{-n}\Big), \tag{37}$$

$$\xi(z)=\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{n}q^{-n/2}t^{n/2}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{n}}{n}q^{-n/2}t^{n/2}a_{n}z^{-n}\Big), \tag{38}$$

$$\varphi^+(z)=\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{n}}{n}(1-t^nq^{-n})q^{n/4}t^{-n/4}a_{n}z^{-n}\Big), \tag{39}$$

$$\varphi^-(z)=\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{n}(1-t^nq^{-n})q^{n/4}t^{-n/4}a_{-n}z^{n}\Big). \tag{40}$$

Proposition 2.10. u を不定元, $N\in\mathbb{Z}$ とする. Fock 空間 $\mathcal{F}$ に $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上の左 $\mathcal{U}$ 加群の構造を次のように与えることができる

$$\gamma^{1/2}P_\lambda=(t/q)^{1/4}P_\lambda, \tag{41}$$

$$x^+(z)P_\lambda=uz^{-N}q^{-N/2}t^{N/2}\eta(z)P_\lambda, \tag{42}$$

$$x^-(z)P_\lambda=u^{-1}z^{N}q^{N/2}t^{-N/2}\xi(z)P_\lambda, \tag{43}$$

$$\psi^+(z)P_\lambda=q^{N/2}t^{-N/2}\varphi^+(z)P_\lambda, \tag{44}$$

$$\psi^-(z)P_\lambda=q^{-N/2}t^{N/2}\varphi^-(z)P_\lambda. \tag{45}$$

これは level $(1,N)$ 加群である. この $\mathcal{U}$ 加群を $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ と記す.

3. ３点の Intertwining Operator Φ, Φ^* の存在定理

3.1. Intertwining operator Φ

$N\in\mathbb{Z}$ とし, u,v,w を独立な不定元とする.

Definition 3.1. $\Phi=\Phi\left[\begin{smallmatrix} & (1,N+1),w \\ (0,1),v\,;\,(1,N),u & \end{smallmatrix}\right]$ を次の条件で定められる 3 点の intertwining operator とする：

$$\Phi:\mathcal{F}_v^{(0,1)}\otimes\mathcal{F}_u^{(1,N)}\longrightarrow\mathcal{F}_w^{(1,N+1)}, \tag{46}$$

$$a\Phi=\Phi\Delta(a)\qquad(\forall a\in\mathcal{U}). \tag{47}$$

その成分 Φ_λ を

$$\Phi_\lambda(\alpha)=\Phi(P_\lambda\otimes\alpha)\qquad(\forall P_\lambda\otimes\alpha\in\mathcal{F}_v^{(0,1)}\otimes\mathcal{F}_u^{(1,N)}) \tag{48}$$

によって定める. さらに, Φ は規格化条件 $\Phi_\emptyset(1)=1+\cdots$ を満たすとする.

Theorem 3.2. このような Φ は $w=-vu$ の場合に限って存在し一意的に定まる. その明示公式は次のように与えられる：

$$\Phi_\lambda\begin{bmatrix}(1,N+1),-vu\\(0,1),v\,;\,(1,N),u\end{bmatrix}=t(\lambda,u,v,N)\widetilde{\Phi}_\lambda(v), \tag{49}$$

ここに

$$t(\lambda,u,v,N)=(-vu)^{|\lambda|}(-v)^{-(N+1)|\lambda|}f_\lambda^{-N-1}, \tag{50}$$

$$f_\lambda=q^{n(\lambda')+|\lambda|/2}t^{-n(\lambda)-|\lambda|/2}(-1)^{|\lambda|}, \tag{51}$$

$$\widetilde{\Phi}_\lambda(v)=\frac{q^{n(\lambda')}}{c_\lambda}:\Phi_\emptyset(v)\eta_\lambda(v):, \tag{52}$$

$$\widetilde{\Phi}_\emptyset(v)=\exp\Bigl(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-q^n}a_{-n}v^n\Bigr)\exp\Bigl(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^n}a_nv^{-n}\Bigr), \tag{53}$$

$$\eta_\lambda(v)=:\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\lambda_i}\eta(q^{j-1}t^{-i+1}v):, \tag{54}$$

また $:\cdots:$ はHeisenberg 作用素の正規順序化, f_λ は Taki の framing 因子 [T].

3.2. Intertwining operator Φ^*

Definition 3.3. $\Phi^*=\Phi^*\begin{bmatrix}{\scriptstyle (1,N),v\,;\,(0,1),u}\\{\scriptstyle (1,N+1),w}\end{bmatrix}$ を次の条件で定められる 3 点の intertwining operator とする：

$$\Phi^*:\mathcal{F}_w^{(1,N+1)}\longrightarrow\mathcal{F}_v^{(1,N)}\otimes\mathcal{F}_u^{(0,1)}, \tag{55}$$

$$\Delta(a)\Phi^*=\Phi^*a\qquad(\forall a\in\mathcal{U}). \tag{56}$$

その成分 Φ^*_λ を

$$\Phi^*(\alpha)=\sum_\lambda\Phi^*_\lambda(\alpha)\otimes Q_\lambda\qquad(\forall\alpha\in\mathcal{F}_w^{(1,N+1)}) \tag{57}$$

によって定める. さらに, Φ^* は規格化条件 $\Phi^*_\emptyset(1)=1+\cdots$ を満たすものとする.

Theorem 3.4. このような Φ^* は条件 $w=-vu$ が満たされるときに限り存在し一意的に定まる. その明示公式は次のように与えられる：

$$\Phi^*_\lambda\begin{bmatrix}(1,N),v\,;\,(0,1),u\\(1,N+1),-vu\end{bmatrix}=t^*(\lambda,u,v,N)\widetilde{\Phi}^*_\lambda(u), \tag{58}$$

ここに

$$t^*(\lambda, u, v, N) = (q^{-1}v)^{-|\lambda|}(-u)^{N|\lambda|} f_\lambda^N, \tag{59}$$

$$\widetilde{\Phi}^*_\lambda(u) = \frac{q^{n(\lambda')}}{c_\lambda} : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(u)\xi_\lambda(u) :, \tag{60}$$

$$\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(u) = \exp\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1}{1-q^n} q^{-n/2}t^{n/2}a_{-n}u^n\Big) \exp\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^n} q^{-n/2}t^{n/2}a_{n}u^{-n}\Big), \tag{61}$$

$$\xi_\lambda(u) = : \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\lambda_i} \xi(q^{j-1}t^{-i+1}u) : . \tag{62}$$

3.3. 成分 Φ_λ への代数 $\mathcal{U}$ の adjoint 作用と nuclear democracy

代数 $\mathcal{U}$ の元 α に対してその coproduct が $\Delta(\alpha) = \sum_i \alpha_i^{(1)} \otimes \alpha_i^{(2)}$ であるとする．Φ に対する条件 (47) は, α の Φ_λ への adjoint 作用（第 2 成分に antipode a を施して得られるもの）を $\sum_i \alpha_i^{(1)}\Phi_\lambda a(\alpha_i^{(2)})$ で定めることに相当する．

Proposition 3.5. Φ に対する条件 (47) を具体的に書き下せば次の関係式を得る：

$$\begin{aligned} &x^+(z)\Phi_\lambda - \psi^-(q^{-1/4}t^{1/4}z)\Phi_\lambda\psi^-(q^{-1/4}t^{1/4}z)^{-1}x^+(z) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A^+_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i}t^{-i+1}v/z)\Phi_{\lambda+\mathbf{1}_i}, \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} &x^-(q^{1/2}t^{-1/2}z)\Phi_\lambda\psi^+(q^{1/4}t^{-1/4}z)^{-1} - \Phi_\lambda x^-(q^{1/2}t^{-1/2}z)\psi^+(q^{1/4}t^{-1/4}z)^{-1} \\ &\quad = q^{1/2}t^{-1/2}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A^-_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i-1}t^{-i+1}v/z)\Phi_{\lambda-\mathbf{1}_i}, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\psi^+(q^{1/4}t^{-1/4}z)\Phi_\lambda\psi^+(q^{1/4}t^{-1/4}z)^{-1} = q^{1/2}t^{-1/2}B^+_\lambda(v/z)\Phi_\lambda, \tag{65}$$

$$\psi^-(q^{-1/4}t^{1/4}z)\Phi_\lambda\psi^-(q^{-1/4}t^{1/4}z)^{-1} = q^{-1/2}t^{1/2}B^-_\lambda(z/v)\Phi_\lambda. \tag{66}$$

Φ の成分全体 (Φ_λ) によって張られる線形空間は Fock 空間 $\mathcal{F}$ と同型であるが, この adjoint 作用によってそれを level $(0,1)$ 加群 $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ とみなすことができる．この対応は共形場の理論において nuclear democracy（核民主主義）と呼ばれている state と operator の間の対応と類似している．

4. refined topological vertex との関係

4.1. Notations

$s_\lambda(x) \in \Lambda_\mathbb{Z}$ を Schur 対称関数とする．Schur 対称関数と Macdonald 対称関数との関係は $t=q$ とする特殊化 $s_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, q)$ で与えられる．$c^\nu_{\lambda\mu}$ を $s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu}s_\nu$ で定められる Littlewood-Richardson 係数とする．skew Schur 対称関数 $s_{\lambda/\mu}(x)$ は $s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu}s_\nu$ によって定義される．そして $s_\lambda(x, y) = \sum_\mu s_{\lambda/\mu}(x)s_\mu(y)$ が成立する [Ma, Chap. I. (5.9)]．$S_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_\mathbb{F}$ を内積 (2) に関する s_λ の双対と定め

る. 即ち, $\langle S_\lambda(q,t), s_\mu\rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu}$. $S_{\lambda/\mu}(x;q,t) = \sum_\nu c^\lambda_{\mu\nu} S_\nu(x;q,t)$ と定めれば, 関係式 $S_\lambda(x,y;q,t) = \sum_\mu S_{\lambda/\mu}(x;q,t) S_\mu(y;q,t)$ が成立する.

$\mathbb{F}$ 代数の endomorphism $\omega_{u,v}$ [Ma, Chap. VI. (2.14)] は次のように定められる

$$\omega_{u,v}(p_n) = -(-1)^n \frac{1-u^n}{1-v^n} p_n. \tag{67}$$

$\Lambda_{\mathbb{F}}$ に作用する 2 つの作用素 ι, $\varepsilon^\pm_\lambda$ を導入する [AK2]. ι は $\Lambda_{\mathbb{F}}$ 上の involution であって次のように定められる

$$\iota : \Lambda_{\mathbb{F}} \to \Lambda_{\mathbb{F}}, \qquad \iota(p_n) = -p_n \quad (n \in \mathbb{Z}_{>0}). \tag{68}$$

$\varepsilon^\pm_\lambda = \varepsilon^\pm_{\lambda,q,t}$ は次のような代入操作で定められる algebra homomorphism である

$$\varepsilon^\pm_\lambda : \Lambda_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}, \qquad \varepsilon^\pm_\lambda(p_n) = \sum_{i=1}^\infty (q^{\pm\lambda_i n} - 1) t^{\mp(i-1/2)n} + \frac{t^{\mp n/2}}{1-t^{\mp n}}. \tag{69}$$

右辺は無限和で書かれているが実際は $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(q,t)$ に入っていることに注意する. $\rho = (-1/2, -3/2, -5/2, \ldots)$ とすれば形式的には $\varepsilon^\pm_\lambda(p_n) = \sum_{i\geq 1} q^{\pm n\lambda_i} t^{\pm n\rho_i}$ という代入操作となる. 以下簡単のため次のような略記を任意の対称関数に対して用いることにする

$$\varepsilon^\pm_\lambda(s_\mu) = s_\mu(q^{\pm\lambda} t^{\pm\rho}), \qquad \varepsilon^\pm_\lambda(\iota s_\mu) = \iota s_\mu(q^{\pm\lambda} t^{\pm\rho}). \tag{70}$$

次が成り立つ

$$\iota s_\lambda(x) = s_{\lambda'}(-x) = (-1)^{|\lambda|} s_{\lambda'}(x), \tag{71}$$

$$S_\lambda(x;q,t) = \iota\, \omega_{t,q} s_\lambda(-x), \tag{72}$$

$$\varepsilon^+_{\lambda,q,t}(p_n(x)) = \varepsilon^-_{\lambda',t,q}\, \omega_{q,t}(p_n(-q^{-1/2}t^{1/2}x)), \tag{73}$$

$$\varepsilon^+_{\lambda,q,t} \iota S_\mu(x;q,t) = (q^{1/2}t^{-1/2})^{-|\mu|} \varepsilon^-_{\lambda',t,q}\, s_\mu(x). \tag{74}$$

略記法を用いてこれを表せば $\iota S_\mu(q^\lambda t^\rho; q,t) = (q^{1/2}t^{-1/2})^{-|\mu|} s_\mu(t^{-\lambda'} q^{-\rho})$.

4.2. Φ と Φ^* の行列要素

簡単ではあるが重要な公式を与える.

Proposition 4.1. $\widetilde{\Phi}_\lambda$ と $\widetilde{\Phi}^*_\lambda$ の演算子部分は次のように書ける

$$:\Phi_\emptyset(q^{1/2}v)\eta_\lambda(q^{1/2}v): = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} (q^{1/2}t^{-1/2})^n v^n \varepsilon^+_\lambda(p_n)\right) \tag{75}$$

$$\times \exp\left(-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n} a_n (q^{1/2}t^{-1/2})^n v^{-n} \varepsilon^-_\lambda(p_n)\right),$$

$$:\Phi^*_\emptyset(q^{1/2}u)\xi_\lambda(q^{1/2}u): \tag{76}$$

$$= \exp\left(-\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n} a_{-n} u^n \varepsilon^+_\lambda(p_n)\right) \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n} a_n u^{-n} \varepsilon^-_\lambda(p_n)\right).$$

Corollary 4.2. $\widetilde{\Phi}_\lambda$ と $\widetilde{\Phi}^*_\lambda$ の演算子部分の行列要素はskew関数を用いて次のように表せる

$$\begin{aligned}
&\langle S_\nu(q,t)| : \widetilde{\Phi}_\emptyset(q^{1/2}v)\eta_\lambda(q^{1/2}v) : |s_\mu\rangle \\
&= v^{|\nu|-|\mu|}(q^{1/2}t^{-1/2})^{|\nu|+|\mu|}\sum_\sigma S_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho;q,t)\iota s_{\mu/\sigma}(q^{-\lambda}t^{-\rho})(q^{1/2}t^{-1/2})^{-2|\sigma|},
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\langle S_\nu(q,t)| : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(q^{1/2}u)\xi_\lambda(q^{1/2}u) : |s_\mu\rangle = u^{|\nu|-|\mu|}\sum_\sigma \iota S_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho;q,t)s_{\mu/\sigma}(q^{-\lambda}t^{-\rho}), \tag{78}$$

また

$$\begin{aligned}
&\langle P_\nu| : \widetilde{\Phi}_\emptyset(q^{1/2}v)\eta_\lambda(q^{1/2}v) : |P_\mu\rangle \\
&= v^{|\nu|-|\mu|}(q^{1/2}t^{-1/2})^{|\nu|+|\mu|}\sum_\sigma P_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho)\iota P_{\mu/\sigma}(q^{-\lambda}t^{-\rho})\langle P_\sigma, P_\sigma\rangle_{q,t}(q^{1/2}t^{-1/2})^{-2|\sigma|},
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\langle P_\nu| : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(q^{1/2}u)\xi_\lambda(q^{1/2}u) : |P_\mu\rangle = u^{|\nu|-|\mu|}\sum_\sigma \iota P_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho)P_{\mu/\sigma}(q^{-\lambda}t^{-\rho})\langle P_\sigma, P_\sigma\rangle_{q,t}. \tag{80}$$

Proof. Proposition 4.1を用いると

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\prod_i a_{\nu_i} : \widetilde{\Phi}_\emptyset(q^{1/2}v)\eta_\lambda(q^{1/2}v) : \prod_j a_{-\mu_j}|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\prod_i (a_{\nu_i} + (q^{1/2}t^{-1/2}v)^{\nu_i}\varepsilon^+_\lambda(p_{\nu_i}))\cdot\prod_j (a_{-\mu_j} - (q^{1/2}t^{-1/2}v^{-1})^{\mu_j}\varepsilon^-_\lambda(p_{\mu_j}))|0\rangle, \\
&\langle 0|\prod_i a_{\nu_i} : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(q^{1/2}u)\xi_\lambda(q^{1/2}u) : \prod_j a_{-\mu_j}|0\rangle \\
&\quad = \langle 0|\prod_i (a_{\nu_i} - u^{\nu_i}\varepsilon^+_\lambda(p_{\nu_i}))\cdot\prod_j (a_{-\mu_j} + u^{-\mu_j}\varepsilon^-_\lambda(p_{\mu_j}))|0\rangle.
\end{aligned}$$

よって主張はskew 関数の性質から直ちに従う. □

4.3. Iqbal-Kozçaz-Vafaのtopological vertex

Definition 4.3 (Iqbal-Kozcaz-Vafa)**.** refined topological vertex $C^{(\mathrm{IKV})}_{\lambda\mu\nu}(t,q)$ を次のように定める

$$C^{(\mathrm{IKV})}_{\lambda\mu\nu}(t,q) = \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{||\mu||^2}{2}} t^{\frac{\kappa(\mu)}{2}} q^{\frac{||\nu||^2}{2}} \frac{1}{c_\lambda}\sum_\eta \left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{|\eta|+|\lambda|-|\mu|}{2}} s_{\lambda'/\eta}(t^{-\rho}q^{-\nu})s_{\mu/\eta}(t^{-\nu'}q^{-\rho}), \tag{81}$$

ここに c_λ は (6) で定められ, $||\lambda||^2 = \sum_i \lambda_i^2$, $\kappa(\lambda) = \sum_i \lambda_i(\lambda_i + 1 - 2i)$ とする.

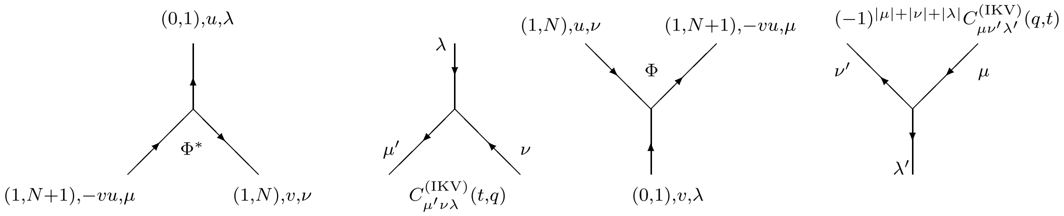


図 1: Φ, Φ^* と $(-1)^{|\mu|+|\nu|+|\lambda|}C^{(\mathrm{IKV})}_{\mu\nu'\lambda'}(q,t), C^{(\mathrm{IKV})}_{\mu'\nu\lambda}(t,q)$ との比較.

Proposition 4.4. intertwining operator Φ and Φ^* の行列要素は refined topological vertex を用いて表される：

$$\frac{1}{\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_{q,t}} \langle S_\mu(q,t)|\, \Phi_\lambda \begin{bmatrix}(1,N+1),-vu\\(0,1),v;(1,N),u\end{bmatrix} |s_\nu\rangle \tag{82}$$
$$= \left(\frac{q^{-1/2}u}{(-v)^N}\right)^{|\lambda|} f_\lambda^{-N}\cdot\ (-q^{-1/2}v)^{-|\nu|} f_\nu \cdot (t^{-1/2}v)^{|\mu|}\cdot (-1)^{|\mu|+|\nu|+|\lambda|}\ C^{(\mathrm{IKV})}_{\mu\nu'\lambda'}(q,t),$$

$$\langle S_\nu(q,t)|\, \Phi^*_\lambda \begin{bmatrix}(1,N),v;(0,1),u\\(1,N+1),-vu\end{bmatrix} |s_\mu\rangle \tag{83}$$
$$= \left(\frac{(-u)^N}{q^{-1/2}v}\right)^{|\lambda|} f_\lambda^{N}\cdot\ (-q^{-1/2}u)^{|\nu|} f_\nu^{-1} \cdot (t^{-1/2}u)^{-|\mu|}\cdot\ C^{(\mathrm{IKV})}_{\mu'\nu\lambda}(t,q).$$

Proof. Corollary 4.2 と (74) を用いる. □

Remark 4.5. Iqbal-Kozçaz-Vafa の topological vertex の定義では, 分割の transpose が各外向き矢印に対応させられる. 我々の規約と比較すれば, Φ, Φ^* に対して定められる矢印は全て反転して読まれるべきであることがわかる. 図 1 参照.

4.4. Awata-Kanno の topological vertex

Definition 4.6 (Awata-Kanno)**.** refined topological vertex ${C_{\mu\lambda}}^{\nu}(q,t), {C^{\mu\lambda}}_{\nu}(q,t)$ を次のように定める

$${C_{\mu\lambda}}^{\nu}(q,t) = P_\lambda(t^\rho;q,t)\sum_\sigma \iota P_{\mu'/\sigma'}(-t^{\lambda'}q^\rho;t,q)P_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho;q,t)(q^{1/2}/t^{1/2})^{|\sigma|-|\nu|}f_\nu(q,t)^{-1}, \tag{84}$$

$${C^{\mu\lambda}}_{\nu}(q,t) = (-1)^{|\lambda|+|\mu|+|\nu|}{C_{\mu'\lambda'}}^{\nu'}(t,q) \tag{85}$$

ここに f_λ は (51) で定められる.

Proposition 4.7. intertwining operator Φ, Φ^* の行列要素は次のように表される

$$\frac{c_\lambda}{c'_\lambda}\langle \iota P_\mu|\, \Phi_\lambda \begin{bmatrix}(1,N+1),-vu\\(0,1),v;(1,N),u\end{bmatrix} |\iota Q_\nu\rangle = \left(\frac{-t^{1/2}u}{q(-v)^N}\right)^{|\lambda|} f_\lambda^{-N}\ (t^{-1/2}v)^{|\mu|-|\nu|} f_\nu^{-1}\ {C^{\mu\lambda}}_{\nu}(q,t),$$
$$\langle \iota P_\nu|\, \Phi^*_\lambda \begin{bmatrix}(1,N),v;(0,1),u\\(1,N+1),-vu\end{bmatrix} |\iota Q_\mu\rangle = \left(\frac{q(-u)^N}{-t^{1/2}v}\right)^{|\lambda|} f_\lambda^{N}\ (t^{-1/2}u)^{-|\mu|+|\nu|} f_\nu\ {C_{\mu\lambda}}^{\nu}(q,t). \tag{86}$$

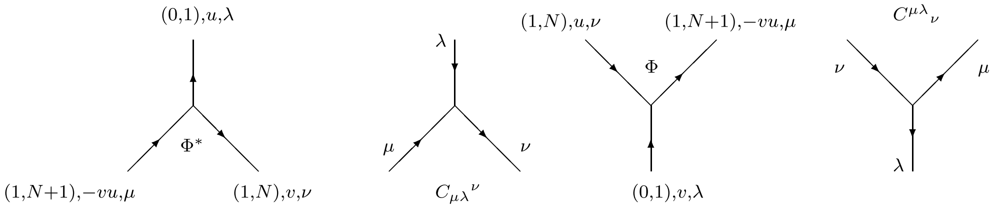
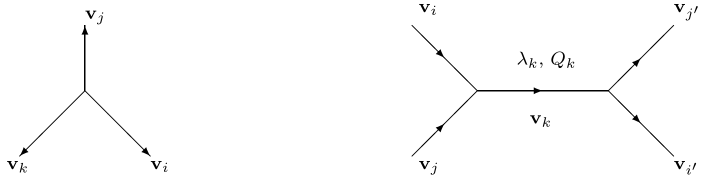


図 2: Φ, Φ^* と $C^{\mu\lambda}{}_{\nu}, C_{\mu\lambda}{}^{\nu}$ の比較.



vertex

(a)

edge

(b)

図 3: Gluing rule.

Remark 4.8. Φ, Φ^* と $C^{\mu\lambda}{}_{\nu}, C_{\mu\lambda}{}^{\nu}$ の対応において垂直な矢印が反転させられる. 図 2 参照.

4.5. Gluing rule

3 つの辺 i, j, k を持つ頂点を考える. 各辺にそれぞれ $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \in \mathbb{Z}^2$ を対応させる (図 3 (a)). ここでは全ての矢印は外向きに取ることにする. それらは次の 2 条件 (Calabi-Yau 条件と smoothness 条件と呼ばれる) を満たしているとする

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_j = 1, \tag{87}$$

ここに $(a, b) \wedge (c, d) = ad - bc$. これらは $\mathbf{v}_j \wedge \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \wedge \mathbf{v}_i = 1$ を意味することに注意.

Definition 4.9. $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{i'}, \mathbf{v}_{j'} \in \mathbb{Z}^2$ とする. 図 3 (b) のグラフを考える. λ_k を分割, また Q_k を parameter (Kähler parameter と呼ばれる) とする. data $\mathbf{v}_k$, λ_k, Q_k が付与された内線に対して, ‘gluing factor’ を

$$Q_k^{|\lambda_k|} (f_{\lambda_k})^{\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_{i'}}, \tag{88}$$

で定義する. refined topological vertex の縮約とは, 各内線に対して定められる gluing factor を掛け, さらに 2 回現れる index（分割）に関する総和を取ることと定める.

4.6. gluing ruleの確認

３点の intertwining operators Φ と Φ^* とを任意に組み合わせて得られる$\mathcal{U}$加群の intertwining operator $\mathcal{F}_{u_1}^{\mathbf{v}_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_m}^{\mathbf{v}_m} \to \mathcal{F}_{u'_1}^{\mathbf{v}'_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u'_n}^{\mathbf{v}'_n}$ を考える．その行列要素はProposition 4.4 ないし Proposition 4.7を用いて計算される．このとき Φ と Φ^* の合成の順序をひとつ定めると，（必ずしも連結でない）３点 vertexからなるグラフが得られる．構成法から，このグラフは次のような性質を持つ:

1. 各辺にはspectral parameter とベクトル$\in \mathbb{Z}^2$ が対応させられている，
2. 各頂点において条件 (87) が満たされている，
3. 各頂点に topological vertex が対応させられている (Propositions 4.4, 4.7),
4. 各内線は，正しいgluing factorが与えられるならば，topological vertexの縮約を与える．

従って，各内線に正しいgluing factorが生じることが示されれば，代数$\mathcal{U}$の表現論に立脚する我々の方法は（外線のdataのみに依存する因子を除いて） refined topological vertexの枠組と完全に一致する．可能な全ての場合を（局所的に）調べることによって，実際にそうなっていることを示すことができる．

Theorem 4.10. 我々のweb diagramはpreferred direction として垂直な単位ベクトル $(0, 1)$ を持つものとする．３点 intertwining operators Φ と Φ^* を任意に合成したものの行列要素は，対応する web diagramから refined topological vertex の枠組みで計算される量と（外線のdataのみに依存する乗法的因子を除いて）一致する．

5. Nekrasov分配関数

我々はTheorem 4.10 でrefined topological vertexと代数$\mathcal{U}$を用いる我々の方法が同じであることを示した．文献 [IKV], [T], [AK2] ではrefined topological vertexを用いてNekrasov分配関数[N], [FP] が得られることが示されている．ここではそのような既知の状況を用いて我々の方法が上手く働いていることを再確認する．各Fock moduleに与えられたspectral parameterの意味を調べたい．

5.1. 因子 $N_{\lambda,\mu}(u)$.

Definition 5.1. 分割の組 (λ, μ) と不定元 u に対して

$$N_{\lambda,\mu}(u) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (1 - uq^{-\mu_i+j-1}t^{-\lambda'_j+i}) \cdot \prod_{(k,l)\in\mu} (1 - uq^{\lambda_k-l}t^{\mu'_l-k+1}) \tag{89}$$

$$= \prod_{\square\in\lambda}(1 - uq^{-a_\mu(\square)-1}t^{-\ell_\lambda(\square)}) \cdot \prod_{\blacksquare\in\mu}(1 - uq^{a_\lambda(\blacksquare)}t^{\ell_\mu(\blacksquare)+1}), \tag{90}$$

と定める．

Lemma 5.2. 因子 $N_{\lambda,\mu}(u)$ に対して次が成り立つ：

$$N_{\lambda,\mu}(u)=\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)}\prod_{j=1}^{\ell(\lambda)}(uq^{-\mu_i+\lambda_{j+1}}t^{i-j};q)_{\lambda_j-\lambda_{j+1}}\cdot\prod_{\alpha=1}^{\ell(\mu)}\prod_{\beta=1}^{\ell(\mu)}(uq^{\lambda_\alpha-\mu_\beta}t^{-\alpha+\beta+1};q)_{\mu_\beta-\mu_{\beta+1}}, \tag{91}$$

$$N_{\lambda,\mu}(q^{1/2}t^{-1/2}x)=N_{\mu,\lambda}(q^{1/2}t^{-1/2}x^{-1})x^{|\lambda|+|\mu|}\frac{f_\lambda}{f_\mu}, \tag{92}$$

$$c_\lambda c'_\lambda=(-1)^{|\lambda|}q^{n(\lambda')+|\lambda|}t^{n(\lambda)}N_{\lambda,\lambda}(1). \tag{93}$$

Lemma 5.3. $\varepsilon^{\pm}_{\lambda}$ を (69) で定められた algebra homomorphism とすると

$$\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}\left(\varepsilon^+_\lambda p_n\right)\left(\varepsilon^-_\mu p_n\right)u^n\right)=\mathcal{G}(u)^{-1}N_{\lambda,\mu}(u), \tag{94}$$

$$\mathcal{G}(u)=\exp\left(-\sum_{n>0}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-q^n)(1-t^{-n})}u^n\right)\in\mathbb{Q}(q,t)[[u]]. \tag{95}$$

Proof. 条件 $\ell\geq\mathrm{Max}(\ell(\lambda),\ell(\mu))$ を満たす整数 ℓ を固定すると

LHS

$$\begin{aligned}
&=\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}u^n\left(\frac{t^{-n}}{1-t^{-n}}+\sum_{i=1}^{\ell}(q^{\lambda_i n}-1)t^{-in}\right)\left(\frac{t^n}{1-t^n}+\sum_{j=1}^{\ell}(q^{-\mu_j n}-1)t^{jn}\right)\right)\\
&=\mathcal{G}(u)^{-1}\exp\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}u^n\left(\sum_{i,j=1}^{\ell}(q^{\lambda_i}t^{-i})^n(q^{-\mu_j}t^j)^n\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\frac{t^{-(\ell+1)n}}{1-t^{-n}}\sum_{j=1}^{\ell}(q^{-\mu_j}t^j)^n+\frac{t^{(\ell+1)n}}{1-t^n}\sum_{i=1}^{\ell}(q^{\lambda_i}t^{-i})^n\right)\right)\\
&=\mathcal{G}(u)^{-1}\prod_{i=1}^{\ell}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{(uq^{-\mu_i+\lambda_j}t^{i-j+1};q)_\infty}{(uq^{-\mu_i+\lambda_j}t^{i-j};q)_\infty}\cdot\prod_{k=1}^{\ell}\frac{(uq^{-\mu_k}t^{k-\ell};q)_\infty}{(uq^{\lambda_k}t^{-k+\ell+1};q)_\infty},
\end{aligned}$$

ここに

$$(u;q)_\infty=\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}u^n\right)\in\mathbb{Q}(q)[[u]].$$

$(u;q)_\infty/(q^nu;q)_\infty=(u;q)_n=(1-u)(1-qu)\cdots(1-q^{n-1}u)$ $(n=0,1,2,\ldots)$ であることに注意し, (91) を用いれば (94) を得る. □

以上の準備により, $\widetilde{\Phi}_\lambda,\widetilde{\Phi}^*_\lambda$ の演算子積に関する基本公式を得る.

Proposition 5.4. 次の演算子積公式が成り立つ：

$$: \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(z)\xi_\lambda(z) :: \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(w)\xi_\mu(w) := \frac{\mathcal{G}(w/z)}{N_{\mu,\lambda}(w/z)} : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(z)\xi_\lambda(z)\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(w)\xi_\mu(w) :, \tag{96}$$

$$: \widetilde{\Phi}_\emptyset(z)\eta_\lambda(z) :: \widetilde{\Phi}_\emptyset(w)\eta_\mu(w) := \frac{\mathcal{G}(qt^{-1}w/z)}{N_{\mu,\lambda}(qt^{-1}w/z)} : \widetilde{\Phi}_\emptyset(z)\eta_\lambda(z)\widetilde{\Phi}_\emptyset(w)\eta_\mu(w) :, \tag{97}$$

$$: \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(z)\xi_\lambda(z) :: \widetilde{\Phi}_\emptyset(w)\eta_\mu(w) := \frac{N_{\mu,\lambda}(q^{1/2}t^{-1/2}w/z)}{\mathcal{G}(q^{1/2}t^{-1/2}w/z)} : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(z)\xi_\lambda(z)\widetilde{\Phi}_\emptyset(w)\eta_\mu(w) :, \tag{98}$$

$$: \widetilde{\Phi}_\emptyset(z)\eta_\lambda(z) :: \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(w)\xi_\mu(w) := \frac{N_{\mu,\lambda}(q^{1/2}t^{-1/2}w/z)}{\mathcal{G}(q^{1/2}t^{-1/2}w/z)} : \widetilde{\Phi}_\emptyset(z)\eta_\lambda(z)\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(w)\xi_\mu(w) : . \tag{99}$$

Proof. これらは (75), (76) と (94) から従う. □

5.2. Pure $SU(N_c)$ 分配関数

$\mathbb{R}^4 \times S^1$ 上の pure $SU(N_c)$ gauge 理論で 5 次元の Chern-Simons 項がある場合を考え, K 理論的分配関数のうち instanton からの寄与を表す部分を Z^{inst}_m とする. これは

$$Z^{\mathrm{inst}}_m(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{N_c}, \Lambda; q, t) = \sum_{\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(N_c)}} \frac{\prod_{\alpha=1}^{N_c}((q^{1/2}t^{-1/2})^{-N_c}\Lambda^{2N_c}(-\mathbf{e}_\alpha)^{-m})^{|\lambda^{(\alpha)}|} f^{-m}_{\lambda^{(\alpha)}}}{\prod_{\alpha,\beta=1}^{N_c} N_{\lambda^{(\alpha)},\lambda^{(\beta)}}(\mathbf{e}_\alpha/\mathbf{e}_\beta)}, \tag{100}$$

と書けることが知られている.

$L, M \in \mathbb{Z}$, また u, v, w を不定元とする. 図 4 で与えられる 4 点の作用素を考える

$$\Phi\begin{bmatrix}(1, L-1), u/w; (1, M+1), vw \\ (1, L), u; (1, M), v\end{bmatrix} : \mathcal{F}^{(1,L)}_u \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_v \longrightarrow \mathcal{F}^{(1,L-1)}_{u/w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M+1)}_{vw}, \tag{101}$$

ここに右辺は次のような intertwining operator の合成とする

$$\mathcal{F}^{(1,L)}_u \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_v \overset{\Phi^*\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow} \mathcal{F}^{(1,L-1)}_{u/w} \otimes \mathcal{F}^{(0,1)}_{-w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_v \overset{\mathrm{id}\otimes\Phi}{\longrightarrow} \mathcal{F}^{(1,L-1)}_{u/w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M+1)}_{vw}. \tag{102}$$

任意の $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{F}^{(1,L)}_u \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_v$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi\begin{bmatrix}(1, L-1), u/w; (1, M+1), vw \\ (1, L), u; (1, M), v\end{bmatrix}(\alpha \otimes \beta) \qquad (103)\\
&= \sum_\lambda \frac{1}{\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle_{q,t}} \Phi^*_\lambda \begin{bmatrix}(1, L-1), u/w; (0, 1), -w \\ (1, L), u\end{bmatrix}(\alpha) \otimes \Phi_\lambda \begin{bmatrix}(1, M+1), vw \\ (0, 1), -w; (1, M), v\end{bmatrix}(\beta) \\
&= \sum_\lambda \frac{(q^{-1/2}t^{1/2}u^{-1}vw^{L-M})^{|\lambda|} f^{L-M-1}_\lambda}{N_{\lambda,\lambda}(1)} \Big(: \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-w)\xi_\lambda(-w) : \alpha\Big) \otimes \Big(: \widetilde{\Phi}_\emptyset(-w)\eta_\lambda(-w) : \beta\Big)
\end{aligned}$$

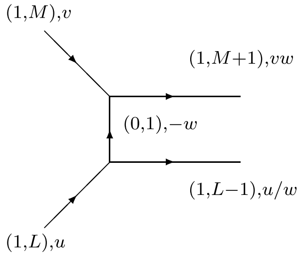


図 4: 4 点作用素.

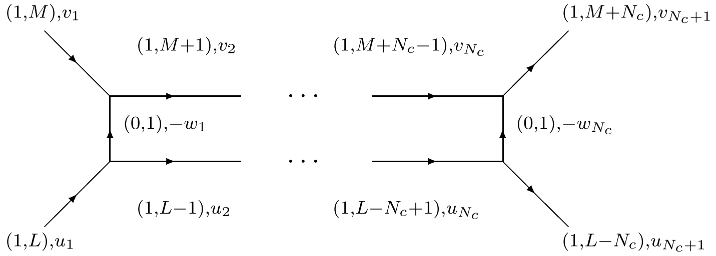


図 5: pure $SU(N)$ gauge 分配関数に対する Web diagram.

となることが Theorem 3.2, 3.4 と (93) からわかる.

$w_1, w_2, \ldots, w_{N_c}$ を不定元の組とし, 簡単のために

$$u_i = u \prod_{k=1}^{i-1} w_k^{-1}, \qquad v_i = v \prod_{k=1}^{i-1} w_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N_c + 1), \tag{104}$$

とおく. 梯子状の図 5 で定められる 4 点の作用素

$$\Phi \begin{bmatrix} (1, L - N_c), u_{N_c+1}; (1, M + N_c), v_{N_c+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{bmatrix} : \mathcal{F}_{u_1}^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_{v_1}^{(1,M)} \longrightarrow \mathcal{F}_{u_{N_c+1}}^{(1,L-N_c)} \otimes \mathcal{F}_{v_{N_c+1}}^{(1,M+N_c)}, \tag{105}$$

を合成

$$\begin{aligned} &\Phi \begin{bmatrix} (1, L - N_c), u_{N_c+1}; (1, M + N_c), v_{N_c+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{bmatrix} \qquad (106) \\ &= \Phi \begin{bmatrix} (1, L - N_c), u_{N_c+1}; (1, M + N_c), v_{N_c+1} \\ (1, L - N_c + 1), u_{N_c}; (1, M + N_c - 1), v_{N_c} \end{bmatrix} \cdots \Phi \begin{bmatrix} (1, L - 1), u_2; (1, M + 1), v_2 \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

によって定める.

Proposition 5.5. $\mathbf{e}_i, \Lambda, m$ を

$$\mathbf{e}_i = -w_i, \qquad \Lambda^{2N_c} = \frac{v}{u}\prod_{i=1}^{N_c} w_i, \qquad m = -L + M + N_c, \tag{107}$$

によって定める．このとき

$$\begin{aligned}
&\langle P_\emptyset \otimes P_\emptyset | \, \Phi \begin{bmatrix} (1, L - N_c), u_{N_c+1}; (1, M + N_c), v_{N_c+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{bmatrix} | P_\emptyset \otimes P_\emptyset \rangle \\
&= \prod_{1 \le i < j \le N} \mathcal{G}(\mathbf{e}_i/\mathbf{e}_j)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}_i/\mathbf{e}_j) \cdot Z_m^{\mathrm{inst}}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{N_c}, \Lambda; q, t),
\end{aligned} \tag{108}$$

が成り立つ．

Proof. Lemma 5.2 と Proposition 5.4 を用いれば

$$\begin{aligned}
\text{LHS of (108)} &= \sum_{\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(N_c)}} \prod_{k=1}^{N_c} \frac{\left(q^{-1/2}t^{1/2}v_i u_i^{-1} w_i^{L-M-2i+2}\right)^{|\lambda^{(i)}|}}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(i)}}(1)} f_{\lambda^{(i)}}^{L-M-2i+1} \\
&\quad \times \langle 0 | : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-w_{N_c})\xi_{\lambda^{(N_c)}}(-w_{N_c}) : \cdots : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-w_1)\xi_{\lambda^{(1)}}(-w_1) : |0\rangle \\
&\quad \times \langle 0 | : \widetilde{\Phi}_\emptyset(-w_{N_c})\eta_{\lambda^{(N_c)}}(-w_{N_c}) : \cdots : \widetilde{\Phi}_\emptyset(-w_1)\eta_{\lambda^{(1)}}(-w_1) : |0\rangle \\
&= \sum_{\lambda^{(1)},\cdots,\lambda^{(N_c)}} \prod_{k=1}^{N_c} \frac{\left(q^{-1/2}t^{1/2}v_i u_i^{-1} w_i^{L-M-2i+2}\right)^{|\lambda^{(i)}|}}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(i)}}(1)} f_{\lambda^{(i)}}^{L-M-2i+1} \\
&\quad \times \prod_{1 \le i < j \le N_c} \frac{\mathcal{G}(w_i/w_j)}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(w_i/w_j)} \frac{\mathcal{G}(qt^{-1}w_i/w_j)}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(qt^{-1}w_i/w_j)},
\end{aligned}$$

となる．整理すると結果を得る． □

5.3. $N_f = 2N_c$ 個の物質場がある場合.

$N_f = 2N_c$ 個の fundamental matter がある場合も見ておきたい．u, v, w, x, y を不定元とする．6 点の作用素

$$\begin{aligned}
&\Phi \begin{bmatrix} (1,0), ux/w; (1,0), vw/y; (0,1), -y \\ (0,1), -x; (1,0), u; (1,0), v \end{bmatrix} \\
&: \mathcal{F}^{(0,1)}_{-x} \otimes \mathcal{F}^{(1,0)}_{u} \otimes \mathcal{F}^{(1,0)}_{v} \longrightarrow \mathcal{F}^{(1,0)}_{ux/w} \otimes \mathcal{F}^{(1,0)}_{vw/y} \otimes \mathcal{F}^{(0,1)}_{-y},
\end{aligned} \tag{109}$$

を次のような intertwining operator の合成として定める

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{(0,1)}_{-x} \otimes \mathcal{F}^{(1,L)}_{u} \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_{v} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Phi^*\otimes\mathrm{id}} \mathcal{F}^{(0,1)}_{-x} \otimes \mathcal{F}^{(1,L-1)}_{u/w} \otimes \mathcal{F}^{(0,1)}_{-w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_{v} \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}^{\otimes 2}\otimes\Phi} \mathcal{F}^{(0,1)}_{-x} \otimes \mathcal{F}^{(1,L-1)}_{u/w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M+1)}_{vw} \xrightarrow{\Phi\otimes\Phi^*} \mathcal{F}^{(1,L)}_{ux/w} \otimes \mathcal{F}^{(1,M)}_{vw/y} \otimes \mathcal{F}^{(0,1)}_{-y}.
\end{aligned} \tag{110}$$

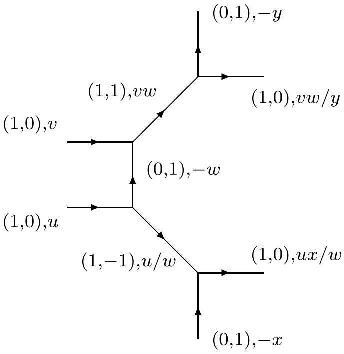


図 6: 6 点の作用素.

任意の $P_\lambda \otimes \alpha \otimes \beta \in \mathcal{F}^{(0,1)}_{-x} \otimes \mathcal{F}^{(1,0)}_{u} \otimes \mathcal{F}^{(1,0)}_{v}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Phi\begin{bmatrix}(1,0),ux/w;(1,0),vw/y;(0,1),-y\\(0,1),-x;(1,0),u;(1,0),v\end{bmatrix}(P_\lambda\otimes\alpha\otimes\beta)\\
&=\sum_{\mu,\nu}\frac{1}{\langle P_\mu,P_\mu\rangle_{q,t}}\\
&\times\Phi_\lambda\begin{bmatrix}(1,0),ux/w\\(0,1),-x;(1,-1),u/w\end{bmatrix}\Phi^*_\mu\begin{bmatrix}(1,-1),u/w;(0,1),-w\\(1,0),u\end{bmatrix}(\alpha)\\
&\otimes\Phi^*_\nu\begin{bmatrix}(1,0),vw/y;(0,1),-y\\(1,1),vw\end{bmatrix}\Phi_\mu\begin{bmatrix}(1,1),vw\\(0,1),-w;(1,0),v\end{bmatrix}(\beta)\otimes Q_\nu\\
&=\sum_{\mu,\nu}\frac{q^{n(\lambda')}(ux/w)^{|\lambda|}q^{n(\nu')}(qy/vw)^{|\nu|}}{c_\lambda c_\nu}\frac{(q^{1/2}t^{-1/2})^{-|\mu|}(v/u)^{|\mu|}f_\mu^{-1}}{N_{\mu,\mu}(1)}\\
&\times\Big(:\widetilde{\Phi}_\emptyset(-x)\eta_\lambda(-x)::\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-w)\xi_\mu(-w):\alpha\Big)\\
&\otimes\Big(:\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-y)\xi_\nu(-y)::\widetilde{\Phi}_\emptyset(-w)\eta_\mu(-w):\beta\Big)\otimes Q_\nu.
\end{aligned} \tag{111}$$

２つの垂直な外線に空の分割 $\emptyset$ を差し込むことによってこの 6 点の作用素から次のような 4 点の作用素を導く：

$$\Phi\begin{bmatrix}(1,0),ux/w;(1,0),vw/y\\(1,0),u;(1,0),v\end{bmatrix}:\mathcal{F}^{(1,0)}_{u}\otimes\mathcal{F}^{(1,0)}_{v}\longrightarrow\mathcal{F}^{(1,0)}_{ux/w}\otimes\mathcal{F}^{(1,0)}_{vw/y}.$$

これは任意の $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{F}_u^{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,0)}$ を

$$\begin{aligned}
&\Phi \begin{bmatrix} (1,0), ux/w; (1,0), vw/y \\ (1,0), u; (1,0), v \end{bmatrix} (\alpha \otimes \beta) \qquad (112)\\
&= \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \langle P_\emptyset, \bullet \rangle_{q,t} \Phi \begin{bmatrix} (1,0), ux/w; (1,0), vw/y; (0,1), -y \\ (0,1), -x; (1,0), u; (1,0), v \end{bmatrix} (P_\emptyset \otimes \alpha \otimes \beta) \\
&= \sum_\mu \frac{(q^{1/2}t^{-1/2})^{-|\mu|}(v/u)^{|\mu|} f_\mu^{-1}}{N_{\mu,\mu}(1)} \\
&\times \left(\widetilde{\Phi}_\emptyset(-x) : \widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-w)\xi_\mu(-w) : \alpha \right) \otimes \left(\widetilde{\Phi}^*_\emptyset(-y) : \widetilde{\Phi}_\emptyset(-w)\eta_\mu(-w) : \beta \right),
\end{aligned}$$

に写すものとして定める，ここに $\langle P_\emptyset, \bullet \rangle_{q,t} : \Lambda_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}$ は射影子 $\langle P_\emptyset, \bullet \rangle_{q,t} Q_\nu = \langle P_\emptyset, Q_\nu \rangle_{q,t}$ とする.

$u, v, w_1, \ldots, w_{N_c}, x_1, \ldots, x_{N_c}, y_1, \ldots, y_{N_c}$ を不定元の組とする. 簡単のため

$$u_i = u \prod_{k=1}^{i-1} x_k/w_k, \qquad v_i = v \prod_{k=1}^{i-1} w_k/y_k, \qquad (i = 1, 2, \ldots, N_c + 1), \qquad (113)$$

とおく.

Proposition 5.6. パラメータ $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}''_i, \Lambda$ を

$$\mathbf{e}_i = -w_i, \quad \mathbf{e}'_i = -q^{1/2}t^{-1/2}y_i, \quad \mathbf{e}''_i = -q^{-1/2}t^{1/2}x_i, \quad \Lambda^{2N_c} = (q^{1/2}t^{-1/2})^{-N} \frac{v}{u} \prod_{i=1}^{N_c} \frac{w_i}{y_i}, \qquad (114)$$

と定める. このとき, 次のような 4 点の作用素の積の行列要素が Nekrasov 分配関数を用いて表される

$$\langle P_\emptyset \otimes P_\emptyset | \, \Phi \begin{bmatrix} (1,0), u_{N_c+1}; (1,0), v_{N_c+1} \\ (1,0), u_{N_c}; (1,0), v_{N_c} \end{bmatrix} \cdots \Phi \begin{bmatrix} (1,0), u_2; (1,0), v_2 \\ (1,0), u_1; (1,0), v_1 \end{bmatrix} | P_\emptyset \otimes P_\emptyset \rangle \qquad (115)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^{N_c} \frac{1}{\mathcal{G}(\mathbf{e}_k/\mathbf{e}''_k)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}_k/\mathbf{e}'_k)} \cdot \prod_{1 \le i < j \le N_c} \frac{\mathcal{G}(\mathbf{e}_i/\mathbf{e}_j)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}_i/\mathbf{e}_j)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}''_i/\mathbf{e}''_j)\mathcal{G}(\mathbf{e}'_i/\mathbf{e}'_j)}{\mathcal{G}(\mathbf{e}_i/\mathbf{e}''_j)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}''_i/\mathbf{e}_j)\mathcal{G}(qt^{-1}\mathbf{e}_i/\mathbf{e}'_j)\mathcal{G}(\mathbf{e}'_i/\mathbf{e}_j)} \\
&\times \sum_{\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(N_c)}} \prod_{k=1}^{N_c} \Lambda^{2N_c|\lambda^{(k)}|} \prod_{1 \le i,j, \le N_c} \frac{N_{\emptyset,\lambda^{(j)}}(\mathbf{e}'_i/\mathbf{e}_j) N_{\lambda^{(i)},\emptyset}(\mathbf{e}_i/\mathbf{e}''_j)}{N_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}(\mathbf{e}_i/\mathbf{e}_j)}.
\end{aligned}$$

参考文献

[AFS] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, Quantum algebraic approach to refined topological vertex, JHEP 03 (2012) 041.

[AK2] H. Awata, H. Kanno, *Refined BPS state counting from Nekrasov's formula and Macdonald functions*, Internat. J. Modern Phys. A **24** (2009), no. 12, 2253–2306.

[DI] J. Ding, K. Iohara, *Generalization of Drinfeld quantum affine algebras*, Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 2, 181–193.

[FFJMM] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum continuous* $\mathfrak{gl}_\infty$*, Semi-infinite construction of representations*, Kyoto J. Math. **51** (2011), no 2. 337–364.

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys. **50** (2009), no. 9, 095215.

[FP] R. Flume and R. Poghossian, *An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg-Witten prepotential*, Internat. J. Modern Phys. A **18** (2003), no. 14, 2541–2563.

[FT] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, *Heisenberg action in the equivariant K-theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, arXiv:0904.1679.

[GNY] L. Göttsche, H. Nakajima and K. Yoshioka, *K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting*, Pure Appl. Math. Q. 5 (2009), no. 3, Special Issue: In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 2, 1029–1111.

[IKV] A. Iqbal, C. Kozçaz and C. Vafa, *The refined topological vertex*, J. High Energy Phys. (2009) no. 10, 069, 58pp.

[Ma] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press (1995).

[Mi] K. Miki, *A* (q,γ) *analogue of the* $W_{1+\infty}$ *algebra*, J. Math. Phys. **48** (2007) 123520.

[NY1] H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. **162** (2005), no. 2, 313–355.

[NY2] H. Nakajima, K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. II. K-theoretic partition function*, Transform. Groups **10** (2005), no. 3-4, 489–519.

[N] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), no. 5, 831–864.

[T] M. Taki, *Refined Topological Vertex and Instanton Counting*, JHEP **0803**, 048 (2008).

10

トロピカル周期戸田格子における可換な時間発展

高木 太一郎　(防衛大)*

1. Introduction

以下のような発展方程式に従う力学系は超離散周期戸田格子と呼ばれている [1]。

$$Q_j^{t+1} = \min(W_j^t, Q_j^t - X_j^t), \qquad X_j^t = \min_{0\le k\le N-1}\Big(\sum_{l=1}^{k}(W_{j-l}^t - Q_{j-l}^t)\Big),$$

$$W_j^{t+1} = Q_{j+1}^t + W_j^t - Q_j^{t+1}$$

「超離散」という名前をもっているが、この系の従属変数は離散値とは限らない。我々はこの系をトロピカル周期戸田格子と呼ぶことにする [2]。この系はトロピカル代数幾何との関係において注目を集めている。一般性を失うことなく従属変数は正の値をとるものとしてよく、この系の時間発展の様子は白黒 2 色の帯を用いて図 1 のように（セルオートマトンのように）視覚化することができる。

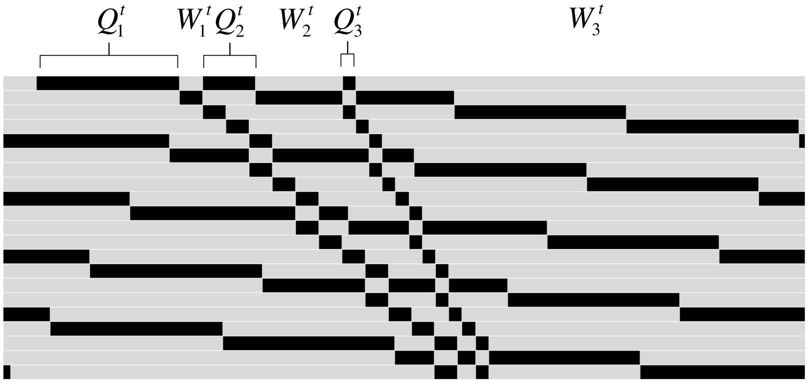


図 1: トロピカル周期戸田格子の時間発展

従属変数を自然数の集合に限定したものがいわゆる周期箱玉系である。この場合は量子群の結晶の同型写像（組合せ R) を用いた定式化により可換な時間発展の族が構成できる [3]。このような時間発展の族は、系の等位集合の構造を理解するのに重要である。

一方、従属変数が一般の正実数値の場合については、このような可換な時間発展の族の存在は知られていない。本講演では、一般のトロピカル周期戸田格子における可換な時間発展の族のひとつの構成法について報告する [4]。

2. Results

例を用いて説明する（図 2)。帯 S_1 を白と黒のセグメントに分割する。各セグメント（Y）に対し、長さ l の帯（X）を用いて図 3 のような局所的時間発展 $\overline{R}$ を左から右へ

本研究は科研費 (課題番号:22540241) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 14T05, 37B15, 37J35

[*] 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20　防衛大学校 応用科学群 応用物理学科
e-mail: `takagi@nda.ac.jp`

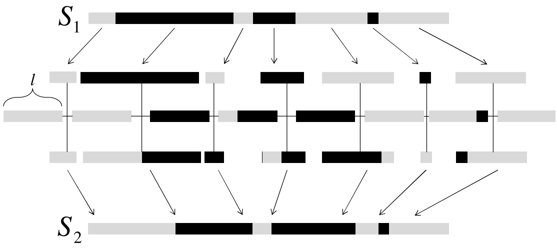


図 2: 時間発展 $T_l : S_1 \mapsto S_2$

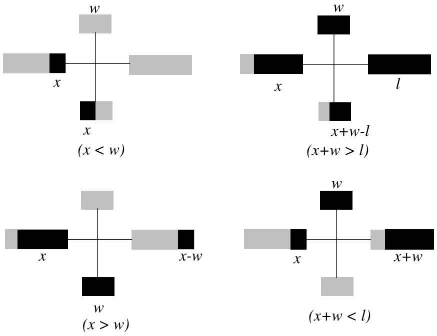


図 3: 時間発展 T_l の定義のための局所発展則 $\overline{R} : (X, Y) \mapsto (\tilde{Y}, \tilde{X})$

順に適用する。ここで各バーテックスに対し、左・上・下・右にあるものを $X, Y, \tilde{Y}, \tilde{X}$ としている。このようにして決まる図 2 の水平な中心線上にある帯たちを容量 l のキャリアと呼ぶことにする。得られた $\tilde{Y}$ たちをつなぎ合わせてできる帯を S_2 とする。このとき、以下が成り立つ。

定理 1. 任意の S_1 と l に対して、図 *2* の両端のキャリアを同じものにとることができる。この条件のもとで S_2 が一意に決定される。

これによって決まる S_2 を用いて時間発展 T_l を $T_l : S_1 \mapsto S_2$ により定義する。(もとの発展方程式による時間発展は T_∞ に相当する。)

定理 2. この時間発展は可換である。すなわち、$T_k T_l = T_l T_k$ が成り立つ。

参考文献

[1] T. Kimijima and T. Tokihiro, Initial-value problem of the discrete periodic Toda equations and its ultradiscretization, Inverse Problems **18** 1705–1732 (2002).

[2] R. Inoue, A. Kuniba and T. Takagi: Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry, J. Phys. A **45**, (2012) 073001.

[3] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi: Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system, Nucl. Phys. B **747** [PM] (2006) 354–397.

[4] T. Takagi: Commuting Time Evolutions in the Tropical Periodic Toda Lattice, arXiv:1206.4759.

Tetrahedron equation and quantum R matrices for spin representations

国場 敦夫 (東大総合文化)　　Sergey Sergeev(Canberra 大学)

1　Tetrahedron 方程式

F をベクトル空間とし，線形写像 $\mathcal{R} \in \mathrm{End}(F \otimes F \otimes F)$ に対する関係式

$$\mathcal{R}_{1,2,3}\,\mathcal{R}_{1,4,5}\,\mathcal{R}_{2,4,6}\mathcal{R}_{3,5,6} \;=\; \mathcal{R}_{3,5,6}\,\mathcal{R}_{2,4,6}\,\mathcal{R}_{1,4,5}\,\mathcal{R}_{1,2,3} \in \mathrm{End}(F^{\otimes 6}) \tag{1}$$

を tetrahedron 方程式という [Z]．添え字は作用するテンソル積の成分を表す．V をもう一つのベクトル空間とし，元 $\mathcal{L}_{1,a,b} \in \mathrm{End}(\overset{1}{F} \otimes \overset{a}{V} \otimes \overset{b}{V})$ に対する関係式

$$\mathcal{R}_{1,2,3}\,\mathcal{L}_{1,a,b}\,\mathcal{L}_{2,a,c}\mathcal{L}_{3,b,c} \;=\; \mathcal{L}_{3,b,c}\,\mathcal{L}_{2,a,c}\,\mathcal{L}_{1,a,b}\,\mathcal{R}_{1,2,3} \in \mathrm{End}(\overset{1}{F} \otimes \overset{2}{F} \otimes \overset{3}{F} \otimes \overset{a}{V} \otimes \overset{b}{V} \otimes \overset{c}{V}) \tag{2}$$

も tetrahedron 方程式と呼ぶ．(上付きの $1, a$ 等はテンソル積の成分の指定するラベル．) 関係式 (2) は特殊化 $V = F$, $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ により (1) に帰着する．2 次元 (1+1 次元) 量子可積分系との類推では F は「補助空間」，$V \otimes V$ は「量子空間」に相当する．2 次元の場合と同様に，$RLLL = LLLR$ 関係 (2) の量子空間は自然に n 重テンソル積に拡張される．即ち $\overset{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V}} = \overset{a_1}{V} \otimes \overset{a_2}{V} \otimes \cdots \otimes \overset{a_n}{V}$ を用いて $\mathcal{L}_{1,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \;=\; \mathcal{L}_{1,a_1,b_1}\mathcal{L}_{1,a_2,b_2}\cdots\mathcal{L}_{1,a_n,b_n} \;\in\; \mathrm{End}(\overset{1}{F} \otimes \overset{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V}} \otimes \overset{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{V}})$ を導入すると (2) から以下の等式 (n 層版 tetrahedron 方程式) が従う．

$$\mathcal{R}_{1,2,3}\,\mathcal{L}_{1,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\,\mathcal{L}_{2,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}\,\mathcal{L}_{3,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}} \;=\; \mathcal{L}_{3,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}\,\mathcal{L}_{2,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}\,\mathcal{L}_{1,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\,\mathcal{R}_{1,2,3}\;. \tag{3}$$

2　解

以下では $V = \mathbb{C}v_0 \oplus \mathbb{C}v_1$, $F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathbb{C}|m\rangle$ ととる．(1) の解としては [KV,BS] で得られた $\mathcal{R}$ を採用する (具体形は [KS] の付録参照)．(2) の解としては，この $\mathcal{R}$ と，[BS] で得られた $\mathcal{L}$ を用いる．後者は具体的には $\alpha, \ldots, \beta' = 0, 1$ を V の基底 v_0, v_1 に対応する添え字とし，$V \otimes V$ に働く行列表示を用いると，以下の様な「量子 6 頂点模型」として与えられる．

$$\mathcal{L} = \bigl(\mathcal{L}(\alpha', \beta'|\alpha,\, \beta)\bigr), \quad \mathcal{L}(\alpha', \beta'|\alpha,\, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\mathbf{k} & \mathbf{a}^{+} & 0 \\ 0 & \mathbf{a}^{-} & -i\mathbf{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで $\mathbf{a}^{+}|m\rangle = \sqrt{1 - p^{2m+2}}|m+1\rangle$,　$\mathbf{a}^{-}|m\rangle = \sqrt{1 - p^{2m}}|m-1\rangle$,　$\mathbf{k}|m\rangle = p^{m+\frac{1}{2}}|m\rangle$ であり，$p \in \mathbb{C}$ は $|p| < 1$ で generic とする (不定元としての扱いも可能)．$F^{*} = \sum_{m \geq 0} \mathbb{C}\langle m|$ を導入し，$\mathbb{C}$-線形なペアリング $F^{*} \times F \to \mathbb{C}$ を $\langle m|m'\rangle = \delta_{m,m'}$ により定義する．$\mathbf{a}^{\pm}, \mathbf{k}$ の F^{*} への作用を $\langle m|\mathbf{a}^{-} = \langle m+1|\sqrt{1 - p^{2m+2}}$,　$\langle m|\mathbf{a}^{+} = \langle m-1|\sqrt{1 - p^{2m}}$,　$\langle m|\mathbf{k} = \langle m|p^{m+\frac{1}{2}}$ により定義する．$\mathbf{a}^{\pm}, \mathbf{k}$ は p-変形されたボゾンの交換関係を満たす．

3　2次元簡約

ボゾンのフォック空間に以下の元を導入する．($(x;p)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-xp^i)$)

$$|\chi_1(x)\rangle = \frac{1}{(x\,\mathbf{a}^+;p)_\infty}|0\rangle, \qquad |\chi_2(x)\rangle = \frac{1}{(x(\mathbf{a}^+)^2;p^4)_\infty}|0\rangle,$$

$$\langle\overline{\chi}_1(x)| = \langle 0|\frac{1}{(x\,\mathbf{a}^-;p)_\infty}, \qquad \langle\overline{\chi}_2(x)| = \langle 0|\frac{1}{(x(\mathbf{a}^-)^2;p^4)_\infty},$$

$$\begin{aligned} |\chi_s(x,y)\rangle &= |\chi_s(x)\rangle\otimes|\chi_s(xy)\rangle\otimes|\chi_s(y)\rangle \in F\otimes F\otimes F \quad (s=1,2), \\ \langle\overline{\chi}_s(x,y)| &= \langle\overline{\chi}_s(x)|\otimes\langle\overline{\chi}_s(xy)|\otimes\langle\overline{\chi}_s(y)| \in F^*\otimes F^*\otimes F^* \quad (s=1,2). \end{aligned} \tag{4}$$

補題 ([KS])．任意パラメーター x, y に対し，次の等式が成り立つ．

$$\mathscr{R}|\chi_s(x,y)\rangle = |\chi_s(x,y)\rangle, \quad \langle\overline{\chi}_s(x,y)|\mathscr{R} = \langle\overline{\chi}_s(x,y)| \quad (s=1,2).$$

ベクトル (4) により tetrahedron 方程式 (3) のペアリングをとり，補題を用いると次が従う．

系．$s,t=1,2$ の選択ごとに $\mathscr{L}$ の2次元簡約を

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(x)\,(=\mathscr{R}^{s,t}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(x)) := \langle\overline{\chi}_s(x)|\mathscr{L}_{1,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}|\chi_t(1)\rangle \in \mathrm{End}(\overset{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V}}\otimes\overset{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{V}})$$

と定義すると，以下の Yang-Baxter 方程式を満たす．

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(x)\mathscr{R}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}(xy)\mathscr{R}_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}(y) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}(y)\mathscr{R}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}}(xy)\mathscr{R}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(x) \ \in \mathrm{End}(\overset{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{V}}\otimes\overset{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{V}}\otimes\overset{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{V}}).$$

添え字 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は空間のラベルに過ぎないので省き，以下では $\mathscr{R}^{s,t}(x)$ と書く．Tetrahedron 方程式の解から上記の2次元簡約により Yang-Baxter 方程式の解を導く処方は新しく，量子群による標準的な R 行列との関係が問われるのは自然である．次節ではこれに答える．

4　主結果

アフィン・リー環 $\mathfrak{g} = B_n^{(1)}, D_n^{(1)}, D_{n+1}^{(2)}$ について，Drinfeld-Jimbo 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ のスピン表現に付随する量子 R 行列を $R_{\mathfrak{g}}(x)$ とする．$B_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ については [O] 参照．スペクトルパラメーター x および R 行列 $R_{\mathfrak{g}}(x)$ は適宜規格化されているとする．

定理 ([KS])．$p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}q$ のもとに以下が成立する．

$$\mathscr{R}^{2,1}(x) = R_{B_n^{(1)}}(x), \qquad \mathscr{R}^{1,1}(x) = R_{D_{n+1}^{(2)}}(x), \qquad \mathscr{R}^{2,2}(x) = R_{D_n^{(1)}}(x).$$

文献

[BS] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, J. Phys. A: Math. Theor. **39** 3295-3310 (2006).
[KV] M. M. Kapranov, V. A. Voevodsky, Proc. Symp. in Pure Math. **56** 177-259 (1994).
[KS] A. Kuniba, S. Sergeev, arXiv:1203.6436 [math-ph].
[O] M. Okado, Commun. Math. Phys. **134** 467-486 (1990).
[Z] A. B. Zamolodchikov, Soviet Phys. JETP **52** 325-336 (1980).

Self-extensions and prime factorizations for simple $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$-modules

小寺 諒介
京都大学数理解析研究所

$U_q(L\mathfrak{g})$ を単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に付随した量子ループ代数（q は 1 の冪根でない）とする．量子ループ代数の素な既約表現の特徴づけに関する Chari-Moura-Young の最近の結果 [1] を紹介し，その精密化を試みる．

量子ループ代数の表現のテンソル積の構造に関する研究の中で，有限次元既約表現が非自明なテンソル積分解を持つ状況がよく起こることが認識され，「素元」にあたる概念が導入された．

定義　$U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 V が次を満たすとき，V は素であるという．

- $V \cong V_1 \otimes V_2$ と分解するのは V_1 または V_2 が自明表現のときのみである．

このような定義がなされれば，次に素な有限次元既約表現の分類，そして一般の有限次元既約表現に対する素因子分解の記述が問題となる．このふたつの問題は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合には完全に解決されている．もう少し詳しく述べると，有限次元既約表現が素であることと evaluation 加群であることが同値であり，与えられた Drinfeld 多項式から素因子分解を組合せ論的に記述することができる．特に，その組合せ論的記述により，素因子分解の一意性が知られている．一般の $\mathfrak{g}$ の場合には，わかっていることは少ない．アプリオリには素因子分解が一意に決まる保証はないし，一般には証明もされていない．

最近，Chari-Moura-Young [1] は次の予想を提出し，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合には証明を与えた．

予想 **(Chari-Moura-Young)**　$U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 V に対して次は同値．

- V は素である．
- $\dim \mathrm{Ext}^1(V, V) = 1$ である．

定理 **(Chari-Moura-Young)**　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき予想は正しい．

さらに，彼らは多くの素な既約表現（Kirillov-Reshetikhin 加群，minimal affinization

---

E-mail: kodera@kurims.kyoto-u.ac.jp
URL: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kodera/index-j.html

など）V に対して $\dim \mathrm{Ext}^1(V,V)=1$ となることを証明し，予想の根拠とした．

Chari-Moura-Young の予想の（ナイーブな）精密化として，次の問題が考えられる．

問題　$U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 V に対して $V \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ をその素因子分解とする．このとき $\dim \mathrm{Ext}^1(V,V)=r$ か？

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合には，次の定理が部分的な解答を与える．

定理　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ とする．$U_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 V に対して $V \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ をその素因子分解とする．

(i) (Chari-Moura-Young) $V_1,\ldots,V_r$ が互いに非同型ならば $\dim \mathrm{Ext}^1(V,V) \geq r$ である．
(ii) (K) $\dim \mathrm{Ext}^1(V,V) \leq r$ である．

(ii) の証明には，非自己拡大に関する筆者の以前の結果 [2] を用いる．

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のとき，任意の素な有限次元既約表現 V と任意の自然数 r に対して $V^{\otimes r}$ は既約であることが知られている．従って，(i) の仮定を満たさない既約表現は数多く存在する．しかしながら，Chari-Moura-Young は次の命題も証明している．

命題 **(Chari-Moura-Young)**　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ とする．$U_q(L\mathfrak{g})$ の素な有限次元既約表現 V に対して

$$\dim \mathrm{Ext}^1(V^{\otimes 2},V^{\otimes 2}) \geq 2$$

である．

これらのことから，上述の問題は少なくとも $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合には肯定的な解答を持つと思われる．証明のためには，素な有限次元既約表現 V に対して

$$\dim \mathrm{Ext}^1(V^{\otimes r},V^{\otimes r}) \geq r$$

を示すことが本質的であろう．

参考文献

[1] V. Chari, A. Moura, and C. Young, *Prime representations from a homological perspective*, arXiv:1112.6376.

[2] R. Kodera, Ext^1 *for simple modules over* $U_q(L\mathfrak{sl}_2)$, 第 14 回代数群と量子群の表現論研究集会報告集, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/˜kodera/pdf/RAQ14.pdf.

13

Quantum $6j$-symbols for non-integral highest weight representations of $\mathcal{U}_q(sl_2)$ at root of unity

村上　順　(早稲田大学)

F. Costantino との共同研究で 1 の冪根における $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の非整最高ウェイト表現に関する量子 Crebsch-Gordan 係数と量子 $6j$-記号を求め，いくつか応用を得た．自然数 $N \geqq 2$ に対して $q = \exp(\pi\sqrt{-1}/N)$ とおき，$\{n\} = q^n - q^{-n}$, $\{n\}! = \{n\}\{n-1\}\cdots\{1\}$, $[n] = \{n\}/\{1\}$, $[n]! = [n][n-1]\cdots[1]$ とし，$a - b$ が整数になる a, b に対し

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{[a][a-1]\cdots[b+1]}{[a-b][a-b-1]\cdots[1]}$$

とする．そして $\mathcal{U}_q(sl_2)$ とその表現 V^a を次で定める．ただし，a は半整数でない複素数とする．$\mathcal{U}_q(sl_2)$ を

$$\mathcal{U}_q(sl_2) = \Big\langle K,\ K^{-1},\ E,\ F \mid \\ K\,E\,K^{-1} = q\,E,\ K\,F\,K^{-1} = q^{-1}\,F,\ [E,F] = \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}} \Big\rangle$$

で定め，V^a の基底を $e_0^a, e_1^a, \cdots, e_{N-1}^a$ とし，$\mathcal{U}_q(sl_2)$ の V^a への作用を

$$K\,e_i = q^{a-i}\,e_i, \quad E\,e_i = [i]\,e_{i-1}, \quad F\,e_i = [2a-i]\,e_{i+1}$$

で定義する．$(V^a)^* \cong V^{N-1-a}$ である．$V^a \otimes V^{N-1-a} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \to V^a \otimes V^{N-1-a}$ を

$$e_i^a \otimes e_j^{N-1-a} \mapsto \delta_{i,N-1-j}\,q^{-(a-i)(N-1)}, \quad 1 \mapsto \sum_{i=0}^{N-1} q^{(b-N+1+i)(N-1)}\,e_i^a \otimes e_{N-1-i}^{N-1-a}$$

で定める．

$$V^a \otimes V^b = \bigoplus_{a+b-c=0,1,\cdots,n-1} V^c$$

であり，$Y_c^{a,b} : V^c \to V^a \otimes V^b$ を次で定める．

$$Y_c^{a,b}(e_t^c) = \sum_{u+v-t=a+b-c} C_{u,v,t}^{a,b,c}\,e_u^a \otimes e_v^b,$$

ここで $C_{u,v,t}^{a,b,c}$ は 量子 **Crebsch-Gordan** 係数 と呼ばれるもので，次のようにおく．

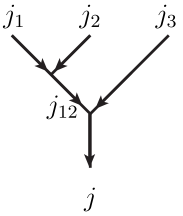
$$C_{u,v,t}^{a,b,c} = \sqrt{-1}^{c-a-b}(-1)^{v-t}q^{\frac{v(2b-v+1)-u(2a-u+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2c \\ 2c-t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2c \\ a+b+c-(n-1) \end{bmatrix} \\ \sum_{z+w=t,z,w\geq 0} (-1)^z q^{\frac{(2z-1)(2c-t+1)}{2}} \begin{bmatrix} a+b-c \\ u-z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2a-u+z \\ 2a-u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b-v+w \\ 2b-v \end{bmatrix}.$$

さらに上で与えた双対表現との同一視の写像を用いて $V^a \otimes V^b \to V^c$ も定義され，これらの合成写像 $V^c \to V^a \otimes V^b \to V^c$ はスカラー $\begin{bmatrix} 2a+N \\ 2a+1 \end{bmatrix}$ となる．

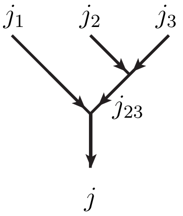
上の量子 Crebsch-Gordan 係数を用いて下の図の関係で定義される 量子 $6j$ 記号 $\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_q$ を次のように具体的に書き下すことができた．

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}_q =$$
$$(-1)^{N-1+B_{afc}} \begin{bmatrix} 2f+N \\ 2f+1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{\{B_{dec}\}!\,\{B_{abe}\}!}{\{B_{bdf}\}!\,\{B_{afc}\}!} \begin{bmatrix} 2e \\ A_{abe}+1-N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e \\ B_{ecd} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$\sum_{z=\max(0,-B_{bdf}+B_{dec})}^{\min(B_{dec},B_{afc})} (-1)^z \begin{bmatrix} A_{afc}+1 \\ 2c+z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{acf}+z \\ B_{acf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{bfd}+B_{dec}-z \\ B_{bfd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{dce}+z \\ B_{dfb} \end{bmatrix}.$$

ここで $A_{abc} = a+b+c$, $B_{abc} = a+b-c$ である．



$$= \sum_{j_{23}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}_q$$



以上の計算には任意の a, b と非負整数 c に対して成り立つ次の関係式が有用であった．

$$\sum_{s=0}^{c} q^{\pm(a+b-c+2)s} \begin{bmatrix} a-s \\ a-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+s \\ b \end{bmatrix} = q^{\pm(b+1)c} \begin{bmatrix} a+b+1 \\ a+b-c+1 \end{bmatrix} \quad \text{(複合同順)}$$

このようにして構成した量子 Crebsch-Gordan 係数と量子 $6j$ 記号について以下の応用を得た．

1. 既に知られていた R 行列も用いることで，空間グラフの不変量が構成できる．

2. Colored Alexander 不変量の面模型による構成ができる．

3. 上の量子 $6j$ 記号の double scaling limit が双曲切頂四面体の体積となる．

参考文献

[1] F. Constantino and J. Murakami; On $SL(2,\mathbb{C})$ quantum $6j$-ymbol and its relation to the hyperbolic volume, preprint, arXiv:1005.4277.

一般Kac–Moody Lie環の表現のパス模型

石井 基裕　(筑波大学)*

概　要

Kac–Moody Lie環の表現論において知られているLittelmannのパス模型を, 一般Kac–Moody Lie環の場合にまで拡張する試みが, Joseph–Lamprou ([1]) によってなされた. 本研究では, Joseph–Lamprouのパス模型の理論を精密化し, それらの一般Kac–Moody Lie環の表現論への応用を与える.

1. 準備

1.1. 一般Kac–Moody Lie環

可算集合Iを添字とする整数行列$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$が**Borcherds–Cartan**行列とは, 通常のCartan行列の条件を少し緩めて, 対角成分に0以下の値も許したものを言う. $I^{re} := \{i \in I \mid a_{ii} = 2\}$, $I^{im} := I \setminus I^{re}$とおく. この行列に付随して, 単純ルート$\{\alpha_i\}_{i \in I}$, 及び単純余ルート$\{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}$を定め, 対応する**一般Kac–Moody Lie環**を$\mathfrak{g}$, そのCartan部分環を$\mathfrak{h}$とする. 後で必要になるのは, Cartan部分環の実型の (full) 双対空間$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$である. 更に, 与えられたBorcherds–Cartan行列が対称化可能であり, 対角成分の値が全て偶数であるならば, $\mathfrak{g}$に付随する量子展開環$U_q(\mathfrak{g})$を定義することができる. 以下では, このことを仮定する.

1.2. Joseph–Lamprouのパス模型

各添字$i \in I$に対して, 単純鏡映(もどき) $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ を

$$r_i(\mu) := \mu - \alpha_i^\vee(\mu)\alpha_i, \ \mu \in \mathfrak{h}^*$$

で定義する. するとr_i, $i \in I^{re}$, は実際に鏡映であるが, r_i, $i \in I^{im}$, の位数は無限となる. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$の中の区分的に線型で連続なパス (折れ線) $\pi : [0,1] \to \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ であって, $\pi(0) = 0$, $\pi(1) := \mathrm{wt}(\pi) \in P$ (整ウェイト格子) となるものに対して, (lowering) ルート作用素f_iを以下で定める. まず, $h_i^\pi(t) := \alpha_i^\vee\bigl(\pi(t)\bigr)$, $m_i^\pi := \min\{h_i^\pi(t) \mid h_i^\pi(t) \in \mathbb{Z}, \ 0 \leq t \leq 1\}$とし, $f_+^i(\pi) := \max\{t \in [0,1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi\}$とおく. もしも, $f_+^i(\pi) < 1$であるならば, $f_-^i(\pi) := \min\{t \in [f_i^+(\pi), 1] \mid h_i^\pi(t) = m_i^\pi + 1\}$ とおき,

$$(f_i\pi)(t) := \begin{cases} \pi(t) & t \in [0, f_+^i(\pi)] \\ \pi\bigl(f_+^i(\pi)\bigr) + r_i\Bigl(\pi(t) - \pi\bigl(f_+^i(\pi)\bigr)\Bigr) & t \in [f_+^i(\pi), f_-^i(\pi)] \\ \pi(t) - \alpha_i & t \in [f_-^i(\pi), 1] \end{cases}$$

と定める. そうでない $\bigl($つまり, $f_+^i(\pi) = 1\bigr)$ ならば, $f_i\pi := \mathbf{0}$とする. f_i, $i \in I$, で生成されるモノイドを$\mathcal{F}$としたとき, 優整ウェイト$\lambda \in P^+$を型とする**一般Lakshmibai–Seshadri**パス全体の集合を$\mathbb{B}(\lambda) := \mathcal{F}\pi_\lambda \setminus \{\mathbf{0}\}$ で定める. ただし, $\pi_\lambda(t) = t\lambda$である. f_iの逆となる (raising) ルート作用素e_iも定まり, $\mathbb{B}(\lambda)$ にクリスタルの構造が入る.

日本学術振興会特別研究員DC (筑波大学大学院 数理物質科学研究科)

キーワード：パス模型, クリスタル, 一般Kac–Moody Lie環

* 〒305-8571 茨城県 つくば市 天王台 1-1-1 筑波大学大学院 数理物質科学研究科
e-mail: `ishii731@math.tsukuba.ac.jp`

2. 得られた結果

2.1. Littelmannのパス模型への埋め込み

与えられたBorcherds–Cartan行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ に対して, 通常のCartan行列 B を次のように定める. まず, 添字集合を

$$\tilde{I} := \{i^{(1)} \mid i \in I^{re}\} \sqcup \{i^{(n)} \mid i \in I^{im},\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

とし, $B = (b_{i^{(n)},j^{(m)}})_{i^{(n)},j^{(m)} \in \tilde{I}}$ の各成分を以下のように定める:

$$\begin{cases} b_{i^{(n)},i^{(n)}} := 2 & i^{(n)} \in \tilde{I}, \\ b_{i^{(n)},j^{(m)}} := a_{ij} & i^{(n)} \neq j^{(m)},\ i^{(n)}, j^{(m)} \in \tilde{I}. \end{cases}$$

このCartan行列に対して定まる単純ルート, 及び単純余ルートを $\beta_{i^{(n)}},\ \beta^{\vee}_{i^{(n)}},\ i^{(n)} \in \tilde{I}$, で表し, 付随するKac–Moody Lie環を $\tilde{\mathfrak{g}}$ とする. $\mathfrak{g}$ の優整ウェイト λ に対して, $\tilde{\mathfrak{g}}$ の優整ウェイト $\tilde{\lambda}$ で, $\beta^{\vee}_{i^{(n)}}(\tilde{\lambda}) = \alpha^{\vee}_{i}(\lambda),\ i^{(n)} \in \tilde{I}$, となるものをとり, 型 $\tilde{\lambda}$ の(一般)**Lakshmibai–Seshadri**パス全体の集合を $\widetilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda})$ で表す. このとき, 次が成立する.

命題 ([2]). 埋め込み $\mathbb{B}(\lambda) \hookrightarrow \widetilde{\mathbb{B}}(\tilde{\lambda}),\ \pi \mapsto \tilde{\pi}$ が存在する.

これはクリスタルとしての埋め込みではないが, $\mathbb{B}(\lambda)$ のクリスタルとしての構造を保存するようなものになっていて, これを利用することで次を証明することができる.

定理 ([2]). 型 λ の一般Lakshmibai–Seshadriパス全体のなすクリスタル $\mathbb{B}(\lambda)$ は, 最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群の結晶基底とクリスタルとして同型である.

2.2. パス模型の一般Kac–Moody Lie環の表現論への応用

最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群を $V(\lambda)$ とする. また, $S \subset I$ に対して $\widetilde{S} \subset \tilde{I}$ を上述の $\tilde{I}$ の定義と同様の方法で定めて, 対応するLevi部分環を $\mathfrak{g}_S \subset \mathfrak{g},\ \tilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{S}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ とする. $V_S(\lambda)$ で最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g}_S)$-加群を表す.

定理 ([2]). (i) λ, μ を $\mathfrak{g}$ の優整ウェイトとする. このとき, $U_q(\mathfrak{g})$-加群としての同型

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \ \cong\ \bigoplus_{\pi} V\bigl(\lambda + \pi(1)\bigr)$$

が成り立つ. ただし, 右辺の和は $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ であって, $\tilde{\lambda} + \tilde{\pi}$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ の優Weyl部屋に含まれるもの全体を渡る.

(ii) λ を $\mathfrak{g}$ の優整ウェイトとしたとき, $U_q(\mathfrak{g}_S)$-加群としての同型

$$V(\lambda) \ \cong\ \bigoplus_{\pi} V_S\bigl(\pi(1)\bigr)$$

が成り立つ. ただし, 右辺の和は $\pi \in \mathbb{B}(\lambda)$ であって, $\tilde{\pi}$ が $\tilde{\mathfrak{g}}_{\widetilde{S}}$ の優Weyl部屋に含まれるもの全体を渡る.

参考文献

[1] A. Joseph and P. Lamprou, A Littelmann path model for crystals of generalized Kac–Moody algebras, Adv. Math. **221** (2009), 2019-2058.

[2] M. Ishii, Path model for representations of generalized Kac–Moody algebras, arXiv:1112.3708.

箙多様体と量子クラスター代数

木村 嘉之　(大阪市立大学 数学研究所)*

1. はじめに

1.1. クラスター代数と正値性予想

クラスター代数とは、Fomin と Zelevinsky [6] によって導入された可換環のクラス[1]で、クラスター *(cluster)* と呼ばれる有理関数体の元である変数たちの組に変異 *(mutation)* という操作を施すことで、再帰的にクラスターを定義し、クラスターに含まれるすべての変数 (クラスター変数) を生成元とする（一般には有限生成ではない）有理関数体の部分環のことである。その量子化として量子クラスター代数は、Berenstein-Zelevinsky によって、[3] において量子トーラスとその (非可換) 分数体を用いて導入されている。*(*量子*)* クラスター単項式とは、同じクラスターに含まれるクラスター変数たちの単項式として定義される。Fomin と Zelevinsky[6] は、小さい階数の複素半単純代数群 G や base affine space G/N の座標環の “クラスター代数構造” について述べたのち、以下のように動機づけを述べている。

> “We conjecture that the above examples can be extensively generalized: for any simply-connected connected semisimple group G, the coordinate rings $\mathbb{C}[G]$ and $\mathbb{C}[G/N]$, as well as coordinate rings of many other interesting varieties related to G, have a natural structure of a cluster algebra. This structure should serve as an algebraic framework for the study of dual canonical bases in these coordinate rings and their q-deformations. In particular, we conjecture that all monomials in the variables of any given cluster (the *cluster monomials*) belong to this dual canonical basis.”

ここで、双対標準基底 *(dual canonical bases)* とは、Lusztig、柏原による量子展開環の下三角部分環や可積分最高ウェイト表現に定まる標準基底 *(canonical basis)* ないし大域基底 *(global basis)* の双対基底ないし自然な非退化内積によって定義される随伴基底のことである。上記の予想は、Berenstein-Zelevinsky[1] による極大冪単部分群の量子座標環の string basis に関する $G = SL_n$ $(2 \leq n \leq 4)$ の場合の詳細な研究により動機づけられていた。string basis の定義において述べられている正値性は、標準基底のもつ正値性に起因するものに他ならない。

他分野への (量子) クラスター代数の多くの成功 (cf. Keller [17] によるサーベイを参照されたい) にも関わらず、上記の動機付けで述べられている (量子) クラスター単項式と量子展開環やその表現における (双対) 標準基底との関わりにおいては、有限型やアファイン型の場合の [20, 21, 15] 等の仕事を除いて、多くの場合は未解決であった。

クラスター代数は、Laurent 現象と呼ばれる、各クラスターにおけるクラスター変数たちに関する Laurent 多項式の共通部分に含まれるということが知られている。Laurent

---

キーワード：箙多様体, 量子クラスター代数, 標準基底

* 〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3 丁目 3 番 138 号 大阪市立大学数学研究所
e-mail: `ykimura@sci.osaka-cu.ac.jp`
web: `researchmap.jp/ysykmr/`

[1] 性質によって定義されるものではない

現象に関し、クラスター代数の導入以来、以下の予想は、*Laurent*正値性予想として、Lusztig による代数群やそれに関連する代数多様体 (の座標環) における全正値性 *(total positivity)* の理論の一般化として多くの注目を浴びている。

予想 1.1 (Laurent 正値性予想)**.** 任意のクラスターにおける *Laurent*展開に対して、任意のクラスター変数の *Laurent*展開は、 非負の係数をもつ。

量子クラスター代数においても、同様の正値性予想を量子 Laurent 展開を用いて、定式化できる (量子 Laurent 正値性予想)。

上記の予想に関しては、

- 曲面の三角形分割から定義される場合のクラスター代数 (Musiker-Schiffler-Williams [30])
- AD 型 (Hernandez-Leclerc[14])
- 二部型 (bipartite) のシードを持つ場合のクラスター代数 (中島 [34])
- (係数なし) ランク 3 の場合 (Lee-Schiffler [24])

によって、それぞれの場合に証明されている。量子クラスター代数においては、非輪状型 (acyclic) の場合には、初期種に対する正値性予想、量子クラスター変数の展開公式 (量子クラスター指標) により、Qin [35] によって証明されていた。 また Efimov[5] は、一般のポテンシャル付き箙 (quiver withpotential) に対する Donaldson-Thomas 理論 [19, 31] とその Hodge 構造 (モノドロミック Hodge 構造) を用いて、量子クラスター指標を得た。またその枠組の中において、正値性予想はモノドロミック Hodge 構造の純性予想 (より強く、Lefschetz 性) の帰結として得られることが述べられた。また、(技術的な仮定の下) 非輪状型のシードを含む場合には、量子クラスター代数の正値性予想を解決した。

1.2. モノイダル圏論化

上記の Laurent 正値性予想は、Laurent 現象を用いれば、より強く以下の強正値性予想の帰結として得られる。以下の予想は、双対標準基底の持つ正値性の元、Berenstein-Zelevinsky の動機付けの元、特別な場合のクラスター代数に対しては、成立していると期待されている。

予想 1.2 (強正値性予想)**.** クラスター代数 $\mathcal{A}$ は、以下の性質を満たす基底 $\mathcal{B}$ を持つ。$[\mathcal{B}]_+ := \sum \mathbb{Z}_{\geq 0} b$ を $\mathcal{B}$ の張る *positive cone* とする。

(1) $b, b' \in \mathcal{B}$ ならば、$bb' \in [\mathcal{B}]_+$

(2) $\mathcal{M}$ をクラスター単項式のなす集合とするとき、$\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ が成り立つ。

量子クラスター代数 $\mathcal{A}_q$ の場合においても同様に、$\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-basis $\mathcal{B}_q$ に対して、$[\mathcal{B}_q]_+ := \sum \mathbb{Z}_{\geq 0}[q^{\pm 1}]b$ と定めることで、(q ベキに関する正規化を除いて) 同様の予想 (量子強正値性予想) を考えることが出来る。

クラスター代数の圏論化の多くは、加法的圏論化とよばれる Frobenius 圏やポテンシャル付き箙 (Q, W) に対する Ginzburg 代数 $\Gamma(Q, W)$ に対する dg 導来圏を介して得られる "2-Calabi-Yau 三角圏"[2] において、クラスターとクラスター傾斜対象を対応させ、

---

[2] 一般には 2-Calabi-Yau 圏が得られるとは限らないが、2-Calabi-Yau 性をみたすような subcategory のみを考えることにする。

クラスター変異は、クラスター傾斜変異として理解される。また、各クラスター傾斜加群 (もしくは部分圏) に関するクラスター指標 (もしくは Caldero-Chapoton 公式) と呼ばれる、クラスター傾斜加群に関する準同型関手を適用することで得られる加群の箙グラスマン (もしくは枠付き箙の安定表現のモジュライ空間) の (重み付き) オイラー数の母関数として定義される公式が、各クラスターにおける Laurent 展開を定めることが知られている。しかしながら、正値性予想を解決するためには、一般には (特異点を持つ射影多様体である) 箙グラスマンのオイラー数の非負性を示す必要があり、困難がある。また、加法的圏論化においては、クラスター代数における加法を "圏論化" しておらず、圏論化としては不十分であると考えられる。

Hernandez-Leclerc[14] は、q を 1 の冪根ではないとしたときに、量子アファイン代数 $\mathbf{U}_q(L\mathfrak{g})$ の有限次元表現のモノイダルアーベル圏 $\mathcal{C}$ の "モノイダル圏" としての構造の理解を動機づけとし、モノイダル圏としての理解のための組み合わせ的アプローチとしてのクラスター代数を提唱した。量子アファイン代数の有限次元既約表現は、一般に Drinfeld 多項式によって分類され、Hernandez-Leclerc は、Drinfeld 多項式の根に関する条件を用いて部分圏 $\mathcal{C}_\ell(\ell \geq 0)$ を導入し、$\mathcal{C}_\ell$ の表現環にクラスター代数の構造が定まることを予想し、$\ell = 1$ の場合に、A_n 型、D_4 型の場合に予想を Frenkel-Reshetikhin による q 指標 (の truncation) を用いて証明した。A 型の場合には、量子アファイン Schur-Weyl 双対性を介して、双対標準基底と量子アファイン代数の有限次元表現は自然に同一視される [23, 38]。強正値性予想は以下のモノイダル圏論化 (monoidal categorification) により、自然に導かれる。

定義 1.3. (1)$\mathcal{A}$ を (係数付き) クラスター代数とし, $\mathscr{A}$ をモノイダルアーベル圏[3]とする. $\mathscr{A}$ が $\mathcal{A}$ のモノイダル圏論化 *(monoidal categorification)* であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.

(a) 表現環 (Grothendieck 環)$K_0(\mathscr{A})$ が $\mathcal{A}$ と環として同型である.

(b) $K_0(\mathscr{A})$ の単純対象の同型類のなす基底 ("標準基底") $\mathcal{B}(\mathscr{A})$ が, クラスター単項式の集合を含む.

(2)$\mathscr{A}$ をモノイダルアーベル圏とする. 単純対象 L が実 *(real)* (強く実 *(strongly real)*) であるとは, $L \otimes L$ が単純対象である (resp. 任意の $m \geq 2$ に対して, $L^{\otimes m}$ が単純対象である) ことをいう.

(3) 単純対象 L が素 *(prime)* であるとは, 非自明な分解 $L \simeq L_1 \otimes L_2$ が存在しないことを言う.

Hernandez-Leclerc[14] の元来の定義は、(1) において更に、クラスター変数と実かつ素な単純対象、クラスター単項式と実な単純対象との同一視を課されているが、上記の定義 (1) では、強正値性予想に十分な条件のみを書き下した。

中島 [32, 34] は, 量子アファイン代数の有限次元既約表現の幾何学的表現論である次数付き箙多様体とその上の同変単純偏屈層を $\mathcal{C}_1$ に対応する場合を解析し、$\mathcal{C}_1$ に関する Henrnandez-Leclerc の予想を解決し、より一般に二部型 (bipartite) 箙に対する $\mathcal{C}_1$ に対して、下部グラフ (I, E) が odd cycle を含まないという仮定のもと、bipartite quiver を主要部とするクラスター代数のモノイダル圏論化を行った。また、量子表現環による量子クラスター代数の実現 (モノイダル圏論化) が予想された [33, 1.5. To do list (1)]。

---

[3] Hopf 代数の表現の圏を想定し、有限次元表現 M に関するテンソル関手 $M \otimes -$, $- \otimes M$ は完全関手であると仮定する。

1.3. 量子冪単部分群と量子化予想

対称 Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環の下三角部分環 $\mathbf{U}_v^-(\mathfrak{g})$ に対して、標準基底 (大域基底) は結晶構造 $\mathscr{B}(\infty)$ が定まる。一方柏原-斉藤 [16] により前射影多元環の冪零表現多様体 (Lusztig 箙多様体 [25, 26])Λ の既約成分の集合 $\mathrm{Irr}\ \Lambda$ には結晶構造 $\mathscr{B}(\infty)$ が定まることが知られている。また、Lusztig[27, 29] により、$\mathrm{Irr}\ \Lambda$ によって添字付けられる極大冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}_-$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{n}_-)$ の基底 $\mathcal{S} = \{f_Z \mid Z \in \mathrm{Irr}\ \Lambda\}$(半標準基底) と制限双対である極大冪単部分群 N_- の座標環 $\mathbb{C}[N_-]$ の基底 $\mathcal{S}^* = \{\rho_Z \mid Z \in \mathrm{Irr}\ \Lambda\}$(双対半標準基底) の基底が構成された。

Geiß-Leclerc-Schröer[7, 9, 8, 10, 11, 13] は、柏原-斉藤の反例 [16] と Leclerc による Berenstein-Zelevinsky 予想の反例 [22] との類似を動機づけとし、前射影多元環 (preprojective algebra) の表現論を研究した。特に、Weyl 群の元 w とその最短表示 $\overrightarrow{w}$ を用いた Frobenius 2-Calabi-Yau 圏とそのクラスター傾斜対象を導入した。加法的圏論化として、Kac-Moody 群の冪単部分群 $N(w)$ の座標環 $\mathbb{C}[N(w)]$ が得られること、Lusztig の箙多様体 (=前射影多元環の冪零表現多様体) の既約成分によって添字付けられる Lusztig の双対半標準基底 (dual semicanonical basis)$\mathcal{S}^*$ にクラスター単項式が含まれることを示した。またその中で、開軌道を含むような既約成分に対しては、双対半標準基底が双対標準基底の特殊化であることを予想した (開軌道予想)。講演者は、Geiß-Leclerc-Schröer による開軌道予想の枠組みとして、Lusztig [28],Levendorskii-Soibelman,De Concini-Kac-Procesi[4] によって導入されていた代数 $A_v(\mathfrak{n}(w))$ が双対標準基底と整合的であることを示し、冪単部分群の座標環の量子化と見なせることを示した。また、量子クラスター代数構造、量子クラスター単項式と双対標準基底との整合性に関する予想を提出した。$\mathfrak{g}$ が対称型である場合には、量子クラスター代数構造は、Geiß-Leclerc-Schröer[12] により、証明された。一般に、量子クラスター単項式と双対標準基底に関する整合性予想は、未解決である。

2. 量子クラスター代数

量子クラスター代数について復習する。[2] に従って、量子クラスター代数を定義する。詳細については、[2, 35] を参照されたい。(R, v) を可換環とその可逆元とする。

以下では、v を形式的パラメーターとして、$R = \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ とする。また、$q = v^2$ と定める。

定義 2.1. $m \geq n$ を非負整数として、Λ を $m \times m$ 歪対称行列整数値行列、$\widetilde{B}$ を $m \times n$ 整数値行列とし、上の $n \times n$ 部分行列を B とし、B は歪対称行列であると仮定する。B を $\widetilde{B}$ の主要部 *(principal part)* という。$(\Lambda, \widetilde{B})$ が整合対 *(compatible pair)* であるとは、ある $n \times n$ 正整数対角行列 D が存在して、

$$-\Lambda\widetilde{B} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}$$

を満たすことを言う。

$\widetilde{B}$ の階数が最大階数 n であり、DB が歪対称行列である。

定義 2.2. Λ に付随する (R, v) 上の量子トーラス $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Lambda)$ とは、Laurent polynomial ring $R[x_1^{\pm}, \cdots, x_m^{\pm}]$ に twisted product $*$ を $g, h \in \mathbb{Z}^m$ に対して、

$$x^g * x^h := v^{\Lambda(g,h)} x^{g+h}$$

で定める。ただし、$g = (g_i)_{1 \leq i \leq m}$ に対して、$x^g = \prod_{1 \leq i \leq m} x_i^{g_i}$、$g, h \in \mathbb{Z}^m$ に対して、$\Lambda(g,h) := {}^t g \Lambda h$ で定める。

$\epsilon \in \{\pm 1\}$、$1 \leq k \leq n$ に対して、$m \times m$ 行列 $E_{k,\epsilon} = (e_{ij})$, $n \times n$ 行列 $F_{k,\epsilon} = (f_{ij})$ をそれぞれ以下で定める。

$$e_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{if } j \neq k \\ -1 & \text{if } i = j = k \\ \max(0, -\epsilon b_{ik}) & \text{if } i \neq k, j = k \end{cases}$$

$$f_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{if } i \neq k \\ -1 & \text{if } i = j = k \\ \max(0, \epsilon b_{kj}) & \text{if } i = k, j \neq k \end{cases}$$

$(\Lambda, \widetilde{B})$ を整合対とし、$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^m, \Lambda)$ を付随する (基底付き) 量子トーラスとする。$\mathcal{F}$ を $\mathcal{T}$ の非可換分数体とする。

$\mathbb{T}_n$ を t_0 を基点とする n-正則な樹木とする。それぞれの辺は $1 \leq k \leq n$ で色付けされているとする。$(\Lambda, \widetilde{B}, \overrightarrow{x})$ という組み $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_m) \subset \mathcal{T}$ を初期条件として以下の条件を満たすような三つ組の対応 $(\Lambda(t), \widetilde{B}(t), \overrightarrow{x}(t))$ が存在する。

1. $(\Lambda(t_0), \widetilde{B}(t_0), \overrightarrow{x}(t_0)) = (\Lambda, \widetilde{B}, \overrightarrow{x})$
2. t と t' が k で添字付けられつながっているならば、$(\Lambda(t'), \widetilde{B}(t'), \overrightarrow{x}(t'))$ は、$(\Lambda(t), \widetilde{B}(t), \overrightarrow{x}(t))$ から k 方向の量子種変異 *(quantum seed mutation)* で得られる。ここで、k 方向の量子種変異は

$$\begin{aligned} (\Lambda(t'), \widetilde{B}(t')) &:= ({}^t E_\epsilon(t) \Lambda(t) E_\epsilon(t), {}^t E_\epsilon(t) \widetilde{B}(t) F_\epsilon(t)) \\ x_k(t) * x_k(t') &:= v^{\Lambda(t)(e_k, \sum_{1 \leq i \leq m} [b_{ik}(t)]_+ e_i)} \prod_{1 \leq i \leq m} x_i(t)^{\max(b_{ik}(t), 0)} \\ &\quad + v^{\Lambda(t)(e_k, \sum_{1 \leq j \leq m} [-b_{jk}(t)]_+ e_j)} \prod_{1 \leq j \leq m} x_j(t)^{\max(-b_{jk}(t), 0)} \\ x_j(t') &:= x_j(t) \text{ if } j \neq k \end{aligned}$$

で定める。

三つ組 $(\Lambda(t), \widetilde{B}(t), \overrightarrow{x}(t))$ を量子種 *(quantum seed)* という。$x_i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$ を x 変数という。特に $x_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ のことを、量子クラスター変数 *(quantum cluster variable)* という。定義から、$x_j(t)$ $(j > n)$ は t に依存しない。これらを氷漬け変数 *(frozen variable)* という。また、$t \in \mathbb{T}_n$ におけるクラスター変数の単項式を量子クラスター単項式 *(quantum cluster monomial)* という。

定義 2.3. $\{x_i(t) \mid 1 \leq i \leq m, t \in \mathbb{T}_n\}$ によって生成される $\mathcal{F}$ の R-部分代数 $\mathcal{A}_v$ を量子クラスター代数という。

注意 2.4. [18] においては、[2] に従って、量子クラスター代数を、$\{x_i(t) \mid 1 \leq i \leq n, t \in \mathbb{T}_n\} \cup \{x_j^{\pm}(t) | j > n\}$ によって生成される代数として導入しているが、実際に扱っているのは、上記の部分代数であるゆえ、ここでは、そのように定義する。

定理 2.5 ([2, Theorem 5.1])**.** $\mathcal{A}_v$ は $\mathcal{T}$ の R-部分代数である。

量子クラスター代数は、$v = 1$ への特殊化に関して、よく振る舞うことが知られている [2, Theorem 6.1]。

3. 次数付き箙多様体

3.1. 非輪状型次数付き箙多様体

非輪状箙 *(acyclic quiver)* を主要部とするようなクラスター代数のモノイダル圏論化を考えたい。それを考える上で、bipartite partition を生じる根源的な理由である次数付き箙多様体の定義を変更する [36]。

(I, E) をグラフ、(I, Ω) を非輪状箙, $(I, \overline{\Omega})$ をその反対とする。$\widehat{I} = I \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \widehat{I}_0 = I \times (\frac{1}{2} + \mathbb{Z}), \widehat{I}_1 = I \times \mathbb{Z}$ とおく。$W = \bigoplus_{(i,a)\in\widehat{I}_0} W_i(a)$ を $\widehat{I}_0$-graded ベクトル空間, $V = \bigoplus_{(i,a)\in\widehat{I}_0} V_i(a)$ を $\widehat{I}_1$-graded ベクトル空間とする。ただし、$\dim W < \infty, \dim V < \infty$ と仮定する。

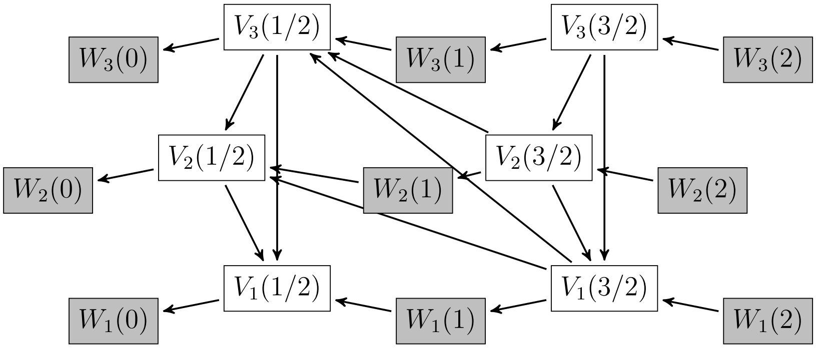
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\Omega}(V, V)^{[0]} &:= \bigoplus_{\substack{h\in\Omega \\ (\mathrm{out}(h),a)\in\widehat{I}_1}} \mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{out}(h)}(a), V_{\mathrm{in}(h)}(a)),\\
\mathrm{E}_{\overline{\Omega}}(V, V)^{[-1]} &:= \bigoplus_{\substack{h\in\overline{\Omega} \\ (\mathrm{out}(h),a)\in\widehat{I}_1}} \mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{out}(h)}(a), V_{\mathrm{in}(h)}(a-1)),\\
\mathrm{L}(W, V)^{[-1/2]} &:= \bigoplus_{(i,a)\in\widehat{I}_0} \mathrm{Hom}_k(W_i(a), V_i(a-1/2)),\\
\mathrm{L}(V, W)^{[-1/2]} &:= \bigoplus_{(i,a)\in\widehat{I}_1} \mathrm{Hom}_k(V_i(a), W_i(a-1/2)).
\end{aligned}$$

とおき、

$$\mathbf{M}(V, W) := \mathrm{E}_{\Omega}(V, V)^{[0]} \oplus \mathrm{E}_{\overline{\Omega}}(V, V)^{[-1]} \oplus \mathrm{L}(W, V)^{[-1/2]} \oplus \mathrm{L}(V, W)^{[-1/2]}$$

とおく。各成分を $(B_h(a), B_{\overline{h}}(a), \alpha_i(a), \beta_i(a))$ で表す。

例 3.1. (I, Ω) を acyclic $A_2^{(1)}$ 型として、V, W が $I \times \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ に台を持つ場合の次数付き箙多様体は以下の次数付き前射影多元環の表現から定義される。



$\mu \colon \mathbf{M}(V, W) \to \mathrm{L}(V, V)^{[-1]}$ を

$$\mu(B, \alpha, \beta) := \sum_{h\in\Omega} B_h B_{\overline{h}} - B_{\overline{h}} B_h + \alpha\beta$$

で定める。μ を運動量写像という。

$G(V)=\prod_{(i,a)\in\widehat{I}_1}GL(V_i(a))$ の $\mathbf{M}(V,W)$ への作用 $(g_i(a))\cdot(B_h(a),B_{\overline{h}}(a),\alpha_i(a),\beta_i(a))$ を以下の式で定義する。

$$(g_{\mathrm{in}(h)}(a)B_h(a)g_{\mathrm{out}(h)}(a)^{-1},g_{\mathrm{in}(h)}(a-1)B_{\overline{h}}(a)g_{\mathrm{out}(h)}(a)^{-1},g_i(a-1/2)\alpha_i(a),\beta_i(a)g_i(a)^{-1})$$

定義 3.2. (1)(B,α,β) が安定 (stable) であるとは、B-invariant かつ $V'\subset\operatorname{Ker}\beta$ なる $\widehat{I}_1$-graded 部分空間 $S\subset V$ が $S=0$ に限る事を言う。

(2) (B,α,β) が余安定 (costable) であるとは、B-invariant かつ $V'\supset\operatorname{Im}\alpha$ なる $\widehat{I}_1$-graded 部分空間 $T\subset V$ が $T=V$ に限る事を言う。

$\mu^{-1}(0)^s$ で安定な $\mu=0$ を満たす (B,α,β) の全体を表す。$\mu^{-1}(0)^s$ は $G(V)$ 不変であることは明らかである。また、$\mu^{-1}(0)^{s,*s}$ で安定かつ余安定な $\mu=0$ を満たす (B,α,β) の全体を表す。一般に、$\mu^{-1}(0)^s$ と $\mu^{-1}(0)^{s,*s}$ は (空かもしれない) 開集合である。

定義 3.3. 幾何学的商 $\mu^{-1}(0)^s/G_V$ を $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ で表し、なめらかな次数付き箙多様体 *(smooth graded quiver variety)* という。アファイン商 $\mu^{-1}(0)//G_V$ を $\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ で表し、アファイン次数付き箙多様体 *(affine graded quiver variety)* という。$\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)^{\mathrm{reg}}$ で $G(V)$-作用が free であるような (一般には、空かもしれない)principal stratum とする。

$\pi\colon\mathcal{M}^\bullet(V,W)\to\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ を (幾何学的不変式論から) 自然に定まる射影射とする。

注意 3.4. [33, 4.1] では、odd cycle を含まない (I,E) に対して、bipartite partition $I=I_0\sqcup I_1$ を用いて、$\xi_i\colon I\to\{0,1\}$ を定め、$\widehat{I}_1:=\{(i,a)\in I\times\mathbb{Z}\mid a+\xi_i/2\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\}$, $\widehat{I}_0:=\{(i,a)\in I\times\mathbb{Z}\mid a+\xi_i/2\in\mathbb{Z}\}$ として、$\mathbf{M}(V,W)=\mathrm{E}_\Omega(V,V)^{[-1/2]}\oplus\mathrm{E}_{\overline{\Omega}}(V,V)^{[-1/2]}\oplus\mathrm{L}_\Omega(W,V)^{[-1/2]}\oplus\mathrm{L}_\Omega(V,W)^{[-1/2]}$ と定めることで、定義している。次数付き箙多様体は、通常の箙多様体から $\mathbb{G}_m$ 作用に関する固定点として得られるが、我々の次数付き箙多様体と、従来の次数付き箙多様体とは、$\mathbb{G}_m$ 作用の重み付けが異なる。しかしながら、様々な性質は (I,Ω) が非輪状であるという仮定のもと同様に成り立つことが確かめられる [36]。

$V\le V'$ で、任意の $(i,a)\in\widehat{I}_1$ に対して, $\dim V_i(a)\ge\dim V_i'(a)$ を満たすことを表す。$\mathcal{M}_0(V,W)$ たちは、半単純 (閉) 軌道を分類しているので、

自明な半単純表現0を直和することで、$V\le V'$ に対して、closed embedding $\mathcal{M}_0^\bullet(V',W)\subset\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ が得られる。V 全体を走らせることで得られる union を $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$ で表す。次数付きカルタン行列を

$$(\mathbf{C}_qv)_i(a):=v_i(a+1/2)+v_i(a-1/2)-\sum_{h\in\Omega;\mathrm{out}(h)=i}v_{\mathrm{in}(h)}(a+1/2)-\sum_{h\in\Omega;\mathrm{in}(h)=i}v_{\mathrm{out}(h)}(a-1/2)$$

で定める。

定義 3.5. (V,W) が ℓ-dominant であるとは、$w-\mathbf{C}_qv\le0$ であることを言う。

(V,W) が ℓ-dominant であるとする。$(i,a)\in\widehat{I}_0$ に対して、3-term complex $C_{i,a}(V,W)$ を

$$V_i(a+1/2)\xrightarrow{\sigma_i(a)}\bigoplus_{\substack{h\in\Omega\\\mathrm{out}(h)=i}}V_{\mathrm{in}(h)}(a+1/2)\oplus\bigoplus_{\substack{h\in\Omega\\\mathrm{in}(h)=i}}V_{\mathrm{out}(h)}(a-1/2)\oplus W_i(a)\xrightarrow{\tau_i(a)}V_i(a-1/2)$$

で定める。($\mathbb{G}_m$ 作用の次数付けが異なるため、3-term complex の定義が変更されている。) ここで、

$$\sigma_i(a)(B,\alpha,\beta) := \bigoplus_{h\in\Omega,\mathrm{out}(h)=i} \varepsilon(h)B_h \oplus \bigoplus_{h\in\Omega,\mathrm{in}(h)=i} \varepsilon(h)B_{\overline{h}} \oplus \beta_i$$

$$\tau_i(a)(B,\alpha,\beta) := \sum_{h\in\Omega,\mathrm{out}(h)=i} B_{\overline{h}} + \bigoplus_{h\in\Omega,\mathrm{in}(h)=i} B_h + \alpha_i$$

でそれぞれ、$\sigma_i(a), \tau_i(a)$ を定める。$V_i(a), W_i(a)$ をそれぞれ $\mathcal{M}(V,W)$ 上の (同変) ベクトル束とみなしている。安定性より、$\sigma_i(a)$ は任意の $(i,a)\in\widehat{I}_0$ に対して、ベクトル束としての単射であることがわかる。(V,W) が ℓ-dominant であるとは、ある安定かつ余安定な $(B,\alpha,\beta)\in\mathcal{M}(V,W)$ が存在することに他ならない事がわかる。(V,W) が ℓ-dominant であるとき、$\widehat{I}_0$-graded vector space $C(V,W)$ を

$$\underline{\dim}C(V,W) = \underline{\dim}W - C_q(\underline{\dim}V)$$

で定める。

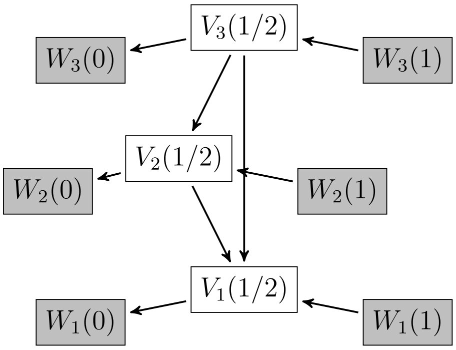
命題 3.6. 階層 $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}$ について, 以下の性質が成り立つ.

(1) $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)\neq\emptyset$ であることは、$\mathcal{M}^{\bullet}(V,W)\neq\emptyset$ かつ (V,W) が ℓ-*dominant*

(2) もし $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)\subset\overline{\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V',W)}$ ならば, $V'\leq V$ すなわち, 任意の $(i,a)\in\widehat{I}_1$ に対して, $\dim V_i'(a)\geq\dim V_i(a)$ が成立する.

3.2. "level 1" cases

以下では, W は $[0,1]\times I$ に台をもつと仮定する. すなわち (I,Ω) に対して以下のような枠付き箙を考える. $\overline{\Omega}$ に対する辺はなく、運動量写像は自明に成り立っていることに注意されたい。



もっとも簡単な場合ではあるが, 以下に述べるように, 非自明ながら, 重要な例をなす. 以下では V は常に $I\times\{1/2\}$-graded vector space である. まず、$\alpha=(\alpha_i)_{i\in I}$ は安定性の条件に寄与しないので、さらに、$W(1)=0$ $(i\in I)$ という条件を化した箙多様体を考えると、vector bundle

$$p\colon \mathcal{M}^{\bullet}(V,W)\to\mathcal{M}^{\bullet}(V(1/2),W(0))$$

が得られることがわかる。

3.2.1. $W(1) = 0$ case

$\mathcal{M}^\bullet(V(1/2), W(0))$ に関しては、Reineke[37] による以下のような記述が知られている。

まず、$\mathcal{M}^\bullet(V, W)$ は滑らかで射影的な多様体で,

$$\dim \mathcal{M}^\bullet(V, W) = \sum_{i\in I} w_i(0)v_i(1/2) + \sum_{h\in\Omega} v_{\mathrm{out}(h)}(1/2)v_{\mathrm{in}(h)}(1/2) - \sum_{i\in I} v_i(1/2)v_i(1/2)$$

が成り立つ. (I, Ω) を箙として, S, V を I-graded ベクトル空間とするとき, $\mathrm{Gr}(S, V) := \prod_{i\in I} \mathrm{Gr}(\dim S_i, \dim V_i)$ を V の $\underline{\dim}S$ 次元の I-graded 部分ベクトル空間をパラメトライズするグラスマン多様体 (の積) とする.

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(S, V) := \{(B, S') \in \mathrm{E}_\Omega(V, V) \times \mathrm{Gr}(S, V) \mid B_h S'_{\mathrm{out}(h)} \subset S'_{\mathrm{in}(h)} \ \text{ for } {}^\forall h \in \Omega\}$$

と定める。第一成分への射影のファイバーを $B \in \mathrm{E}_\Omega(V, V)$ に付随する箙グラスマン多様体といい、$\mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(S, (B, V))$ で表す。箙グラスマン多様体は、(一般に特異点を持つ) 射影的多様体であり、箙の表現 (B, V) の箙の表現としての部分空間 (=部分表現) をパラメトライズする多様体に他ならない. S_i を $i \in I$ に付随する単純表現とし、Δ_i を射影被覆、∇_i を入射包絡とする。$\Delta_i (i \in I)$ は互いに非同型な射影直既約表現であり、∇_i $(i \in I)$ は互いに非同型な入射直既約表現である。

命題 3.7. *(V, W) に対して, $\mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, \nabla^{W(0)})$ で入射加群 $\nabla^{W(0)} = \bigoplus_{i\in I} \nabla_i \otimes W_i(0)$ の次元ベクトル V の箙グラスマン多様体を表す. このとき, 同型が存在する.*

$$\mathcal{M}^\bullet(V(1/2), W(0)) \cong \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V(1/2), \nabla^{W(0)})$$

対応は, $(B, \beta) \in \mathcal{M}^\bullet(V, W)$ に対して,

$$\Phi_i(B, \beta) := \bigoplus_{\mathrm{out}(r)=i} \beta_{\mathrm{in}(r)} B_r \colon V_i(1/2) \to \bigoplus_{\mathrm{out}(r)=i} W_{\mathrm{in}(r)}(0)$$

とおくと, $\Phi = \Phi(B, \beta) = (\Phi_i(B, \beta))_{i\in I}$ は加群の射 $\Phi\colon (B, V) \to \nabla^{W(0)}$ を定め, $[(B, \beta)] \mapsto \mathrm{Im}\,\Phi$ で与えられる.

証明は, $\mathrm{Ker}\,\Phi(B, \beta)$ が $\mathrm{Ker}\,\beta$ に含まれる maximal な B-invariant subspace であることから, 対 (B, β) の安定性と Φ が単射であることが必要十分であることから従う.

注意 3.8. なお, "双対" な frameing $W(0) = 0$ なる条件で, "双対" な安定性条件, すなわち $\mathrm{Im}\,\alpha$ を含むような B-invariant subspace は V に限るという安定性条件のもと得られる条件は, (B, α) から定まる自然な加群の射 $\Psi = (\Psi_i)_{i\in I}$:

$$\Psi_i(B, \alpha) := \sum_{\mathrm{in}(r)=i} B_r \alpha_{\mathrm{out}(r)} \colon \bigoplus_{\mathrm{in}(r)=i} W_{\mathrm{out}(r)}(1) \to V_i(1/2)$$

に対して $\mathrm{Im}\,\Psi$ は, $\mathrm{Im}\,\alpha$ を含む最小の B-invariant な空間をなし, $\Psi_i(B, \alpha)\colon \Delta^{W(1)} \to (B.V(1/2))$ が全射であることと必要十分となり, 双対的に射影加群の商加群全体のなす箙グラスマン多様体と同一視される.

3.2.2.

path r に対して $z_r := \beta_{\mathrm{in}(r)}B_r\alpha_{\mathrm{out}(r)}$ と定めると, $z = (z_r)$ は加群の射 $z\colon \Delta^{W(1)} \to \nabla^{W(0)}$ を定める．長さ 0 の path$r$ に対しても, $z_r := \beta_{\mathrm{in}(r)}\alpha_{\mathrm{out}(r)}$ と定める．そこで, $I \times [0,1]$-graded vector space W に対して, $\mathbf{E}_W := \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\Delta^{W(1)}, \nabla^{W(0)})$ とおく．また, $\mathrm{Gr}(V(1/2), \nabla^{W(0)})$ 上のベクトル束 $\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W)$ を

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) := \{(X,z) \in \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \times \mathbf{E}_W \mid \mathrm{Im}(z) \subset X\}$$

とさだめ, $\pi\colon \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) \to \mathbf{E}_W$ を第二成分への射影とする．π は射影射である．以下は, [33, Proposition 4.6] の非輪状箙への一般化である．

命題 3.9. (1) *同型* $\mathcal{M}_0^\bullet(W) \cong \mathbf{E}_W$ *が*

$$[(B,\alpha,\beta)] \mapsto (\beta_{\mathrm{in}(r)}B_r\alpha_{\mathrm{out}(r)})$$

で与えられる．

(2) *同型* $\mathcal{M}^\bullet(V,W) \cong \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W)$ *が,* $([B,\alpha,\beta]) \mapsto (\mathrm{Im}\,\Phi(B,\beta), (\beta_{\mathrm{in}(r)}B_r\alpha_{\mathrm{out}(r)}))$ *で与えられる．特に,* $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ *は既約．また以下の図式は可換である．*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^\bullet(V,W) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W) \arrow[d, "\pi"] \\
\mathcal{M}_0^\bullet(V,W) \arrow[r, "\cong"'] & \mathbf{E}_W
\end{tikzcd}$$

(V^0, W) を ℓ-dominant な対とし, I-graded vector space $W^\perp$ を $C(V^0, W)$ で定める．また, $V^\perp$ を $\underline{\dim}V^\perp = \underline{\dim}V - \dim V^0$ で定める．このとき, $\underline{\dim}W - \mathbf{C}_q\underline{\dim}V = \underline{\dim}W^\perp - \mathbf{C}_q\underline{\dim}V^\perp$ が成り立つ．T を $x \in \mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V^0, W)$ における接空間とする．以下の横断片 *(transversal slice)* の存在は, [33, Theorem 3.14] の一般化である．

定理 3.10 ([36, Theorem 4.3])**.** *上の設定のもと,* U*,* U_T*,* $U_{\mathfrak{S}}$ *をそれぞれ* $x \in \mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$*,* $0 \in T$*,* $0 \in \mathcal{M}_0(V^\perp, W^\perp)$ *における (解析的局所) 近傍と (解析的局所) 双正則射* $U \to U_T \times U_{\mathfrak{S}}$ *で, 以下の図式を可換にするものが存在する．また, stratum* $\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V', W)$ *は, stratum* $U_T \times \mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V'^\perp, W^\perp)$ *に移される．*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^\bullet(V,W) & \pi^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & U_T \times \pi^{-1}(U_{\mathfrak{S}}) \subset \mathcal{M}^\bullet(V^\perp, W^\perp) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \pi"] \\
\mathcal{M}_0^\bullet(V,W) & \pi^{-1}(U) \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\cong"] & U_T \times U_{\mathfrak{S}} \quad \subset \mathcal{M}_0^\bullet(V^\perp, W^\perp)
\end{tikzcd}$$

3.3. 双対バンドル

$\mathbf{E}_W$ の双対空間を考える．任意の加群 M に対して 自然な双対性 $\mathrm{Hom}_\Omega(\Delta_i, M) \cong Me_i \cong D\,\mathrm{Hom}_\Omega(M, \nabla_i)$ が存在する。よって, $\mathbf{E}_W^* \cong \mathrm{Hom}_\Omega(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(1)})$ と自然に同一視される．$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{(I,\Omega)}(V,W)$ の annihilator バンドルは, この同一視のもと, 以下のように記述される。

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}^\perp_{(I,\Omega)}(V,W) \cong \{(z^*, X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)}) \times \mathrm{Gr}_{(I,\Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \mid X \subset \mathrm{Ker}(z^*)\}$$

第一成分への射影 $\pi^\perp\colon \widetilde{\mathrm{Gr}}^{\perp}_{(I,\Omega)}(V,W) \to \mathrm{Hom}_{k\mathcal{Q}}(\nabla^{W(0)},\nabla^{W(2)})$ のファイバーは, $\mathrm{Ker}(z^*)$ の箙グラスマン多様体に他ならない.

3.4. 量子表現環

次数付き箙多様体 $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$ 上の偏屈層のクラス $\mathscr{P}_W$ と 制限関手を定義し, 量子表現環 *(quantum Grothendieck ring)* を導入する.

$\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に対して, $\mathscr{D}_c^b(X)$ で構成可能層のなす導来圏とし, $j \in \mathbb{Z}$ に対して, シフト関手を $[j]\colon \mathscr{D}_c^b(X) \to \mathscr{D}_c^b(X)$ で表す. 局所閉部分多様体 $Y \subset X$ に対して, $\mathbf{1}_Y := \underline{\mathbb{C}}_Y[\dim Y]$ とし, Y の regular part Y^{reg} 上の (finitary) 局所系 $\mathcal{L}$ に付随する交差コホモロジー複体を $\mathbf{IC}(Y,\mathcal{L})$ で表す. $\mathbf{IC}(Y,\underline{\mathbb{C}}_{Y^{\mathrm{reg}}})$ を単に, $\mathbf{IC}(Y)$ で表す. ここで, $\mathbf{IC}(Y,\mathcal{L})|_{Y^{\mathrm{reg}}} = \mathcal{L}[\dim Y^{\mathrm{reg}}]$ という約束とする.$\pi\colon \mathcal{M}^\bullet(V,W) \to \mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ に対して, $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ 上の偏屈層 $\mathbf{1}_{\mathcal{M}^\bullet(V,W)}$ とその押し出し $\pi_V(W) := \pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^\bullet(V,W)})$ を考える. π は射影射かつ $\mathcal{M}^\bullet(V,W)$ は滑らかな多様体であるから, 分解定理より, $\pi_W(V)$ は半単純複体であり, $\mathbb{D}$ を Verdier 双対とすると, $\mathbb{D}(\pi_W(V)) = \pi_W(V)$ を満たす. $\mathscr{P}_W$ で, $\mathcal{M}_0^\bullet(V,W)$ 上のある (V,W) に対して $\pi_W(V)$ に (シフトを除いて) 直和因子に現れる単純偏屈層の同型類のなす集合を表し, $\mathscr{Q}_W$ で, $\mathscr{P}_W$ を含む $\mathscr{D}_c^b(\mathcal{M}_0^\bullet(W))$ の加法的かつ shift で閉じた部分圏とする. (split) Grothendieck 群 $K_0(\mathscr{Q}_W)$ には, シフトにより t 作用が入り, $\mathbb{Z}[t^\pm]$-加群の構造が入り, $\mathscr{P}_W$ は $K_0(\mathscr{Q}_W)$ の $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-自由基底をなす. 横断片を用いた議論により、$\mathscr{P}_W$ の分類が得られる。

定理 3.11. 以下が成り立つ

$$\mathscr{P}_W = \{\mathbf{IC}(\mathcal{M}_0^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W)) \mid (V,W) \textit{ is } \ell\textit{-dominant}\}$$

以下では, *ℓ-dominant* な (V,W) に対して, $\mathbf{IC}(\mathcal{M}^{\bullet\mathrm{reg}}(V,W))$ を $\mathbf{IC}_W(V)$ と書くことにする. *[33, 3.5]* や *[38, 4]* と同様に, “テンソル積多様体” $\mathcal{T}_0(W^1;W^2)$ を用いて, 図式

$$\mathcal{M}_0^\bullet(W^1) \times \mathcal{M}_0^\bullet(W^1) \leftarrow \mathcal{T}_0^\bullet(W^1;W^2) \hookrightarrow \mathcal{M}_0^\bullet(W)$$

を介して、制限関手

$$\widetilde{\mathrm{Res}}_{W^1,W^2} := \kappa_! \iota^*\colon \mathscr{Q}_W \to \mathscr{Q}_{W^1} \boxtimes \mathscr{Q}_{W^2}$$

が *(*純性を介した議論で*)* 定義でき, $\mathcal{K} := \bigoplus_W K_0(\mathscr{Q}_W)$ は $\mathbb{Z}[t^\pm]$ 余代数をなす. 分解定理より, その $\{\mathbf{IC}_W(V)\}$ に関する構造定数は全て正である. 双対基底を $\{L_W(V)\}$ で表す. 以下では, その双対 $\mathcal{K}^*$ に $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ 代数の構造を入れる. また、横断片から定まる対応 $\mathbf{IC}_W(V) \to \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp)$ に関して, $\widetilde{\mathrm{Res}}$*(*の *cocycle twist)* が整合的であるから, 以下を定義することができる. 以下を量子表現環という。

$$\mathcal{R}_t := \left\{ (f_W)_W \in \prod_W \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[t^\pm]}(K_0(\mathscr{Q}_W), \mathbb{Z}[t^\pm]) \;\middle|\; \substack{\langle f_W, \mathbf{IC}_W(V)\rangle = \\ \langle f_{W^\perp}, \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp)\rangle \\ \textit{for any } W} \right\}$$

任意の *ℓ-dominant* な対 (V,W) は $(0, C^\bullet(V,W))$ に帰着されるゆえ、$\mathcal{R}_t$ は $\{L_W(0)\}$ を基底としてもつ。これを量子表現環 $\mathcal{R}_t$ の双対標準基底という。

3.5. Fourier-Deligne-Sato 変換

[33] において、クラスター代数と表現環との同一視において、クラスター単項式が双対標準基底に含まれることの証明において、本質的な役割を果たしたのは、クラスター指標を層理論的に構成することであった。$\mathscr{F}\colon D^b_c(\mathbf{E}_W) \simeq D^b_c(\mathbf{E}^*_W)$ を Fourier-Deligne-Sato 変換とする。

$$\mathscr{L}_W := \{\mathbf{IC}_W(V) \mid \operatorname{codim} \operatorname{supp} \mathscr{F}(\mathbf{IC}_W(V)) = 0\}$$

と定める。構成から、$\mathbf{IC}_W(0) \in \mathscr{L}_W$ が成り立つ。一般には、$\mathscr{L}_W = \{\mathbf{IC}_W(0)\}$ とは限らないため、以下の元を考える。$\mathbf{IC}_W(V) \in \mathscr{L}_W$ に対して、$\mathscr{F}(\mathbf{IC}_W(V))$ の generic rank を $r_W(V)$ とし、

$$\mathbb{L}_W := \sum (-1)^{\dim \mathcal{M}(V,W)} r_W(V) \mathbf{IC}_W(V)$$

と定める。$\mathbb{L}_W$ は双対標準基底と upper unitriangular matrix で移り合うことがわかる。また、$A_W = \operatorname{Aut}(\nabla^W)$ の $\mathbf{E}^*_W$ への作用が開軌道を持つことと

presentation が rigid であること、また minimal injective resolution に対して、kernel が rigid であることと presentation が rigid であることが知られており、

そのような場合がクラスター単項式に対応することが知られている。ゆえに、量子クラスター単項式が双対標準基底に含まれることがわかる。

3.6. 応用

量子冪単部分群 $A_v(\mathfrak{n}(w))$ に対して、Geiss-Leclerc-Schroer[12] は、T-system の量子化と、generalized determinantial identity の v 類似を比較することで、$A_v(\mathfrak{n}(w))$ に量子クラスター代数構造が定まることを示した。また、Hernandez-Leclerc は量子表現環において、量子 T-system を比較することで、量子表現環 $\mathcal{R}_{t,Q}$ の双対標準基底と、量子冪単部分群 $A_v(\mathfrak{n}(w_0))$ を比較した。我々も、同様に、量子 T-system を介して、量子表現環の双対標準基底と量子冪単部分群 $A_v(\mathfrak{n}(c_Q^2))$ の双対標準基底を比較した。ここで、c_Q は非輪状型箙に付随する Coxeter 語である。故に、Fourier-Deligne-Sato 変換に関する $\mathscr{L}_W$ の分類を用いれば、冪単部分群 $A_v(\mathfrak{n}(c_Q^2))$ の双対標準基底に関する量子化予想が得られる。

参考文献

[1] A. Berenstein and A. Zelevinsky. String bases for quantum groups of type A_r. In *I. M. Gelfand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 51–89. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[2] A. Berenstein and A. Zelevinsky. Quantum cluster algebras. *Adv. Math.*, 195(2):405–455, 2005.

[3] Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky. Quantum cluster algebras. *Adv. Math.*, 195(2):405–455, 2005.

[4] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi. Some quantum analogues of solvable Lie groups. In *Geometry and analysis (Bombay, 1992)*, pages 41–65. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995.

[5] Alexander Ivanovich Efimov. Quantum cluster variables via vanishing cycles. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1112.3601`, 2011.

[6] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.

[7] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Rigid modules over preprojective algebras II: The Kac-Moody case. arXiv:math.RT/0703039.

[8] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(3):718–740, 2007.

[9] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Semicanonical bases and preprojective algebras. II. A multiplication formula. *Compos. Math.*, 143(5):1313–1334, 2007.

[10] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Partial flag varieties and preprojective algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(3):825–876, 2008.

[11] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Kac-Moody groups and cluster algebras. *Advances in Mathematics*, 228(1):329–433, 2011.

[12] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Cluster structures on quantum coordinate rings. *to appear in Selecta Mathematica, New Series*, 2012. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1104.0531`.

[13] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Generic bases for cluster algebras and the Chamber Ansatz. *J. Amer. Math. Soc.*, 25(1):21–76, 2012.

[14] David Hernandez and Bernard Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154(2):265–341, 2010.

[15] David Hernandez and Bernard Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1109.0862`, 2011.

[16] M. Kashiwara and Y. Saito. Geometric construction of crystal bases. *Duke Math. J.*, 89(1):9–36, 1997.

[17] Bernhard Keller. Cluster algebras and derived categories. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1202.4161`, 2012.

[18] Yoshiyuki Kimura and Fan Qin. Graded quiver varieties and quantum cluster algebras. in preparation, 2012.

[19] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. Stability structures, Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. 2008.

[20] Philipp Lampe. A quantum cluster algebra of Kronecker type and the dual canonical basis. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (13):2970–3005, 2011.

[21] Philipp Lampe. Quantum cluster algebras of type A and the dual canonical basis. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1101.0580`, 2011.

[22] B. Leclerc. Imaginary vectors in the dual canonical basis of $U_q(\mathfrak{n})$. *Transform. Groups*, 8(1):95–104, 2003.

[23] B. Leclerc, M. Nazarov, and J.-Y. Thibon. Induced representations of affine Hecke algebras and canonical bases of quantum groups. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 115–153. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[24] Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Positivity for cluster algebras of rank 3. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1205.5466`, 2012.

[25] G. Lusztig. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras. II. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, (102):175–201 (1991), 1990. Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990).

[26] G. Lusztig. Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2):365–421, 1991.

[27] G. Lusztig. Affine quivers and canonical bases. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (76):111–163, 1992.

[28] G. Lusztig. *Introduction to quantum groups*, volume 110 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

[29] G. Lusztig. Semicanonical bases arising from enveloping algebras. *Adv. Math.*, 151(2):129–139, 2000.

[30] Gregg Musiker, Ralf Schiffler, and Lauren Williams. Positivity for cluster algebras from surfaces. *Adv. Math.*, 227(6):2241–2308, 2011.

[31] Kentaro Nagao. Donaldson-Thomas theory and cluster algebras. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1002.4884`, 2010.

[32] H. Nakajima. Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)*, 160(3):1057–1097, 2004.

[33] H. Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto Journal of Mathematics*, 51(1):71–126, 2011.

[34] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto J. Math.*, 51(1):71–126, 2011.

[35] Fan Qin. Quantum cluster variables via Serre polynomials. with an appendix by Bernhard Keller, to appear in Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 2010.

[36] Fan Qin. t-analogue of q-characters and bases of quantum cluster algebras. e-print arxiv `http://arxiv.org/abs/1207.6604v1`, 07 2012.

[37] Markus Reineke. Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups. *J. Algebra*, 320(1):94–115, 2008.

[38] M. Varagnolo and E. Vasserot. Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 345–365. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.