
 日本数学会

2012年度年会

**無限可積分系セッション
講演アブストラクト**

2012年3月

於 東京理科大学

 日本数学会

2012年度年会

**無限可積分系セッション
講演アブストラクト**

2012年3月

於 東京理科大学

3月28日(水) 第IV会場

9:30~11:45

	(分)	頁
1 山崎知佳(近畿大理工)‡ 一般超幾何関数の特殊値の対称性と多重ゼータ値	(15)	1
2 大井周(早大理工)‡ 多重対数関数の反転公式と Riemann-Hilbert 問題	(15)	3
上野喜三雄(早大理工)		
3 井ノ口順一(山形大理工)‡ 離散空間曲線の等周変形と semi-discrete modified KdV 方程式	(15)	5
梶原健司(九大 I M I)		
松浦望(福岡大理工)		
太田泰広(神戸大理工)		
4 神吉雅崇(東大数理)‡ 有限体上の可積分方程式系について	(15)	7
時弘哲治(東大数理)		
間田潤(日大生産工)		
5 藤健太(神戸大理工)‡ ガルニエ系のラックス形式の変形	(15)	9
6 鈴木貴雄(阪府大総合教育)‡ q 離散ドリinfeldt・ソコロフ階層と q パンルヴェ方程式	(20)	11
7 黒木玄(東北大理工)‡ Weyl 群双有理作用と τ 関数の量子化—量子化された τ 関数の正則性	(15)	13

14:15~15:45

8 川向洋之(三重大教育)‡ 笹野の結合型 II 型パンルヴェ方程式のベックルンド変換と, II 型	(10)	15
野田真司(三重大教育)		
吉田和史(三重大教育)		
9 川向洋之(三重大教育)‡ II 型行列パンルヴェ方程式の特殊解	(10)	17
野田真司(三重大教育)		
吉田和史(三重大教育)		
10 金子和雄(四日市大関孝和研)* 4次元 Painlevé 型方程式 2I, 2I, 11I, 11I における pole をもつ特殊解	(20)	19
11 大山陽介(阪大情報)‡ Painlevé 方程式の漸近展開の収束について ~Boutroux 100~	(15)	21
12 岩木耕平(京大数理研)‡ Parametric Stokes phenomena for the third Painlevé equation $P_{III'}(D_6)$	(20)	23

16:00~17:00 特別講演

大島利雄(東大数理)‡ Riemann 球面上の線型常微分方程式		25
----------------------------------	--	----

3月29日(木) 第IV会場

9:15~11:45

13 安東雅訓(岡山大自然)* 相異分割のヤング図形と約数関数	(15)	49
14 中筋麻貴(北里大一般教育)‡ Factorial Schur function の対称性について	(15)	51
D. Bump (Stanford Univ.)		
P. J. McNamara (Stanford Univ.)		

15	K. D. Matsumoto (早大基幹理工)‡	Semidirect product of quasigroups and dynamical Yang–Baxter maps	(20)	53
16	尾角正人 (阪大基礎工)* 坂本玲峰 (東京理大理) A. Schilling (UC Davis)	$D_n^{(1)}$ 型巽装配位のいくつかの話題について	(20)	55
17	粟田英資 (名大多元数理)‡ B. Feigin (Landau Inst.) 白石潤一 (東大数理)	Ding–Iohara 代数の Fock module の族と 3 点 intertwining operator	(15)	57
18	粟田英資 (名大多元数理)‡ B. Feigin (Landau Inst.) 白石潤一 (東大数理)	Ding–Iohara 代数の n 点関数と Nekrasov 分配関数	(15)	59
19	小寺諒介 (東大数理)* 直井克之 (東大数理)	Quiver varieties and one-dimensional sums	(15)	61
14:30~15:30 特別講演				
	酒井一博 (京大基礎物理学研)‡	位相的弦理論と保型性 —Seiberg–Witten 曲線, 有理楕円曲面, Jacobi 形式—		63

一般超幾何関数の特殊値の対称性と多重ゼータ値

山崎 知佳 (近畿大学大学院総合理工学研究科)*

一般超幾何関数と多重ゼータ値の間に深い関わりがあることは様々な研究により知られている。今回、近年存在が明らかになった等号付き多重ゼータ値の双対的な性質を研究する上で、一般超幾何関数の特殊値の対称性について結果が得られたので報告する。

一般超幾何関数の関係式は以下のものである。

定理 1. 次の対称的な関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(1 + \beta)\Gamma(1 - \alpha)(\alpha + x)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha, -\beta, \alpha + x \\ \alpha - \beta + 1, 1 + \alpha + x \end{matrix}; 1\right) \\ & + \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(1 - \beta)(\beta + x)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} \beta, -\alpha, \beta + x \\ \beta - \alpha + 1, 1 + \beta + x \end{matrix}; 1\right) \\ & = \frac{\Gamma(x + \alpha)\Gamma(x + \beta)}{\Gamma(1 + x)\Gamma(1 + y)}, \end{aligned}$$

ただし α, β は

$$\alpha + \beta = -x + y, \quad \alpha\beta = -xy + z^2$$

を満たし、

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix}; s\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{(d)_n (e)_n n!} s^n$$

は一般超幾何関数とする。

つまり、対称的な関係にある一般超幾何関数を足し合わせると、ガンマ関数で書き表せることがわかった。

一般超幾何関数と等号付き多重ゼータ値の強い関連性は青木・昆布・大野 ([1]) による、母関数を用いた研究により明らかになっている。つまり、母関数を用いた等号付き多重ゼータ値の研究は、多重ゼータ値の構造解明だけでなく、一般超幾何関数の特殊値の研究にも非常に有効である。今回、等号付き多重ゼータ値の双対性と呼ばれる性質について研究を行うことで、定理 1 を得た。

等号付き多重ゼータ値は、インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ ($k_i \in \mathbb{Z}_{>0}, k_1 \geq 2$) に対して、

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定義される。インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対して、 $k = k_1 + \dots + k_n$ を重さ、 n を深さ、 $s = \#\{i \mid k_i \geq 2\}$ を高さと呼び、それぞれ $\text{wt}(\mathbf{k})$ 、 $\text{dep}(\mathbf{k})$ 、 $\text{ht}(\mathbf{k})$ と書き表す。多重ゼータ値の歴史は古く、300 年ほど前にオイラーがとりわけ 2 重ゼータ値に興味をもち研究

本研究は科研費(課題番号:22・2710)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 33C20, 11M32

キーワード: hypergeometric function, multiple zeta values

* 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学大学院総合理工学研究科

e-mail: chika@math.kindai.ac.jp

を行っていたことが知られている。等号付き多重ゼータ値のなす \mathbb{Q} -代数の構造解明が主な研究テーマとして挙げられ、様々な関係式が知られている。等号付き多重ゼータ値の双対的な性質は、最近、金子・大野により示唆されていた。

予想 1 (Kaneko-Ohno [2]). $X_0(k, n, s)$ を $\text{wt}(\mathbf{k}) = k$, $\text{dep}(\mathbf{k}) = n$, $\text{ht}(\mathbf{k}) = s$ を満たす等号付き多重ゼータ値の和としたとき

$$X_0(n+m-1, n, s) - (-1)^{n+m} X_0(n+m-1, m, s) \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q}[\zeta(2), \zeta(3), \zeta(5), \dots].$$

この予想の高さが1、つまり $s = 1$ の場合は金子・大野によって証明され、母関数を用いた証明を山崎 ([4]) が与えた。

最近、Li によって予想 1 の母関数を用いた証明が与えられた。

定理 2 (Li[3]).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y} \Phi_0^*(-x, y, z) \frac{1}{x} \Phi_0^*(-y, x, z) \\ &= \frac{x-y}{xy\alpha\beta} + \frac{\sin \pi(x+\alpha)}{\pi} \left(\frac{\sin \pi\alpha}{\sin \pi x} + \frac{\sin \pi\beta}{\sin \pi y} \right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)\Gamma(x+\alpha)\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(1+x)\Gamma(1+y)}. \end{aligned}$$

これに対し、今回新たに一般超幾何関数の特殊値の満たす関係式が明らかになったため、定理 2 の再証明が得られただけでなく、等号付き多重ゼータ値の双対的な性質が、一般超幾何関数の対称性に起因することが明らかになった。

参考文献

- [1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), 387-395.
- [2] M. Kaneko and Y. Ohno, On a kind of duality of multiple zeta-star values, *Int. J. Number Theory*, **6** (2010), 1927-1932.
- [3] Z. Li, On a conjecture of Kaneko and Ohno, preprint, arXiv:1106.5103.
- [4] C. Yamazaki, On the duality for multiple zeta-star values of height 1, *Kyushu J. Math.*, **64** (2010), 145-152.

多重対数関数の反転公式と Riemann-Hilbert 問題

大井 周 (早稲田大学 理工学術院)*1
 上野 喜三雄 (早稲田大学 理工学術院)*2

多重対数関数 $\text{Li}_k(z)$ のみならず反転公式に加法型 Riemann-Hilbert 問題 (あるいは, Plemelj-Birkhoff 分解) [Mu, Pl] を適用することにより, 境界値としてのゼータ値 $\zeta(k)$ から一意的に復元されることを示す. その証明は Riemann-Hilbert 問題を再帰的に使用するところに特色がある. それゆえ, この証明方法を「再帰的な加法型 Riemann-Hilbert 問題」と呼ぶことにしたい.

多重対数関数 $\text{Li}_k(z)$ ($k \geq 2$) とは, 次の積分漸化式により定義される $\mathbf{P}^1 \setminus \{1, \infty\}$ 上の多価解析関数である.

$$\text{Li}_k(z) = \int_0^z \frac{\text{Li}_{k-1}(t)}{t} dt \quad (k \geq 2). \quad (1)$$

ただし, $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ である. $D = \mathbf{C} \setminus \{z = x \mid 1 \leq x\}$ とおく. $\text{Li}_k(z)$ は $\text{Li}_1(z)$ の主値から決まる D 上一価正則な分枝を持ち, $|z| < 1$ において

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$$

と Taylor 展開される. したがって, $k \geq 2$ に対して,

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in D} \text{Li}_k(z) = \zeta(k) \quad (2)$$

が成り立つ. ここで, $\zeta(k)$ はゼータ値 $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ である.

多重対数関数 multiple polylogarithm $\text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}}(z)$ ($k \geq 2$) を

$$\text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}}(z) = \int_0^z \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(\log(1-t))^{k-1}}{t} dt \quad (3)$$

で定義する. (1) から従う微分漸化式

$$\frac{d}{dz} \text{Li}_k(z) = \frac{\text{Li}_{k-1}(z)}{z} \quad (k \geq 2), \quad \frac{d}{dz} \text{Li}_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad (4)$$

および (2), (3) を用いれば次の反転公式を示すことは容易である.

$$\text{Li}_k(z) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} (\log z)^j \text{Li}_{k-j}(z) + \text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}}(1-z) = \zeta(k) \quad (5)$$

本研究は科研費 (課題番号: 22540035), 早稲田大学特定課題研究費 (課題番号: 2011B-095) の助成を受けたものである.

*1 e-mail: shu.oi@toki.waseda.jp

*2 e-mail: uenoki@waseda.jp

$D' = \mathbf{C} \setminus \{z = x \mid x \leq 0\}$ とおく. $\text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}}(1-z)$ が $\log z$ の主値から決まる D' 上一価正則な分枝を持つことに注意せよ.

領域 $D^{(\pm)}$ を次で定義する.

$$D \supset D^{(+)} = \{z = x + iy \mid x < 1, -\infty < y < +\infty\}$$

$$D' \supset D^{(-)} = \{z = x + iy \mid 0 < x, -\infty < y < +\infty\}$$

次の定理は反転公式が多重対数関数 $\text{Li}_k(z)$ を特徴付けることを示している.

定理 1 $f_1^{(+)}(z) = \text{Li}_1(z)$ とする. 関数 $f_k^{(\pm)}(z)$ ($k \geq 2$) は関数関係式

$$f_k^{(+)}(z) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^j}{j!} (\log z)^j f_{k-j}^{(+)}(z) + f_k^{(-)}(z) = \zeta(k) \quad (z \in D^{(+)} \cap D^{(-)}) \quad (6)$$

をみたす $D^{(\pm)}$ において正則な関数であり, さらに漸近条件

$$\frac{d}{dz} f_k^{(\pm)}(z) \longrightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty, z \in D^{(\pm)}) \quad (7)$$

および, 正規化条件

$$f_k^{(+)}(0) = 0 \quad (k \geq 2) \quad (8)$$

をみたすものとする. このとき,

$$f_k^{(+)}(z) = \text{Li}_k(z), \quad f_k^{(-)}(z) = \text{Li}_{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}}(1-z) \quad (k \geq 2)$$

である.

この定理を一般化して, 多重対数関数 multiple polylogarithm $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z)$ を多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_r)$ から復元することは, **1変数 KZ 方程式**

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{1-z} \right) G \quad (9)$$

の原点 $z = 0$ における正規化された基本解 $\mathcal{L}(z)$ と $z = 1$ において正規化された基本解 $\mathcal{L}^{(1)}(z)$ の間の接続関係 **[OiU]**

$$\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}^{(1)}(z) \Phi_{KZ} \quad (10)$$

(Φ_{KZ} は **Drinfel'd associator** である) を Riemann-Hilbert 問題として捉えることを意味する. 現状においてはこの問題を完全に解決していないが, 問題の定式化などについて報告したい.

参考文献

- [Mu] N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, P. Noordhoff Ltd. (1946).
- [OiU] S.Oi and K.Ueno, Connection Problem of Knizhnik-Zamolodchikov Equation on Moduli Space $\mathcal{M}_{0,5}$, preprint (2011) arXiv:math.QA/1109.0715.
- [Pl] J. Plemelj, Problems in the sense of Riemann and Klein, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 16, Interscience Publishers, John Wiley & Sons Inc. New York-London-Sydney (1964).

離散空間曲線の等周変形と semi-discrete modified KdV 方程式

井ノ口順一 (山形大理)・梶原健司 (九大IMI)
松浦望 (福岡大理)・太田泰広 (神戸大理)

概要

離散空間曲線の等周変形のうち、とくに semi-discrete modified KdV 方程式によって統制されるようなものに対して、 τ 関数を用いた「等周変形の明示公式」を構成する。

1. 空間曲線の等周変形

ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の曲線 $\gamma(u)$ が時間とともに変形していく様子を考える。ただし u は弧長径数とは限らない勝手な径数とする。時刻 t における曲線を $\gamma(u, t)$ と書く。各曲線 $\gamma(u, t)$ の速さがこの変形で保存される、すなわち函数 $|(\partial/\partial u)\gamma(u, t)|$ が t に依らないための必要十分条件は、曲線の変形方向 $(\partial/\partial t)\gamma(u, t)$ が

$$(1) \quad \left\langle \frac{\partial^2}{\partial u \partial t} \gamma(u, t), \frac{\partial}{\partial u} \gamma(u, t) \right\rangle = 0$$

をみたすことである。条件 (1) がみたされているとき、もしはじめの曲線 $\gamma(\cdot, 0)$ がその弧長によって径数表示されているならば、どの時刻の曲線もおなじ弧長函数によって径数表示されることになる。これはもとの曲線が伸び縮みせずに変形することを意味する。そこで条件 (1) を等周条件と呼ぶ。以下では等周条件をみたす変形を考える。径数 u を弧長径数 x で表示しなおしたものを $u(x)$ としたとき、曲線の等周変形 $\gamma(u(x), t)$ をふたたび $\gamma(x, t)$ と書こう。また、弧長径数 x に関する微分と時刻 t に関する微分をそれぞれプライムとドットで表し、独立変数を書くのは省略する。すなわち $\dot{\gamma} = (\partial/\partial x)\gamma(x, t)$, $\dot{\gamma} = (\partial/\partial t)\gamma(x, t)$ とする。各時刻における空間曲線 γ の接ベクトルを T , 主法線ベクトルを N , 陪法線ベクトルを B , 曲率を κ , 捩率を λ と書けば、これらはいずれも x と t の 2 変数函数である。さて、捩率 λ が定数であるとき、等周変形の方

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\kappa^2}{2} - 3\lambda^2 \right) T + \kappa' N - 2\lambda\kappa B$$

と決める。このときフルネ枠場 (T, N, B) を $SU(2)$ 値の函数に変換したものを ϕ と書けば、 ϕ は

$$(2) \quad \phi' = \phi L, \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda & -\kappa \\ \kappa & -\sqrt{-1}\lambda \end{pmatrix},$$

$$(3) \quad \dot{\phi} = \phi M, \quad M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda\kappa^2 - 2\sqrt{-1}\lambda^3 & -2\kappa'' - \kappa^3 + 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' \\ 2\kappa'' + \kappa^3 - 2\lambda^2\kappa + 2\sqrt{-1}\lambda\kappa' & -\sqrt{-1}\lambda\kappa^2 + 2\sqrt{-1}\lambda^3 \end{pmatrix}$$

をみたす。連立方程式 (2)–(3) の両立条件は modified KdV 方程式

$$(4) \quad \dot{\kappa} = \frac{3}{2}\kappa^2\kappa' + \kappa'''$$

である。以上この節では modified KdV 方程式 (4) によって統制されるような空間曲線の等周変形を見た。

2. 離散空間曲線の等周変形

写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}^3$, $n \mapsto \gamma_n$ がすべての整数 n に対して $\det(\gamma_{n+1}, \gamma_n, \gamma_{n-1}) \neq 0$ をみたすとき、離散空間曲線、あるいはより詳しく正則な離散空間曲線であるという。離散空間曲線 γ に対して

$$a_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \quad T_n = \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{a_n}, \quad \Delta T_n = \frac{1}{a_n + a_{n-1}} (T_n - T_{n-1})$$

とおく. さらにシュミットの正規直交化法を適用して

$$N_n = \frac{\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n}{|\Delta T_n - \langle \Delta T_n, T_n \rangle T_n|}, \quad B_n = T_n \times N_n$$

とおく. 次に曲率と振率に相当するものとして, 函数 $\kappa: \mathbb{Z} \rightarrow (0, \pi)$ および $\lambda: \mathbb{Z} \rightarrow [-\pi, \pi)$ を

$$\langle T_n, T_{n-1} \rangle = \cos \kappa_n, \quad \langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda_n, \quad \langle B_n, N_{n-1} \rangle = \sin \lambda_n$$

により定める. 離散空間曲線が時間とともに変形していく様子を考えよう. セグメント長が一定 $a_n = a > 0$ であるような離散空間曲線 γ_n の変形を $\gamma_n(t)$ とし, 以下では独立変数 t を書くのは省略する. 各セグメントの長さ $|\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ がこの変形で保存されるための必要十分条件は, 各点の変形方向 $\dot{\gamma}_n$ が

$$(5) \quad \langle \dot{\gamma}_{n+1} - \dot{\gamma}_n, \gamma_{n+1} - \gamma_n \rangle = 0$$

をみたすことである. 条件 (5) を連続系にならって等周条件と呼ぶ. 以下, 等周条件をみたす変形を考える. さて ‘振率’ が定数であるとき, すなわち定数 λ が存在してどの時刻でも

$$\langle B_n, B_{n-1} \rangle = \cos \lambda$$

が成り立つとき, 等周変形の方角を

$$\dot{\gamma}_n = \cos \lambda T_n - \cos \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} N_n + \sin \lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} B_n$$

と決める. このときフルネ枠場 (T, N, B) を $SU(2)$ 値の函数 ϕ に変換すると ϕ は

$$(6) \quad \phi_{n+1} = \phi_n L_n, \quad L_n = \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{-1}\lambda/2} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} & -e^{-\sqrt{-1}\lambda/2} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda/2} \sin \frac{\kappa_{n+1}}{2} & e^{\sqrt{-1}\lambda/2} \cos \frac{\kappa_{n+1}}{2} \end{pmatrix},$$

$$(7) \quad \dot{\phi}_n = \phi_n M_n, \quad M_n = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -\sqrt{-1} \sin \lambda & -e^{-\sqrt{-1}\lambda} \tan \frac{\kappa_n}{2} - \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}\lambda} \tan \frac{\kappa_n}{2} + \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} & \sqrt{-1} \sin \lambda \end{pmatrix}$$

をみたす. 連立方程式 (6)–(7) の両立条件は semi-discrete modified KdV 方程式

$$(8) \quad \dot{\kappa}_n = \frac{1}{a} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right)$$

である. 以上この節では semi-discrete modified KdV 方程式 (8) によって統制されるような離散空間曲線の等周変形を見た.

注意 2.1 あるいは, 同じ仮定のもとで, 等周変形の方角を

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_n = & 2 \left(\cos \lambda \tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} \tan \frac{\kappa_n}{2} + \cos 2\lambda \right) T_n \\ & + \left(\cos \lambda \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} - \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} - \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) \right) - 2 \cos 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) N_n \\ & + \left(\sin \lambda \left(1 + \tan^2 \frac{\kappa_n}{2} \right) \left(\tan \frac{\kappa_{n+1}}{2} + \tan \frac{\kappa_{n-1}}{2} \right) + 2 \sin 2\lambda \tan \frac{\kappa_n}{2} \right) B_n \end{aligned}$$

と決めれば, 函数 κ は高次の semi-discrete modified KdV 方程式にしたがう.

3. 明示公式

連立方程式 (2)–(3) あるいは連立方程式 (6)–(7) の解 ϕ を明示的に構成することができれば, いわゆる「Sym の公式」によって, 空間曲線の等周変形あるいは離散空間曲線の等周変形に対する明示公式を与えることができる. これらについての詳細は講演で述べる.

有限体上の可積分方程式系について

神吉 雅崇 (東大数理)*¹
 時弘 哲治 (東大数理)*²
 間田 潤 (日大生産工)*³

本講演では有限体上で定義された離散可積分系を適切に時間発展させる手法について提案する。スペクトルパラメータを含む発展方程式系に対して、パラメータを不定元として残したまま時間発展を行い、最後にパラメータに具体的な数値を代入することで0除算等の問題点を回避する。本手法をYang-Baxter写像を合成して得られる正方形格子上の離散力学系に用い、数値計算の結果を紹介する。この離散力学系は離散KdV方程式の一般化に当たるためYB-dKdV方程式と呼ぶことにする。最後に有限体上のソリトン解が周期性を持つことを示す。

1. Yang-Baxter写像の導入

次の偏差分連立系をYB-dKdV方程式と呼ぶ。

$$x_n^{t+1} = y_n^t \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_n^t y_n^t}{\beta_1 + \alpha_1 x_n^t y_n^t}, \quad (1)$$

$$y_{n+1}^t = x_n^t \frac{\beta_1 + \alpha_1 x_n^t y_n^t}{\alpha_2 + \beta_2 x_n^t y_n^t}. \quad (2)$$

ここで $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) はスペクトルパラメータである。方程式系 (1), (2) は離散KdV方程式の拡張となっており、超離散極限をとると運搬車付き箱玉系 (Box Ball System with a Carrier) と呼ばれるセルオートマトンになることが知られている。また (1), (2) は離散KP方程式のreductionから得られる。独立変数が $(l_1, l_2, t, n) \in \mathbb{Z}^4$ で、それぞれに対応するパラメータが a_1, a_2, b, c であるような離散KP方程式

$$\begin{aligned} (a_1 - b)\tau_{l_1 t} \tau_n + (b - c)\tau_{l_1} \tau_{tn} + (c - a_1)\tau_{l_1 n} \tau_t &= 0, \\ (a_2 - b)\tau_{l_2 t} \tau_n + (b - c)\tau_{l_2} \tau_{tn} + (c - a_2)\tau_{l_2 n} \tau_t &= 0, \end{aligned}$$

を考える。ここで例えば τ_t は τ の独立変数 t を $t+1$ にシフトした関数としている。これらにreduction条件 $\tau_{l_1 l_2} = \tau$ を課し連立すると (1), (2) となることが証明できる。変数の対応は次である。

$$x_n^t = \frac{\tau \tau_{l_1 n}}{\tau_{l_1} \tau_n}, \quad y_n^t = \frac{\tau_{l_1} \tau_t}{\tau \tau_{l_1 t}}, \quad \alpha_i = c - a_i, \quad \beta_i = a_i - b \quad (i = 1, 2)$$

2. 有限体上での定義方法

YB-dKdV方程式を例にとり、有限体 \mathbb{F}_q 上での時間発展について議論する。ただし $q = p^m$, p は素数, $m \in \mathbb{N}$ とする。離散KP方程式の双線形形式を有限体上で扱った先行研

2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 35Q53

キーワード: 離散可積分系, 有限体

*¹ 〒153-8914 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: kanki@ms.u-tokyo.ac.jp

*² 〒153-8914 東京都目黒区駒場3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: toki@ms.u-tokyo.ac.jp

*³ 〒275-8576 千葉県習志野市新栄2-11-1 日本大学 生産工学部

e-mail: mada.jun@nihon-u.ac.jp

究として [1, 2] がある。一方, 本研究は非線形方程式系をそのまま扱う点に特色がある。この際次のような問題点が発生する。

- $\beta_1 + \alpha_1 x_n^t y_n^t \equiv 0$ となる点があると x_n^{t+1} が \mathbb{F}_q の元として定まらない。
 $\Rightarrow x_n^t, y_n^t \in \mathbb{P}\mathbb{F}_q := \{0, 1, \dots, q-1, \infty\}$ で無限大も含めて定義を試みる。
- 無限大を含めても $\beta_1 + \alpha_1 x_n^t y_n^t \equiv 0$ かつ $\alpha_2 + \beta_2 x_n^t y_n^t \equiv 0$ となる点では $x_n^{t+1} = 0/0$ となり不定であり $0 \cdot \infty, \infty + \infty, \infty/\infty$ も不定となる可能性がある。また, 無限大を含めて Yang-Baxter 関係式を成り立たせることが困難という問題もある。

本講演ではこの2つの問題を解決するため次の2ステップでの時間発展を提案する。

- I. スペクトルパラメータ α_i, β_i ($i = 1, 2$) を不定元として残したまま必要な時間まで発展させる。このとき x_n^t, y_n^t は有理函数体 $\mathbb{F}_q(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ の元として一意に定まる。
- II. $\mathbb{F}_q(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ 上の発展結果に具体的な α_i, β_i ($i = 1, 2$) を代入する。結果 $x_n^t, y_n^t \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ が定まる。

(注意) 上の II. でパラメータ α_i, β_i に具体的な値を代入する際に代入の順序により結果が異なる可能性がある。この問題には次のように対処する。パラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ にそれぞれ $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{F}_q$ を代入する場合, 不定元 z を用いて $\alpha_1 = A_1 + z, \alpha_2 = A_2 + z, \beta_1 = B_1 + z, \beta_2 = B_2 + z$ を YB-dKdV 方程式に代入するものとする。最後に $z = 0$ とすればパラメータの代入順序によらず結果が確定する。

- I. の例 $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 4, \beta_1 = 1, \beta_2 = 3$ とする。 $x_n^{t-1} = 1, y_n^{t-1} = 1$ が与えられたとして, 体 \mathbb{F}_7 上で x_n^t を決定したい。パラメータを先に代入すると $x_n^t = y_n^{t-1} \frac{4 + 3x_n^{t-1}y_n^{t-1}}{1 + 6x_n^{t-1}y_n^{t-1}} = \frac{0}{0}$ となり定義できない。そこでパラメータを不定元として残すと $x_n^t = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\alpha_1 + \beta_1} \in \mathbb{F}_7(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ が定まる。
- II. の例 次に x_n^t の値を $\mathbb{F}_7 \cup \{\infty\}$ 上で定める。しかし例えば $\alpha_1 = 6 \rightarrow \alpha_2 = 4 \rightarrow \beta_1 = 1$ の順に代入すれば $x_n^t = \infty$ であるが, 一方 $\alpha_2 = 4 \rightarrow \beta_2 = 3$ と代入すれば $x_n^t = 0$ である。(注意) の手法によれば $\alpha_1 = 6+z, \alpha_2 = 4+z, \beta_1 = 1+z, \beta_2 = 3+z$ として代入の順序によらず $x_n^t = \frac{7+2z}{7+2z} = \frac{2z}{2z} = 1$ が定まる。

3. 具体的な解について

数値計算を行うことで実際に上記の手法により時間発展が行えることを確認した。また YB-dKdV 方程式の N -ソリトン解の表式を求め, それが時間方向, 空間方向ともに $q-1$ 周期をもつことを示した。

参考文献

- [1] M. Bialecki, A. Doliwa: “The discrete KP and KdV equations over finite fields”, Theor. Math. Phys. **137** (2003), 1412-1418
- [2] M. Bialecki, J. J. C. Nimmo: “On pattern structures of the N -soliton solution of the discrete KP equation over a finite field”, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007), 949-959

ガルニエ系のラックス形式の変形

藤 健太 (神戸大学理学研究科)

行列によって表記されるパウルヴェ型方程式のラックス形式の多くは、ラプラス変換を用いて行列のサイズが1つ小さいラックス形式へと変形することができる。この講演では、ガルニエ系のラックス形式の行列サイズを大きくしていくことを考える。

1. ラプラス変換

次の微分方程式を考える。

$$z \frac{d}{dz} \Phi = L \Phi, \quad L = L_0 + z L_1.$$

ここで $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ で、 L_0 と L_1 は $n \times n$ 行列で各成分は z に依存しないとする。この微分方程式に対してラプラス変換

$$z \Phi \longrightarrow -\frac{d}{dx} \Psi, \quad \frac{d}{dz} \Phi \longrightarrow x \Psi,$$

を考える。このとき $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ に対する微分方程式は次のようになる。

補題 1.

$$\frac{d}{dx} \Psi = (-xI + L_1)^{-1} (I + L_0) \Psi.$$

ただし I は単位行列である。

この補題をパウルヴェ型方程式のラックス形式に用いることで、行列のサイズが1つ小さいパウルヴェ型方程式のラックス形式を得ることができる。

$(n+2) \times (n+2)$ 行列の大久保方程式のモノドロミー保存変形にある制限を課したものを考える。このモノドロミー保存変形に対してラプラス変換を施すことによって、 n 変数ガルニエ系のシュレージンガー系へと変形できることが知られている。[3] $(n+2) \times (n+2)$ 行列の大久保方程式のモノドロミー保存変形は、 $A_{n+1}^{(1)}$ 型のドリinfeldt・ソコロフ階層のホモジニアスの場合を相似簡約したものと理解することができる。[2]

2. ガルニエ系の導出

$A_n^{(1)}$ 型のドリinfeldt・ソコロフ階層は $n+1$ の分割によって分類することができる。 $A_5^{(1)}$ 型のドリinfeldt・ソコロフ階層の $(2, 2, 2)$ 分割とその相似簡約を考える。 6×6 行列の M を次のように取る。

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & f_1 & f_{1,2} & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & f_2 & f_{2,3} & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & f_3 & f_{3,4} & t_3 \\ z t_1 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & f_4 & f_{4,5} \\ z f_{5,0} & z t_2 & 0 & 0 & \varepsilon_5 & f_5 \\ z f_0 & z f_{0,1} & z t_3 & 0 & 0 & \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

ここで、 ε_i はパラメータで $\sum \varepsilon_i = 0$ を満たし、 $f_i, f_{i,j}$ は t_1, t_2, t_3 の関数である。この M とドリinfeldt・ソコロフ階層から得ることのできる 6×6 行列の B_1, B_2, B_3 との間

に次の両立条件を得ることができる.

$$\left[z \frac{d}{dz} - M, \frac{\partial}{\partial t_i} - B_i \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_i, \frac{\partial}{\partial t_j} - B_j \right] = 0. \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

次の2つの条件を考える.

条件1 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ かつ $f_1 = 0$

条件2 $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$ かつ $f_3 = 0$

条件1の下で微分方程式系(1)にラプラス変換を用いて変形していくと,

$$\begin{aligned} \left[z \frac{d}{dz} - M, \frac{\partial}{\partial t_i} - B_i \right] = 0 &\longrightarrow \left[z \frac{d}{dz} - N, \frac{\partial}{\partial t_i} - C_i \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_i, \frac{\partial}{\partial t_j} - B_j \right] = 0 &\longrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t_i} - C_i, \frac{\partial}{\partial t_j} - C_j \right] = 0, \\ N = &\begin{pmatrix} 0 & 0 & f_{1,2} & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & f_{2,3} & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_1 & f_3 & f_{3,4} & t_3 \\ 0 & 0 & t_1 f_{1,2} z & t_1^2 z + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 & f_4 & f_{4,5} \\ 0 & 0 & A_{5,3} z & A_{5,4} z & t_2^2 z + \varepsilon_5 - \varepsilon_1 & f_5 \\ 0 & 0 & A_{6,3} z & A_{6,4} z & A_{6,5} z & t_3^2 z + \varepsilon_6 - \varepsilon_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A_{5,3} = t_2 f_2 + f_{1,2} f_{5,0}, \quad A_{6,3} = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) t_3 + f_2 f_{0,1} + f_0 f_{1,2},$$

$$A_{5,4} = t_2 f_{2,3} + t_1 f_{5,0}, \quad A_{6,4} = t_1 f_0 + t_3 f_3 + f_{0,1} f_{2,3}, \quad A_{6,5} = t_2 f_{0,1} + t_3 f_{3,4},$$

と計算できる. N と C_i たちの第1行第2行と第1列第2列を取り除いた 4×4 行列の部分による微分方程式系

$$\begin{aligned} P = \{N_{k,l}\}_{k,l=3}^6, \quad D_i = \{(C_i)_{k,l}\}_{k,l=3}^6 \\ \left[z \frac{d}{dz} - P, \frac{\partial}{\partial t_i} - D_i \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t_i} - D_i, \frac{\partial}{\partial t_j} - D_j \right] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

は, 4×4 行列の大久保方程式のモノドロミー保存変形と同値であることがわかる.

さらに微分方程式系(2)に条件2を課したものに対してラプラス変換をおこなうと, 2変数ガルニエ系のシュレージンガー系へと変形することができる.

したがって微分方程式系(1)に条件1と条件2を課したものからガルニエ系を導出することができる.

参考文献

- [1] Iwasaki, Katsunori; Kimura, Hironobu; Shimomura, Shun; Yoshida, Masaaki, From Gauss to Painlevé, A modern theory of special functions. Aspects Math. E16 (1991)
- [2] S. Kakei and T. Kikuchi, The sixth Painlevé equation as similarity reduction of $\widehat{\mathfrak{gl}}_3$ generalized Drinfeld-Sokolov hierarchy. Lett. Math. Phys. 79 (2007), no. 3, 221–234.
- [3] Mazzocco, Marta, Irregular isomonodromic deformations for Garnier systems and Okamoto's canonical transformations. J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), no. 2, 405–419.

\$q\$ 離散ドリinfeld・ソコロフ階層と \$q\$ パンルヴェ方程式

鈴木 貴雄 (大阪府立大学)*

概 要

本講演では、ドリinfeld・ソコロフ階層の \$q\$ 離散化を考察することで、\$q\$-\$P_{VI}\$ の高階化となるような \$q\$ 差分方程式系を導入する。

1. \$A\$ 型高階 \$q\$ パンルヴェ方程式

本研究で扱う対象は、次の高階 \$q\$ パンルヴェ方程式 \$q\$-\$P_{(n,n)}\$ である [4].

$$\begin{cases} x_i(t) - x_{i-1}(t) = \frac{a_i x_i(qt)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)} - \frac{b_{i-1} x_{i-1}(qt)}{1 + x_{i-1}(qt)y_{i-1}(t)}, \\ y_i(qt) - y_{i-1}(qt) = \frac{b_i y_i(t)}{1 + x_i(qt)y_i(t)} - \frac{a_i y_{i-1}(t)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)}, \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ただし

$$b_0 = \frac{b_n}{q}, \quad x_0(t) = tx_n(t), \quad y_0(t) = \frac{y_n(t)}{qt}, \quad \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{1/2}}{b_i^{1/2}} \frac{1 + x_i(qt)y_i(t)}{1 + x_i(qt)y_{i-1}(t)} = \frac{1}{q^{1/4}}.$$

この方程式系は、神保・坂井によって導入された \$q\$-\$P_{VI}\$ [1] の高階化とみなすことが出来る。事実、後で述べるように \$q\$-\$P_{(2,2)}\$ が \$q\$-\$P_{VI}\$ と等価（正確には含む）となる。

注 1.1 ([4]). \$q\$-\$P_{(n,n)}\$ は、\$q\$ 離散ドリinfeld・ソコロフ階層のうち自然数の分割 \$(n, n)\$ に対応するクラスから、相似簡約によって導かれる。なお、\$q\$ 離散 \$DS\$ 階層の定式化の際には先行研究 [2, 3] を参考とした。

\$q\$-\$P_{(n,n)}\$ の重要な性質二つを以下に述べる。

定理 1.2 ([4]). 双有理変換 \$r_j\$ (\$j = 0, \dots, 2n-1\$) を次のように定義する。

$$\begin{aligned} r_{2j-1}(a_j) &= b_j, & r_{2j-1}(b_j) &= a_j, & r_{2j-1}(x_j(t)) &= x_j(t) + \frac{a_j - b_j}{y_j(t) - y_{j-1}(t)}, \\ r_{2j}(a_{j+1}) &= b_j, & r_{2j}(b_j) &= a_{j+1}, & r_{2j}(y_j(y)) &= y_j(t) + \frac{b_j - a_{j+1}}{x_{j+1}(t) - x_j(t)}, \end{aligned}$$

また、双有理変換 \$\pi\$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= b_i, & \pi(b_i) &= a_{i+1}, & \pi(x_i(t)) &= y_i(qt), & \pi(y_i(t)) &= x_{i+1}(qt) \quad (i \neq n), \\ \pi(a_n) &= b_n, & \pi(b_n) &= qa_1, & \pi(x_n(t)) &= y_n(qt), & \pi(y_n(t)) &= \frac{x_1(qt)}{qt}, & \pi(t) &= \frac{1}{q^2 t}. \end{aligned}$$

この時、\$q\$-\$P_{(n,n)}\$ は \$r_0, \dots, r_{2n-1}, \pi\$ の作用の下で不変であり、群 \$\langle r_0, \dots, r_{2n-1}, \pi \rangle\$ は \$A_{2n-1}^{(1)}\$ 型拡大アフィン・ワイル群と同型である。

* 〒599-8531 堺市中区学園町1番1号 大阪府立大学 高等教育推進機構
e-mail: suzuki@las.osakafu-u.ac.jp

定理 1.3 ([4]). q - $P_{(n,n)}$ の下で次の特殊化を考える.

$$y_j(t) = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{1/2}}{b_i^{1/2}} = q^{-1/4}.$$

この時, 従属変数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ は q 超幾何関数 ${}_n\phi_{n-1}$ によって記述される.

2. q - P_{VI} の導出

q - $P_{(2,2)}$ は次のラックス形式の差分両立条件として得られる.

$$\begin{aligned} \Psi_4(qz, t) &= M_4(z, t)\Psi_4(z, t), \quad \Psi_4(z, qt) = B_4(z, t)\Psi_4(z, t), \\ M_4(z, t) &= \begin{bmatrix} a_1 & y_1(t) - \frac{y_2(t)}{qt} & -1 & 0 \\ 0 & b_1 & x_2(t) - x_1(t) & -1 \\ -tz & 0 & a_2 & y_2(t) - y_1(t) \\ \{x_1(t) - tx_2(t)\}z & -z & 0 & b_2 \end{bmatrix}, \\ B_4(z, t) &= \begin{bmatrix} \frac{qta_1}{qt+x_1(qt)y_2(t)} & y_1(t) & -1 & 0 \\ 0 & 1+x_1(qt)y_1(t) & -x_1(qt) & 0 \\ -tz & 0 & \frac{a_2}{1+x_2(qt)y_1(t)} & y_2(t) \\ -tx_2(qt)z & 0 & 0 & 1+x_2(qt)y_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このラックス形式は, 神保・坂井による q - P_{VI} のラックス形式 [1] と等価である. その証明の概要は次の通り. まずゲージ変換 $\Psi(z, t) \rightarrow \Psi^*(z, t)$ によって係数行列を

$$M_4^*(z, t) = \frac{1}{qa_1} M_4(z, t), \quad B_4^*(z, t) = \frac{qt + x_1(qt)y_2(t)}{qta_1} B_4(z, t).$$

と変換する. 次に q -ラプラス変換

$$z\Psi_4^*(z) \rightarrow \frac{\Phi_4(\zeta) - \Phi_4(q^{-1}\zeta)}{\varepsilon\zeta}, \quad \Psi_4^*(qz) \rightarrow q^{-1}\Phi_4(q^{-1}\zeta),$$

及びメビウス変換 $\zeta \rightarrow z^{-1}$ を行うと, 最終的には次のように変換される.

$$\Phi_4(qz, t) = N_4(z, t)\Phi_4(z, t), \quad \Phi_4(z, qt) = C_4(z, t)\Phi_4(z, t).$$

この時, $N_4(z, t)$ と $C_4(z, t)$ の第 1 列は ${}^t[1, 0, 0, 0]$ となり, 行列サイズを一つ落とすことが出来る. 同様の操作をもう一度繰り返し, 更に適当なゲージ変換を施すことで, 最終的に神保・坂井のラックス形式が得られる. 詳細は [4] を参照.

参考文献

- [1] M. Jimbo and H. Sakai, A q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 145-154.
- [2] S. Kakei and T. Kikuchi, A q -analogue of \mathfrak{gl}_3 hierarchy and q -Painlevé VI, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 12179-12190.
- [3] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, q -Painlevé systems arising from q -KP hierarchy, *Lett. Math. Phys.* **62** (2003) 259-268.
- [4] T. Suzuki, A q -analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q -Painlevé system, Preprint (arXiv:1105.4240).

Weyl群双有理作用と τ 関数の量子化

量子化された τ 関数の正則性

黒木玄 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)*

1. Weyl群双有理作用と τ 変数の量子化

Noumi-Yamada [2] はべき零 Poisson 代数から Weyl 群双有理作用を構成し, その作用を τ 関数まで拡張した. 筆者は [1] でべき零 Poisson 代数から得られる Weyl 群双有理作用を量子化した. この節ではその量子化を τ 関数まで拡張する.

まず, べき零 Poisson 代数の量子化を導入する.

$[a_{ij}]_{i \in I}$ は対称化可能一般 Cartan 行列 (GCM) であるとし, それが定める Weyl 群, \mathbb{C} 上の Kac-Moody Lie 代数の下三角部分の普遍展開環, $\mathbb{C}(q)$ 上の量子展開環の下三角部分をそれぞれ $W = \langle s_i | i \in I \rangle$, $U^- = U(\mathfrak{n}^-)$, $U_q^- = U_q(\mathfrak{n}^-)$ と書く. U^- と U_q^- の Chevalley 生成元をどちらも同じ記号 $\{f_i\}_{i \in I}$ で表わす.

U^-, U_q^- の剰余整域 (零因子を持たない剰余代数) をそれぞれ \tilde{A}, \tilde{A}_q と書く. それらは Noumi-Yamada [2] におけるべき零 Poisson 代数の自然な量子化である. f_i のそれらにおける像も同じ記号 f_i で表わすことにする. f_i たちは \tilde{A} の中では Serre 関係式を \tilde{A}_q の中では q -Serre 関係式を満たしている. 以下では簡単のために f_i の \tilde{A}, \tilde{A}_q における像はどれも 0 にならないと仮定することにする (本質的な仮定ではない).

GCM が有限型またはアフィン型ならば \tilde{A}, \tilde{A}_q は常に Ore 整域になる ([1]). どちらでもない場合には \tilde{A}, \tilde{A}_q が Ore 整域になると仮定しておくことにする. 一般に Ore 整域 A は自然な分数斜体 $Q(A) = \{as^{-1} \mid a, s \in A, s \neq 0\}$ を持つ. 分数斜体 $Q(A)$ への群の代数自己同型作用は可換整域の Spec への群の双有理作用の量子版とみなせる. これが Ore 条件を仮定した理由である.

次に, パラメーター変数と τ 変数を導入しよう.

記号 α_i^\vee ($i \in I$) から生成される自由 \mathbb{Z} 加群を Q^\vee と表わし, 記号 Λ_i ($i \in I$) から生成される自由 \mathbb{Z} 加群を P と表わす. それらのあいだの内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : Q^\vee \times P \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\langle \alpha_i^\vee, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ によって定める. $\alpha_i = \sum_{i \in I} a_{ij} \Lambda_i$ とおく. このとき $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ が成立する. $\alpha_i^\vee, \alpha_i, \Lambda_i$ をそれぞれ単純 coroot, 単純 root, 基本ウェイトと呼ぶ. さらに $P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i$ とおき, その元をドミナント整ウェイトと呼ぶ.

Q^\vee, P には Weyl 群が $s_i(h) = h - \langle h, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee$ ($h \in Q^\vee$), $s_i(\mu) = \mu - \langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle \alpha_i$ ($\mu \in P$) によって自然に作用する. これらの作用は上の内積を保つ.

生成元 $\alpha_i^\vee, \tau_i^{\pm 1}$ ($i \in I$) と以下の基本関係式で定義される \mathbb{C} 上の代数 (ある種の差分作用素環) を D と表わす:

$$\alpha_j^\vee \alpha_i^\vee = \alpha_i^\vee \alpha_j^\vee, \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}.$$

生成元 $q^{\pm \alpha_i^\vee}, \tau_i^{\pm 1}$ ($i \in I$) と以下の関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の代数 (ある種の q 差分作用素環) を D_q と表わす:

$$q^{\alpha_j^\vee} q^{\alpha_i^\vee} = q^{\alpha_i^\vee} q^{\alpha_j^\vee}, \quad \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \quad \tau_i q^{\alpha_j^\vee} \tau_i^{-1} = q^{\alpha_j^\vee + \delta_{ij}} = q^{\delta_{ij}} q^{\alpha_j^\vee}.$$

本研究は科研費 (課題番号:23540003) の助成を受けたものである.

*e-mail: kuroki@math.tohoku.ac.jp

web: <http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/index-j.html>

以上において τ_i^{-1} , $q^{-\alpha_i^\vee}$ がそれぞれ τ_i , $q^{\alpha_i^\vee}$ の逆元になるという関係式は省略した.

$\alpha_i^\vee \in D$ (および $q^{\alpha_i^\vee} \in D_q$) をパラメータ変数と呼び, τ_i を τ 変数と呼ぶ. τ 変数は本質的にパラメータ変数の正準共役変数 (の指数関数) である.

$h \in Q^\vee$ と $\nu \in P$ に対して q^h と τ^ν を $q^h = \prod_{i \in I} (q^{\alpha_i^\vee})^{(h, \Lambda_i)}$, $\tau^\nu = \prod_{i \in I} \tau_i^{(\alpha_i^\vee, \nu)}$ と定める. ($\nu \in P^+$ 以外の場合にこの τ^ν はあとで導入する本質的に重要な τ 関数 $\tau_\nu = w(\tau^\mu)$ ($\nu = w(\mu) \in WP^+$) と一致しないので, 混同しないように注意せよ.)

Weyl 群は代数 D , D_q に代数自己同型として自然に作用する. すなわち $w \in W$ の自然な作用を \tilde{w} と書くと, $\tilde{w}(h) = w(h)$, $\tilde{w}(q^h) = q^{w(h)}$ ($h \in Q^\vee$), $\tilde{w}(\tau^\nu) = \tau^{\tilde{w}(\nu)}$ ($\nu \in P$). たとえば $\tilde{s}_i(\tau_i) = \prod_{k \neq i} \tau_k^{-\alpha_{ki}} / \tau_i$ かつ $\tilde{s}_i(\tau_j) = \tau_j$ ($i \neq j$).

$A = \tilde{A} \otimes D$, $A_q = \tilde{A}_q \otimes D_q$ とおく. \tilde{A} , \tilde{A}_q が Ore 整域になるという仮定より, A , A_q も Ore 整域になる. よって分数斜体 $Q(A)$, $Q(A_q)$ が自然に定義される. \tilde{A} , D のそれぞれと $\tilde{A} \otimes 1$, $1 \otimes D$ を同一視し, \tilde{A}_q , D_q のそれぞれと $\tilde{A}_q \otimes 1$, $1 \otimes D_q$ を同一視する. D , D_q への $w \in W$ の作用を A , A への作用に自明な方法で拡張したものを \tilde{w} と書くことにする: $\tilde{w}(f_i) = f_i$.

定理 1 (量子化された Weyl 群双有理作用). Weyl 群の $Q(A)$, $Q(A_q)$ への代数自己同型作用を次のように構成することができる:

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (x \in Q(A) \text{ または } x \in Q(A_q)).$$

($Q(A)$ と $Q(A_q)$ の代数自己同型 $x \mapsto f_i^{\alpha_i^\vee} x f_i^{-\alpha_i^\vee}$ がうまく定義されることを含む.) \square

たとえば s_i の τ 変数への作用は次のように計算される: $s_i(\tau_j) = \tau_j$ ($i \neq j$) であつ

$$s_i(\tau_i) = f_i^{\alpha_i^\vee} \frac{\prod_{k \neq i} \tau_k^{-\alpha_{ki}}}{\tau_i} f_i^{-\alpha_i^\vee} = f_i^{\alpha_i^\vee} f_i^{-\alpha_i^\vee + 1} \frac{\prod_{k \neq i} \tau_k^{-\alpha_{ki}}}{\tau_i} = f_i \frac{\prod_{k \neq i} \tau_k^{-\alpha_{ki}}}{\tau_i}.$$

2. 量子化された τ 関数の定義と正則性

$\mu \in P^+$ と $w \in W$ に対して $w(\tau^\mu)$ は $\nu = w(\mu) \in WP^+$ だけから決まる. そこで量子 τ 関数 $\tau_\nu = \tau_{w(\mu)}$ を $\tau_\nu = \tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$ によって定める.

予想 (量子 τ 関数の正則性). すべての量子 τ 関数 $\tau_{w(\mu)}$ ($\mu \in P^+$, $w \in W$) は A または A_q に含まれる (すなわち f_i に関して多項式になる). \square

この予想は category \mathcal{O} の translation functors の理論が利用できる場合にはただちに証明される. Noumi-Yamada [2] はこの予想の古典版を一般的に証明している. しかし証明法は互いにまったく異なる.

定理 2. Kac-Moody Lie 代数の場合に上の予想は常に成立する. 量子展開環の場合には上の予想は有限型の場合および A_∞ 型などの場合に成立する. \square

参考文献

- [1] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 61, 2011. Exploring New Structures and natural Constructions in Mathematical Physics. pp. 289–325. [arXiv:math/0808.2604](https://arxiv.org/abs/math/0808.2604)
- [2] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001. [arXiv:math.QA/0012028](https://arxiv.org/abs/math.QA/0012028)

笹野の結合型 II 型パンルヴェ方程式のベックルンド変換と,
II 型パンルヴェ方程式

川向 洋之 (三重大学教育学部)
野田 真司 (三重大学教育学部)
吉田 和史 (三重大学教育学部)

笹野により, 結合型 II 型パンルヴェ方程式の一つとして, 次の方程式が与えられた. ([1] 参照).

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^2 + y + w - \frac{t}{2}, \\ \frac{dy}{dt} = 2xy + \alpha_1, \\ \frac{dz}{dt} = -z^2 + y + w - \frac{t}{2}, \\ \frac{dw}{dt} = 2zw + \alpha_2. \end{cases}$$

これに関して, 以下の結果を報告する.

【定理 1】 次の正準変換

$$\begin{cases} X = x + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(x - z)}{2(x - z)y + \alpha_1 + \alpha_2}, \\ Y = y + \frac{1}{4\alpha_1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{x - z} - \frac{1}{4\alpha_1} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 y}{(x - z)y + \alpha_1}, \\ Z = z, \\ W = w - \frac{1}{4\alpha_1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{x - z} + \frac{1}{4\alpha_1} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 y}{(x - z)y + \alpha_1} \end{cases}$$

によって, (1) からパラメータ α_1, α_2 を消去することができる.

【定理 2】 $h = h(t)$ を II 型パンルヴェ方程式のハミルトニアンが満たす微分方程式 ([2] 参照)

$$(2) \quad (h'')^2 + 4(h')^3 + 2h'(th' - h) - \frac{b^2}{4} = 0$$

の解, $\varphi = \varphi(t)$ を

$$(3) \quad \varphi' + \varphi^2 + 2h' + \frac{t}{2} = 0$$

の解とすると,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2h''' - 2\varphi h'' + 8(h')^2 + 2th' - (\alpha_1 - \alpha_2)\varphi}{2h'' - 4\varphi h' - \alpha_1 + \alpha_2}, \\
 y &= -\frac{1}{4} \frac{4(h'')^2 - 16\varphi h' h'' + 4\alpha_2 h'' + 16\varphi^2 (h')^2 - 8\alpha_2 \varphi h' - \alpha_1^2 + \alpha_2^2}{h''' - 2\varphi h'' + 4(h')^2 + th' + 2\varphi^2 h'}, \\
 z &= \varphi, \\
 w &= -\frac{1}{4} \frac{8h' h''' - 4(h'')^2 + 32(h')^3 - 4\alpha_2 h'' + 8t(h')^2 + 8\alpha_2 \varphi h' + \alpha_1^2 - \alpha_2^2}{h''' - 2\varphi h'' + 4(h')^2 + th' + 2\varphi^2 h'}
 \end{aligned}$$

は (1) の解となる. 逆に (1) の解 (x, y, z, w) に対し,

$$\begin{aligned}
 h &= -x^2 y + \frac{y^2}{2} - \frac{ty}{2} - \alpha_1 x - z^2 w + \frac{w^2}{2} - \frac{tw}{2} - \alpha_2 z + yw, \\
 \varphi &= z
 \end{aligned}$$

と置くと, h, φ は (2), (3) を満たす.

References

- [1] Y. Sasano, Coupled Painlevé II system in dimension four and the systems of type $A_4^{(1)}$, *Tohoku Math J.* 58 (2006), 529 – 548.
- [2] K. Okamoto, Studies on the Painlevé Equations III, *Math Ann.* 275 (1986), 221 – 255.

II 型行列パンルヴェ方程式の特殊解

川向 洋之 (三重大学教育学部)
 野田 真司 (三重大学教育学部)
 吉田 和史 (三重大学教育学部)

坂井により, アクセサリー・パラメータが4個の既約フックス型方程式のMPD方程式 (=モノドロミー保存変形から得られる非線形方程式) がすべて決定された ([1] 参照). また, 川上, 坂井, 中村により, 坂井の導いた方程式の退化が計算された ([2] 参照)

今回の発表では, [2] で与えられた II 型行列パンルヴェ方程式

$$(1) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 - 2q_2p_2^2 - (q_1^2 - q_2 + t)p_1 - 2(2q_1q_2 - \theta_1 - \theta_2)p_2 + 2\theta_2q_1$$

に関して, 以下の結果を報告する.

【定理 1】 $p_1 \equiv 0, p_2 \equiv 0, \theta_2 = 0$ ならば, (1) は線形方程式

$$\frac{d^3u}{dt^3} + 8t \frac{du}{dt} - 2(2\theta_1 - 1)u = 0$$

の解で記述できる特殊解を持つ.

【定理 2】 (1) の有理解に関して, 次が成り立つ.

- 1) (1) が有理解を持つならば θ_1 は半整数である. 特に $\theta_1 = 1/2$ のとき, (1) が有理解を持つならば θ_2 は整数である.
- 2) $\theta_1 = 1/2$ かつ $\theta_2 \in \mathbb{Z}$ のとき, (1) はただ一つの有理解を持つ.

References

- [1] 坂井 秀隆, モノドロミー保存変形と4次元パンルヴェ型方程式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト
- [2] 川上 柘志, 坂井 秀隆, 中村 あかね, 4次元 Painlevé 型方程式の退化関式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト
- [3] 川上 柘志, 行列 Painlevé 方程式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会函数方程式論アブストラクト

4次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 における pole をもつ特殊解

金子 和雄 (四日市大学 関孝和数学研究所)

4次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 は, 第6Painlevé 方程式の拡張として2種類の方法により導かれた。一つは藤, 鈴木により Drinfel'd-Sokolov 階層からの相似簡約から [1], もう一つは坂井により Fuchs 型方程式のモノドロミ保存変形から得られた [2]。昨年秋の学会 (信州大) では坂井による次の3行3列行列型表示式を用い, これから得られたハミルトン系から特殊解 (正則解) を求め, その内の幾つかについて線型モノドロミを計算した結果につき報告した。今回は pole をもつ特殊解に付き報告する。

$$\frac{d\widehat{Y}}{dx} = \widehat{A}(x)\widehat{Y}, \quad \widehat{A}(x) = \frac{\widehat{A}_0}{x} + \frac{\widehat{A}_1}{x-1} + \frac{\widehat{A}_t}{x-t}, \quad (1)$$

$$\widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} \theta_1^0 & -1+q_1/t & -1+q_2/t \\ 0 & \theta_2^0 & \widehat{a}_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{a}_1 & 1 & 1 \\ \widehat{a}_1(p_1q_1-\varepsilon) & p_1q_1-\varepsilon & p_1q_1-\varepsilon \\ \widehat{a}_1(p_2q_2-\tilde{\varepsilon}) & p_2q_2-\tilde{\varepsilon} & p_2q_2-\tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{A}_t = \begin{pmatrix} \widehat{a}_t & -q_1/t & -q_2/t \\ \widehat{a}_t p_1 & -p_1q_1 & -p_1q_2 \\ \widehat{a}_t p_2 & -p_2q_1 & -p_2q_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \widehat{a}_0 &= p_1(q_2-q_1) + \varepsilon, \quad \varepsilon = \theta_2^0 + \kappa_2, \\ \widehat{a}_1 &= \theta_2^0 + \theta^1 + \kappa_2 + \kappa_3 - p_1q_1 - p_2q_2, \\ \widehat{a}_t &= \theta^t + p_1q_1 + p_2q_2, \quad \tilde{\varepsilon} = \kappa_3. \end{aligned}$$

Hamiltonian は第6Painlevé 方程式の Hamiltonian を用いて次のように与えられる。

$$t(t-1)H \begin{bmatrix} 21, 21, 111 \\ 111 \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} \theta_1^0, \theta_2^0, \theta^1, \theta^t \\ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \end{matrix}; t; \begin{matrix} q_1, q_2 \\ p_1, p_2 \end{matrix} \right) = t(t-1)H_{VI} \left(\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma \\ \delta, \varepsilon \end{matrix}; t; q_1, p_1 \right)$$

$$+ t(t-1)H_{VI} \left(\begin{matrix} \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \\ \tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon} \end{matrix}; t; q_2, p_2 \right) + (q_1-t)(q_2-1)\{(q_1p_1-\varepsilon)p_2 + (q_2p_2-\tilde{\varepsilon})p_1\} + g(t),$$

$$\alpha = \theta_1^0 - \theta_2^0, \quad \beta = \theta^1 + \kappa_3, \quad \gamma = \theta^t + \kappa_3, \quad \delta = \theta_2^0 + \kappa_1 - \kappa_3, \quad \varepsilon = \theta_2^0 + \kappa_2,$$

$$\tilde{\alpha} = \theta_1^0 - \theta_2^0 - \kappa_2, \quad \tilde{\beta} = \theta^1 + \theta_2^0 + \kappa_2, \quad \tilde{\gamma} = \theta^t + \theta_2^0 + \kappa_2, \quad \tilde{\delta} = \kappa_1, \quad \tilde{\varepsilon} = \kappa_3.$$

定理 4次元 Painlevé 型方程式 21,21,111,111 には, 特異点 $t=0$ の近傍に pole をもつ特殊解 (0-7-1), (0-7-2), (0-8-1), (0-8-2), ... が存在する (pole をもたぬ解が6個あり, 解 (0-7-1), ... と仮に名づける)。

$$(0-7): \quad q_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j, \quad p_1 = \frac{\tilde{a}_{-1}}{t} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j t^j, \quad q_2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j t^j, \quad p_2 = \frac{\tilde{b}_{-1}}{t} + \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{b}_j t^j,$$

$$(0-7-1): \quad a_1 = \frac{\theta^t}{\theta^t - \theta_1^0 + \theta_2^0}, \dots, \quad \tilde{a}_{-1} = -(\theta^t - \theta_1^0 + \theta_2^0), \dots,$$

$$b_1 = \frac{\theta^t(\kappa_2 + \theta^t + \theta_2^0)}{(\theta^t + \theta_2^0)(\theta^t - \theta_1^0 + \theta_2^0)}, \dots, \quad \tilde{b}_{-1} = 0, \quad \tilde{b}_0 = \frac{-\kappa_3(\kappa_1 + \theta^t + \theta_2^0)}{1 + \theta^t + \theta_2^0}, \dots,$$

$$(0-7-2) : \quad a_1 = 0, a_2 = \dots, \tilde{a}_{-1} = \frac{(\theta_2^0 + \kappa_2)(\theta_1^0 - \theta^t)}{\theta^t + \kappa_2}, \dots,$$

$$b_1 = \frac{\theta^t(\kappa_2 + \theta^t)}{(\theta_2^0 - \theta^t)(\theta_1^0 - \theta^t)}, \dots, \tilde{b}_{-1} = \frac{-(\theta_2^0 - \theta^t)(\theta_1^0 - \theta^t)}{\theta^t + \kappa_2}, \dots,$$

$$(0-8-n) : \quad q_1 = \frac{a_{-n}}{t^n} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j, p_1 = \sum_{j=n}^{\infty} \tilde{a}_j t^j, q_2 = \frac{b_{-n}}{t^n} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j, p_2 = \sum_{j=n}^{\infty} \tilde{b}_j t^j,$$

$$(0-8-1) : \quad \tilde{a}_1 = \frac{\varepsilon a_{-1} - \tilde{\beta} b_{-1}}{a_{-1}(a_{-1} - b_{-1})}, \dots, \tilde{b}_1 = \frac{\beta a_{-1} - \tilde{\varepsilon} b_{-1}}{b_{-1}(a_{-1} - b_{-1})}, \dots,$$

$$\forall a_{-1}, b_{-1} \in \{\mathbb{C}^\times | a_{-1} \neq b_{-1}\},$$

$$(0-8-2) : \quad \tilde{a}_2 = \frac{\varepsilon a_{-2} - \tilde{\beta} b_{-2}}{a_{-2}(a_{-2} - b_{-2})}, \dots, \tilde{b}_2 = \frac{\beta a_{-2} - \tilde{\varepsilon} b_{-2}}{b_{-2}(a_{-2} - b_{-2})}, \dots,$$

$$\forall a_{-2}, b_{-2} \in \{\mathbb{C}^\times | a_{-2} \neq b_{-2}\},$$

...

解 (0-7-1) は p_1 にのみ 1 位の pole をもち、これに対応する解は第 6 Painlevé 方程式にも存在する [3]。解 (0-8-1), (0-8-2), ... は任意定数 2 個を含み, q_1, q_2 が 1 位, 2 位, ... の pole をもつ 2 パラメータ解であり, これらに対応する解は第 6 Painlevé 方程式には存在しない。

定理 線型方程式 (1) は, 特殊解 (0-7-1) に対し次のモノドロミデータをもつ

$$M_0 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \theta_1^0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \theta_2^0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \theta^t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_\infty = C_1 \begin{pmatrix} e^{2\pi i \kappa_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \kappa_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \kappa_3} \end{pmatrix} C_1^{-1}, \quad [M_0, M_t] = 0,$$

$$M_\infty M_1 M_t M_0 = I_3.$$

特殊解 (0-7-1) は線型モノドロミ M_0, M_t を可換とする解である。ここで C_1 は一般化超幾何函数 ${}_3F_2$ における接続行列である [4], [5]。

Reference

- [1] K. Fuji and T. Suzuki, Funkcial.Ekvac. **53** (2010), 143–167.
- [2] H. Sakai, Graduate School of Math. Sci. Univ. of Tokyo, **17** (2010), 1–21.
- [3] K. Kaneko, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B2** (2007), 89–97.
- [4] K. Mimachi, Funkcial.Ekvac. **51** (2008), 107–133.
- [5] 川畑 ユリ子, 3 個の特異点をもつ n 階 Fuchs 型微分方程式の接続問題, 津田塾大学紀要, 第 8 号 (1976), 69–75, 第 10 号 (1978), 45–55.

Painlevé 方程式の漸近展開の 収束について ～Boutroux 100～

大山 陽介 (大阪大学大学院情報科学研究科)

Painlevé 方程式の漸近解析は、1913 年の P. Boutroux の研究に始まり、来年でちょうど 100 年を迎える。現代的な Painlevé 方程式の研究が始まった Ising 模型の研究でも漸近解析や接続問題が重要であった。本稿では、第一 Painlevé 方程式の漸近級数の収束性について述べる。本質的には、1980 年代の下村・高野・吉田(「Painlevé 方程式の動かない特異点について」数学 **39**・1987, 289–304) によって知られていた結果であるが、海外の研究者には広く知られていないまま、今なお未解決の問題とされている現状を省みると、今一度、福原・岩野理論を再訪することにも意義があると考えられる。

第一 Painlevé 方程式 $y'' = 6y^2 + t$ は、次の線型方程式

$$\frac{dY}{dz} = \begin{pmatrix} 4z^4 + t + 2y^2 & -4yz^2 - t - 2y^2 - (2y_1z + \frac{1}{2z}) \\ 4yz^2 + t + 2y^2 - (2y_1z + \frac{1}{2z}) & -4z^4 - t - 2y^2 \end{pmatrix} Y$$

のモノドロミ保存変形として得られる。無限遠での形式解は $\hat{Y}(z) \sim \exp[(4z^5/5 + xz) \text{diag}(1, -1)]$ である。角領域 $\arg z \in (\frac{\pi}{5}(k - \frac{3}{2}), \frac{\pi}{5}(k + \frac{1}{2}))$ で形式級数に漸近する正則解を $Y_k(z)$ とおくと、Stokes 行列は、 $S_k = Y_k^{-1}(z)Y_{k+1}(z)$ で定まる定数行列で、対角成分は全て 1, k が奇数の時は上半三角、偶数のときは下半三角である。 S_k の非対角成分を s_k とおく。線型方程式は、もともと Poincaré rank 5/2 の 2 重被覆なので、 s_j は周期 5 であり、周回路を回ると元に戻ることから、実質的なパラメタの数は 2 になる。特に、 $1 + s_2s_3 \neq 0$ であれば

$$s_1 = \frac{i - s_3}{1 + s_2s_3}, \quad s_4 = \frac{i - s_2}{1 + s_2s_3}, \quad s_5 = i(1 + s_2s_3).$$

また、 $1 + s_2s_3 = 0$ であれば、 $s_2 = s_3 = i$, $s_5 = 0$, $s_1 + s_4 = i$ 。

P1 の漸近解には次の 2 つが知られている、一つは楕円漸近解である。Boutroux 変換 $q = t^{1/2}y$, $x = \frac{5}{4}t^{4/5}$ によって、P1 は

$$q'' = 6q^2 + 1 - \frac{q'}{x} + \frac{q}{25x^2}$$

に変換される。 x の負冪の項を捨てると楕円関数を満たす方程式になるので

$$y(t) \sim |t|^{1/2} \wp \left(\frac{4}{5} e^{i\varphi} |t|^{5/4} - t(\varphi, s); g_2(\varphi), g_3(\varphi) \right) + O(|t|^{3/4}),$$

$$t(\varphi, s) = \frac{1}{2\pi i} \left(\omega_a(\varphi) \log(is_{2-2k}) + \omega_b(\varphi) \log \frac{s_{5-2k}}{s_{2-2k}} \right)$$

と楕円関数で近似される解が得られる。詳細は、Kapaev-Kitaev(1993) 参照。

本研究は、三菱科学財団および科研費(課題番号:21540217)の助成を受けたものである

もう一つは **tritonquée** 解である。発散級数

$$y_0 \sim -\sqrt{-\frac{6}{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(-t)^{5k/2}} \quad (t \rightarrow -\infty)$$

に漸近する真の解は、 $t < 0$ で大域的に存在（極を持たない）する単調減少な唯一の解として特徴づけられ、tritonquée 解と呼ばれる（ $t > 0$ では無数の極を持つ）。複素領域では $|\arg t| < \pi/5$ のみに極を持つ有理型関数である。

tritonquée 解には 2-parameter の摂動解が知られている。 $t \rightarrow -\infty$ のとき

$$y \sim y_0 + a(-t)^{-1/8} \exp\left[\frac{4}{5}i(-t)^{5/4}\right] + b(-t)^{-1/8} \exp\left[-\frac{4}{5}i(-t)^{5/4}\right] + o((-t)^{-1/8})$$

であり、 a, b は s_2, s_3 で表される。tritonquée 解は $a = 0, b = 0$ の時であり、 $s_2 = 0, s_3 = 0$ に対応する。また、 $a = 0$ or $b = 0$ の時、1-parameter 解 (tritonquée 解) として、ある角領域で収束する (Kapaev:1988)。2-parameter の摂動解は、Takei(2000) らの完全 WKB 解と本質的に同じものであり、transseries とも呼ばれる。

数値計算すると、この摂動解は実軸上で高い精度で一致するが、tritonquée 解および、冪が正負双方に表れる $e^{\pm at}$ の形の形式級数の複素平面での収束領域が近年あらためて問題となった。しかし、高野 (J. Math. Soc. Jap. **42**・1990)・吉田 (FE **28**・1985) の結果を見直せば、ただちに次の定理がしたがう：

定理 tritonquée 解の 2-parameter 摂動解は、十分大きな $R > 0$ に対して、実軸上の開区間 $(-\infty, -R)$ のある複素近傍で正則な解を与える。この領域を、 $t \rightarrow -\infty$ における角領域と考えたとき、角度は 0 である。さらに、0-parameter 解 (tritonquée 解) の収束域の角度は $8/5\pi$ 、1-parameter 解の収束域の角度は $4/5\pi$ 、2-parameter 解の収束域の角度は 0 であり、それ以上には広がらない。

なお、楕円漸近解から摂動解への scaling limit (Kapaev-Kitaev:1993) を考えることで、Kapaev(2002) も 2-parameter 解の収束域の存在を示している。実際には、小さな摂動に対しては $(-\infty, 0]$ のある複素近傍まで正則であることがわかる。

《第一 Painlevé 方程式の漸近解析に関する参考文献》

- Boutroux, P.; Ann. Sci. Ecol. Norm. Super. **30** (1913), 255–376; **31** (1914), 99–159.
 Joshi, N. and Kitaev, A. V.; Stud. Appl. Math. **107** (2001), 253–291.
 Joshi, N. and Kruskal, M. D.; Phys. Lett. A **130** (1988), 129–137.
 Joshi, N. and Kruskal, M. D.; Stud. Appl. Math. **86** (1992), 315–376.
 Kapaev, A. A.; Diff. Eqns **24** (1989), 1107–1115.
 Kapaev, A. A.; CRM Proc. Lecture Notes, 32 (2002), 157–179.
 Kapaev, A. A.; J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004), 11149–11167.
 Kapaev, A. A and Kitaev A. V.; Lett. Math. Phys. **27** (1993), 243–52.
 Kitaev, A. V.; St. Petersburg Math. J. **5** (1994), 577–605.
 Kitaev, A. V.; Russ. Math. Surveys **49** (1994), 81–150.
 Takei, Y.; In “Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-linear” (2000), 271–279.

Parametric Stokes phenomena for the third Painlevé equation $P_{\text{III}'}(D_6)$

岩木耕平 (京大数理研 D1)*

概 要

完全 WKB 解析を用いて、大きなパラメータを含んだ D_6 型の第 3 Painlevé 方程式 ($P_{\text{III}'}$) の解析を行う。今回取り上げるのは、“Stokes 幾何の退化”の問題である。方程式に含まれるパラメータが特殊な値を取る時に Stokes 幾何が退化し、さらに退化の前後では形式解の Borel 和が不連続に変化することが知られている。我々はこの不連続な変化を“parametric Stokes phenomena”と呼んでいる。講演では、このパラメータ方向の Stokes 現象を解析する上で鍵になる“($P_{\text{III}'}$) の Voros 係数 (P -Voros 係数)”と呼ばれる量の具体的な表示を与え、それを元に導かれる接続公式を紹介する。

1. Introduction

考えるのは、大きなパラメータ $\eta > 0$ を含んだ D_6 型の第 3 Painlevé 方程式 ([3])

$$(P_{\text{III}'}) : \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{d\lambda}{dt} + \eta^2 \left(\frac{\lambda^3}{t^2} - \frac{c_\infty \lambda^2}{t^2} + \frac{c_0}{t} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

である。ここで c_0, c_∞ は 0 でない複素パラメータである。今回は特に、“1-パラメータ解”と呼ばれる次の形式解を考察の対象とする。

$$\lambda(t, \mathbf{c}, \eta; \alpha) = \lambda^{(0)}(t, \mathbf{c}, \eta) + \alpha \eta^{-\frac{1}{2}} \lambda^{(1)}(t, \mathbf{c}, \eta) e^{\eta\phi} + (\alpha \eta^{-\frac{1}{2}})^2 \lambda^{(2)}(t, \mathbf{c}, \eta) e^{2\eta\phi} + \dots$$

ここで $\mathbf{c} = (c_0, c_\infty)$, α は自由パラメータ, $\lambda^{(k)}(t, \mathbf{c}, \eta) = \lambda_0^{(k)}(t, \mathbf{c}) + \eta^{-1} \lambda_1^{(k)}(t, \mathbf{c}) + \eta^{-2} \lambda_2^{(k)}(t, \mathbf{c}) + \dots$ は η^{-1} に関する形式的べき級数, $\phi = \phi(t, \mathbf{c}) = \int^t \sqrt{\Delta(t, \mathbf{c})} dt$ であり, $\Delta(t, \mathbf{c})$ は次で与えられる。

$$\Delta(t, \mathbf{c}) = \frac{3\lambda_0^{(0)}(t, \mathbf{c})^2}{t^2} - \frac{2\lambda_0^{(0)}(t, \mathbf{c})^3}{t^2} + \frac{1}{\lambda_0^{(0)}(t, \mathbf{c})^2}.$$

ここで $\lambda^{(0)}(t, \mathbf{c}, \eta)$ はそれ自身“0-パラメータ解”と呼ばれる ($P_{\text{III}'}$) の η^{-1} に関する形式的べき級数解で、その初項 $\lambda_0^{(0)}$ (λ_0 とする) は、次の代数方程式により定義されることを注意しておく。

$$\frac{\lambda_0^3}{t^2} - \frac{c_\infty \lambda_0^2}{t^2} + \frac{c_0}{t} - \frac{1}{\lambda_0} = 0.$$

この ($P_{\text{III}'}$) の、 $(c_0, c_\infty) = (2-i, 2)$ とその前後における変わり点、および Stokes 曲線 (cf. [2]) の図は次 (Figure 1 ~ 3) のようになっている。ここで、 $(c_0, c_\infty) = (2-i, 2)$

2010 Mathematics Subject Classification: 34M55, 34M40, 34M60

キーワード : Exact WKB analysis, Painlevé equations, Stokes phenomenon, Voros coefficient

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 数理解析研究所

e-mail: iwaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

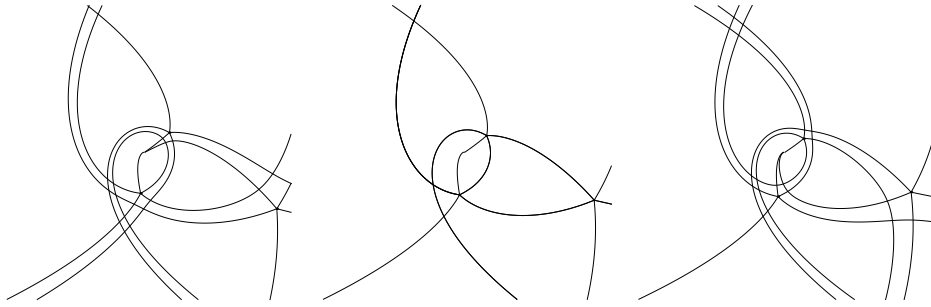


図 1: $\mathbf{c} = (2 - i - \varepsilon, 2)$.

図 2: $\mathbf{c} = (2 - i, 2)$.

図 3: $\mathbf{c} = (2 - i + \varepsilon, 2)$.

の時には“Stokes幾何の退化”(すなわち、変わり点同士を結ぶStokes曲線が存在する現象)が起こっていることに注意されたい. このような退化が起こる前後では, 形式解のBorel和に不連続な変化が起こることが知られている. この種のStokes現象を我々は“parametric Stokes phenomena”と呼んでいる. (このStokes現象, およびStokes幾何の退化は, 方程式に含まれるパラメータ c_0, c_∞ が変化した時に起こるのでこう呼んでいる.)

講演では, [1]で第2 Painlevé方程式に対して導入した“ P -Voros係数”をこの (P_{III}) に対しても導入し, その具体的な表示を与える. その表示を元に, parametric Stokes phenomenonにより引き起こされる1-パラメータ解のBorel和の不連続な変化を記述する接続公式を導く.

2. Result

結論として, 今回は次のような接続公式を得た:

Figure 2の退化に関する接続公式. $\lambda(t, \mathbf{c}, \eta; \alpha)$ を(適当に正規化された) (P_{III}) の1-パラメータ解, \mathcal{S} をBorel総和作用素とする. もし十分小さな $\varepsilon > 0$ について,

$$\mathcal{S}[\lambda(t, \mathbf{c}, \eta; \alpha)]_{(c_0, c_\infty)=(2-i-\varepsilon, 2)} = \mathcal{S}[\lambda(t, \mathbf{c}, \eta; \tilde{\alpha})]_{(c_0, c_\infty)=(2-i+\varepsilon, 2)}$$

が成り立つならば, 自由パラメータ α と $\tilde{\alpha}$ は次のような関係式で結ばれている.

$$\tilde{\alpha} = (1 + e^{\pi i(c_\infty - c_0)\eta})\alpha.$$

1-パラメータ解の正規化については講演時に詳しく説明するつもりである.

参考文献

- [1] K.Iwaki : Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, Preprint, arXiv:1106.0612 [math.CA].
- [2] 河合隆裕, 竹井義次 : 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
- [3] Y.Ohyama, H.Kawamuko, H.Sakai and K.Okamoto : Studies on the Painlevé equation V, Third Painlevé Equations of Special Type $P_{\text{III}}(D_7)$ and $P_{\text{III}}(D_8)$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **13**(2006), 145-204.

Riemann 球面上の線型常微分方程式

大島利雄 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 Introduction

有理関数や指数関数などの初等関数以外の関数を超越関数というが、その中でも応用の多い重要な関数は特殊関数と呼ばれ、古くから研究されてきた。古典的な特殊関数の中でも最も重要なものとして **Gauss** の超幾何関数が挙げられる。Bessel 関数, Whittaker 関数, Legendre 多項式といったその他のよく知られた特殊関数たち^{*1}はこの Gauss の超幾何関数のある種の極限操作や特殊化として得ることができ、岩波全書の公式集 III 「特殊関数」 [MUI] の 3 分の 2 以上はこれで占められている。この Gauss の超幾何関数は、ある代数的線型常微分方程式^{*2}を満たしていることを使って、様々な性質が求められて来た。このように、代数的線型常微分方程式で特徴付けられる「特殊関数」の性質や具体的公式を得るための、現在発展中の新しい理論について解説したい。

Gauss の超幾何関数は Euler によって導入された以下のような超幾何級数と呼ばれる巾級数で表される。

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_i (\beta)_i}{(\gamma)_i i!} x^i = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \dots$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$, $(\alpha)_n := \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$. さらにこの巾級数の収束条件は $|x| < 1$ であり、**Gauss** の超幾何微分方程式とよばれる次の代数的線型微分方程式を満たすことが確かめられる。

$$x(1-x)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)u' - \alpha\beta u = 0.$$

簡単のために

$$P = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial - \alpha\beta \quad (\partial := \frac{d}{dx})$$

と置いて、Gauss の超幾何関数の満たす微分方程式を

$$(GE): Pu = 0$$

^{*1} Whittaker-Watson [WW] 等の文献がある

^{*2} 代数的とは、多項式または有理関数係数の常微分方程式の意味で使った

^{*3} これらの値によっては定義されない場合があることに注意。たとえば γ が負の整数の時

と書くことにしよう。作用素 $\vartheta := x\partial$ の固有値 λ の固有関数が x^λ となることに注意し、

$$\begin{aligned} xP &= x^2\partial^2 + \gamma x\partial - x(x^2\partial^2 + (\alpha + \beta + 1)x\partial + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta - 1) + \gamma\vartheta - x(\vartheta(\vartheta - 1) + (\alpha + \beta + 1)\vartheta + \alpha\beta) \\ &= \vartheta(\vartheta + \gamma - 1) - x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta). \end{aligned}$$

$\therefore Pu = 0 \iff \vartheta(\vartheta + \gamma - 1)u = x(\vartheta + \alpha)(\vartheta + \beta)u.$

$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ を両辺に代入して x^n の係数を比べてみると、

$$c_n \times n(n + \gamma - 1) = c_{n-1} \times (n - 1 + \alpha)(n - 1 + \beta)$$

を得る。従って

$$c_n = c_{n-1} \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{(\gamma + n - 1)n} = \dots = c_0 \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} \quad (c_0 = u(0))$$

となつて係数が決まる。よつて Gauss の超幾何関数が $Pu = 0$ を満たす事が確かめられた。

この超幾何級数の $x = 1$ での値は Gauss によつて、

$$C_{\alpha, \beta, \gamma} := F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

となることが示された。 $\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$ ならば*4 左辺の級数は絶対収束することに注意しよう。これは **Gauss** の和公式 (Gauss summation formula) と呼ばれ、この公式から特異点の間の接続公式が得られ、Gauss の超幾何関数も大域的性質が分かる。この最も重要な公式の証明を2通り紹介しよう。

1つ目 (Gauss による証明)

式 $\frac{C_{\alpha, \beta, \gamma+1}}{C_{\alpha, \beta, \gamma}} = \frac{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{\alpha, \beta, \gamma+n} = 1$ から導かれる。

2つ目 適当な条件下*5で $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は以下のような積分表示を持つ。

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

この右辺で $x = 1$ とすれば $\operatorname{Re}(\gamma - \beta - \alpha) > 0$ の時、積分は収束してベータ関数となり、

(右辺) $= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \times \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)}$ を得る。

ちなみにこの積分表示は

$$\begin{aligned} (1-tx)^{-\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-t)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\dots(-\alpha-n+1)}{n!} (-t)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} t^n x^n \end{aligned}$$

*4 $\operatorname{Re} \alpha$ は複素数 α の実部。虚部は $\operatorname{Im} \alpha$ と書く。

*5 例えば $0 < \operatorname{Re} \beta < \operatorname{Re} \gamma$, $0 < \arg(x-1) < 2\pi$

を積分に代入して x^n の係数を見ると、各項の積分はベータ関数になり、

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \frac{(\alpha)_n \Gamma(\beta-1+n)\Gamma(\gamma-\beta)}{n! \Gamma(\gamma+n-1)} = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}$$

となって積分が $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ に等しいことが分かる。

次は特異点について考えてみる。微分方程式 (GE) の特異点*6は $\{0, 1, \infty\}$ である。特異点 $x = 0$ の近傍で、高々極程度にしか解の値の絶対値は増大せず*7、さらに解は $x = 0$ で正則で $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 1$ を満たす正則関数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を用いて

$$u(x) = C_1 x^{\lambda_{0,1}} \phi_1(x) + C_2 x^{\lambda_{0,2}} \phi_2(x) \quad (\lambda_{0,1} = 0, \lambda_{0,2} = 1 - \gamma, C_1, C_2 \in \mathbb{C})$$

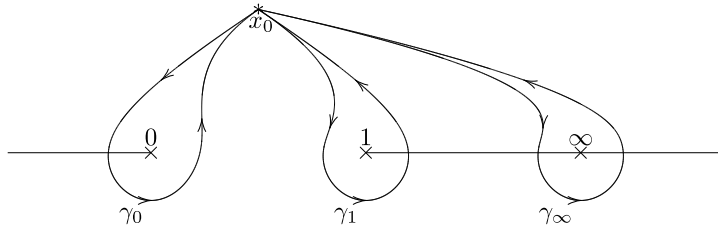
の形となる。すなわち $x = 0$ での特性指数 (characteristic exponent) は 0 と $1 - \gamma$ である。ここで $\phi_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ であることに注意しておこう。平行移動あるいは $x \mapsto \frac{1}{x}$ の座標変換によって、特異点を原点に移して同様の考察ができ、 $x = 1, x = \infty$ での特性指数はそれぞれ $\{0, \gamma - \alpha - \beta\}, \{\alpha, \beta\}$ となることが分かる。各特異点での特性指数を

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{array} \right\}$$

のような表にすることが出来る。このような表を **Riemann 図式** (Riemann scheme) と呼ぶ。

Riemann は、この図式で表された特異性が Gauss の超幾何微分方程式を、すなわち Gauss の超幾何関数を一意的に定めていることを示した*8。

次にモノドロミー (monodromy) について考える。 $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群は、起点 x_0 を決め、そこから以下の図のような各特異点を回る閉曲線 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ で生成される。



(u_1, u_2) を x_0 の近傍での (GE) の二つの線型独立な解とすると、それぞれの閉曲線 γ_j ($j = 0, 1, \infty$) に沿って解析接続したものが再び x_0 の近傍での解となるから、それを $\gamma_j(u_1, u_2)$ と書くことにすると、ある正則行列 $M_j \in GL(2, \mathbb{C})$ があって、

$$\gamma_j(u_1, u_2) = (u_1, u_2) M_j$$

と書けることが分かる。これら M_j ($j = 0, 1, \infty$) を $x = j$ での (局所) モノドロミー行列と呼ぶ。

*6 最高階の係数を 1 と正規化した時の係数の特異点。無限遠点は $x \mapsto \frac{1}{x}$ と変換して原点でみればよい

*7 この条件は、特異点が確定特異点、ということに対応している

*8 rigid であることに対応

今 u を (GE) の解とすると、 $x^{\mu_1}(1-x)^{\mu_2}u$ は Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \mu_1 & \mu_2 & \alpha - \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 + 1 - \gamma & \mu_2 + \gamma - \alpha - \beta & \beta - \mu_1 - \mu_1 \end{array} \right\}$$

を持つ微分方程式の解となる。よって一般的な Riemann 図式

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & 1 & \infty \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{array} \right\}$$

を考えればよいが、このとき λ_{kl} には線型関係式 (**Fuchs** の関係式) $\sum \lambda_{kl} = 1$ が成り立つ。

この一般的な Riemann 図式に対し、 u_{02} を $x=0$ の周りで特性指数 λ_{02} を持つ解とし、 u_{12} を $x=1$ の周りで特性指数 λ_{12} を持つ解としよう。これらは線型独立であるとしてよい (そうでなければ u_{01} あるいは u_{22} を代わりにとればよい)。このときモノドロミー行列はある定数 a, b により

$$M_0 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{02}) & a \\ 0 & e(\lambda_{01}) \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} e(\lambda_{11}) & 0 \\ b & e(\lambda_{12}) \end{pmatrix}$$

となる*9。ここで

$$e(\lambda) := e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}.$$

一方で $M_\infty = (M_1 M_0)^{-1}$ から $\text{Tr}(M_1 M_0) = \text{Tr}(M_\infty^{-1})$ となるので*10

$$e(\lambda_{02})e(\lambda_{11}) + e(\lambda_{01})e(\lambda_{12}) + ab = e(-\lambda_{21})e(-\lambda_{22})$$

が得られる。このとき $ab \neq 0$ *11 ならば、基底を取り替えて $a=1$ としてよいので、上の式より b も求まり、定数 a, b が決まる。この様に上の Riemann 図式をもつ微分方程式の大域モノドロミーは特異点での局所モノドロミーを決める特性指数から決定されてしまう。このようなとき大域モノドロミー (あるいは方程式) は **rigid** であるといわれる。

一般の有理関数係数の線型常微分方程式に対して、各特異点での局所的性質 (具体的には Riemann 図式) で方程式を分類し、Gauss の超幾何関数におけるような解の大域的性質を調べることを考える。

2 Fuchs 型微分作用素と Kac-Moody root 系, Deligne-Simpson-Katz の問題, 接続問題

まず Fuchs 型の場合を扱う。Riemann 球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ から有限個の点 $\{c_0, \dots, c_p\}$ を除いた集合を X とする。

*9 $u_{12} = u_{01} + C u_{02}$ とすれば、 $\gamma_0 u_{12} = e(\lambda_{01})u_{01} + C e(\lambda_{02})u_{02} = e(\lambda_{01})u_{12} + C(e(\lambda_{02}) - e(\lambda_{01}))u_{02}$ となることからわかる。 M_1 も同様。なお λ_{kl} は一般とする

*10 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ をこの順でつなげた道は基本群の単位元を定義するので、 $M_\infty M_1 M_0$ は単位行列になる

*11 モノドロミーが既約ならば満たされる

1. X に含まれる任意の単連結開集合 U に対し, U 上の正則関数の空間 $\mathcal{O}(U)$ の n 個の元を基底とする n 次元の空間 $\mathcal{F}(U)$ が定まっていて, 次の両立条件を満たすとする (この対応 $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ を \mathcal{F} と書く),

$$X \supset U \supset V : \text{単連結} \implies \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(U)|_V \quad (1)$$

2. 特異点に近づいたとき, $\mathcal{F}(U)$ の各元は特異点との距離の適当な逆べき程度でしか増大しない. より正確には, 1 次分数変換で特異点を 0 に移して考えると, $\mathcal{F}(U)$ の元 $u(x)$ は, 適当な正数 C, N, ϵ を選ぶと

$$|u(x)| < C|x|^{-N} \quad (0 < |x| < \epsilon) \quad (2)$$

を満たす. ただし $U \subset \{x \in \mathbb{C}; e^{-i\theta}x \notin \mathbb{R}_+\}$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ があるとする.

3. 一般に n 階の常微分方程式の局所解は, (特異点以外で) $n-1$ 階までの微係数を与えると定まるので, 解空間の基底に対する Wronskian は消えない. そこで X 上では $\mathcal{F}(U)$ の基底に対する **Wronskian** が消えないと仮定する. 消える点があれば, それは孤立しているので特異点に含め, それを X から除けばよい. そのような特異点を見かけの特異点という.

以下, 特に断らなければ, 簡単のため $c_0 = \infty$ とする.

上記の 3 つの条件を満たす (多価) 正則関数の空間 \mathcal{F} の全体と, 以下の形の微分作用素 P とは, $Pu = 0$ の解空間を考えることにより, 1 対 1 に対応する.

$$P = \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^n \right) \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^k \right) \frac{d^k}{dx^k}, \quad (3)$$

$$a_k(x) \in \mathbb{C}[x], \quad \deg a_k(x) \leq (n-k)(p-1).$$

ここで多項式の次数を \deg と書くが, 特に $\deg 0 = 0$ と約束しておく. この形の微分作用素 (あるいはそれに (左から) 有理関数を掛けて得られたもの) を **Fuchs 型常微分作用素** という.

2.1 特性指数, モノドロミーとスペクトル型

前節の $\mathcal{F}(U)$ あるいは $Pu = 0$ の解空間は, (特異点を含む) 任意の点の近くで以下のような基底 $u_1(x), \dots, u_n(x)$ をもつことが分かる. すなわち, その点を原点に一次分数変換で変換して書くと

$$u_\nu(x) \sim x^{\lambda_\nu} \log^{k_\nu} x.$$

ただし (λ_ν, k_ν) は互いに異なる ($\nu = 1, \dots, n$). このとき $\{\lambda_\nu; \nu = 1, \dots, n\}$ をその点における特性指数という (なお, 特性指数には, 重複度が許される).

特異点でない点では, 特性指数は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ である.

\mathcal{F} の多価性は, 基底 $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ を決めて以下のような解析接続の道を考えて, 各特異点 c_j を反時計回りにまわる道 γ_j に対して定まる基底の一次変換を表す行列 M_j で記述できる. この

M_j をモノドロミー生成元という.

$$\begin{aligned} \gamma_i \circ \gamma_j(\tilde{u}) &= \gamma_j(\tilde{u}M_i) \\ &= \gamma_j(\tilde{u})M_i \\ &= \tilde{u}M_jM_i, \\ M_p M_{p-1} \cdots M_1 M_0 &= I_n. \end{aligned} \quad (4)$$

このとき c_j での特性指数を $\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,n}$ とすると, M_j の固有値は $e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,1}}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,n}}$ となる. 特に $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z}$ ($1 \leq \nu < \nu' \leq n$) ならば, M_j は半単純 (対角化可能) である.

古くからその性質が研究されている Fuchs 型方程式の解となる特殊関数は, その局所モノドロミーの言葉で特徴付けが可能である. たとえば一般超幾何級数

$${}_nF_{n-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{\nu} \cdots (\alpha_n)_{\nu}}{(\beta_1)_{\nu} \cdots (\beta_{n-1})_{\nu} \nu!} x^{\nu} \quad (5)$$

は, 特異点が $\infty, 0, 1$ にある関数と方程式を定義するがその方程式は “1 に $n-1$ 次元の正則解がある” という特徴付けをもつ (これは 1 での特性指数 $0, 1, \dots, n-2$ に対応). また Jordan-Pochhammer の方程式は, 特異点 c_j が $p+1$ 個ある p 階の方程式で, c_j ($j = 1, \dots, p$) では特性指数 $0, \dots, p-2$ に対応して $p-1$ 次元の正則解があり, ∞ においても, 特性指数が $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+p-1$ となる複素数 λ があって, それに対応して, x^{λ} を掛けると ∞ で正則解となる $p-1$ 次元の解があるということで特徴付けられる. これらの特異点では, モノドロミー生成元には固有値に重複があるが, (パラメーター一般のときは) 半単純になっている. これを一般化し

定義 1. 特異点 c_j での一般化特性指数が $\{[\lambda_{j,1}]_{(m_{j,1})}, \dots, [\lambda_{j,n_j}]_{(m_{j,n_j})}\}$ であるとは, $n = m_{j,1} + \dots + m_{j,n_j}$ であり, 特性指数が

$$\{\lambda_{j,\nu} + k; k = 0, \dots, m_{j,\nu} - 1, \nu = 1, \dots, n_j\} \quad (6)$$

であつて, $\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z}$ ($1 \leq \nu < \nu' \leq n_j$) のときは

$$\text{そこでのモノドロミー生成元が半単純} \quad (7)$$

と定義する (ただし, $n = m_{j,1} + \dots + m_{j,n_j}$). ここで

$$[\lambda]_{(k)} := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + 1 \\ \vdots \\ \lambda + k - 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

と解釈する.

$\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'} \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ($1 \leq \nu \leq \nu' \leq n_j$) かつ, $m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \dots \geq m_{j,n_j}$ のときは, 特性指数が (6) であつて, c_j での局所モノドロミー生成元 M_j が

$$\text{rank}(M_j - e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,1}}) \cdots (M_j - e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda_{j,k}}) = n - m_{j,1} - \dots - m_{j,k} \quad (9)$$

を満たすこと、と定義する。一般の場合については、[Os4]を参照してください。

各特異点での一般化特性指数を考えることにより、一般化 **Riemann scheme**

$$\{\lambda_{\mathbf{m}}\} := \left\{ \begin{array}{cccc} x = c_0 & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda_{0,1}]_{(m_{0,1})} & [\lambda_{1,1}]_{(m_{1,1})} & \cdots & [\lambda_{p,1}]_{(m_{p,1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\lambda_{0,n_0}]_{(m_{0,n_0})} & [\lambda_{1,n_1}]_{(m_{1,n_1})} & \cdots & [\lambda_{p,n_p}]_{(m_{p,n_p})} \end{array} ; x \right\} \quad (10)$$

が定義される。また $p+1$ 個の n の分割の組

$$n = m_{j,1} + \cdots + m_{j,n_j} \quad (j = 0, \dots, p) \quad (11)$$

のことを、対応する \mathcal{F} または作用素 P のスペクトル型という。

一般化超幾何および Jordan-Pochhammer の一般化 Riemann scheme は

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = 0 & 1 & \infty \\ 1 - \beta_1 & [0]_{(n-1)} & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 - \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} \\ 0 & -\beta_n & \alpha_n \end{array} ; x \right\}, \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n \beta_{\nu}, \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x = \infty & c_1 & \cdots & c_p \\ [\lambda'_0]_{(p-1)} & [0]_{(p-1)} & \cdots & [0]_{(p-1)} \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{array} ; x \right\}, \quad (p-1)\lambda'_0 + \sum_{j=0}^p \lambda_j = p-1 \quad (13)$$

となり、それぞれのスペクトル型は

$$1^n, n-11, 1^n \quad \text{および} \quad \underbrace{p-11, p-11, \dots, p-11}_{p+1}$$

となる ($n=2, p=2$ は Gauss の超幾何で、 $11, 11, 11$)。

スペクトル型 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ は、 n の $p+1$ 個の分割であるが³、 $n = \text{ord } \mathbf{m}$ とおき、以下のように拡張しておく。

$$\begin{aligned} m_{j,\nu} &= n\delta_{\nu,1}, \quad n_j = 1 \quad (j > p), \\ m_{j,\nu} &= 0 \quad (\nu > n_j). \end{aligned} \quad (14)$$

注意 2. $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ が Fuchs 型方程式の一般化 Riemann scheme (GRS) であれば以下の **Fuchs** 条件 (FC) が成り立つ。

$$|\{\lambda_{\mathbf{m}}\}| := \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu} - \text{ord } \mathbf{m} + \text{idx } \mathbf{m} = 0. \quad (15)$$

ここで

$$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}') := \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} m_{j,\nu} m'_{j,\nu} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m} \cdot \text{ord } \mathbf{m}' \right), \quad (16)$$

$$\text{idx } \mathbf{m} := \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}). \quad (17)$$

問題. スペクトル型 \mathfrak{m} によって Fuchs 型方程式を分類して解析せよ.

- (FC) の下で generic な $\lambda_{j,\nu}$ に対し, (GRS) $\{\lambda_{\mathfrak{m}}\}$ をもつ (既約な) \mathcal{F} や Fuchs 型常微分作用素が存在するか?
存在するなら, それをパラメトライズせよ.
存在する \mathfrak{m} を (irreducibly) realizable と定義する.
- 上の分類に基づいて, Fuchs 型常微分方程式の基本問題, すなわち, 解の表示 (べき級数や積分による), 接続問題, 既約性, 隣接関係式, 多項間関係式, 多項式解, 解空間のモノドロミーなどを解析せよ.

2.2 Kac-Moody root 系

インデックスの集合

$$I := \{0, (j, \nu); j = 0, 1, \dots, \nu = 1, 2, \dots\}. \quad (18)$$

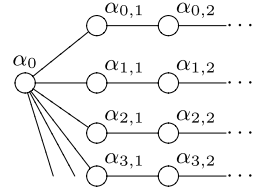
でパラメトライズされる基底 α_i ($i \in I$) で張られる無限次元ベクトル空間を \mathfrak{h} とおく. さらに以下の様に内積 (正定値でない) と鏡映 s_i を定め, 鏡映で生成される群を W_∞ として定義される Kac-Moody root 系 (Π, W_∞) を考える. α_i を単純ルート, W_∞ を Weyl 群という.

$$\Pi := \{\alpha_i; i \in I\} = \{\alpha_0, \alpha_{j,\nu}; j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots\}.$$

$$I' := I \setminus \{0\}, \quad \Pi' := \Pi \setminus \{\alpha_0\},$$

$$Q := \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}\alpha \supset Q_+ := \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha.$$

$$\begin{aligned} (\alpha|\alpha) &= 2 \quad (\alpha \in \Pi), \\ (\alpha_0|\alpha_{j,\nu}) &= -\delta_{\nu,1}, \\ (\alpha_{i,\mu}|\alpha_{j,\nu}) &= \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ or } |\mu - \nu| > 1), \\ -1 & (i = j \text{ and } |\mu - \nu| = 1). \end{cases} \end{aligned}$$



$(\alpha|\alpha) \neq 0$ を満たす $\alpha \in \mathfrak{h}$ に関する鏡映 s_α は以下のように定義される.

$$\begin{aligned} s_\alpha : \mathfrak{h} \ni x &\mapsto x - 2 \frac{(x|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \alpha \in \mathfrak{h}, \\ s_i &= s_{\alpha_i} \text{ for } i \in I. \end{aligned}$$

ルートの集合 $\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im}$ と正ルートの集合 $\Delta_+ = \Delta \cap Q_+$ の定義は:

$$\begin{aligned} \Delta^{re} &:= W_\infty \Pi \quad (\text{実ルート}), \quad \Delta_+^{re} := \Delta^{re} \cap Q_+, \\ \Delta_+^{im} &:= W_\infty B \quad (\text{正の虚ルート}) \\ B &:= \{\beta \in Q_+; \text{supp } \beta \text{ is connected and } (\beta, \alpha) \leq 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi)\}, \\ \Delta^{im} &:= \Delta_+^{im} \cup \Delta_-^{im}, \quad \Delta_-^{im} := -\Delta_+^{im}. \end{aligned}$$

$w \in W_\infty$, $\alpha \in Q$ に対し, 以下のように定義する.

$$\begin{aligned}\Delta(w)_+ &:= \Delta_+^{re} \cap w^{-1} \Delta_-^{re}, \\ L(w) &:= \#\Delta(w)_+, \\ h(\alpha) &:= n_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} n_{j,\nu} \quad \text{for } \alpha = n_0 \alpha_0 + \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu \geq 1} n_{j,\nu} \alpha_{j,\nu} \in Q.\end{aligned}$$

$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ ($i_\nu \in I$) を $w \in W_\infty$ の minimal expression とすると

$$\Delta(w)_+ = \{\alpha_{i_k}, s_{i_k}(\alpha_{i_{k-1}}), s_{i_k} s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_{k-2}}), \dots, s_{i_k} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\}. \quad (19)$$

$\alpha \in \Delta_+$ に対し, $w\alpha \in B \cup \{\alpha_0\}$ となる $w \in W_\infty$ で長さ最小のものが一意に決まるので (cf. [Os4]), その w によって $\Delta(\alpha)_+ := \Delta(w)_+$ と定義する.

さらに \mathfrak{h} の双対空間を若干拡張した空間とそれのいくつかの元を定義する:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}^\vee &:= \{\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha_i \in \prod_{i \in I} \mathbb{C} \alpha_i; \lambda_{j,1} = 0 \quad (j \gg 1)\}, \\ \Lambda_0 &:= \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-\nu) \alpha_{j,\nu}, \\ \Lambda_{j,\nu} &:= \sum_{i=\nu+1}^{\infty} (\nu-i) \alpha_{j,i} \quad (j=0, \dots, p, \nu=0, 1, 2, \dots), \\ \Lambda^0 &:= 2\Lambda_0 - 2\Lambda_{0,0} = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (1+\nu) \alpha_{0,\nu} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-\nu) \alpha_{j,\nu}, \\ \Lambda_{j,k}^0 &:= \Lambda_{j,0} - \Lambda_{k,0} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu (\alpha_{k,\nu} - \alpha_{j,\nu}) \quad (0 \leq j < k).\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}(\Lambda^0 | \alpha) &= (\Lambda_{j,k}^0 | \alpha) = 0 \quad (\forall \alpha \in \Pi), \\ (\Lambda_{j,\nu} | \alpha_{j',\nu'}) &= \delta_{j,j'} \delta_{\nu,\nu'} \quad (j, j' = 0, 1, \dots, \nu, \nu' = 1, 2, \dots), \\ (\Lambda_{j,0} | \alpha_i) &= \delta_{i,0} \quad (\forall i \in \Pi).\end{aligned}$$

2.3 reduction と対応

関数の変換. 関数の変換 $u(x) \mapsto (x - c_j)^{\lambda_j} u(x)$ は, 微分作用素環への変換

$$\text{Ad}((x - c_j)^{\lambda_j}) : x \mapsto x, (x - c_j) \frac{d}{dx} \mapsto (x - c_j) \frac{d}{dx} - \lambda_j \quad (20)$$

(addition または gauge 変換とよぶ) を, fractional な微分 (Euler 変換)

$$u(x) \mapsto \partial^{-\mu} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{c_j}^x (x-s)^{\mu-1} u(s) ds \quad (21)$$

は変換

$$\partial^{-\mu} : \frac{d}{dx} \mapsto \frac{d}{dx}, \quad x \frac{d}{dx} \mapsto x \frac{d}{dx} - \mu \quad (22)$$

を引き起こす.

Weyl 代数の元の変換. \mathbb{C} 上の多項式係数の常微分作用素の環を (1 変数) **Weyl** 代数といい, $W[x]$ おき, それを含む有理関数係数の常微分作用素環を $W(x)$ とおく.*12

Weyl 代数の元 $P \in W[x]$ と $Pu(x) = 0$ の解 $u(x)$ に対して, 上の変換 $u(x) \mapsto v(x)$ で得られた関数 $v(x)$ が満たす方程式 $Qv(x) = 0$ を考える (Q は Weyl 代数の元). P は (10) の GRS をもつ (3) の Fuchs 型作用素とする.

addition $\text{Ad}((x - c_j)^{\lambda_j})$ が引き起こす変換のほか, $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{p+1}$ に対し, Euler 変換を用いて以下の変換を定義する.

$$\begin{aligned} \partial_\ell P := & \text{Ad}\left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}}\right) \prod_{j=1}^p (x - c_j)^{m_{j,\ell_j} - d_\ell(\mathbf{m})} \partial^{-m_{0,\ell_0}} \text{Ad}(\partial^{1-\lambda_{0,\ell_0} - \dots - \lambda_{p,\ell_p}}) \\ & \cdot \partial^{(p-1)n - m_{1,\ell_1} - \dots - m_{p,\ell_p}} a_n^{-1}(x) \prod_{j=1}^n (x - c_j)^{n - m_{j,\ell_j}} \text{Ad}\left(\prod_{j=1}^p (x - c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}}\right) P. \end{aligned} \quad (23)$$

$$d_\ell(\mathbf{m}) := m_{0,\ell_0} + \dots + m_{p,\ell_p} - (p-1) \text{ord } \mathbf{m}.$$

$\partial_\ell P$ のスペクトル型を $\mathbf{m}' = \partial_\ell \mathbf{m}$, GRS を $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_\ell \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおくと, 少なくとも $\lambda_{j,\nu}$ が (Fuchs 条件のもとで) generic なら

$$\begin{aligned} m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\ell_j} d_\ell(\mathbf{m}), \\ \lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu} + (1 - \delta_{\nu,\ell_j} - 2\delta_{j,0})\mu, \\ \mu &= \lambda_{0,\ell_0} + \dots + \lambda_{p,\ell_p} - 1 \end{aligned} \quad (24)$$

となる. 特に

$$\text{ord } \partial_\ell \mathbf{m} = \text{ord } \mathbf{m} - d_\ell(\mathbf{m}). \quad (25)$$

ここで, m_{j,ℓ_j} は $\mathbf{0}$ であってもよいものとする.

$\partial_\ell \mathbf{m}$ の階数 $\text{ord } \partial_\ell \mathbf{m}$ を小さくするには, $d_\ell(\mathbf{m})$ を最大となるように ℓ を選ばばよい. このような ℓ (のひとつ) を $\ell_{\max}(\mathbf{m})$ とおくと

$$m_{j,\ell_{\max}(\mathbf{m})_j} = \max\{m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}\} \quad (26)$$

である. $\partial_{\max} \mathbf{m} = \partial_{\ell_{\max}(\mathbf{m})}(\mathbf{m})$ とおく. 同様に $d_{\max}(\mathbf{m})$, $\partial_{\max} \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ や $\partial_{\max} P$ が定義される.

\mathbf{m} が irreducibly realizable ならば, 以下のような非負整数 K が定まる (reduction).

$$\begin{aligned} \text{ord } \mathbf{m} &> \text{ord } \partial_{\max} \mathbf{m} > \text{ord } \partial_{\max}^2 \mathbf{m} > \dots > \text{ord } \partial_{\max}^K \mathbf{m}, \\ \text{ord}^K \mathbf{m} &= 1 \quad \text{or} \quad d_{\max}(\partial_{\max}^K \mathbf{m}) \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

*12 \mathbb{C} 上の Weyl 代数を標数 0 の代数的閉体上の Weyl 代数で置き換えても, 方程式の変換などの以下の結果はその証明も含めて同様に成り立つ

$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ に対し, Kac-Moody ルート系との対応を以下の様にする (一階システムの Schlesinger 型の場合に, 最初に [CB] が与えた).

$$\begin{aligned}\alpha_\ell &:= \alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\ell_j-1} \alpha_{j,\nu} \in \Delta_+^{re}, \\ \alpha_{\mathbf{m}} &:= \text{ord } \mathbf{m} \cdot \alpha_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=\nu+1}^{\infty} m_{j,i} \alpha_{j,\nu} \in Q_+, \\ \Lambda(\lambda) &:= -\Lambda_0 + \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{j,\nu} (\Lambda_{j,\nu-1} - \Lambda_{j,\nu}) \in \bar{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h}^\vee / \mathbb{C}\Lambda^0.\end{aligned}\tag{28}$$

このとき以下の対応が成り立つ.

$$\begin{aligned}\{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\} &\rightarrow \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}); \alpha_{\mathbf{m}} \in \bar{\Delta}_+\} \\ \downarrow \partial_\ell, \text{ addition} &\quad \circlearrowleft \quad \downarrow W_\infty\text{-action, } +\tau\Lambda_{0,j}^0 \\ \{P_{\mathbf{m}} : \text{Fuchs 型微分作用素 with } \{\lambda_{\mathbf{m}}\}\} &\rightarrow \{(\Lambda(\lambda), \alpha_{\mathbf{m}}); \alpha_{\mathbf{m}} \in \bar{\Delta}_+\}.\end{aligned}\tag{29}$$

分割の組, Riemann 図式	Kac-Moody root system
\mathbf{m}	$\alpha_{\mathbf{m}}$
\mathbf{m} : rigid	$\alpha \in \Delta_+^{re} : \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$
\mathbf{m} : monotone	$\alpha \in Q_+ : (\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi')$
\mathbf{m} : realizable	$k\alpha : k \in \mathbb{Z}_{>0}, \alpha \in \Delta_+, \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$
\mathbf{m} : irreducibly realizable	$\alpha \in \Delta_+, \text{supp } \alpha \ni \alpha_0$ indivisible or $(\alpha \alpha) < 0$
\mathbf{m} : basic and monotone	$\alpha \in Q_+ : (\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi)$ indivisible
\mathbf{m} : simply reducible and monotone	$\alpha \in \Delta_+ : (\alpha \alpha_{\mathbf{m}}) = 1 \ (\forall \alpha \in \Delta(\mathbf{m})_+)$ $(\alpha \beta) \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi')$ $(\alpha \alpha_0) > 0, \alpha \neq \alpha_0, \text{indivisible}$
$\text{ord } \mathbf{m}$	$n_0 : \alpha = n_0\alpha_0 + \sum_{i,\nu} n_{i,\nu} \alpha_{i,\nu}$
$\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{m}')$	$(\alpha_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}'})$
∂_ℓ	s_{α_ℓ}
$\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$	$(\Lambda(\lambda), \mathbf{m})$
$ \{\lambda_{\mathbf{m}}\} $	$(\Lambda(\lambda) + \frac{1}{2}\alpha_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}})$

定理 3 (存在定理 [Os4]). \mathbf{m} が irreducibly realizable ならば, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ (3) の形の普遍微分作用素 $P_{\mathbf{m}}(\lambda, g_1, \dots, g_N)$ が存在し, Fuchs 条件のもと $\lambda_{j,\nu}$ が generic, あるいは既約で局所非退化, あるいは \mathbf{m} が **simply reducible** ならば, $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ という GRS をもつ Fuchs 型微分作用素は, 適当な $(g_1, \dots, g_N) \in \mathbb{C}^N$ による普遍微分作用素 (の有理関数倍) に限る.

g_1, \dots, g_N はアクセサリ・パラメータで

$$N = 1 - \frac{1}{2} \text{idx } \mathbf{m}. \quad (30)$$

$P_{\mathbf{m}}(\lambda, g)$ の係数は (x, λ, g) の多項式で, (g_1, \dots, g_N) に対しては 1 次であり, g_i はある $x^\nu \frac{d^j}{dx^j}$ の係数としてよい.

irreducibly realizable であるスペクトル型 \mathbf{m} で, $\text{idx } \mathbf{m} = 2$ となるものを **rigid** という (すなわち, アクセサリ・パラメータがないもの).

\mathbf{m} が **indivisible** または素とは, $\{m_{j,\nu}\}$ の最大公約数が 1 となること.

basic (すなわち, indivisible で $d_{\max}(\mathbf{m}) \leq 0$) かつ **monotone** (すなわち $m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq m_{j,3} \geq \dots$) となる \mathbf{m} は, $\text{idx } \mathbf{m}$ を決めると (同型を除いて) 有限個しかない (cf. [Os2]). たとえば, $\text{idx } \mathbf{m} = 0$ となるものは affine root 系の $\tilde{D}_4, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ に対応した 4 個 (cf. [Ko]) で, $\text{idx } \mathbf{m} = -2$ となるものは 13 個 ([Os2]).

irreducible realizable な \mathbf{m} の reduction (27) において

$$\text{ord } \partial_{\max}^i \mathbf{m} = \text{ord } \partial_{\max}^{i-1} \mathbf{m} - 1 \quad (i = 1, \dots, K) \quad (31)$$

となる場合, \mathbf{m} を **simply reducible** と定義する.

simply reducible で non-rigid な \mathbf{m} は, $\text{idx } \mathbf{m}$ を決めると有限個しかない (cf. [Os4]). rigid で simply reducible となるものは, 21111, 222, 33 と以下の Simpson のリスト (in [Si]) に限る (cf. [MWZ]).

order	type	name	partitions
n	H_n	hypergeometric family	$1^n, 1^n, n - 11$
$2m$	EO_{2m}	even family	$1^{2m}, mm - 11, mm$
$2m + 1$	EO_{2m+1}	odd family	$1^{2m+1}, mm1, m + 1m$
6	X_6	extra case	111111, 222, 42

rigid なスペクトル型の \mathbf{m} は, $\text{ord } \mathbf{m}$ が 6 以下のものは同型を除いて 49 個, 10 では 306 個, 20 では 10269 個というように沢山ある.

2.4 様々な結果 ([Os4])

定義した方程式や関数の変換を用いて, 最初の節で述べた常微分方程式の基本的問題が解決 (or reduction) される. ここでは若干の例を挙げる.

普遍方程式

$$P_{\mathbf{m}}(\lambda)u = 0 \quad (32)$$

を考察する.

定理 4 (既約性). 簡単のため \mathbf{m} は irreducible realizable と仮定すると, 方程式 (32) が既約, すなわち $P_{\mathbf{m}}(\lambda)$ が $W(x)$ の既約元となる (Fuchs 型なら解空間のモノドロミーの既約性と同値) た

めの必要十分条件は

$$(\Lambda(\lambda)|\alpha) \notin \mathbb{Z} \quad (\forall \alpha \in \Delta(\mathbf{m})_+). \quad (33)$$

ここで

$$\Delta(\mathbf{m})_+ := \Delta(\alpha_{\mathbf{m}})_+. \quad (34)$$

$c_0 = 0, c_1 = 1, m_{0,n_0} = 1$ とする, $x = 0$ での局所解 $u_{0,n_0} \sim x^{\lambda_{0,n_0}}$ を実軸に沿って 1 まで接続していったときの $x = 1$ での局所解 $u_{1,n_1} \sim (1-x)^{\lambda_{1,n_1}}$ に対する接続係数を $c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})$ とおく.

定理 5 (接続問題). $\ell_0 \neq n_0, \ell_1 \neq n_1$ を満たす $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^p$ に対し, $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\} = \partial_{\ell}\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ とおき, $P_{\mathbf{m}'}(\lambda')v = 0$ に対する同様の接続係数を $c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})$ とおくと

$$\frac{c'(\lambda'_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda'_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda'_{0,n_0} - \lambda'_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda'_{1,1} - \lambda'_{1,n_1})} = \frac{c(\lambda_{0,n_0} \rightsquigarrow \lambda_{1,n_1})}{\Gamma(\lambda_{0,n_0} - \lambda_{0,1} + 1)\Gamma(\lambda_{1,1} - \lambda_{1,n_1})}. \quad (35)$$

特に \mathbf{m} が rigid で $m_{1,n_1} = m_{2,n_2} = 1$ ならば, この定理により接続係数 $c(\lambda_{1,n_1} \rightsquigarrow \lambda_{2,n_2})$ が γ 関数の積の商の形で具体的に書ける (cf. (27)).

(27) において $\{\lambda(k)_{\mathbf{m}(k)}\} = \partial_{max}^k \{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ ($k = 0, \dots, K$) とおき, $\lambda(k)_{j,max} = \lambda(k)_{j,\ell_{max}(\mathbf{m}(k))_j}$ とおく. この記号の下で

定理 6 (局所解の積分表示とべき級数表示). \mathbf{m} は rigid で, $m_{1,n_1} = 1, c_0 = \infty, c_1 = 1$ と仮定する. $x = 0$ における局所解で特性指数 λ_{1,n_1} に対応するものを $u(x)$ とおく. $u(x)$ を $u(x) \sim x^{\lambda_{1,n_1}}$ となるよう規格化しておく. このとき

$$\begin{aligned} u(x) &:= \prod_{k=0}^{K-1} \frac{\Gamma(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + 1)}{\Gamma(\lambda(k)_{1,n_1} - \lambda(k)_{1,max} + \mu(k) + 1)\Gamma(-\mu(k))} \\ &\quad \int_0^{s_0} \cdots \int_0^{s_{K-1}} \prod_{k=0}^{K-1} (s_k - s_{k+1})^{-\mu(k)-1} \\ &\quad \cdot \prod_{k=0}^{K-1} \left(\left(\frac{s_k}{s_{k+1}} \right)^{\lambda(k)_{1,max}} \prod_{j=2}^p \left(\frac{1 - c_j^{-1} s_k}{1 - c_j^{-1} s_{k+1}} \right)^{\lambda(k)_{j,max}} \right) \\ &\quad \cdot s_K^{\lambda(K)_{1,n_1}} \prod_{j=2}^p \left(1 - \frac{s_K}{c_j} \right)^{\lambda(K)_{j,max}} ds_K \cdots ds_1 \Big|_{s_0=x} \\ &= x^{\lambda_{1,n_1}} \prod_{j=2}^p \left(1 - \frac{x}{c_j} \right)^{\lambda(0)_{j,max}} \cdot \sum_{\substack{(\nu_{j,k})_{2 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq K} \\ \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{(p-1)K}}} \\ &\quad \prod_{i=0}^{K-1} \frac{(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + 1)_{\sum_{s=2}^p \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}}}{(\lambda(i)_{1,n_1} - \lambda(i)_{1,max} + \mu(i) + 1)_{\sum_{s=2}^p \sum_{t=i+1}^K \nu_{s,t}}} \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^K \prod_{s=2}^p \frac{(\lambda(i-1)_{s,max} - \lambda(i)_{s,max})_{\nu_{s,i}}}{\nu_{s,i}!} \cdot \prod_{s=2}^p \left(\frac{x}{c_s} \right)^{\sum_{i=1}^K \nu_{s,i}}. \end{aligned} \quad (36)$$

定理 7 (3 項間関係式). \mathbf{m} は rigid で, $m_{j,n_j} = 1$ ($j = 0, 1, 2$), $c_0 = \infty$ とし

$$\epsilon_{j,\nu} = \delta_{j,1}\delta_{\nu,n_1} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2}, \quad \epsilon'_{j,\nu*} = \delta_{j,0}\delta_{\nu,n_0} - \delta_{j,2}\delta_{\nu,n_2}$$

とおく ($j = 0, \dots, p, \nu = 1, \dots, n_j$) . $u_\lambda(x)$ を (32) の $x = c_1$ での局所解で, $\lambda_{j,\nu}$ が generic なとき

$$u_\lambda(x) \sim (x - c_1)^{\lambda_{1,n_1}}$$

となるものとする. このとき

$$u_\lambda(x) = u_{\lambda+\epsilon'}(x) + (c_1 - c_2) \prod_{\nu=0}^{K-1} \frac{\lambda(\nu+1)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1}{\lambda(\nu)_{1,n_1} - \lambda(\nu)_{1,\ell(\nu)_1} + 1} \cdot u_{\lambda+\epsilon}(x). \quad (38)$$

これらの結果は, コンピュータ・プログラムとして実現されている (cf. [Os1], [Os5]).

以上は, Gauss の超幾何微分方程式の既約条件

$$\alpha, \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}$$

Gauss の和公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

積分表示

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^x x^{-\gamma+1} (x-s)^{-\alpha+\gamma-1} s^{\alpha-1} (1-s)^{-\beta} ds$$

3 項間関係式

$$F(\alpha + 1, \beta, \gamma; x) - F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\beta x}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)$$

の一般化になっている.

3 不確定特異点を持つ微分作用素と middle convolution

以上の結果を不確定特異点を持つ方程式に拡張することを考える. $x = 0$ を有理関数を係数とする n 階の線型微分方程式 $Pu = 0$ の特異点とすると, $x = 0$ での独立な形式解が

$$u(x) \sim x^{\lambda_\nu} \log^{k_\nu} x \cdot e^{h_\nu(x^{-\frac{1}{q}})} \quad (\nu = 1, \dots, n) \quad (39)$$

と書ける. ここで q はある正整数, $h_\nu(t)$ は定数項のない t の \mathbb{C} 係数多項式, $\lambda_\nu \in \mathbb{C}$, k_ν は非負整数であり, n 個の $(\lambda_\nu, k_\nu, h_\nu(x^{-\frac{1}{q}}))$ は互いに異なっている. \sim をより正確に述べるなら, x の形式的巾級数環を $\hat{\mathcal{O}}$ とおくと, 上式の左辺と右辺の差が $\sum_{k=0}^{k_\nu} x^{\lambda_\nu+1} \log^k x \cdot e^{h_\nu(x^{-\frac{1}{q}})} \hat{\mathcal{O}}$ に属する.

$h_\nu = 1$ ($\nu = 1, \dots, n$) となるときが確定特異点であり, そのときは $\hat{\mathcal{O}}$ は収束巾級数で置き換えてよい. そうでないときは不確定特異点といい, さらに $q = 1$ と取れるときを不分岐という.

ここでは, 不確定特異点がすべて不分岐である場合を扱う.*13

*13 Bessel, Whittaker, Kummer, Hermite, Mathieu などの微分方程式の不確定特異点是不分岐であるが, Airy の微分方程式は分岐不確定特異点を持つ

3.1 Riemann 関式とスペクトル型

定義 1 と同様 に不確定特異点においても一般化特性指数が定義できる. $P \in W[x]$ とする.

定義 8. 正整数 N , 多項式 $\lambda_\nu(t) \in \mathbb{C}[t]$ ($\nu = 1, \dots, N$) と非負整数 m_ν で $n = m_1 + \dots + m_N$ に対して, 一般化特性指数 $\{[\lambda_1]_{(m_1)}, \dots, [\lambda_N]_{(m_N)}\}$ が定義される. すなわち, たとえば

$$\lambda_\nu - \lambda_{\nu'} \notin \mathbb{Z} \quad (1 \leq \nu < \nu' \leq N) \quad (40)$$

のときは, n 階の方程式 $Pu = 0$ が

$$u_{\nu,i}(x) - e^{\int \lambda_\nu(x^{-1}) \frac{dx}{x}} \in x^{m_\nu} e^{\int \lambda_\nu(x^{-1}) \frac{dx}{x}} \hat{O} \quad (0 \leq i \leq m_\nu - 1, \nu = 1, \dots, N)$$

となる形式解 $u_{\nu,i}$ を持つとき, $x = 0$ でこの一般化特性指数を持つという. ここで

$$e^{\int \lambda_\nu(x^{-1}) \frac{dx}{x}} := x^{\lambda_{\nu,0}} e^{-\frac{\lambda_{\nu,1}}{1} x^{-1} - \dots - \frac{\lambda_{\nu,\ell_\nu}}{\ell_\nu} x^{-\ell_\nu}} \Leftrightarrow \lambda_\nu(t) = \lambda_{\nu,0} + \lambda_{\nu,1} t + \dots + \lambda_{\nu,\ell_\nu} t^{\ell_\nu} \quad (41)$$

これにより, Fuchs 型の時と同様に方程式 $Pu = 0$ に対して各特異点 c_0, \dots, c_p での一般化特性指数を並べて示した (10) の形の (一般化) Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\} = \{[\lambda_{j,\nu}]_{(m_{j,\nu})}\}_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ が定義される. 多項式の次数の差を $l_{j,\nu,\nu'} = \deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\nu'})$ とおき, 重複度のデータ \mathbf{m} と多項式の次数の差のデータ $\mathbf{l} = (l_{j,\nu,\nu'})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu, \nu' \leq n_j}}$ の組 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) をスペクトル型と呼ぶ.

$l_{j,\nu,\nu'}$ は次の条件を満たすことに注意しよう.

$$\begin{aligned} l_{j,\nu,\nu'} &\in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad l_{j,\nu,\nu} = 0, \quad l_{j,\nu,\nu'} = l_{j,\nu',\nu} \quad \text{and} \\ l_{j,\nu,\nu'} &\leq \max\{l_{j,\nu,\nu''}, l_{j,\nu,\nu'''}\} \quad (0 \leq j \leq p, \quad 1 \leq \nu, \nu', \nu'' \leq n_j) \end{aligned} \quad (42)$$

このスペクトル型を分かりやすく表記することを考えよう. インデクスの集合 $\{1, \dots, n\}$ における同値関係 \sim を以下の様に定義する.

$1 \leq i \leq n$ に対して $1 \leq \nu_{j,i} \leq n_j$ を

$$m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu_{j,i}-1} < i \leq m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu_{j,i}} \quad (43)$$

によって定義し

$$i \underset{j,r}{\sim} i' \iff \begin{cases} \nu_{j,i} = \nu_{j,i'} & (r = 0), \\ l_{j,\nu_{j,i},\nu_{j,i'}} < r & (r \geq 1). \end{cases} \quad (44)$$

とおく. 同値関係 $\underset{j,r}{\sim}$ から n の分割 $n = m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,n_j}^{(r)}$ が定まり, さらにこの正整数 $n_{j,r}$ に対して

$$n_{j,0} = n_j \geq n_{j,1} \geq \dots \geq n_{j,r_j} > n_{j,r_j+1} = 1 \quad (45)$$

となる非負整数 r_j が定まる.

ここで n の分割 $m_{j,1} + \dots + m_{j,n_j}$ の順序を取り替えることにより

$$i \underset{j,r}{\sim} i' \text{ かつ } i \leq i'' \leq i' \Rightarrow i \underset{j,r}{\sim} i'' \quad (46)$$

となっているとしてよい. このようにとると n の分割 $\mathbf{m}_j^{(r)} = (m_{j,1}^{(r)}, \dots, m_{j,n_j,r}^{(r)})$ は, 分割 $\mathbf{m}_j^{(r+1)}$ の各 $m_{j,\nu}^{(r+1)}$ をさらに細分した分割を順に並べてできる n の分割としてよい. このようにして $r_j + 1$ 個の n の分割 $\mathbf{m}_j^{(r)}$ ($r = 0, \dots, r_j$) を並べて c_j に対するスペクトル型として書き (たとえば | で区切る), それを $p + 1$ 個の各特異点で並べて書いて (たとえば , で) 区切るとスペクトル型が s の $(r_0 + 1) + \dots + (r_p + 1)$ 個の分割の並び $\tilde{\mathbf{m}}$ で表記できる.

例 9. たとえば $\tilde{\mathbf{m}} = 212|32|32, 41$ は $p = 2$ で, $\mathbf{m} = 212, 41$, $l_{1,1,2} = l_{0,1,2} = 0$, $l_{0,1,3} = l_{0,2,3} = 2$ を表す. 同値関係のレベルを () で囲って表すことによって \mathbf{m} を区切ることによってスペクトル型を表せる (各特異点において, 括弧の深さは r_j で, 最も内側の括弧内の数字をそれらの和で置き換えて最も内側の括弧を削っていくことにより, 分割の列が得られる). すなわち

$$212|32|32, 41 = ((21))((2)), 41$$

これは例えば次の Riemann 図式のスペクトル型となる.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & 0 & \\ [0]_{(2)} & [\lambda_{1,1,0}]_{(4)} & \\ \lambda_{0,2,0} & \lambda_{1,2,0} & \\ [\lambda_{0,3,0} + \lambda_{0,3,1}t + \lambda_{0,3,2}t^2]_{(2)} & & \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccc} x = \infty & (1) & (2) & 0 \\ [0]_{(2)} & 0 & 0 & [\lambda_{1,1,0}]_{(4)} \\ \lambda_{0,2,0} & 0 & 0 & \lambda_{1,2,0} \\ [\lambda_{0,3,0}]_{(2)} & [\lambda_{0,3,1}]_2 & [\lambda_{0,3,2}]_2 & \end{array} \right\}$$

Fuchs 条件 : $\lambda_{0,2,0} + 2\lambda_{0,3,0} + 4\lambda_{1,1,0} + \lambda_{1,2,0} = 4$

Reduction (cf. §3.3) : $212|32|32, 41 \rightarrow 12|12|12, 21 \rightarrow 1|1|1, 1 = 1, 1$

3.2 分数化演算

まず Fuchs 型でも用いた $W[x]$ の元に対する演算を整理しておく (cf. [Os4]).

Fourier-Laplace transform:

$$\mathcal{L} : W[x] \rightarrow W[x], \quad x \mapsto -\partial, \quad \partial \mapsto x$$

Reduced form ($R(P)$):

$P \in W(x)$ に対し, $R(P) = \sum p_i(x) \partial^i \in \mathbb{C}(x)^\times P \cap W[x]$ を $p_i(x)$ の $\mathbb{C}[x]$ における最大共役元が 1 となるように定義する (さらに最高階の係数が s monic になるように選べば一意).

例えば,

$$P = \frac{3(x-1)}{x^2} \partial + x(x-1)^2 \Rightarrow \text{Red}(P) = \partial + \frac{1}{3}x^3(x-1).$$

Addition (Gauge 変換) :

$$\text{Ad}(e^{f(x)}) : W(x) \rightarrow W(x), \quad x \mapsto x, \quad \partial \mapsto \partial - f'(x)$$

$$\text{Ad}(x^\lambda) : W(x) \rightarrow W(x), \quad x \mapsto x, \quad \partial \mapsto \partial - \frac{\lambda}{x}$$

と定義する. これらは単に $e^{f(x)}$ や x^λ をそれらの逆作用素とて両側から共役をとる操作である.

以上の操作を用いて Euler 変換を次のように代数的に定義する.

Twisted Euler transform (middle convolution):

$P \in W(x)$ と $\mu \in \mathbb{C}$ に対し,

$$E(\mu)P := \mathcal{L} \circ R \circ \text{Ad}(x^\mu) \circ \mathcal{L}^{-1} \circ RP.$$

定理 10 ([Hi]). 特異点を $c_0 = \infty, \dots, c_p$ とする Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ n 階微分方程式 $Pu = 0$ と $1 \leq \ell_j \leq n_j$ を満たす $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p) \in \mathbb{Z}_{>0}^{p+1}$ に対し

$$\begin{aligned} E(\ell) &= \prod_{j=0}^p \text{Ad}(e^{f_{j,\ell_j}}) \prod_{j=1}^p \text{Ad}((x - c_j)^{\lambda_{j,\ell_j}(0)}) \\ &\quad \circ E(1 - \lambda(\ell)) \prod_{j=1}^p \text{Ad}((x - c_j)^{-\lambda_{j,\ell_j}(0)}) \prod_{j=0}^p \text{Ad}(e^{-f_{j,\ell_j}}), \\ \lambda(\ell) &= \sum_{j=0}^p \lambda_{j,\ell_j}(0), \\ f_{j,\nu} &= \begin{cases} -\sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_{j,\nu,i}}{i(x-c_j)^i} & (1 \leq j \leq p) \\ -\sum_{i \geq 1} \frac{\lambda_{j,\nu,i}}{i} x^i & (j = 0) \end{cases} \quad \text{if } \lambda_{j,\nu} = \sum_{i \geq 0} \lambda_{j,\nu,i} t^i \in \mathbb{C}[t] \end{aligned}$$

とおくと, (40) のもとで $P' = E(\ell)P$ の Riemann 関式 $\{\lambda'_{\mathbf{m}'}\}$ は以下ようになる.

$$\begin{aligned} m'_{j,\nu} &= m_{j,\nu} - \delta_{\nu,\ell_j} d(\ell), \\ d(\ell) &= \sum_{j=0}^p m_{j,\nu} - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} (\deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\ell_j}) + 1) m_{j,\nu} + 2n, \\ \lambda'_{j,\nu} &= \lambda_{j,\nu} + (\deg(\lambda_{j,\nu} - \lambda_{j,\ell_j}) + 1 - \delta_{\nu,\ell_j} - 2\delta_{j,0}) (\lambda(\ell) - 1) \end{aligned}$$

条件 (46) を満たす $\{m_{j,1}, \dots, m_{j,n_j}\}$ の順序の交換と $E(\ell)$ とで生成される \mathbf{m} の変換の群 \overline{W} を, Kac-Moody ルート系の Weyl 群の言葉で述べることを次に考える.

3.3 Kac-Moody root 系への埋め込みと特異点の合流

前節で扱った $p+1$ 個の特異点を持つ方程式 $Pu = 0$ に対し, $(r_0 + 1) + \dots + (r_p + 1)$ 個の特異点を持つ方程式 $\tilde{P}u = 0$ を考え, その特異点の合流として $Pu = 0$ を捕らえることを考える. このとき \tilde{P} を P の **unfolding** と呼ぶ. t_0, \dots, t_{r_j} を互いに異なる十分小さな原点の近傍の点とする. 特異点 $c_j + t_r$ ($0 \leq j \leq p, 0 \leq r \leq r_j$) は確定特異点で, そこでのスペクトル型が $\mathbf{m}_j^{(r)} = (m_{j,s}^{(r)})_{1 \leq s \leq n_{j,r}}$ であって, さらに $m_{j,s}^{(r)}$ に対応する特性指数を

$$\begin{aligned} \lambda_{j,s}^{(r)} &= \sum_{k=r}^{r_j} \frac{\lambda_{j,\nu_{j,r,s},k}}{(\delta_{k,0} - k) \prod_{\substack{0 \leq u \leq k \\ u \neq k}} (t_r - t_u)}, \\ m_{j,1} + \dots + m_{j,\nu_{j,r,s}} &= m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,s}^{(r)} \end{aligned}$$

とにおいて, Riemann 関式 $\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ をもつ Fuchs 型方程式を $\tilde{P}u = 0$ とする. ここで $c_j = \infty$ のときは, $c_j + t_j$ を $\frac{1}{t_j}$ で置き換えることとする.

$\lambda_{j,\nu,i}$ は定数であったか³, それらは $t = (t_0, t_1, \dots)$ の原点の近傍での正則関数であってもよいとする. そのような $\lambda_{j,\nu,i}$ と $\tilde{\lambda}_{j,\nu,i}$ から定義される Riemann 関式 $\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ と $\{[\tilde{\lambda}_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ は $\lambda_{j,\nu,i}|_{t=0} = \tilde{\lambda}_{j,\nu,i}|_{t=0}$ を満たすとき同値と定義する.

定理 11. i) $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p)$ に対して $\ell_j^{(r)}$ を

$$m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,\ell_j^{(r)}}^{(r)} \leq m_{j,1} + \dots + m_{j,\ell_p} < m_{j,1}^{(r)} + \dots + m_{j,\ell_j^{(r)}+1}^{(r)}$$

で定めると, $\partial_{\tilde{\ell}} \tilde{P}$ の Riemann 関式は, $E(\ell)P$ の unfolding の Riemann 関式と同値である. ここで $\tilde{\ell} = (\ell_j^{(r)})$, $\tilde{\mathbf{m}} = (\mathbf{m}_j^{(r)})$ とおくと, $d(\ell) = d_{\tilde{\ell}}(\tilde{\mathbf{m}})$. また $\mu_{j,k} \in \mathbb{C}$ に対し

$$\text{Ad} \left(\prod_{r=0}^{r_j} (x - c_j - t_r)^{\sum_{k=r}^{r_j} \frac{\mu_{j,k}}{\prod_{\substack{0 \leq u \leq k \\ u \neq r}} (t_r - t_u)}} \right) : x \mapsto x, \partial \mapsto \partial - \sum_{r=0}^{r_j} \frac{\mu_{j,k}}{\prod_{u=0}^r (x - c_j - t_u)}$$

ii) Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ の Fuchs の関係式 (cf. [Be]) は, $\{[\lambda_{j,s}^{(r)}]_{(m_{j,s}^{(r)})}\}$ の Fuchs の関係式から得られる, すなわち

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu} \lambda_{j,\nu,0} &= n - \frac{1}{2} \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{l}), \\ \text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{l}) &:= \text{idx} \tilde{\mathbf{m}} = \sum_{j=0}^p \sum_{r=0}^{r_j} \left(\sum_{\nu=1}^{n_{j,r}} (m_{j,\nu}^{(r)})^2 - n^2 \right) + 2n^2 \\ &= \sum_{j=0}^p \left(\sum_{\nu=1}^{n_j} m_{j,\nu}^2 - n^2 \right) - \sum_{j=0}^p \sum_{\nu=1}^{n_j} \sum_{\nu'=1}^{n_j} l_{j,\nu,\nu'} \cdot m_{j,\nu} m_{j,\nu'} + 2n^2 \end{aligned}$$

iii) $\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{l}) > 0$ のとき, $d(\ell) > 0$ となる $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p)$ が存在する.

系 12. $\text{idx}(\mathbf{m}, \mathbf{l}) > 0$ とする. Riemann 関式 $\{\lambda_{\mathbf{m}}\}$ をもつ既約な方程式 $Pu = 0$ は, 1 階の方程式まで reduction できる. このとき, 特異点 $c_j + t_r$ ($r = 0, \dots, r_j$, $j = 0, \dots, p$) を持つ rigid な普遍 Fuchs 型方程式 $\tilde{P}u = 0$ が存在し, その係数は t_0, t_1, \dots に正則に依存し, $\forall t_r \mapsto 0$ という極限から定義される合流により $Pu = 0$ が得られる. このような \tilde{P} をスペクトル型 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) の Versal 作用素という.

例 13 (Versal Gauss : 11|11|11).

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= (1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2 + ((\lambda_2 + 2c_1 c_2)x + \lambda_1 - c_1 - c_2) \partial + \mu(\lambda_2 + c_1 c_2(1 - \mu)) \\ &= (1 - c_1 x)(1 - c_2 x) \partial^2 + (\tilde{\lambda}_2 x + \tilde{\lambda}_1) \partial + \mu(\tilde{\lambda}_2 - c_1 c_2(\mu + 1)) \quad (c_1 = c_2 = 0) \end{aligned}$$

with the Riemann schemes

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \infty \\ 0 & 0 & \mu \\ \frac{\lambda_1}{c_1 - c_2} + \frac{\lambda_2}{c_1(c_1 - c_2)} & \frac{\lambda_1}{c_2 - c_1} + \frac{\lambda_2}{c_2(c_2 - c_1)} & \frac{\lambda_2}{c_1 c_2} - \mu + 1 \end{array} ; x \right\} \quad (0 \neq c_1 \neq c_2 \neq 0) \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_2} & \infty & (1) \\ 0 & \mu & 0 \\ \frac{\lambda_2}{c_2^2} + \frac{\lambda_1}{c_2} & -\frac{\lambda_2}{c_2^2} - \frac{\lambda_1}{c_2^2} - \mu + 1 & \frac{\lambda_2}{c_2} \end{array} ; x \right\} \quad (0 = c_1 \neq c_2 \neq 0) \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} x = \frac{1}{c_1} & (1) & \infty \\ 0 & 0 & \mu \\ -\frac{\lambda_2}{c_1^2} & \frac{\lambda_2}{c_1^2} + \frac{\lambda_1}{c_1} & \frac{\lambda_2}{c_1^2} - \mu + 1 \end{array} ; x \right\} \quad (c_1 = c_2 \neq 0) \\
& \left\{ \begin{array}{ccc} x = \infty & (1) & (2) \\ \mu & 0 & 0 \\ 1 - \mu & -\lambda_1 & -\lambda_2 \end{array} ; x \right\} \quad (c_1 = c_2 = 0) \quad u \sim x^{-\mu}, \quad x^{\mu-1} e^{\lambda_1 x + \frac{\lambda_2}{2} x^2} \\
u(x) &= \int_{\frac{1}{c_1}}^x e^{-\int (\frac{\lambda_1}{1-c_1 t} + \frac{\lambda_2 t}{(1-c_1 t)(1-c_2 t)}) dt} (x-t)^{\bar{\mu}-1} dt = \int_{\infty}^x e^{-\bar{\lambda}_1 t - \frac{\bar{\lambda}_2 t^2}{2}} (x-t)^{\bar{\mu}-1} dt \quad (c_1 = c_2 = 0)
\end{aligned}$$

3.4 Kac-Moody ルート系のルート格子の商格子としての実現

スペクトル型 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) で $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})_{\substack{0 \leq j \leq p \\ 1 \leq \nu \leq n_j}}$ は n の $p+1$ 個の分割の組で $\mathbf{l} = (l_{\nu,\nu'})$ は (42) を満たすとする. 次のように番号付けられた基底で生成される \mathbb{Z} 格子を Q_{quot} と書くことにする. $1 \leq j \leq n_{i,1}$ に対して $N_{i,j}$ を

$$m_{i,1} + \cdots + m_{i,N_{i,j}} = m_{i,1}^{(1)} + \cdots + m_{i,j}^{(1)}$$

を満たすように定め, $N_{i,0} = 0$ とおく. さらに

$$\mathcal{J} = \{(j_0, \dots, j_p) \mid 1 \leq j_i \leq n_{i,1}, 0 \leq i \leq p\},$$

$$\mathcal{C} = \{\alpha_{\hat{j}} \mid \hat{j} \in \mathcal{J}\} \cup \{\alpha_{(i,j,k)} \mid 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_{i,1} - 1, 1 \leq k \leq N_{i,j} - N_{i,j-1} - 1\}$$

に対して, $Q_L = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}\alpha$ と定義する. さらにここに次のような対称双一次形式を定義する.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_{\hat{j}}, \alpha_{\hat{j}'} \rangle &= 2 - \sum_{\substack{0 \leq i \leq p \\ j_i \neq j'_i}} (l_{i,N_{i,j_i}, N_{i,j'_i}} + 1), \\
\langle \alpha_{\hat{j}}, \alpha_{(i,j,k)} \rangle &= \begin{cases} -1 & \text{if } (i, j_i) = (i, j) \text{ and } k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \\
\langle \alpha_{(i,j,k)}, \alpha_{(i',j',k')} \rangle &= \begin{cases} 2 & \text{if } (i, j, k) = (i', j', k') \\ -1 & \text{if } (i, j) = (i', j') \text{ and } |k - k'| = 1. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで $\hat{j} = (j_0, \dots, j_p) \in \mathcal{J}$ であった. この双一次形式をもった \mathbb{Z} 格子 Q_L をルート格子とよぶ. さらに Q_L の中に $\alpha_j \in \mathcal{C}$ に関する鏡映を次のように定義する.

$$\sigma_j(\alpha) = \alpha - \langle \alpha_j, \alpha \rangle \alpha_j \quad (\alpha \in Q_L).$$

そしてこれら鏡映 σ_j ($\alpha_j \in \mathcal{C}$) で生成される群を W_L とおいて Q_L の Weyl 群とよぶ。

さてこのように定義した Weyl 群 W_L の作用をもつルート格子 Q_L と, (\mathbf{m}, \mathbf{l}) に対して定義した \overline{W} 作用をもつ格子 $L := \bigoplus_{i=0}^p \mathbb{Z}^{n_{i,1}}$ ($\supset L^+ := \bigoplus_{i=0}^p \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_{i,1}} = \{\mathbf{m}\}$) は次のような関係にある。

定理 14. ([Hi, Theorem 3.3]) 次のような \mathbb{Z} 格子の準同型

$$\Phi: Q_L \longrightarrow L$$

を考える。すなわち

$$\alpha = \sum_{\hat{j} \in \mathcal{J}} m_{\hat{j}} \alpha_{\hat{j}} + \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{s=1}^{N_{i,j+1} - N_{i,j} - 1} m_{(i,j,s)} \alpha_{(i,j,s)} \in Q_L,$$

に対して, $\bar{\mathbf{m}} = (\bar{m}_{j,\nu}) = \Phi(\alpha)$ を

$$\begin{aligned} \bar{m}_{i, N_{i,j}} &= \sum_{\{\hat{j} \in \mathcal{J} | j_i = j\}} m_{\hat{j}} - m_{(i,j,1)} \quad \text{for } 0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_{i,1}, \\ \bar{m}_{i, N_{i,j} + s} &= m_{(i,j,s)} - m_{(i,j,s+1)} \quad \text{for } 1 \leq s \leq N_{i,j+1} - N_{i,j} - 1. \end{aligned}$$

と定義する。ただし $m_{(i,j,s)} = 0$ ($s > N_{i,j+1} - N_{i,j} - 1$) とおく。この時次が成り立つ。

1. Φ は全射
2. Weyl 群 W_L の Q_L への作用は Φ によって \overline{W} の L への作用に写される。

したがってこの定理によって微分作用素への演算 $E(\mu)$ や additions など生成されるスペクトル型の変換は, 格子 L における変換群 \overline{W} を定義するが, これは上で定義された Kac-Moody ルート格子 Q_L の W_L 作用を保つ商格子とみることができる。さらに不確定特異点の数が高々一つならばこの Φ は単射である。すなわちこの場合は L はまさにルート格子そのものと同一視できる。例えば Fuchs 型の時がまさにこの場合である。さらに以下が成り立つ。

定理 15 ([HO]). $\forall \mathbf{m} \in L^+$ に対し $\Phi^{-1}(\mathbf{m}) \cap Q_L^+ := \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{C}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha \neq \emptyset$.

従って, 特に特性指数が generic な既約微分方程式 $Pu = 0$ のスペクトル型 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) に対し, $\Phi^{-1}(\mathbf{m}) \cap Q_L^+$ の元は Kac-Moody ルート系の正ルートとなる。

3.5 線型微分作用素のスペクトル型による分類

idx $P = 2$ となるような微分作用素 P はすべて階数 1 の作用素から基本的な演算を何度か施して構成できることが分かったが (rigid な場合), その他の場合はどうなるか考えてみる。

そこで以下, idx $P \leq 0$ とする。可逆な twisted Euler transformations や additions による変換で, 微分作用素 P のスペクトルタイプ (\mathbf{m}, \mathbf{l}) が変換されるが (\mathbf{l} は変換を受けない), $d(\ell) > 0$ となる $\ell = (\ell_0, \dots, \ell_p)$ があれば階数を下げることが出来るので, これらの変換の軌道の中に, $d(\ell) > 0$ を満たす ℓ が存在しないスペクトル型 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) が存在する。これらを basic なスペクトル型と呼ぶ。 $\mathbf{m} = (m_{j,\nu})$ において, $m_{j,\nu}$ の最大公約数が 1 のとき, (\mathbf{m}, \mathbf{l}) または \mathbf{m} を素という,

定理 16 ([HO]). index of rigidity r を固定すると, $r < 0$ のときは basic なスペクトル型は有限通りしかない. $r = 0$ とすると, 素で basic なスペクトル型は有限通りしかない.

以下, 特に $\text{idx } P = 0, -2$ の場合について考える.

まず Fuchs 型の場合を思い出しておく.

定理 17. P は Fuchs 型で既約とする.

i) ([Ko]) $\text{idx } P = 0$ であることと, twisted Euler transformations と additions によって P が次の 4 個のうちのいずれかのスペクトル型を持つ既約微分作用素に帰着できることは同値.

$$(11, 11, 11), (111, 111, 111), (22, 1111, 1111), (33, 222, 111111)$$

ii) ([Os2]) $\text{idx } P = -2$ であることと, twisted Euler transformations と additions によって P が次の 13 個のうちのいずれかのスペクトル型を持つ既約微分作用素に帰着できることは同値.

$$(11, 11, 11, 11, 11), (21, 21, 111, 111), (31, 22, 22, 1111), (22, 22, 22, 211),$$

$$(211, 1111, 1111), (221, 221, 11111), (32, 11111, 11111), (222, 222, 2211),$$

$$(33, 2211, 111111), (44, 2222, 22211), (44, 332, 11111111), (55, 3331, 22222),$$

$$(66, 444, 2222211)$$

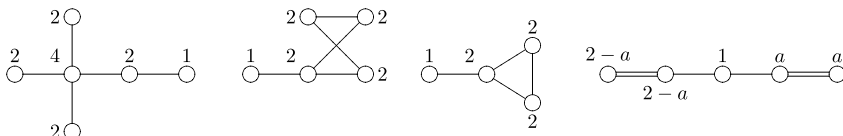
これらの定理を我々のルート系との対応を用いて不確定特異点を持つ微分作用素に拡張する.

定理 18. P は既約とする.

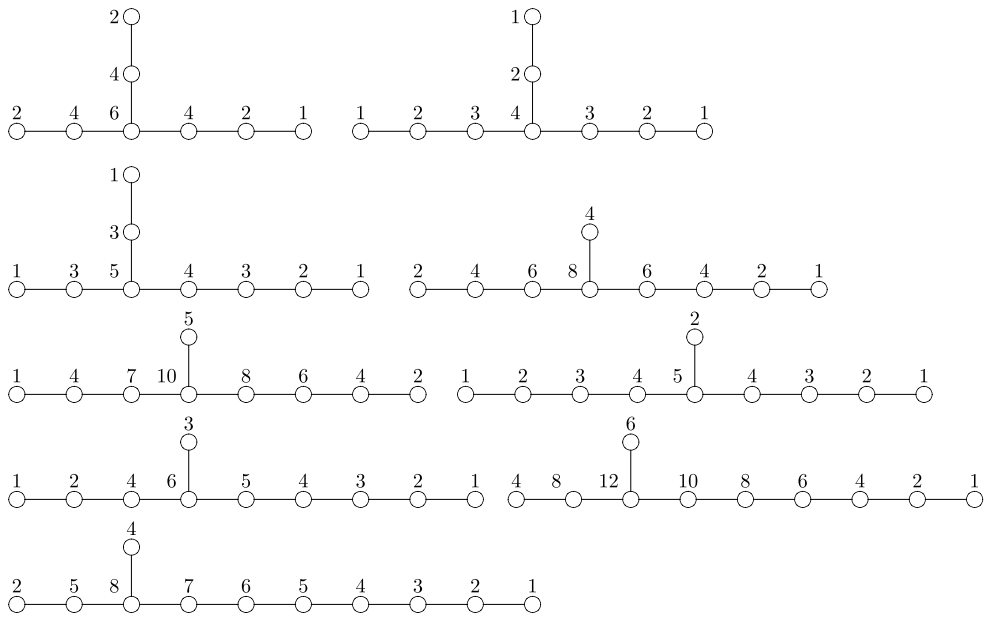
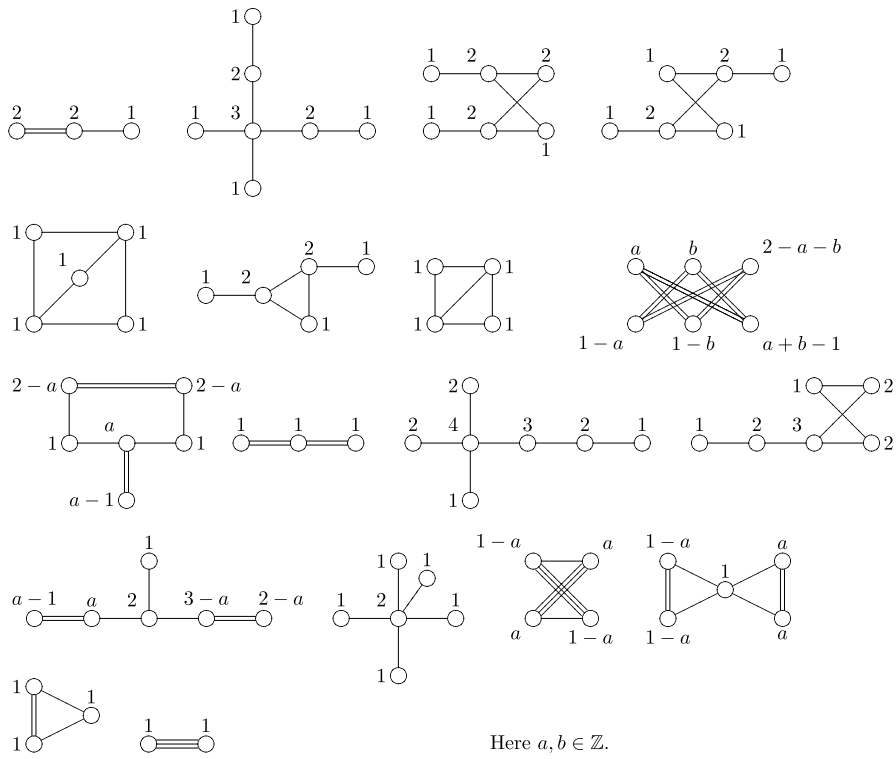
i) $\text{idx } P = 0$ で, P のスペクトル型 (\mathbf{m}, \mathbf{l}) は素とする. twisted Euler transformations と additions によって次をみたす微分作用素 P_{\min} に帰着できる. すなわち, 帰着されたスペクトル型 $(\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{l})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると^{*14}その support は次のアフィンルート系の拡大 Dynkin 図のいずれか.

$$E_8^{(1)}, E_7^{(1)}, E_6^{(1)}, D_4^{(1)}, A_3^{(1)}, A_2^{(1)}, A_1^{(1)}, A_1^{(1)} \oplus A_1^{(1)}.$$

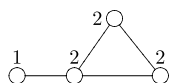
ii) ([HO]) $\text{idx } P = -2$ とする. このとき twisted Euler transformations と additions によって次をみたす微分作用素 P_{\min} に帰着できる. すなわちそのスペクトル型 $(\mathbf{m}_{\min}, \mathbf{l})$ の Φ による逆像を $\alpha(P_{\min})$ とすると, その support は次の Dynkin 図のいずれか. また各 $\alpha(P_{\min})$ はこの図の中の頂点に付随した数字を係数としてもつ.



^{*14} Φ が単射でないときは P_{\min} のスペクトル型から前と同様に定義される格子 $L_{\min} \subset L(P)$ に制限した $\Phi|_{L_{\min}}$ による $\mathbf{m}(P_{\min})$ の逆像をとることにする.



注意 19. 一つのルートに対応していくつかのスペクトル型に対応することがある。例えば、



に対しては、3通りのスペクトル型、つまり微分作用素に対応する。一方で一つのルートに対応するスペクトル型は有限個であることが確かめられるので、上のルートの分類から、対応するスペクトル型の有限性、分類を得ることができる。

参考文献

- [Be] D. Bertrand, *On Andre's proof of the Siegel Shidlovski theorem*, Colloque Franco-Japonais: Théorie des nombres transcendants, Sem. Math. Sci. 27 (Keio University, Yokohama, 1999).
- [CB] W. Crawley-Boevey, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspaces and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), 339–352.
- [DG] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its applications to the inverse Galois problems*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), 761–798.
- [DG2] ———, *Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems*. J. Algebra **318** (2007), 1–24.
- [Ha] Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*, Adv. Math. **169** (2002), 187–240.
- [Ha2] 原岡喜重, 「超幾何関数」, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.
- [HF] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, *Middle convolution and deformation for Fuchsian systems*, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007), 438–450.
- [Hi] K. Hiroe, *Linear differential equations on \mathbb{P}^1 and root systems*, arXiv:1010.2580v4, 2012.
- [HO] K. Hiroe and T. Oshima, *A classification of roots of symmetric Kac-Moody root systems and its application*, 2012, preprint.
- [Kc] V. C. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Third Edition, Cambridge Univ. Press 1990.
- [Ka] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, 1995.
- [Ko] V. P. Kostov, *The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity*, Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics, World Scientific 2001, 1–35.
- [MWZ] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinski, *Multiple flag variety of finite type*, Adv. in Math. **141** (1999), 97–118.
- [MUI] 森口繁一, 宇田川銈久, 一松信, 数学公式 III –特殊函数–, 岩波全書, 岩波書店, 1960.

- [Os1] T. Oshima, *Okubo*, a computer program for Katz/Yokoyama/Oshima algorithms on <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/okubo/okubo.zip>, 2007-8.
- [Os2] —, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, arXiv:0811.2916, 2008, 29pp, to appear in *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*.
- [Os3] —, *Katz's middle convolution and Yokoyama's extending operation*, arXiv:0812.1135, 2008, 18pp.
- [Os4] —, *Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations*, arXiv:1102.2792v1, 195pp, <http://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima>.
- [Os5] —, *muldif.rr*, a library of the calculation of differential operators for computer algebra Risa/Asir, <ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/>, 2009-2011.
- [Os6] 大島利雄 述, 廣惠一希 記, “特殊関数と代数的線型常微分方程式”, *Lecture Notes in Mathematical Sciences* **11** (2011), 東京大学, 111pp.
- [OS] T. Oshima and N. Shimeno, Heckman-Opdam hypergeometric functions and their specializations, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B20** (2010), 129–162.
- [Si] C. T. Simpson, *Products of Matrices*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **12**, AMS, Providence RI (1991), 157–185.
- [Si2] —, *Katz's middle convolution algorithm*, 53 pp, arXiv:math/0610526.
- [WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition*, 1927, Cambridge University Press.
- [Yo] T. Yokoyama, *Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy*, *Math. Nachr.* **279** (2006), 327–348.

相異分割のヤング図形と約数関数

安東雅訓

(岡山大学大学院自然科学研究科)

次の q -恒等式を分割の言葉に翻訳し組合せ論的に証明する. また, 分割の話として一般化を行い q -恒等式に再翻訳する.

定理 1. (内村桂輔)

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q; q)_k (1 - q^k)} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{1 - q^k}$$

ここで $(a; b)_k = (1 - a)(1 - ab)(1 - ab^2) \cdots (1 - ab^{k-1})$ である.

これを書き直せば相異分割と約数関数に関する式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \lambda_{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 1} \sigma_0(n) q^n$$

が得られる. ここで, \mathcal{SP} は相異分割全体の集合. また $\sigma_0(n)$ は n の約数の個数を表す. 実は, これより強い次の結果が成り立つ.

定理 2. (A.) 任意の自然数 n, k に対して

$$\begin{aligned} & \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)}, \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)}, \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \begin{cases} 1 & (k \mid n) \\ 0 & (k \nmid n) \end{cases} \end{aligned}$$

例. $n = 5$. サイズ 5 の相異分割 λ のヤング図形を描き, $(1, j)$, $j \leq \lambda_{\ell(\lambda)}$ のマス目に腕の長さ $a_{1,j}(\lambda) = \lambda_1 - j + 1$ を書き入れる. 分割ごとに $(-1)^{\ell(\lambda)+1}$ の符号をつけて各数字を記号だと思い計算を行う.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$= 5, 1$$

となり, 残った $5, 1$ は $n = 5$ の約数である.

n の約数を長方形のヤング図形と対応させることでこの一般化として次の式が得られる.

定理 3. (A.) 任意の自然数 m, n, k に対して

$$\begin{aligned} & \#\{(\lambda, i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a_{1i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ - & \#\{(\lambda, i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a_{1i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ = & \#\{(\lambda, t_1, \dots, t_{m-c(\lambda)}) \mid \lambda \in \mathcal{P}(n), 1 \leq t_1 < \dots < t_{m-c(\lambda)} < \ell(\lambda), \lambda_1 = k, \lambda_{t_i} = \lambda_{t_i+1}\} \end{aligned}$$

ここで, $c(\lambda)$ は λ のヤング図形の「南東の角」の個数である. 左辺は $a_{1,j}$ 達の m 個の組, 右辺は長方形 m 個を重ねてできるヤング図形の個数を表しており, $m = 1$ とすれば定理 2 が得られる. この式を $b^k q^n$ の係数として持つ母関数を考えると.

定理 4. (A.) 任意の自然数 m に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b^k q^{\frac{k(k+1)}{2} + (m-1)k}}{(bq; q)_k (1 - q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{b^{j_1} q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}$$

となり, 最初の式の新たな一般化が得られた.

参考文献

- [1] 安東雅訓: A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function, プレプリント.
- [2] 内村桂輔: An identity for the divisor generating function arising from sorting theory, J. Comb. Theory, Ser. A 31, 131-135 (1981).

Factorial Schur function の対称性について

Daniel Bump (Stanford)
 Peter McNamara (Stanford)
 中筋麻貴 (北里大学)¹

任意の複素数列 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ と $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ (スペクトルパラメータ) および整数列 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し,

$$A_\mu(\mathbf{z}|\alpha) := \det((z_i|\alpha)^{\mu_j})_{i,j} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

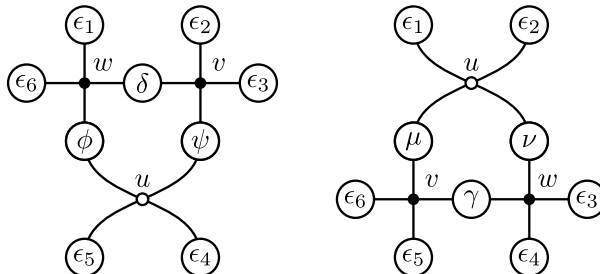
と定義する. ただし, $(z|\alpha)^r = (z + \alpha_1) \cdots (z + \alpha_r)$ とする. このとき, Schur function $s_\lambda(\mathbf{z})$ の一般化である factorial Schur function $s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)$ は, $A_\mu(\mathbf{z}|\alpha)$ を用いて, 以下のように定義される.

Definition. (factorial Schur function) $\rho = (n-1, n-2, \dots, 0)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対して,

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = \frac{A_{\lambda+\rho}(\mathbf{z}|\alpha)}{A_\lambda(\mathbf{z}|\alpha)}.$$

この factorial schur function は, six-vertex model の partition function を用いて表すことができ, six-vertex model における Yang-Baxter 方程式を用いることによって, スペクトルパラメータ z_i に関する対称性を証明することができる ([2], [3]). 一方, パラメータ α_j について, 対称性は一般には成り立たないが, スペクトルパラメータの個数 n を大きくすると, 近似的に対称性が成り立つことが主張されていた ([4]). 本研究では, six-vertex model に関する従来の Yang-Baxter 方程式 ([1]) の応用として, 新たな形の Yang-Baxter 方程式を得ることによって, [4] で述べられている α_j に関する対称性を証明する. 主定理は以下となる. なお, six-vertex model の記述は [1] に従うものとする.

Theorem 1. 各格子点に対応させるボルツマン・ウエイトを, 表1に示すものとする. このとき, 次の2つの system に対する partition function は等しい. なお, ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) に入る記号は fix しているものとする.



¹本研究は科研費 (課題番号:23840035) の助成を受けたものである.

表1. ボルツマン・ウエイト

v						
	1	$z_i - t\alpha$	t	$z_i + \alpha$	$z_i(t+1)$	1
w						
	1	$z_i - t\beta$	t	$z_i + \beta$	$z_i(t+1)$	1
u						
	1	1	$\beta - \alpha$	0	1	1

factorial Schur function を表す six vertex model (長方形格子) において, $i = n$ 行目, j 列目および $j + 1$ 列目の下に頂点 u を添付する. Theorem 1 において, $\alpha = \alpha_j, \beta = \alpha_{j+1}$ とし, Yang-Baxter 方程式を繰り返し適用することによって, 以下の factorial Schur function のパラメータ α_j に関する対称性を示すことができた.

Theorem2. τ_j を $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ において α_j と α_{j+1} を入れ替える写像とする. λ を partition とし, l をその長さとする, $n \geq l + j$ において,

$$s_\lambda(\mathbf{z}|\alpha) = s_\lambda(\mathbf{z}|\tau_j\alpha)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] B.Brubaker, D.Bump, and S.Friedberg, Schur polynomials and the Yang-Baxter equation, preprint
- [2] D.Bump, P. McNamara, M.Nakasuji, Factorial Schur functions and the Yang-Baxter equation, preprint
- [3] D.Bump, P. McNamara, 中筋麻貴, Factorial Schur functions と six-vertex model, 日本数学会 2011 年度年会 無限可積分系セッション講演アブストラクト, page 3, 2011.
- [4] I.G. Macdonald, Factorial functions: theme and variations. In *Seminaire alotharingien de Combinatoire (Saint-Nabor, 1992)*, volume 498 of *Publ. Inst. Rech. Math. Av.*, Pages 5-39. Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.

Semidirect product of quasigroups and dynamical Yang-Baxter maps

Matsumoto Diogo Kendy (早稲田大学基幹理工学研究科)

擬群 (Quasigroup) は群から結合法則と単位元の存在を除いた代数系である。本講演では可換な擬群 (Q, \cdot) と集合 Q 上の対称群 $S(Q)$ の半直積 $Q \rtimes S(Q)$ を定義し、この $Q \rtimes S(Q)$ のある部分集合族を取るにより右非退化でユニタリなダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (DYB 写像) が構成できることを示す。

1. 擬群と擬群の半直積

定義 1. (a), 擬群とは空でない集合 Q とその上の二項演算 $\cdot : Q \times Q \rightarrow Q$ の組で次の条件を満たすものをいう。

1. 任意の $a \in Q$ に対して写像 $L(a) : Q \rightarrow Q, b \mapsto a \cdot b$ は全単射
2. 任意の $a \in Q$ に対して写像 $R(a) : Q \rightarrow Q, b \mapsto b \cdot a$ は全単射

この二つの全単射の逆像による演算を $L(a)^{-1}(b) = a \setminus b$, $R(a)^{-1}(b) = b / a$ で表す。

(b), 擬群 (Q, \cdot) が任意の $a \in Q$ に対して $L(a) = R(a)$, (i.e., $a \cdot b = b \cdot a$) を満たすとき可換な擬群という。

次に群における半直積の概念を擬群に拡張する。

捕題 1. (Q, \cdot) を擬群、 $S(Q)$ を集合 Q 上の対称群とする。この時、 $Q \times S(Q)$ に積を

$$(a, f) * (b, g) := (a \cdot f(b), fg), (a, f), (b, g) \in Q \times S(Q)$$

で定めれば $(Q \times S(Q), *)$ は擬群となる。

捕題 1 で得られる $Q \times S(Q)$ 上の擬群構造を Q と $S(Q)$ の半直積と呼び $Q \rtimes S(Q)$ で表す。

2. DYB 写像の構成

定義 2. (Y. Shibukawa[2]) H, X を空でない集合、 $\phi : H \times X \rightarrow H$ とする。写像 $R(\lambda) : X \times X \rightarrow X \times X (\lambda \in H)$ が次の方程式を満たす時、 $R(\lambda)$ は (H, X, ϕ) に付随する DYB 写像と呼ばれる。

$$R_{23}(\lambda)R_{13}(\phi(\lambda, X^{(2)}))R_{12}(\lambda) = R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))R_{13}(\lambda)R_{23}(\phi(\lambda, X^{(1)})) \quad (\forall \lambda \in H).$$

ここで $R_{12}(\lambda), R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)})), \dots$ は次のように定義される $X \times X \times X$ から $X \times X \times X$ への写像である。

$$R_{12}(\lambda)(a, b, c) = (R(\lambda)(a, b), c),$$

$$R_{12}(\phi(\lambda, X^{(3)}))(a, b, c) = (R(\phi(\lambda, c))(a, b), c) \quad (a, b, c \in X)$$

$R(\lambda)$ がパラメータ $\lambda \in H$ から独立な時、ヤン・バクスター写像 (YB 写像) となる。

本講演における主結果は次の通りである。

定理 1. (Q, \cdot) を可換な擬群、 $Q \times S(Q)$ を Q と $S(Q)$ の半直積とし、 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in H}$ 、 $S_\lambda = \{(a, f_\lambda(a)) | a \in Q\}$ は次の条件を満たす $Q \times S(Q)$ の部分集合族とする。

1. 任意の $(a, f_\lambda(a)) \in S_\lambda$ に対して $(a, f_\lambda(a)) \setminus S_\lambda = S_\mu$ となる $\mu \in H$ がただ一つ存在する

(ここで $(a, f_\lambda(a)) \setminus S_\lambda = \{(a, f_\lambda(a)) \setminus (b, g_\lambda(b)) | (b, g_\lambda(b)) \in S_\lambda\}$)。この時、

$$\phi : H \times Q \rightarrow H, (\lambda, a) \mapsto \mu$$

$$R(\lambda)(a, b) := (f_\lambda(f_\lambda(a)(b))^{-1}(a), f_\lambda(a)(b)) \quad (a, b \in A)$$

は右非退化でユニタリな DYB 写像 $R(\lambda) : A \times A \rightarrow A \times A (\lambda \in H)$ を与える。

系 1. $(Q, +)$ を可換な擬群、 $Q \times S(Q)$ を Q と $S(Q)$ の半直積とし、 $S = \{(a, f(a)) | a \in Q\}$ が $Q \times S(Q)$ の部分擬群ならば

$$R(a, b) := (f(f(a)(b))^{-1}(a), f(a)(b))$$

は非退化でユニタリな YB 写像を与える。

参考文献

- [1] H.O. Pflugfelder, Quasigroups and loops: introduction (Heldermann Verlag, Berlin, 1990).
- [2] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, Internat. Math. Res. Not.36 (2005) 2199-2221.
- [3] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43(4)(2007)1157-1182.

$D_n^{(1)}$ 型臙装配位のいくつかの話題について

尾角 正人 (阪大基礎工)

坂本 玲峰 (東理大理)

Anne Schilling (UC Davis)

臙装配位 (Rigged Configuration) とは Kerov–Kirillov–Reshetikhin(1986) により Bethe 仮説の研究を通じて導入された組み合わせ論的対象である。その後の研究によりアフィン量子群の Kirillov–Reshetikhin(KR) クリスタルとの関連が認識され、それに伴い非常に深い性質を持つことが認識されつつある。結晶基底との対応を考える上で強力な道具となるのは臙装配位と結晶基底のテンソル積の元との一対一対応を与える組み合わせ論的アルゴリズム (臙装配位写像と呼ぶ) である。臙装配位写像が自然なものであることの一つの例として、一般の $A_n^{(1)}$ 型箱玉系の運動を線形化する逆散乱形式は臙装配位写像に他ならないことが知られている (Kuniba–Okado–Sakamoto–Takagi–Yamada, 2006)。

臙装配位が結晶基底と関連していることから、 $A_n^{(1)}$ 型以外の代数に対する臙装配位が考えられる。実際その様な方向の研究も色々に行われており、例えば Okado–Schilling–Shimozono(2002) はベクトル表現の場合に一般の非例外型 KR クリスタルとの全単射のアルゴリズムを構成した。一般化された臙装配位も自然なものであることの一つの例として $D_n^{(1)}$ 型箱玉系の逆散乱形式 (の一部) が $D_n^{(1)}$ 型臙装配位写像と一致することが確認されている (Kuniba–Sakamoto–Yamada, 2010)。

これまで臙装配位写像が具体的に構成されているのは結晶基底 $B^{r,1}$ や $B^{1,s}$ のテンソル積の場合の一部のみであり、それ以外のより一般的な結晶基底 $B^{r,s}$ の場合の解析は ($A_n^{(1)}$ 型を除き) ほとんど未開拓のままとなっていた。しかしそのような一般的状況においても、代数の階数が大きい場合には非例外型代数に対する臙装配位と $A_n^{(1)}$ 型臙装配位および Littlewood–Richardson 盤の組との自然な全単射が存在する (これは $X = K$ 恒等式と呼ばれる関係式の理論的背景を与える) といった著しい性質を持つことが知られている [1]。従ってより一般的な臙装配位写像を考察することは数学的に有意義であることが見込まれ、また一般的な箱玉系の逆散乱形式の構成といった応用も期待されている。そのための第一歩として今回 $D_n^{(1)}$ 型臙装配位写像について考察を開始したので [2] その結果を報告する。以下 $D_n^{(1)}$ 型 Dynkin 図の頂点を Kac の本に従ってラベル付けし、 I を頂点の集合、 $I_0 := I \setminus \{0\}$ とする。また部分集合 $J \subset I$ に対し元 b が J -ハイエストであるとは $\tilde{e}_i b = 0$ が全ての $i \in J$ について成り立つこととする。

一つ目の結果として、一般的な結晶基底 $B^{r,s}$ ($r \neq n, n-1$) のテンソル積の元と臙装配位との全単射のアルゴリズムの予想を得た。 $B^{r,s}$ の元を表示する方法としてヤング半標準盤の自然な拡張である Kashiwara–Nakashima(KN) 盤が知られてお

り、様々な良い性質を持つことから広く使用されてきた。しかしながら組み合わせ R 行列との関連、とりわけ insertion algorithm との関連から KN 盤と異なり真に長方形型 (で “良い” 性質を持つ) タブロー表示を見つけることは興味深い問題であった。特に今回のように臙装配位写像を構成するためには長方形型のタブロー表示が必須である。そこで今回臙装配位写像に関わる新しい長方形型タブロー表示を定義した。定義は $B^{r,s}$ の I_0 -ハイエスト元に対して具体的に与え、それ以外の元は柏原作用素 \tilde{f}_i を用いてクリスタル同型となるように定義される。この様なタブロー表示を Kirillov–Reshetikhin (KR) 盤と呼ぶ。主要な予想は、 $D_n^{(1)}$ 型ベクトル表現の場合の臙装配位写像の自然な拡張によって KR 盤のテンソル積と臙装配位の間の一対一対応が得られるというものである。 $B^{r,s}$ (長方形一つ) の最高ウェイト元に対してはこの予想が正しいことを証明した (この場合も非自明な結果である)。

二つ目の結果として臙装配位が結晶構造 (\tilde{e}_0 および \tilde{f}_0 の作用の具体形) と密接な関係にあることを発見した。A. Schilling [3] により発見されたアルゴリズムではまず元 $b \in B^{r,s}$ を適当な柏原作用素 \tilde{e}_i の列を用いて $\{2, 3, \dots, n\}$ -ハイエスト元に送り、その元と \pm -ダイアグラムと呼ばれる組み合わせ論的対象との非自明な全単射 (γ と書く) を通して頂点 0 と 1 の入れ替えに関する Dynkin 自己同型を実現するものであった。従って代数構造の核心に新しい全単射 γ が存在することとなるが、その起源は謎であった。今回 \pm -ダイアグラムの類似物 (臙装配位写像が完成された際には対応するクリスタル元の像となっているものと予想している) を臙装配位に対して定式化すると、写像 γ が “線形化” すること、すなわち結晶構造の定義に現れる写像 γ は臙装配位写像と同じ起源を持つことが分かった。現在までに証明できている内容をもう少し正確に述べると、臙装配位上の \pm -ダイアグラムの類似物に対して Dynkin 自己同型を定義すると、既に知られている (Schilling, 2005) 臙装配位上の柏原作用素 \tilde{e}_i および \tilde{f}_i ($i \in I_0$) と合わせることにより本来の $B^{r,s}$ とアフィンクリスタル同型となることを確かめた。

参考文献

- [1] M. Okado and R. Sakamoto, Stable rigged configurations for quantum affine algebras of nonexceptional types, *Adv. in Math.* **228** (2011) 1262–1293.
- [2] M. Okado, R. Sakamoto and A. Schilling, Affine crystal structure on rigged configurations of type $D_n^{(1)}$, arXiv:1109.3523.
- [3] A. Schilling, Combinatorial structure of Kirillov–Reshetikhin crystals of type $D_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$, *J. Algebra* **319** (2008) 2938–2962.

Ding-Iohara 代数の Fock module の族と 3 点 intertwining operator

粟田 英資 (名大多元数理)
Boris Feigin (Landau Institute)
白石 潤一 (東大数理)

1. Ding-Iohara 代数

q と t を不定元とする.

Definition 1.1. 単位元を持つ結合代数 \mathcal{U} で, 中心元 γ と $x^\pm(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n^\pm z^{-n}$, $\psi^\pm(z) = \sum_{\pm n \in \mathbb{N}} \psi_n^\pm z^{-n}$ を生成元に持ち, ある関係式 (ここでは省略する) を満たすものを Ding-Iohara 代数と呼ぶ.

Proposition 1.2. \mathcal{U} は Hopf 代数である. 余積は次の通り: $\Delta(\gamma^{\pm 1/2}) = \gamma^{\pm 1/2} \otimes \gamma^{\pm 1/2}$,

$$\begin{aligned}\Delta(x^+(z)) &= x^+(z) \otimes 1 + \psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2} z) \otimes x^+(\gamma_{(1)} z), \\ \Delta(x^-(z)) &= x^-(\gamma_{(2)} z) \otimes \psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2} z) + 1 \otimes x^-(z), \\ \Delta(\psi^\pm(z)) &= \psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} z) \otimes \psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp 1/2} z),\end{aligned}$$

ここに $\gamma_{(1)}^{\pm 1/2} = \gamma^{\pm 1/2} \otimes 1$, $\gamma_{(2)}^{\pm 1/2} = 1 \otimes \gamma^{\pm 1/2}$ である. (Counit ε , Antipode a は省略)

Remark 1.3. ψ_0^\pm は \mathcal{U} の中心である.

Definition 1.4. ある \mathcal{U} -加群 M 上, 定数 $l_1, l_2 \in \mathbb{Q}$ にて

$$\gamma^{1/2} \alpha = (t/q)^{l_1/4} \alpha, \quad (\psi_0^+)^{-1} \psi_0^- \alpha = (t/q)^{l_2} \alpha \quad (\forall \alpha \in M),$$

となるとき, M を level (l_1, l_2) 加群と呼ぶ.

2. Fock module の族と intertwining operators

2.1. $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ と $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$

Fock 空間 \mathcal{F} を対称関数の空間と同一視する. Macdonald 対称関数 (P_λ) は \mathcal{F} の基底である. もし λ の i 行目に対して, 箱をひとつ加えて (減らして) も分割となるとき, $\lambda \pm \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i \pm 1, \lambda_{i+1}, \dots)$ と書く.

Definition 2.1. \mathcal{F} に level $(0, 1)$ 加群の構造を次のように与える: $\gamma^{1/2} P_\lambda = P_\lambda$,

$$\begin{aligned}x^+(z) P_\lambda &= \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1} A_{\lambda, i}^+ \delta(q^{\lambda_i} t^{-i+1} u/z) P_{\lambda+\mathbf{1}_i}, \\ x^-(z) P_\lambda &= q^{1/2} t^{-1/2} \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} A_{\lambda, i}^- \delta(q^{\lambda_i-1} t^{-i+1} u/z) P_{\lambda-\mathbf{1}_i}, \\ \psi^+(z) P_\lambda &= q^{1/2} t^{-1/2} B_\lambda^+(u/z) P_\lambda, \quad \psi^-(z) P_\lambda = q^{-1/2} t^{1/2} B_\lambda^-(z/u) P_\lambda.\end{aligned}$$

(係数 $A_\lambda^\pm, B_\lambda^\pm(z)$ については省略.[2]) これを $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$ と呼ぶ.

Definition 2.2. N を整数とする. 次のように \mathcal{F} に level $(1, N)$ 加群の構造を与える :
 $\gamma^{1/2}P_\lambda = (t/q)^{1/4}P_\lambda,$

$$\begin{aligned} x^+(z)P_\lambda &= uz^{-N}q^{-N/2}t^{N/2}\eta(z)P_\lambda, & x^-(z)P_\lambda &= u^{-1}z^Nq^{N/2}t^{-N/2}\xi(z)P_\lambda, \\ \psi^+(z)P_\lambda &= q^{N/2}t^{-N/2}\varphi^+(z)P_\lambda, & \psi^-(z)P_\lambda &= q^{-N/2}t^{N/2}\varphi^-(z)P_\lambda. \end{aligned}$$

(作用素 $\eta(z), \xi(z), \varphi^\pm(z)$ については省略. [1]) これを $\mathcal{F}_u^{(1, N)}$ と呼ぶ.

2.2. intertwining operator Φ, Φ^*

Definition 2.3. 3点の intertwining operator Φ, Φ^* とその成分 $\Phi_\lambda, \Phi_\lambda^*$ を以下の条件で定める :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}_v^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,N)} &\longrightarrow \mathcal{F}_{-vu}^{(1,N+1)}, & a\Phi &= \Phi\Delta(a) \quad (\forall a \in \mathcal{U}), \\ \Phi_\lambda(\alpha) &= \Phi(P_\lambda \otimes \alpha) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{F}_u^{(1,N)}), & \Phi_\emptyset(1) &= 1 + \dots, \\ \Phi^* : \mathcal{F}_{-vu}^{(1,N+1)} &\longrightarrow \mathcal{F}_v^{(1,N)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,0)}, & \Delta(a)\Phi^* &= \Phi^*a \quad (\forall a \in \mathcal{U}), \\ \Phi^*(\alpha) &= \sum_\lambda \Phi_\lambda^*(\alpha) \otimes Q_\lambda \quad (\forall \alpha \in \mathcal{F}_{-vu}^{(1,N+1)}), & \Phi_\emptyset^*(1) &= 1 + \dots. \end{aligned}$$

Proposition 2.4. Φ, Φ^* は存在して一意に決まる. 次のように書ける.

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda &= t(\lambda, u, v, N)\tilde{\Phi}_\lambda(v), \\ t(\lambda, u, v, N) &= (-vu)^{|\lambda|}(q^{n(\lambda')+|\lambda|/2}t^{-n(\lambda)-|\lambda|/2}v^{|\lambda|})^{-N-1}, \\ \Phi_\lambda^* &= t^*(\lambda, u, v, N)\tilde{\Phi}_\lambda^*(u), \\ t^*(\lambda, u, v, N) &= (q^{-1}v)^{-|\lambda|}(q^{n(\lambda')+|\lambda|/2}t^{-n(\lambda)-|\lambda|/2}u^{|\lambda|})^N. \end{aligned}$$

記号については次のとおり. $|\lambda| = \sum_i \lambda_i, n(\lambda) = \sum_i \lambda_i(i-1),$

$$\eta_\lambda(v) =: \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \eta(q^{j-1}t^{-i+1}v) :, \quad \xi_\lambda(v) =: \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \xi(q^{j-1}t^{-i+1}v) :,$$

また,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\emptyset(v) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-q^n} a_{-n} v^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^n} a_n v^{-n}\right), \\ \tilde{\Phi}_\emptyset^*(v) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1-q^n} q^{-n/2} t^{n/2} a_{-n} v^n\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1-q^n} q^{-n/2} t^{n/2} a_n v^{-n}\right), \end{aligned}$$

ここに, a_n は \mathcal{F} に作用する Heisenberg 作用素. そして,

$$\tilde{\Phi}_\lambda(v) = \frac{q^{n(\lambda')}}{c_\lambda} : \Phi_\emptyset(v) \eta_\lambda(v) :, \quad \tilde{\Phi}_\lambda^*(v) = \frac{q^{n(\lambda')}}{c_\lambda} : \tilde{\Phi}_\emptyset^*(v) \xi_\lambda(v) : .$$

(c_λ は Macdonald 対称関数のノルムに現れる定数.)

参考文献

- [1] Feigin, B.; Hashizume, K.; Hoshino, A.; Shiraishi, J.; Yanagida, S. A commutative algebra on degenerate CP^1 and Macdonald polynomials. J. Math. Phys. 50 (2009), no. 9, 095215, 42 pp.
- [2] Feigin, B.; Feigin, E.; Jimbo, M.; Miwa, T.; Mukhin, E. Quantum continuous gl_∞ : tensor products of Fock modules and W_n -characters. Kyoto J. Math. 51 (2011), no. 2, 365-392.

Ding-Iohara 代数の n 点関数と Nekrasov 分配関数

粟田 英資 (名大多元数理)

Boris Feigin (Landau Institute)

白石 潤一 (東大数理)

1. 3点 Intertwining operator の合成

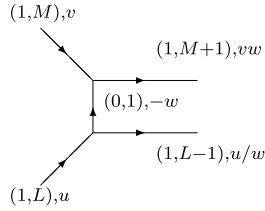
1.1. matter のない場合

L, M を整数とする. 合成

$$\mathcal{F}_u^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,M)} \xrightarrow{\Phi^* \otimes \text{id}} \mathcal{F}_{u/w}^{(1,L-1)} \otimes \mathcal{F}_{-w}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,M)} \xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi} \mathcal{F}_{u/w}^{(1,L-1)} \otimes \mathcal{F}_{vw}^{(1,M+1)}.$$

によって定められる 4 点作用素を考える :

$$\Phi \left[\begin{array}{c} (1, L-1), u/w; (1, M+1), vw \\ (1, L), u; (1, M), v \end{array} \right] : \mathcal{F}_u^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,M)} \longrightarrow \mathcal{F}_{u/w}^{(1,L-1)} \otimes \mathcal{F}_{vw}^{(1,M+1)}.$$



簡単のため,

$$u_i = u \prod_{k=1}^{i-1} w_k^{-1}, \quad v_i = v \prod_{k=1}^{i-1} w_k,$$

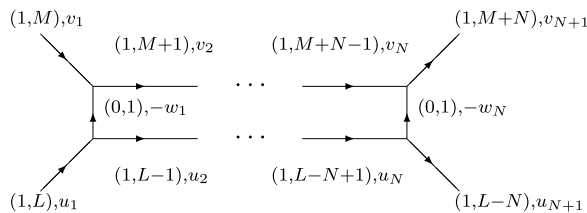
とおく. つまり $u_1 = u, u_2 = u/w_1, u_3 = u/(w_1 w_2), \dots, v_1 = v, v_2 = v w_1, v_3 = v w_1 w_2, \dots$.

Definition 1.1. 合成

$$\begin{aligned} & \Phi \left[\begin{array}{c} (1, L-N), u_{N+1}; (1, M+N), v_{N+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{array} \right] \\ &= \Phi \left[\begin{array}{c} (1, L-N), u_{N+1}; (1, M+N), v_{N+1} \\ (1, L-N+1), u_N; (1, M+N-1), v_N \end{array} \right] \cdots \Phi \left[\begin{array}{c} (1, L-1), u_2; (1, M+1), v_2 \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

にて定められる 4 点作用素を考える :

$$\Phi \left[\begin{array}{c} (1, L-N), u_{N+1}; (1, M+N), v_{N+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{array} \right] : \mathcal{F}_{u_1}^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_{v_1}^{(1,M)} \longrightarrow \mathcal{F}_{u_{N+1}}^{(1,L-N)} \otimes \mathcal{F}_{v_{N+1}}^{(1,M+N)}.$$



Definition 1.2.

$$N_{\lambda,\mu}(u) := \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - uq^{-\mu_i+j-1}t^{-\lambda'_j+i}) \cdot \prod_{(k,l) \in \mu} (1 - uq^{\lambda_k-l}t^{\mu'_k-k+1})$$

$$g(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1}{n} \frac{1}{(1-q^n)(1-t^{-n})} z^n\right) = (z; q, t^{-1})_\infty.$$

Proposition 1.3. 真空期待値は次のように表され Nekrasov の分配関数と一致する [1]:

$$\langle 0| \otimes \langle 0| \Phi \left[\begin{array}{c} (1, L - N), u_{N+1}; (1, M + N), v_{N+1} \\ (1, L), u_1; (1, M), v_1 \end{array} \right] |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq N} g(w_i/w_j) g(qt^{-1}w_i/w_j)$$

$$\times \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)}} \prod_{k=1}^N \left(\frac{q^{N/2}v}{t^{N/2}u} w_1 w_2 \cdots w_N \right)^{|\lambda^{(k)}|} (q^{n(\lambda^{(k)'}) + |\lambda^{(k)}|/2} t^{-n(\lambda^{(k)}) - |\lambda^{(k)}|/2} (-w_k)^{|\lambda^{(k)}|})^{L-M-N}$$

$$\times \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{1}{N_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(qt^{-1}w_i/w_j)}.$$

1.2. with matter

matter がある場合を考えるために, 合成

$$\mathcal{F}_{-x}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,M)} \xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi^* \otimes \text{id}} \mathcal{F}_{-x}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u/w}^{(1,L-1)} \otimes \mathcal{F}_{-w}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,M)}$$

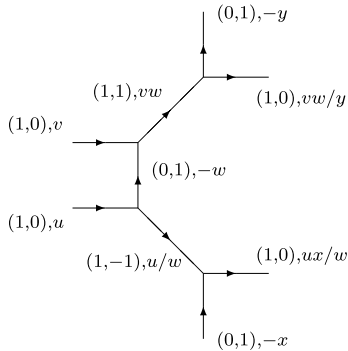
$$\xrightarrow{\text{id} \otimes \Phi \otimes \Phi} \mathcal{F}_{-x}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u/w}^{(1,L-1)} \otimes \mathcal{F}_{vw}^{(1,M+1)} \xrightarrow{\Phi \otimes \Phi^*} \mathcal{F}_{ux/w}^{(1,L)} \otimes \mathcal{F}_{vw/y}^{(1,M)} \otimes \mathcal{F}_{-y}^{(0,1)}.$$

にて定められる 6 点作用素

$$\Phi \left[\begin{array}{c} (1, 0), ux/w; (1, 0), vw/y; (0, 1), -y \\ (0, 1), -x; (1, 0), u; (1, 0), v \end{array} \right]$$

$$: \mathcal{F}_{-x}^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_v^{(1,0)} \longrightarrow \mathcal{F}_{ux/w}^{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_{vw/y}^{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_{-y}^{(0,1)},$$

を考える. この 6 点作用素の幾つかの ($SU(N)$ ならば N 個の) 積をとり, 全ての外線に真空ベクトル P_\emptyset (ないし $|0\rangle$) を差し込めば, matter がある場合の Nekrasov 分配関数が得られる (省略) [1].



参考文献

- [1] Awata, Hidetoshi; Kanno, Hiroaki. Refined BPS state counting from Nekrasov's formula and Macdonald functions. Internat. J. Modern Phys. A 24 (2009), no. 12, 2253-2306.

Quiver varieties and one-dimensional sums

小寺 諒介*・直井 克之†

東京大学大学院数理科学研究科

[KN]において、籠多様体に関する幾何学的な量（Poincaré多項式，Kazhdan-Lusztig型多項式）と可積分系に由来する組合せ論的な量（エネルギー函数，1次元状態和）との間の等式を証明した．これについて解説する．

1 籠多様体

\mathfrak{g} を ADE 型の複素単純 Lie 代数とし，単純ルートの添字集合を I ，支配的整ウエイト全体を P_+ ，正ルートの非負整数係数和の全体を Q_+ であらわす． $\alpha \in Q_+$ と $\lambda \in P_+$ に対して次が定義される [N]（代数多様体は，すべて \mathbb{C} 上のものとする）．

- （非特異）籠多様体 $\mathfrak{M}(\alpha, \lambda)$ ：非特異な準射影的代数多様体
- （アファイン）籠多様体 $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ ：（一般には特異点を持つ）アファイン代数多様体
- 射影的射 $\pi_{\alpha, \lambda}: \mathfrak{M}(\alpha, \lambda) \rightarrow \mathfrak{M}_0(\lambda)$

λ を固定すれば $\mathfrak{M}(\alpha, \lambda) \neq \emptyset$ となる α は有限個である． $\mathfrak{M}_0(\lambda)$ の原点 0 のファイバー $\pi_{\alpha, \lambda}^{-1}(0)$ を $\mathfrak{L}(\alpha, \lambda)$ であらわす． $\mathfrak{M}(\alpha, \lambda)$ は複素シンプレクティック構造を持ち， $\mathfrak{L}(\alpha, \lambda)$ はラグランジュ部分多様体になる． k が奇数のとき， \mathbb{C} 係数の特異ホモロジー群に対して $H_k(\mathfrak{L}(\alpha, \lambda)) = 0$ が知られている．

$\mathfrak{M}_0(\lambda)$ は stratification

$$\mathfrak{M}_0(\lambda) = \bigsqcup_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \lambda - \alpha \in P_+}} \mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\alpha, \lambda)$$

を持つ． $\lambda, \mu \in P_+$ で $\lambda - \mu \in Q_+$ を満たすものに対して，多項式 $Z_{\lambda, \mu}(t)$ を

$$Z_{\lambda, \mu}(t) = \sum_k \dim H^k(i_0^! IC_{\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\lambda - \mu, \lambda)}) t^k$$

で定義し，籠多様体に対する Kazhdan-Lusztig 型多項式と呼ぶ．但し $i_0: \{0\} \rightarrow \mathfrak{M}_0(\lambda)$ は原点 0 の埋め込み， $IC_{\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\lambda - \mu, \lambda)}$ は $\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\lambda - \mu, \lambda)$ 上の定数層に付随した交叉コホモロジー複体である． $k < 0$ または k が奇数のとき $H^k(i_0^! IC_{\mathfrak{M}_0^{\text{reg}}(\lambda - \mu, \lambda)}) = 0$ が知られているので， $Z_{\lambda, \mu}(t)$ は t^2 の多項式になる．

2 1次元状態和

\mathfrak{g} の各基本ウエイト ϖ_i ($i \in I$) に対して，量子アファイン代数 $U'_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の基本表現 $W(\varpi_i)$ が [K] において構成され，結晶基底 $B(W(\varpi_i))$ を持つことが知られている．

* E-mail: kryosuke@ms.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kryosuke/>, 日本学術振興会特別研究員 PD

† E-mail: naoik@ms.u-tokyo.ac.jp, URL: <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~naoik/>

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P_+$ に対して

$$B_\lambda = \bigotimes_{i \in I} B(W(\varpi_i))^{\otimes m_i}$$

とおく (右辺の同型類はテンソル積をとる順序によらない). $D: B_\lambda \rightarrow \mathbb{Z}_{\leq 0}$ を [HKOTY] において導入されたエネルギー関数とする. 但し, D は B_λ の最高ウェイト元において最大値 0 をとるように正規化する. $\lambda, \mu \in P_+$ で $\lambda - \mu \in Q_+$ を満たすものに対して, 1 次元状態和 $X(\lambda, \mu, t)$ を

$$X(\lambda, \mu, t) = \sum_{\substack{b \in B_\lambda \\ \tilde{e}_i b = 0 (i \in I) \\ \text{wt } b = \mu}} t^{D(b)}$$

で定義する. $X(\lambda, \mu, t)$ は t^{-1} の多項式になる.

3 主結果

定理 次の等式が成り立つ.

(i)

$$\sum_{\alpha \in Q_+} \sum_{k=0}^{2 \dim \mathfrak{L}(\alpha, \lambda)} \dim H_k(\mathfrak{L}(\alpha, \lambda)) t^{2 \dim \mathfrak{L}(\alpha, \lambda) - k} e^{\lambda - \alpha} = \sum_{b \in B_\lambda} t^{-2D(b)} e^{\text{wt } b}$$

(ii)

$$Z_{\lambda, \mu}(t) = X(\lambda, \mu, t^{-2})$$

証明について簡単に述べる. ホモロジー群の直和 $\bigoplus_{\alpha \in Q_+} H_*(\mathfrak{L}(\alpha, \lambda))$ にはカレント Lie 代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z]$ の作用が定義され [V], 二つの等式の両辺はこの加群 (Weyl 加群) に関する表現論的な量と解釈できる. 具体的には, (i) は Weyl 加群の次数付き指標, (ii) は次数付き組成重複度についての等式である.

参考文献

- [HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada, *Remarks on fermionic formula*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), Contemp. Math., vol. 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 243–291.
- [K] M. Kashiwara, *On level-zero representations of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112** (2002), no. 1, 117–175.
- [KN] R. Kodera and K. Naoi, *Loewy series of Weyl modules and the Poincaré polynomials of quiver varieties*, preprint arXiv:1103.4207.
- [N] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.
- [V] M. Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

位相的弦理論と保型性

Seiberg–Witten 曲線, 有理楕円曲面, Jacobi 形式

酒井 一博 (京都大学基礎物理学研究所)*

概 要

4,5,6次元の超対称場の理論のうち、真空構造の厳密解が楕円曲線型の Seiberg–Witten 曲線によって記述されるクラスがある。各々の理論について、プレポテンシャルをその一部として含む分配関数を定義することができる。この分配関数は一部の理論については Nekrasov 分配関数としてその具体形が知られており、また 5,6次元の理論については特定の Calabi–Yau 多様体上の位相的弦理論の分配関数に一致する。本講演では、楕円曲線型 Seiberg–Witten 曲線の山田–梁による分類について述べた後、分配関数をもっとも一般的な 6次元 E_8 型理論について構成する試みについて紹介する。

1. Seiberg–Witten 解と Seiberg–Witten 曲線

素粒子物理学の記述に用いられる 4次元ゲージ理論は、相互作用のある場の量子論であり、一般には物理量を厳密に解き表すことは困難である。しかしながら理論に超対称性がある場合には、ごく一部の物理量については量子論的に厳密かつ解析的な形の結果が得られることが分かっている。そのよく知られた例として、Seiberg–Witten による 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の真空構造の厳密解がある。4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の真空（基底状態）は一点ではなく、連続的な広がりをもつモジュライ空間を形成している。Seiberg–Witten 解は、このモジュライ空間の計量や、真空近辺の励起状態のダイナミクスを記述する「低エネルギー有効作用」を与えるものである。この計量も有効作用も、本質的にはプレポテンシャルと呼ばれる一つの解析関数で書き表せる。とりあえず一言で述べるならば、Seiberg–Witten 解を求めることは、与えられたゲージ理論に対してプレポテンシャルを決定することである。

Seiberg–Witten は以下のように巧妙にプレポテンシャルを構成した [1]。例として、彼らが最初に議論した 4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称 $SU(2)$ ゲージ理論で物質場のない場合を考える。この場合、モジュライ空間は複素 1次元の Riemann 球面となっている。この Riemann 球面の複素座標を u で表そう。Seiberg–Witten の方法では、プレポテンシャル $F_0(a)$ はその一階微分

$$a_D := \frac{\partial F_0}{\partial a} \quad (1)$$

本研究は科研費（課題番号:22740172, 23540290）の助成を受けたものである。

キーワード：位相的弦理論, Seiberg–Witten 理論, 有理楕円曲面, Jacobi 形式

* 〒 606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学基礎物理学研究所

e-mail: ksakai@yukawa.kyoto-u.ac.jp

と独立変数 a 自身のモジュライ空間上での振舞から決定される。具体的には、 $a(u)$ と $a_D(u)$ はそれぞれモジュライ空間上の解析関数であり、その u 依存性は

$$\partial_u a(u) = \oint_{\alpha} \frac{dx}{y}, \quad \partial_u a_D(u) = \oint_{\beta} \frac{dx}{y} \quad (2)$$

で与えられる。ここで右辺は次の楕円曲線

$$y^2 = x^3 - ux^2 + \frac{1}{4}\Lambda^4 x \quad (3)$$

の二つの基本 1 サイクル α, β に沿った周期積分を表している。 Λ は理論に質量次元を与えるパラメータである。理論に応じて決まるこの楕円曲線は Seiberg–Witten 曲線と呼ばれる。(一般には Seiberg–Witten 曲線は楕円曲線とは限らず、例えば物質場なしの $SU(N)$ ゲージ理論では種数 $N-1$ の超楕円曲線となる。) つまり、 u でパラメトライズされるモジュライ空間 ($u = \infty$ を含む Riemann 球面) の各点上で Seiberg–Witten 曲線が与えられると、 $a(u), a_D(u)$ の u 依存性が定まり、パラメータ u を消去すると $a_D = \partial_a F_0$ の a 依存性、すなわちプレポテンシャルの形が定まるという仕組みである。(積分定数は適宜決定する。)

1 サイクル α, β の取り方は一意的ではない。例えば α サイクルと β サイクルの取り方を交換して a と a_D の役割を入れ替えると、別の関数形のプレポテンシャルが得られる。元のプレポテンシャルと交換後のプレポテンシャルは、それぞれ同じ理論の電気的な記述と磁気的な記述に対応している。(今の例では $SL(2, \mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(4)$ で写される分だけの等価な記述がある。) むしろ、ひとつひとつのプレポテンシャルはモジュライ空間の局所的な領域で成り立つ記述を与えるに過ぎず、適宜別のサイクルの選び方に移ることによって初めて、モジュライ空間全体で低エネルギー有効理論を記述することができる。

このように、モジュライ空間の大域的な構造の把握にはプレポテンシャルよりも Seiberg–Witten 曲線の方が適している。Seiberg–Witten 曲線はモジュライ空間の特異点の情報および a, a_D が受けるモノドロミの情報を含んでいる。上の例ではモジュライ空間上には $u = \infty, \Lambda^2, -\Lambda^2$ の 3 つの特異点があり、そこでは楕円曲線が退化する。また、例えば $u = \infty$ の特異点を一回りするとき、 a, a_D が受けるモノドロミは

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \quad (4)$$

となっている。これら特異点やモノドロミの情報は全て、Seiberg–Witten 曲線 (変数 x, y の適当なシフトや定数倍によって) Weierstrass 標準形

$$y^2 = 4x^3 - f(u)x - g(u) \quad (5)$$

f の位数	g の位数	D の位数	ファイバーの型	モノドロミ
≥ 0	≥ 0	0	\emptyset (非退化)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
0	0	n	I_n	$\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
≥ 1	1	2	II	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
1	≥ 2	3	III	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
≥ 2	2	4	IV	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
2	≥ 3	$n+6$	I_n^*	$\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
≥ 2	3	$n+6$	I_n^*	$\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
≥ 3	4	8	IV^*	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3	≥ 5	9	III^*	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
≥ 4	5	10	II^*	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

表 1: 楕円ファイバーの退化の小平分類とモノドロミ行列

に表したときの係数多項式 $f(u)$, $g(u)$ の形から読み取ることができる。特異点の位置は、楕円曲線の discriminant

$$D(u) := f(u)^3 - 27g(u)^2 \quad (6)$$

の零点によって与えられる。さらに各々の零点での $f(u)$, $g(u)$, $D(u)$ の位数からモノドロミを読み取ることができる。今の例のようにモジュライ空間が Riemann 球すなわち 1次元複素射影空間 \mathbb{P}^1 の場合、Seiberg–Witten 曲線はいつでも楕円曲線であり、これは \mathbb{P}^1 上の楕円ファイバー束を記述している。この場合、楕円ファイバーの退化の仕方については小平によって完全に分類がなされており、退化の型に対応してモノドロミ行列が決まっている(表1)。このように、Seiberg–Witten 曲線が分かるとそこからプレポテンシャルを構成できるだけでなく、モジュライ空間の構造を容易に読み取ることができる。その意味で Seiberg–Witten 曲線は Seiberg–Witten 解の本質をとらえているといえる。

2. モジュライ空間が \mathbb{P}^1 の Seiberg–Witten 解の分類

さて、ここまで一番基本的な物質場なしの4次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称 SU(2) ゲージ理論の例を見てきたが、他の理論についてはどうだろうか? Seiberg–Witten は物質場を加えた場合についても Seiberg–Witten 曲線を求めている [2]。これらの理論では物質場の質量がパラメータとして入ってくるため、Seiberg–Witten 曲線も質量に依存した形となる。このため、(場の構成内容が) 同じ理論を扱っていても、質量の違いによって Seiberg–Witten 曲線の形が変化する。

それでは、理論が異なる場合、その違いは Seiberg–Witten 曲線のどこに現れるのだろうか。それぞれの理論は、モジュライ空間上で u が有限の範囲にある特異点の数と種

類により特徴づけられている。質量を変化させるとこれらの特異点の位置は変化するが、これらの特異点全体を囲んで一周するときのモノドロミは不変である。今、モジュライ空間は Riemann 球面として閉じているとすると、上述のモノドロミは $u = \infty$ 周りのモノドロミと言い換えることができる。つまるところ、理論の違いは $u = \infty$ におけるモノドロミの違いとして現れる。逆に言えば、 $u = \infty$ におけるモノドロミによって、Seiberg–Witten 解を持つ理論を分類できることになる。

ところで、Seiberg–Witten 曲線による楕円ファイバー束のコンパクト化を適切に指定することで、 $u = \infty$ の特異点も discriminant の零点とみなすことができる。このとき、 $u = \infty$ でも表 1 にあるファイバー退化の型とモノドロミの対応が成り立つようにしたい。これは、全ての楕円曲線型の Seiberg–Witten 曲線は係数関数が

$$f = \sum_{j=0}^4 a_j u^{4-j}, \quad g = \sum_{j=0}^6 b_j u^{6-j} \quad (7)$$

の形で与えられるものの特殊な場合である、とみなすことで実現される。 a_j, b_j は一般に物質場の質量等のパラメータの関数となっている。 a_j, b_j の値が一般のとき、上の形の $f(u), g(u)$ を係数関数とする楕円曲線は、有理楕円曲面の楕円ファイバー束構造を与えている。様々な理論の Seiberg–Witten 曲線は、有理楕円曲面が $u = \infty$ で何らかの特異ファイバーを持っている場合を記述している、とすることができる。ちなみに楕円 K3 曲面の楕円ファイバー束構造は Weierstrass 標準形で $f(u), g(u)$ がそれぞれ 8 次、12 次の多項式の場合で与えられる。これとの比較で、有理楕円曲面は弦理論の文脈ではしばしば $\frac{1}{2}$ K3 曲面と呼ばれている。

以上の考察に基づいて、山田–梁は (5), (7) の形を持つ Seiberg–Witten 曲線の型を分類した [3]。以下では山田–梁の分類を少しアレンジした形で紹介する。(5), (7) の形を持つ Seiberg–Witten 曲線の可能な退化の型を分類したものが図 1 である。 $u = \infty$ でこのような退化をする Seiberg–Witten 曲線の (質量依存性を含めた) 具体形は全て知られており、対応する場の理論も分かっている。これらの理論の分類は図 2 で与えられる。図中の記号はそれぞれの理論が持つフレーバー対称性の Lie 代数を表している。 (A_0, D_0, \tilde{E}_0) は Lie 代数としての意味を持たないため、記号はあくまでも便宜的なものである。) ここで言うフレーバー対称性は、理論が持つ大域的対称性のうち全ての理論に共通する Lorentz 対称性や超対称性を除いたもので、おおまか言えば物質場を混ぜ合わせる変換の下での対称性である。4 次元 $\mathcal{N} = 2$ SU(2) ゲージ理論で基本表現に値をとる物質場を N_f 個加えた場合、SO($2N_f$) のフレーバー対称性がある。これらは図 2 の D_{N_f} にそれぞれ対応している。

興味深いことに、4 次元ゲージ理論を調べているだけではモノドロミが示唆する Seiberg–Witten 解は全て出てこない。5,6 次元の理論も含めることで初めて分類が完

時空	SW 曲線の質量依存性	フレーバー対称性に関する不変量
4次元 (\mathbb{R}^4)	多項式的	Casimir 不変量
5次元 ($\mathbb{R}^4 \times S^1$)	三角関数的	指標
6次元 ($\mathbb{R}^4 \times T^2$)	楕円関数的	Weyl 群不変な Jacobi 形式

表 2: Seiberg–Witten 曲線の質量依存性

Seiberg–Witten 曲線の質量依存性の違いとしても現れる。5次元方向、あるいは5,6次元方向が周期的に同一視されている場合、物質場の質量はそれぞれ一重、二重の周期性を持つ。このため質量は、4次元は多項式的、5次元では三角関数的、6次元では楕円関数的に現れる。さらにプレポテンシャルはフレーバー対称性不変であるから、質量には必ずフレーバー対称性の不変量となる組み合わせを通して依存する。このため Seiberg–Witten 曲線もそのような不変量を用いて表すのが何かと便利である。具体的には、フレーバー対称性の Lie 代数に付随した Weyl 群の作用の下で不変な組み合わせを用いればよい。また6次元理論の場合は、複素化されたゲージ結合定数の古典極限での値 τ に関するモジュラー不変性も現れる。以上を考慮すると、質量の組み合わせとして4次元の場合 Casimir 不変量、5次元の場合 Lie 群の指標、6次元の場合 Weyl 群の作用で不変な Jacobi 形式を用いることで、対称性を明示的に表すことができる。まとめると表2のようになる。

3. 6次元 E_8 型理論の Seiberg–Witten 曲線の具体形

前節で分類した理論の Seiberg–Witten 曲線は、全て6次元 E_8 型理論の Seiberg–Witten 曲線 [4,5] の特殊な極限として得られる。したがって6次元 E_8 型理論の Seiberg–Witten 解を調べておけば、他の理論の結果はそこから簡単に再現できると考えられる。6次元 E_8 型理論の Seiberg–Witten 曲線は Weierstrass 標準形 (5) に表したとき、係数 $f(u)$, $g(u)$ としてそれぞれ一般の4次、6次の多項式を持つ。これらを (7) のように表すと、係数 a_j , b_j は物質場の質量 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_8)$ および複素化されたゲージ結合定数の古典極限での値 τ の関数となる。これらは前節の最後で述べたように、 E_8 の Weyl 群 $W(E_8)$ で不変な Jacobi 形式を用いて表すことができる。

$W(E_8)$ 不変な Jacobi 形式の生成子は以下のように構成できる [6]。まず、 E_8 のルート格子 Γ^8 から定義されるテータ関数

$$\Theta(\tau, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{\boldsymbol{w} \in \Gamma^8} \exp(\pi i \tau \boldsymbol{w}^2 + 2\pi i \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \prod_{j=1}^8 \vartheta_k(\mu_j, \tau) \quad (8)$$

を導入しよう。これ自体が Jacobi 形式になっていることは簡単に確かめられる。Seiberg–Witten 曲線に現れる $W(E_8)$ 不変な Jacobi 形式は9個の独立な生成子から構成できる。

これらの生成子は次のように選ぶことができる：

$$\begin{aligned}
A_1(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \Theta(\tau, \boldsymbol{\mu}), & A_2(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{8}{9} \mathcal{H}\{\Theta(2\tau, 2\boldsymbol{\mu})\}, & A_3(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{27}{28} \mathcal{H}\{\Theta(3\tau, 3\boldsymbol{\mu})\}, \\
A_4(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \Theta(\tau, 2\boldsymbol{\mu}), & A_5(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{125}{126} \mathcal{H}\{\Theta(5\tau, 5\boldsymbol{\mu})\}, \\
B_2(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{32}{5} \mathcal{H}\{e_1(\tau)\Theta(2\tau, 2\boldsymbol{\mu})\}, & B_3(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{81}{80} \mathcal{H}\{h(\tau)^2\Theta(3\tau, 3\boldsymbol{\mu})\}, \\
B_4(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{16}{15} \mathcal{H}\{\vartheta_4(2\tau)^4\Theta(4\tau, 4\boldsymbol{\mu})\}, & B_6(\tau, \boldsymbol{\mu}) &= \frac{9}{10} \mathcal{H}\{h(\tau)^2\Theta(6\tau, 6\boldsymbol{\mu})\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで $\mathcal{H}\{\cdot\}$ は、中身の $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ 変換のうち相異なるもの全てについての和を表しており、全体として $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ 不変量となっている。また関数 $e_1(\tau)$, $h(\tau)$ は

$$e_1(\tau) := \frac{1}{12} (\vartheta_3(0, \tau)^4 + \vartheta_4(0, \tau)^4), \quad h(\tau) := \vartheta_3(0, 2\tau)\vartheta_3(0, 6\tau) + \vartheta_2(0, 2\tau)\vartheta_2(0, 6\tau) \tag{10}$$

で与えられる。 A_n, B_n はそれぞれウェイト 4, 6、指数 n の Jacobi 形式となっている。これらの生成子の規格化は

$$A_n(\tau, \mathbf{0}) = E_4(\tau) \quad B_n(\tau, \mathbf{0}) = E_6(\tau) \tag{11}$$

となるように決めてある。ここで $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ は Eisenstein 関数である。

Seiberg–Witten 曲線の係数 a_j, b_j は、上で導入した $W(E_8)$ 不変 Jacobi 形式の生成子と $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ および $\Delta(\tau) := \eta(\tau)^{24} = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{12} E_4, & a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{6}{E_4 \Delta} (-E_4 A_2 + A_1^2), & \dots \\
b_0 &= \frac{1}{216} E_6, & b_1 &= -\frac{4}{E_4} A_1, & b_2 &= \frac{5}{6 E_4^2 \Delta} (E_4^2 B_2 - E_6 A_1^2), & \dots
\end{aligned}$$

ここではその一部のみを示したが、全ての係数の具体的な表式も全体で A4 用紙 1 ページ程度の分量で書ける。

パラメータ τ および $\boldsymbol{\mu}$ には以下のような幾何学的な意味がある [7]。これらは物理的には古典極限でのゲージ結合定数および物質場の質量であった。Seiberg–Witten 理論において、古典極限に対応する真空はモジュライ空間上の $u = \infty$ に位置する。これに対応して、 $\tau, \boldsymbol{\mu}$ は $u = \infty$ での楕円ファイバー上で特徴づけられる。一般に Seiberg–Witten 曲線の複素構造モジュラスは複素化されたゲージ結合定数を表しており、 τ はその $u = \infty$ での値に対応している。また、一般の有理楕円曲面の楕円ファイバー束は 240 個の正則切断を持つ。この正則切断は E_8 のルート α_j ($j = 1, \dots, 240$) と対応している。 $u = \infty$ での楕円曲線を Weierstrass \wp 関数を用いた標準的な写像で基本領域 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ に写したとき、上述の正則切断がこの基本領域上でとる値が $\alpha_j \cdot \boldsymbol{\mu}$ となっている。

4. Nekrasov 分配関数と位相的弦理論

Seiberg–Witten は代数曲線からプレポテンシャルを構成する方法を与えたが、2002 年 Nekrasov は局所化の方法を用いてインスタントンモジュライ空間の体積積分を直接評

値し、プレポテンシャルを陽に表す公式を見出した [8]。例えば、物質場なしの4次元 $\mathcal{N} = 2$ SU(N) ゲージ理論の場合、Nekrasov 分配関数は

$$Z = \sum_{R_1, \dots, R_N} \Lambda^{|R_1| + \dots + |R_N|} \prod_{i,j=1}^N \prod_{k,l=1}^{\infty} \frac{a_{ij} + \hbar(\mu_{i,k} - \mu_{j,l} + l - k)}{a_{ij} + \hbar(l - k)} \quad (12)$$

で与えられる。ここで R_k は整数列

$$\mu_{k,1} \geq \mu_{k,2} \geq \dots \geq \mu_{k,d(R_k)} > 0, \quad \mu_{k,d(R_k)+1} = \mu_{k,d(R_k)+2} = \dots = 0 \quad (13)$$

から成る分割 (Young 図) であり、 $|R_k|$ は $\mu_{k,i}$ の総和 (Young 図を構成する箱の総数) である。 $a_{ij} := a_i - a_j$ であり、SU(2) ゲージ理論の場合独立なものは $a := a_{12} = -a_{21}$ ひとつとなっている。Nekrasov の分配関数はモジュライ空間の古典極限特異点 (SU(2) ゲージ理論の場合 $u = \infty$ の特異点) まわりの領域でのプレポテンシャルを与える。具体的には、自由エネルギー $\ln Z$ を \hbar で展開すると

$$\ln Z = \sum_{g=0}^{\infty} F_g \hbar^{2g-2} \quad (14)$$

という形をとり、プレポテンシャルはその最低次の係数 F_0 で与えられる。

Nekrasov 分配関数には5次元理論への拡張がある。また4次元、5次元のSU(N) ゲージ理論それぞれにおいて $2N$ 個以下の基本表現物質場を加えた場合についても、Nekrasov 分配関数の具体形が与えられている [8]。これは前節で分類した理論の範囲で言えば、 D_{N_f} および E_{N_f+1} の系列で $0 \leq N_f \leq 4$ の場合である。

さて、Nekrasov 分配関数を (14) のように展開するとき、実はプレポテンシャル F_0 だけでなく F_g ($g \geq 1$) にも物理的な意味がある。 F_g は、考えているゲージ理論に重力を結合させたときに、低エネルギー有効作用の重力補正項の係数として現れる。さらに、5次元SU(N) ゲージ理論の場合には、 F_g ($g \geq 0$) は特定の Calabi-Yau 多様体上を標的とする種数 g の A モデル位相的弦振幅に一致することが知られている [9, 10]。SU(2) ゲージ理論の場合、この Calabi-Yau 多様体は局所 del Pezzo 曲面と呼ばれるもので与えられる。局所 del Pezzo 曲面とは、複素2次元の del Pezzo 曲面の反標準束の全体空間として定義される3次元 Calabi-Yau 多様体である。大雑把には、del Pezzo 曲面を因子として含むようなノンコンパクト3次元 Calabi-Yau 多様体のことである。Del Pezzo 曲面とは第一 Chern 類が正の代数曲面である。Nekrasov 分配関数の具体形が知られている E_{N_f+1} ($0 \leq N_f \leq 4$) の理論に対応する del Pezzo 曲面は、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を N_f 点ブローアップすることで得られるものとなっている。

実は5,6次元の E_n 型の理論と del Pezzo 曲面との対応は上の範囲にとどまらず一般に成り立っており、図2の5,6次元部分と図3にある del Pezzo 曲面の分類とが綺麗に対応

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{2}\text{K3} \\
\downarrow \\
\mathcal{B}_8 \rightarrow \mathcal{B}_7 \rightarrow \mathcal{B}_6 \rightarrow \mathcal{B}_5 \rightarrow \mathcal{B}_4 \rightarrow \mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}_2 \rightarrow \begin{array}{l} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_0 \end{array} \rightarrow \mathbb{P}^2
\end{array}$$

図 3: 有理楕円曲面 ($\frac{1}{2}\text{K3}$) と del Pezzo 曲面 (下段)

する。del Pezzo 曲面は \mathbb{P}^2 あるいは $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のブローアップにより得られ、図3の下段にあるだけの種類がある (\mathbb{F}_n は度数 n の Hirzebruch 曲面)。さらに有理楕円曲面も \mathbb{P}^2 の (特別な) 9点のブローアップで得られ、しばしば del Pezzo 曲面と同列に扱うことができる。弦理論では、上述の5,6次元の E_n 型理論と del Pezzo 曲面の間の対応に次のような明快な説明がついている。5次元の E_n 型理論は、11次元 M理論を局所 \mathcal{B}_n にコンパクト化することで得られる。また $\mathbb{R}^5 \times S^1$ 上の6次元 E_8 型理論も、M理論を局所 $\frac{1}{2}\text{K3}$ にコンパクト化することで得られるのである [11]。

以上の事実を総合すると、次のような考えに思い至る。図2で分類した全ての理論について、Seiberg–Witten 曲線の具体形が知られており、そこからプレポテンシャル F_0 を構成することができる。それでは F_g ($g \geq 1$) やその生成母関数である $Z = \exp(\sum_{g=0}^{\infty} F_g h^{2g-2})$ についても、図2の全ての理論について構成することはできないだろうか？実際に D_{N_f} ($0 \leq N_f \leq 4$) および E_{N_f+1} ($0 \leq N_f \leq 4$) の場合には既知の Nekrasov 分配関数によって ($u = \infty$ まわりでの) 具体形が分かっている。また5,6次元の理論については、位相的弦振幅としての一般的な定義が得られている。

5,6次元の理論で Nekrasov 分配関数が構成できている範囲は、対応する局所 del Pezzo 曲面がトーリック Calabi–Yau 多様体になる場合にあたる。トーリック Calabi–Yau 多様体上の位相的弦振幅については研究が進んでおり、topological vertex の手法 [12] を用いて分配関数 Z を具体的に構成したり topological recursion の手法 [13, 14] を用いて F_g を逐次的に構成することが可能である。また topological vertex の拡張として、ruled vertex 形式が提案されており [15]、これを用いると5次元の E_6, E_7, E_8 理論についても Z を陽に書き表すことができる [16] ([17] も参照)。しかしながら、ruled vertex 形式による表式は複雑でフレーバー対称性も明示的でなく、現状ではあまり使い勝手のよいものではない。また6次元 E_8 理論については、現在のところ topological vertex や topological recursion といった系統的な手法が適用できない。このあたりをもう少し具体的かつ統一的に理解したいというのが筆者の研究動機である。(主な先行研究として [11, 18, 19] などがある。)

5. 位相的弦振幅と保型性

6次元 E_8 型理論の F_g 、すなわち局所 $\frac{1}{2}K3$ を標的とする種数 g の位相的弦振幅を構成する現実的な方法として現在唯一適用可能なのは、正則アノマリー方程式を解く方法である。この方法は一般の種数 g での位相的弦振幅 F_g を求める方法として、あらゆる Calabi–Yau 多様体の場合に適用できる強力なものである。正則アノマリー方程式は 1993 年に Bershadsky–Cecotti–大栗–Vafa により導かれたもので、

$$\bar{\partial}_i F_g = \frac{1}{2} \bar{C}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} e^{2K} G^{j\bar{j}} G^{k\bar{k}} \left(D_j D_k F_{g-1} + \sum_{h=1}^{g-1} D_j F_h D_k F_{g-h} \right) \quad (15)$$

と書かれる [20]。ここでは記号の意味を詳しく説明しないが、要は F_g の反正則なモジュライ依存性が、微分方程式の形で g についての漸化式として定まっている。この方程式自体は 20 年近く知られているものだが、近年この方程式を解く方法に進展があった。以下ではその流れを簡単に説明した後、6次元 E_8 理論の Seiberg–Witten 曲線を用いて低次の F_g を構成した結果を紹介する。

2004 年山口–Yau は、代表的なコンパクト Calabi–Yau 多様体として知られる \mathbb{P}^4 内 5 次超曲面を例に、 F_g が (g によらない) 有限個の生成子の多項式として書けることを示した [21]。また 2006 年 Aganagic–Bouchard–Klemm は、Calabi–Yau 多様体の周期が受けるモノドロミにより生成される群による対称性により、一般に F_g は準保型形式の構造を持つことを指摘した [22]。保型性は F_g を構成する有限個の生成子の同定を容易にする他、以下で説明するように正則アノマリー方程式を解く際の助けとなる。

位相的弦振幅にはいくつかの定義の仕方があるが、2次元 $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論からのツイストによる定義では、位相的弦振幅はモジュライパラメータの完全な正則関数にはならず、反正則な依存性を含む。この依存性を統制しているのが正則アノマリー方程式である。実はこの正則性の破れと上述の準保型形式の保型性の破れとは表裏の関係にある。¹ これを一番簡単な保型形式であるモジュラー形式の例で見てみよう。モジュラー形式は Eisenstein 関数 $E_4(\tau)$, $E_6(\tau)$ の多項式で書けるのに対し、準モジュラー形式はこれらと $E_2(\tau)$ の多項式で書かれる。 $E_2(\tau)$ は完全なモジュラー形式ではなく、 S 変換の下で

$$E_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 \left(E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i \tau} \right) \quad (16)$$

と変換する。しかしながら次の非正則関数

$$\hat{E}_2(\tau, \bar{\tau}) := E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i(\tau - \bar{\tau})} \quad (17)$$

¹ Aganagic–Bouchard–Klemm の前から、位相的弦振幅がモジュライパラメータについての保型形式になる例は知られており、その場合の正則性の破れと保型性の破れの関係は早くから指摘されていた。

を考えると、これはS変換の下で

$$\hat{E}_2\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = \tau^2 \hat{E}_2(\tau, \bar{\tau}) \quad (18)$$

となり、ウェイト2のモジュラー形式として変換する。さて、 F_g が準モジュラー形式となるような例において、 $E_2(\tau)$ を $\hat{E}_2(\tau, \bar{\tau})$ で置き換えておくと、 $\bar{\tau}$ による反正則な依存性がちょうど位相的弦振幅の反正則依存性を表すようになっている。従ってこのような例では正則アノマリー方程式は、モジュラーアノマリー方程式すなわち E_2 依存性を統制する方程式として書き直すことができる。正則アノマリー方程式は(15)のように反正則パラメータについて微分方程式となっているが、これを E_2 微分の形にしておくと、 F_g は E_2 の多項式に書けることを知っているので容易に積分することができる。このような方法で正則アノマリー方程式を解く方法は2007年Grimm-Klemm-Mariño-Weissにより提唱され、正則アノマリー方程式の直接積分法と呼ばれている [24]。

この方法の弱点としては、正則アノマリー方程式が微分方程式であるため、解くたびに未定の積分定数 (holomorphic ambiguity) が生じることである。(反正則パラメータに対して「定数」であり、一般には正則なパラメータについての関数である。)これを定める方法として、代表的なものがいくつか知られている。例えば、最も単純な非コンパクト Calabi-Yau 多様体の例であるコニフォールドについては F_g が全ての g について完全に分かっているため、考えている Calabi-Yau 多様体がコニフォールドに近づくようなモジュライ空間の特異点まわりで積分定数を決める、などの方法がある。

以上の発展を参考にすると、6次元 E_8 理論の F_g 、すなわち局所 $\frac{1}{2}K3$ 上の位相的弦振幅を(少なくとも種数 g の小さい範囲では)具体的に構成することができる。まずその準備を行う。Weierstrass表示の楕円曲線(5)上の点 (x, y) とトーラス基本領域 $\mathbb{C}/(2\pi\omega\mathbb{Z} + 2\pi\omega\bar{\tau}\mathbb{Z})$ 上の点 z は、Weierstrass \wp 関数による標準的な写像

$$x = \wp(z; 2\pi\omega, 2\pi\omega\bar{\tau}), \quad y = \partial_z \wp(z; 2\pi\omega, 2\pi\omega\bar{\tau}) \quad (19)$$

によって一対一に対応する。この写像において楕円曲線(5)の係数 f, g と、トーラスの周期 $2\pi\omega$ と複素構造モジュラス $\bar{\tau}$ とは

$$f = \frac{1}{12} \frac{\tilde{E}_4}{\omega^4}, \quad g = \frac{1}{216} \frac{\tilde{E}_6}{\omega^6} \quad (20)$$

と関係づいている。ここで $\tilde{E}_{2n} := E_{2n}(\bar{\tau})$ という省略表記を導入した。我々はSeiberg-Witten曲線の具体形を知っているので、これらの関係を $\omega, \bar{\tau}$ について解くことで、プレポテンシャルの変数

$$\phi := - \int \omega du \quad (21)$$

およびプレポテンシャル

$$\frac{\partial^2 F_0}{\partial \phi^2} = -2\pi i(\tilde{\tau} - \tau) =: -t \quad (22)$$

を具体的に求めることができる。(これら二つの式は若干の規格化や積分定数の違いを除けば(1), (2)を書き直しているだけである。また慣習上、これまで a と書いていたものを以下では ϕ と表す。)

さて、局所 $\frac{1}{2}$ K3 上の位相的弦振幅の正則アノマリ方程式は、原理的には(15)から導出できるが、細野-齋藤-高橋による以下のような具体形 [23]

$$24\partial_{E_2} F_g = \partial_\phi^2 F_{g-1} + \partial_\phi F_{g-1} + \sum_{h=0}^g \partial_\phi F_h \partial_\phi F_{g-h} \quad (23)$$

が知られているのでこれを活用する。積分定数(holomorphic ambiguity)を決める条件については、 $\frac{1}{2}$ K3 中の正則曲線の存在条件を使うことができる [11]。この条件は F_g の種数 g による和が

$$\sum_{g=0}^{\infty} F_g \hbar^{2g-2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\phi} \left(\frac{1}{n(2 \sin \frac{n\hbar}{2})^2} + \mathcal{O}(q^n) \right), \quad q := e^{2\pi i \tau} \quad (24)$$

という展開形を持つという条件に表され、これを用いると少なくとも g の小さい範囲では F_g を完全に決定することができる。結果として

$$F_1 = \frac{1}{2} \ln \omega - \frac{1}{12} \ln \tilde{\Delta} + \frac{1}{12} \ln \Delta - \frac{1}{2} \phi, \quad (25)$$

$$F_2 = \frac{1}{48} \tilde{E}_2 \partial_\phi^2 \ln \omega + \frac{1}{96} \tilde{E}_2 (\partial_\phi \ln \omega)^2 - \frac{1}{576} (\tilde{E}_2^2 - \tilde{E}_4) \partial_\phi t \partial_\phi \ln \omega \\ - \frac{1}{1920} (5\tilde{E}_2^2 + 3\tilde{E}_4) \partial_\phi^2 t - \frac{1}{207360} (35\tilde{E}_2^3 + 51\tilde{E}_4 \tilde{E}_2 - 86\tilde{E}_6) (\partial_\phi t)^2 - \frac{1}{96} E_2 \quad (26)$$

などの具体形が得られる [6]。

上の $\omega, \tilde{\tau}$ を用いた表式に比べ若干長めになるが、 F_g ($g \geq 2$) については Seiberg-Witten 曲線の係数 $f(u), g(u)$ とその u 微分を用いて表すことで、構造がより明快になる。具体的には、 $\mathcal{F}_g := F_g$ ($g \geq 3$), $\mathcal{F}_2 := F_2 + \frac{1}{96} E_2$ とするとき

$$\mathcal{F}_g = \frac{1}{D^{2g-2}} \sum_{k=0}^{3g-3} P_{g,k} [\partial_u^{2g-2}, f, g] \left(\frac{\tilde{E}_2}{\omega^2} \right)^k \quad (27)$$

という構造をとることが種数 $g = 2, 3$ で確かめられており、一般の種数でも成り立つと予想される [6]。ここで $P_{g,k} [\partial_u^{2g-2}, f, g]$ は $f(u), g(u)$ とその u 微分についての多項式であり、それぞれの項に合計 $2g - 2$ 次の u 微分が含まれる。 F_g が指数0の Jacobi 形式として振る舞うことから、 $P_{g,k} [\partial_u^{2g-2}, f, g]$ を構成する可能な項の数は有限個に定まる。各項の係数は正則アノマリ方程式(23)および(24)などの条件を用いて決定される。

以上、6次元 E_8 型理論の場合について F_g の具体的な構成を紹介した。実は上の表式で代わりに図2で分類した5次元理論の Seiberg–Witten 曲線を用いると、これはそのまま5次元理論について F_g を与える式となっている。(4次元理論についてはそうならず、適当な極限操作をとる必要があると考えられる。) この意味で、図2で分類される理論における F_g の統一的な理解がある程度達成できたと考えている。一方で、最終的にはやはり6次元 E_8 型理論の場合についても F_g の全種数和としての分配関数を構成したい。それが Nekrasov の分配関数のような単純な美しい形に書けるかどうか定かではないが、今後もう少し調べてみたいと考えている。

参考文献

- [1] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19-52. [hep-th/9407087].
- [2] N. Seiberg, E. Witten, Nucl. Phys. **B431** (1994) 484-550. [hep-th/9408099].
- [3] Y. Yamada, S. -K. Yang, Nucl. Phys. **B566** (2000) 642-660. [hep-th/9907134].
- [4] O. J. Ganor, D. R. Morrison, N. Seiberg, Nucl. Phys. **B487** (1997) 93-127. [hep-th/9610251].
- [5] T. Eguchi, K. Sakai, JHEP **0205** (2002) 058. [hep-th/0203025].
- [6] K. Sakai, arXiv:1111.3967 [hep-th].
- [7] T. Eguchi, K. Sakai, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 419-455. [hep-th/0211213].
- [8] N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 831-864. [hep-th/0206161].
- [9] A. Iqbal, A. -K. Kashani-Poor, Adv. Theor. Math. Phys. **10** (2006) 1-32. [hep-th/0306032].
- [10] T. Eguchi, H. Kanno, JHEP **0312** (2003) 006. [hep-th/0310235].
- [11] J. A. Minahan, D. Nemeschansky, C. Vafa, N. P. Warner, Nucl. Phys. **B527** (1998) 581-623. [hep-th/9802168].
- [12] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino, C. Vafa, Commun. Math. Phys. **254** (2005) 425-478. [hep-th/0305132].
- [13] B. Eynard, N. Orantin, [math-ph/0702045].
- [14] V. Bouchard, A. Klemm, M. Marino, S. Pasquetti, Commun. Math. Phys. **287** (2009) 117-178. [arXiv:0709.1453 [hep-th]].
- [15] D. -E. Diaconescu, B. Florea, N. Saulina, Commun. Math. Phys. **265** (2006) 201-226. [hep-th/0505192].
- [16] D. -E. Diaconescu, B. Florea, JHEP **0612** (2006) 028. [hep-th/0507240].
- [17] Y. Konishi, S. Minabe, [math/0607187 [math-ag]].
- [18] K. Mohri, Rev. Math. Phys. **14** (2002) 913-975. [hep-th/0110121].
- [19] S. Hosono, [hep-th/0206206].
- [20] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa, Commun. Math. Phys. **165** (1994) 311-428. [hep-th/9309140].
- [21] S. Yamaguchi, S. -T. Yau, JHEP **0407** (2004) 047. [hep-th/0406078].
- [22] M. Aganagic, V. Bouchard, A. Klemm, Commun. Math. Phys. **277** (2008) 771-819. [hep-th/0607100].
- [23] S. Hosono, M. H. Saito, A. Takahashi, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999) 177-208. [hep-th/9901151].
- [24] T. W. Grimm, A. Klemm, M. Marino, M. Weiss, JHEP **0708** (2007) 058. [hep-th/0702187].