日本数学会

2013年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2013年9月

於　愛媛大学

日本数学会

2013年度秋季総合分科会

無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト

2013年9月

於　愛媛大学

無 限 可 積 分 系

9月24日(火)　第IX会場

9月25日(水)　第IX会場

9:30〜12:00

13:00〜14:00　特別講演

p進数体を用いた有限体上の可積分系の構成

Constructing the integrable systems over finite fields using the field of p-adic numbers

神吉　雅崇　(東大数理)*1
時弘　哲治　(東大数理)*2
間田　潤　　(日大生産工)*3

概　要

本講演では、離散可積分系を有限体上で時間発展させる手法について議論する。有限体上の系に特有の不定性を解消する目的で、初期値空間の拡張を行う。方程式を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ 上で定義しておき、得られた時間発展を有限体 $\mathbb{F}_p(\cup\{\infty\})$ 上へ射影する手法を紹介する。本手法は数論力学系における good reduction（良い還元）の概念 [1] を拡張したものである。離散力学系において、p 進数体上の時間発展と、有限体上の時間発展とがある可換図式を形成することが、その系の可積分性判定基準として利用できる [2]。この可換性は離散 Painlevé 方程式に対しては特異点閉じ込め手法の p 進的類似であることを説明する [3]。ソリトン系への応用についての現状と予想についても述べる。

1. 研究の目的と先行結果

本研究の目的は、離散力学系を有限体上で定義するとともにその可積分性や解の性質を調べることである。「有限体上の離散系」の研究は、離散系とセルオートマトンをつなぐ理論として注目されている。同種の理論として超離散化があり、その関連についても興味が持たれている。一般に有限体上の方程式は、多くの初期値に対して $0/0$ 等の不定性を生じるため、定義が困難である。また、有限個の点間の遷移に過ぎない力学系が「可積分」であることをどう意味づけるかという問題は未解決である。先行結果としては、双線形形式など除算がない式における議論、定義域を制限することによって不定性を解消する議論がある。

2. 得られた結果

本講演では定義域を拡張することによる定義を紹介する。定義域の拡張に関しては、特に離散 Painlevé 方程式に対しては、坂井理論による双有理拡張が有名である。今回は異なる手法として p 進数体への拡張について解説する。与えられた離散方程式を $\mathbb{Q}_p$ 上で定義することは形式的には $\mathbb{C}$ 上で定義することと同様にできる。得られた結果を次の写像によって $\mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ 上へ還元することで有限体上の時間発展を構成する。

$$\pi : \mathbb{Z}_p \ni x \mapsto \pi(x) \in \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{F}_p,$$

本研究は科研費 24・1379 の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 34M55, 37P25
キーワード：Integrability, p-adic numbers, discrete dynamical system

*1 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: kanki@ms.u-tokyo.ac.jp
*2 e-mail: toki@ms.u-tokyo.ac.jp
*3 e-mail: mada.jun@nihon-u.ac.jp

$$\mathbb{Q}_p \ni x \mapsto \begin{cases} \pi(x) & (x \in \mathbb{Z}_p) \\ \infty & (x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p) \end{cases} \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\},$$

方程式の還元に関する有限ステップでの可換性をalmost good reduction（AGR）と呼び、以下で定義する。

定義 1 非自励有理写像ϕ_n: $\mathbb{Q}_p^2 \to \mathbb{Q}_p^2$ $(n \in \mathbb{Z})$がalmost good reductionを領域$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}_p^2$で持つとは、ある正整数$m_{\mathrm{p};n}$が任意の点$\mathrm{p} = (x, y) \in \mathcal{D}$と任意の時間ステップ$n$に対して存在し、次の式を満たすことである：

$$\pi\{\phi_n^{m_{\mathrm{p};n}}(x, y)\} = \pi\left(\phi_n^{m_{\mathrm{p};n}}\right)(\pi(x), \pi(y)), \tag{1}$$

ここで$\phi_n^m := \phi_{n+m-1} \circ \phi_{n+m-2} \circ \cdots \circ \phi_n$であり、$\pi(\phi)$は写像$\phi$の係数のみを$\pi$で還元した写像とする。

いくつかのPainlevé方程式の離散化およびq離散化に関して、AGRが適切な領域で満たされることを紹介する。これらを含む多くの例からAGRは有限体上の離散系の可積分判定基準であり、特異点閉じ込めテストの数論的類似物であることが分かる。また、定義域$\mathbb{Z}_p$をAGRよりも細分化することにより精密化された判定基準を紹介し、これにより有限体上の方程式の時間発展を適切に定義できることを述べる。最後に離散KdV方程式を例にとり、ソリトン系における特異点閉じ込めと法p還元の関連について考察する。有限体上に特有の孤立波解を紹介するとともに、二次元格子系での法p還元の満たす性質についての展望を述べる。

3. 結論と展望

離散可積分系に関して、p進数体を経由することで有限体上の時間発展を不定性なく定義することができた。さらに、二つの体$\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p$上の系をペアで考えることにより、有限体上の系に対する可積分性判定基準を構成できた。高次元の格子力学系（特にソリトン系）に関する法p還元の満たす性質を厳密に定式化をすること、非アルキメデス付値体における初期値問題を解決することは将来の課題である。

参考文献

[1] J. H. Silverman: ‘The Arithmetic of Dynamical Systems’, Springer-Verlag New York, (2007).

[2] M. Kanki, J. Mada, K. M. Tamizhmani, T. Tokihiro: ‘Discrete Painlevé II equation over finite fields’, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 342001, 8pages, (2012).

[3] M. Kanki: ‘Integrability of discrete equations modulo a prime’, *preprint, arXiv: 1209.1715.*

戸田分子の初期値問題の解の組合せ論的な表示

上岡　修平　(京都大学)*

概　要
戸田分子の初期値問題の解に対して組合せ論的な表示を与える. 離散戸田分子の初期値問題において, 厳密解を与えるタウ関数は Schur 多項式と非交叉径路の重み和を用いて組合せ論的に記述できる. このタウ関数の時間連続極限を取ることにより, 戸田分子の初期値問題のタウ関数に対する組合せ論的な表示を得る.

1. 戸田分子の初期値問題

戸田分子として次の非線形系を考える: $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ に対して

$$\dot{q}_n = q_n(e_{n+1} - e_n), \qquad \dot{e}_n = e_n(q_n - q_{n-1}). \tag{1}$$

ただし境界条件として $e_0 = 0$ を課す. タウ関数 τ_n, σ_n を従属変数変換

$$q_n = \frac{\tau_n \sigma_{n+1}}{\tau_{n+1}\sigma_n}, \qquad e_n = \frac{\tau_{n+1}\sigma_{n-1}}{\tau_n \sigma_n} \tag{2}$$

により導入するとき, 次の戸田分子の双線型形式が得られる: $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau_{n+1}\sigma_{n-1} + \dot{\tau}_n \sigma_n - \tau_n \dot{\sigma}_n = 0, \qquad \tau_n \sigma_{n+1} + \dot{\tau}_{n+1}\sigma_n - \tau_{n+1}\dot{\sigma}_n = 0. \tag{3}$$

双線型形式の境界条件は $\tau_{-1} = \sigma_{-1} = 0$ である.

戸田分子の初期値問題として「タウ関数 τ_n, σ_n を初期値 $q_n(0) = a_{2n}, e_n(0) = a_{2n-1}$ の関数として書き下す」ことを考える. この初期値問題では無限個の $a_0, a_1, a_2, \ldots$ が初期データとして与えられる. 両無限格子 $n \in \mathbb{Z}$ 上の戸田格子階層の初期値問題は高崎 [2] により解かれている. そこでは特に半無限格子 $n \in \mathbb{N}$ 上の解も与えられている. ここで与えるのは高崎のタウ関数 (のある特別な場合) に対する一つの組合せ論的な解釈である. 特にタウ関数 τ_n, σ_n を非交叉径路の重み和の形で記述する.

2. 離散戸田分子の解の組合せ論的表示

離散戸田分子として次の非線形系を考える: $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{q}_n^{(s)} + \tilde{e}_n^{(s)} = q_n^{(s-1)} + e_{n+1}^{(s-1)} + (\delta^{(s)})^{-1}, \qquad \tilde{q}_n^{(s)}\tilde{e}_{n+1}^{(s)} = q_{n+1}^{(s-1)} e_{n+1}^{(s-1)}, \tag{4a}$$

$$q_n^{(s)} + e_{n+1}^{(s)} = \tilde{q}_n^{(s)} + \tilde{e}_{n+1}^{(s)} - (\delta^{(s)})^{-1}, \qquad q_n^{(s)} e_n^{(s)} = \tilde{q}_n^{(s)}\tilde{e}_n^{(s)}. \tag{4b}$$

ただし境界条件として $e_{-1} = 0$, $q_0^{(s)} = \tilde{q}_0^{(s-1)}/\{1 + (\delta^{(s-1)} q_0^{(s-1)})^{-1}\}$ を課す. この形式の離散戸田分子は前田–辻本 [1] により導出された. 離散戸田分子 (4) の主変数は q_n, e_n であり, 残りの $\tilde{q}_n, \tilde{e}_n$ は補助的な中間変数である. また $\delta^{(s)}$ は離散時間発展 $(s-1) \to s$

本研究は科研費 (課題番号:24740059) の助成を受けたものである。
* 〒606-8501 京都市左京区吉田本町 京都大学大学院情報学研究科
e-mail: kamioka.shuhei.3w@kyoto-u.ac.jp

における差分間隔を表すパラメータである. 離散戸田分子のタウ関数 τ_n, σ_n は戸田分子と全く同じ従属変数変換 (2) により導入される.

離散戸田分子のタウ関数の記述には組合せ論の道具を用いる. 接地された正径路 *(Dyck* 路*)* P は二種類のステップ $U = (1,1)$, $D = (1,-1)$ により構成される $\mathbb{Z}^2$ 上の格子路で, 次の条件 (i), (ii) を満たすものである: (i) P の始点と終点はともに x 軸上にある; (ii) P は x 軸より下を通らない. 径路 P の各ステップに次の規則でラベルを付ける: (a) 直線 $y = n$ に始点を持つ U ステップには a_n; (b) D ステップには全て 1. 径路 P の重み $w(P)$ は P に含まれる全てのステップのラベルの積として定義される.

定理 **1** (K. [3]). 離散戸田分子の初期値問題の解は次のタウ関数 τ_n, σ_n により与えられる:

$$\tau_n^{(s)} = \sum_\lambda s_{s,\lambda'}(\delta) w_{n,\lambda}(a), \qquad \sigma_n^{(s)} = \sum_\lambda s_{s,\lambda'}(\delta) w_{n,\lambda+(1^n)}(a). \tag{5a}$$

各和は整数分割 (Young 図形) $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n) \subset (s^n)$ 全てに渡ってとる. ただし $s_{s,\lambda'}(\delta)$ は s 変数 $\delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(s)}$ の Schur 多項式である (λ': λ に共役な整数分割). また $w_{n,\lambda}(a)$ は次で定義される初期値 a_n の多項式である:

$$w_{n,\lambda}(a) = \sum_{(P_0,\ldots,P_n)} w(P_0) \cdots w(P_{n-1}). \tag{5b}$$

ここで $(P_0, \ldots, P_n)$ は接地された正径路 P_j の n 本組であり, 次の条件 (i), (ii) を満たすもの全てを動く: (i) P_j の始点, 終点はそれぞれ $(-2(\lambda_{n-j} + j), 0)$, $(2j, 0)$ である; (ii) 任意の二本 P_j, P_k ($j \neq k$) は非交叉的である: $P_j \cap P_k = \emptyset$.

3. 連続時間極限

戸田分子の初期値問題に対応するタウ関数 τ_n, σ_n は, 離散戸田分子のタウ関数 (5) の連続時間極限により得られる. 差分間隔 $\delta^{(s)}$ を定数 $\delta^{(s)} = \delta$ に一様化し, 離散時間 s と連続時間 t を関係 $t = s\delta$ で結ぶ. このとき極限 $\delta \to 0$ により次のタウ関数 τ_n, σ_n を得る:

定理 **2.** 戸田分子の初期値問題の解は次のタウ関数 $\tau_n^{(s)}, \sigma_n^{(s)}$ により与えられる:

$$\tau_n(t) = \sum_\lambda t^{|\lambda|} \kappa_\lambda w_{n,\lambda}(a), \qquad \sigma_n(t) = \sum_\lambda t^{|\lambda|} \kappa_\lambda w_{n,\lambda+(1^n)}(a). \tag{6}$$

各和は高々 n 部分からなる整数分割 $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n)$ 全てに渡ってとる. また $|\lambda| = \sum_{j=1}^n \lambda_j$, $\kappa_\lambda = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_j - \lambda_k - j + k) / \prod_{j=1}^n (\lambda_j + n - j)$ である.

タウ関数 (6) は無限級数なのでこの解は形式解である. ただし初期値 a_n が有界 ($|a_n| < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$) のとき各級数はそれぞれ絶対収束する. このときタウ関数 (6) は戸田分子の初期値問題の厳密解を与える.

参考文献

[1] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Letters **2** (2010), 95–98.

[2] K. Takasaki, *Initial value problem for the Toda lattice hierarchy*, Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982), Adv. Stud. Pure Math., vol. 4, North-Holland, 1984, pp. 139–163.

[3] 上岡修平, 離散戸田方程式の解の組合せ論的な表示とその非自励化, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 24A0S-3「非線形波動研究の最前線—構造と現象の多様性」, 2013, pp. 134–139.

周期箱玉系の幾何学的実現

野邊 厚 (千葉大学教育学部)*

周期箱玉系とは，(1) で与えられる $\mathbb{R}^{2g+2}$ 上の写像力学系 $(J_1,\ldots,J_{g+1},W_1,\ldots,W_{g+1}) \mapsto (\bar{J}_1,\ldots,\bar{J}_{g+1},\overline{W}_1,\ldots,\overline{W}_{g+1})$ である．

$$\bar{J}_i = \lfloor W_i, X_i + J_i \rfloor, \quad X_i = \left\lceil \sum_{l=1}^{k} (J_{i-l} - W_{i-l}) \right\rceil_{0\le k\le g}, \quad \overline{W}_i = J_{i+1} + W_i - \bar{J}_i \qquad (1)$$

ただし，$\lfloor A,B,\ldots \rfloor := \min[A,B,\ldots]$，$\lceil A,B,\ldots \rceil := \max[A,B,\ldots]$ と定め，$\sum_{i=1}^{g+1} J_i < \sum_{i=1}^{g+1} W_i$ および $J_{g+2} = J_1$，$W_{g+2} = W_1$ と仮定する．周期箱玉系は次のトロピカル多項式 F の定めるトロピカル超楕円曲線 Γ をそのスペクトル曲線にもつ：

$$F(X,Y) := \lfloor 2Y, Y + \lfloor (g+1)X, C_g + gX, \cdots, C_1 + X, C_0 \rfloor, C_{-1} \rfloor$$

このとき，係数 $C_{-1}, C_0, \ldots, C_g$ は周期箱玉系の保存量となる．

井上・竹縄により，周期箱玉系の時間発展はトロピカル超楕円曲線 Γ のトロピカル Jacobi 多様体において線形化されることが示された [1, 2]．この事実は Picard 群 $\mathrm{Pic}^0(\Gamma) = \mathcal{D}_0(\Gamma)/\mathcal{D}_l(\Gamma)$ の言葉で以下のように表される：周期箱玉系の等位集合 $\mathcal{T}_C$ の 1 点に対し，g 次正因子 $D_P := P_1 + P_2 + \cdots + P_g \in \mathcal{D}_g^+(\Gamma)$ を対応させる（トロピカル固有ベクトル写像 $\phi : \mathcal{T}_C \to \mathcal{D}_g^+(\Gamma)$）．また，$D_P, D_{\bar{P}}$ は次の関係式を満たすとする．

$$D_Q + D_P + V_g' - V_0' - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}, \qquad (2)$$
$$D_Q + D_{\bar{P}} - 2D^* \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)} \qquad (3)$$

ここで，$D^* = (g-1)(V_0 + V_0')/2 + V_0$ は固定された g 次正因子，V_0，V_0'，V_g' は Γ の頂点．簡単のため，種数 g は奇数であると仮定した．このとき，次の図式は可換．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T}_C & \xrightarrow{\Phi\circ\phi} & \mathrm{Pic}^0(\Gamma) \\
{\scriptstyle (1)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (2),(3)} \\
\mathcal{T}_C & \xrightarrow[\Phi\circ\phi]{} & \mathrm{Pic}^0(\Gamma)
\end{array}$$

ただし，$\Phi : \mathcal{D}_g^+(\Gamma) \to \mathrm{Pic}^0(\Gamma); A \mapsto A - D^* \pmod{\mathcal{D}_l(\Gamma)}$.

$D_P, D_{\bar{P}}$ が (2),(3) を満たすならば，主因子がそれぞれ (2),(3) の左辺で与えられる Γ 上の有理関数 H_1, H_2 が存在する．トロピカル Riemann-Roch 定理を用いると，$g+1$ 個のゼロ点 $P_1, P_2, \ldots, P_g, V_g'$ を与えたとき有理関数 H_1 は定数差を除いて一意に定まることが分かる．同様に，H_2 も $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_g$ により定数差を除いて一意に定まる．H_1, H_2 の定めるトロピカル曲線をそれぞれ K_1, K_2 とおくと，周期箱玉系の時間発展と等価な Picard 群の関係式 (2),(3) はトロピカル曲線 Γ, K_1, K_2 の交叉を用いて表される．

本研究は科研費 (課題番号:22740100) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 14T05, 37K20, 37B15
キーワード：周期箱玉系，トロピカル曲線，周期離散戸田格子，超離散化
* 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33 千葉大学教育学部数学教室
e-mail: nobe@faculty.chiba-u.jp

しかし，トロピカル固有ベクトル写像を用いて K_1, K_2 を具体的に構成するのは一般に容易ではない．そこで，本講演では，離散周期戸田格子の時間発展をそのスペクトル曲線である超楕円曲線 γ と他の２曲線 κ_1, κ_2 との交叉を用いて実現し，その枠組みをトロピカル幾何学へ翻訳することで，周期箱玉系の時間発展を幾何学的に実現する．

紙幅の都合上詳細は省くが，以下の結果を得る [3]．次のトロピカル多項式 H_1, H_2 で与えられるトロピカル曲線をそれぞれ K_1 および K_2 とおく：

$$H_1(X,Y) = \lfloor T_{g+1}(C_0), T_{g+1}(C_1)+X, \ldots, T_{g+1}(C_g)+gX, (g+1)X, Y \rfloor$$
$$H_2(X,Y) = \left\lfloor \acute{C}_0, \acute{C}_1+X, \ldots, \acute{C}_{g-1}+(g-1)X, C_g+gX, (g+1)X, Y \right\rfloor$$

ここで，$T_{g+1}(C_i) := C_i(J_1, \ldots, J_{g+1}, W_1, \ldots, W_g, \infty)$ および $\acute{C}_i := \lfloor C_i(\infty, J_2, \ldots, J_{g+1}, W_1, \ldots, W_{g+1}), J_1 + C_{i-1}(\infty, J_2, \ldots, J_{g+1}, \infty, W_2, \ldots, W_{g+1}) \rfloor$ とおいた．このとき，(2) を満たす g 次正因子 D_P および D_Q は K_1 の因子である．(3) を満たす g 次正因子 $D_{\bar{P}}$ に関しては，一般に K_2 の因子ではないが，次の定理が成り立つ．

定理 1 K_2 と Γ の交点のうち，Γ の左端のサイクル上の点を R_1 とする．また，$V_0+R_1'-V_0'-Z_0$ が Γ 上の有理関数の主因子になるような点を Z_0 とし，さらに，$Z_1+Q_1-Z_0-R_1$ が Γ 上の有理関数の主因子になるような点を Z_1 とする[1]．Z_0, Z_1 は一意に定まる．このとき，$D_{\bar{P}}$ は次を満たす：$D_{\bar{P}} = Z_1 + Q_2' + \cdots + Q_g'$.

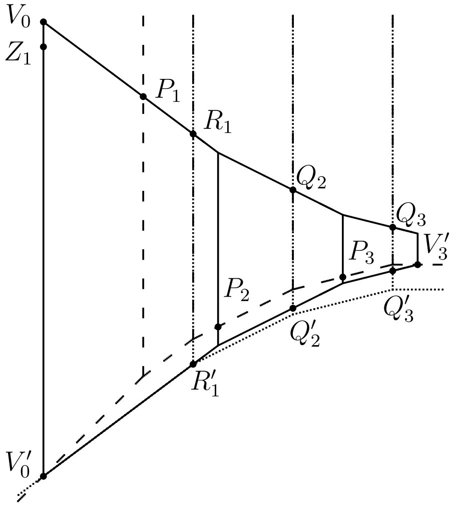


図 1: 種数 $g=3$ の例．実線が Γ，破線が K_1，点線が K_2 を表す．変数の値は次のようにおいた：$J_1=3, J_2=5, J_3=7, J_4=2, W_1=3.5, W_2=6, W_3=10, W_4=0$．この例では $R_1=Q_1$ であるため，$Z_0=Z_1$ となる．

参考文献

[1] Inoue R and Takenawa T 2008 *Int. Math. Res. Notices* Vol. 2008 rnn019
[2] Inoue R and Takenawa T 2009 *Comm. Math. Phys.* **289** 995-1021
[3] Nobe A 2013 *Preprint* arXiv:1306.1645

[1] 直線 $Y = C_{-1}/2$ に関して P と対称な点を P' で表す．

GENERATING FUNCTIONS OF BOX AND BALL SYSTEM

沖吉　真実 (広島大学大学院・理学研究科)

Abstract. 箱玉系は無限の一列に並べた箱に玉をいれて, 規則に従い動かしていくゲームのような系である [1]. これまでに箱玉系の研究は, 玉の種類・箱の容量の自由度を変えることなどにより拡張されてきた. 本研究ではまず玉が有限個の場合に母関数が有理関数になることを証明する. また玉の個数を無限にして, 準周期的に配置された場合にも箱玉系が良い振る舞いをすることを母関数の有理性という視点から調べている.

本研究では箱玉系の挙動を母関数という視点から調べる.

Definition 1. 箱玉系の玉の動かし方を次のように定義する.

$$a_i^{t+1} = \begin{cases} 1 & (if\ a_i^t = 0\ and\ \sum_{j=0}^{i-1} a_j^t > \sum_{j=0}^{i-1} a_j^{t+1}) \\ 0 & (otherwise). \end{cases}$$

ここで a_j^t は時刻 t における j 番目の箱の状態とする.

Definition 2. 箱玉系を次の母関数で表す.

$$F_B(z,t) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^j \cdot z^i \cdot t^j$$

.

Theorem 3. (主定理１) 玉の個数が有限の場合, $F(z,t)$ は有理関数となる.

(証明のあらすじ) 次の定理から容易に従う.

Theorem 4. [2]
任意の初期時刻に対して, ある有限の時刻 Tが存在し, $t \geq T$ では箱玉系の状態は右側からソリトンが長さの順に並んだ状態となり, Q_N^T,Q_{N-1}^T, $\cdots$,Q_1^T ($Q_N^T \geq Q_{N-1}^T \geq \cdots \geq Q_1^T$) はそのソリトンの長さを右から順に並べたものに等しい. また長さの Q_r^T のソリトンの右には空箱が Q_r^T 個以上並ぶ.

母関数という視点からすると玉が無限個の場合に自然と拡張することができる.

Definition 5. 箱玉系が準周期的であるとは, ある $s \geq 0, k > 0$ が存在して $i \geq s$ ならば $a_i^0 = a_{i+k}^0$ が成り立つことを言う. $s = 0$ の特別な場合を, 純周期的と言う.

Lemma 6. 母関数 $F(z,t)$ が有理関数であるための必要条件は, 箱玉系が準周期的であることである.

次のような特別な準周期的箱玉系の場合に, 箱玉系の母関数が有理関数になることを証明した.

Theorem 7. (主定理 2) 初期状態における周期部分が $\overbrace{1\cdots1}^{\ell}\overbrace{0\cdots0}^{\ell}$ のパターンを無限に繰り返す準周期的箱玉系の場合, 母関数は有理関数となる.

(証明のあらすじ) 非周期部分のソリトンは有限個しかないので, 非周期部分と周期部分の衝突は有限回しか起こらず, ある時刻 T 以降は, 非周期部分と周期部分は独立に時間発展する. また Theorem 3 により, 十分大きい時刻 $T' \geqq T$ の時, 非周期部分のソリトンの衝突が終わる.

更に自然数 $k > 0$ を固定し, k 個までしか玉を同時に運べない「制限箱玉系」というルール [3] のもとでも, 母関数を用いて考察した.

Theorem 8. (主定理 3) 玉の個数が有限個ならば制限箱玉系でも母関数は有理関数となる. また手持ちの玉の個数に制限がない場合と同様, 初期状態における周期部分が $\overbrace{1\cdots1}^{\ell}\overbrace{0\cdots0}^{\ell}$ のパターンを無限に繰り返す準周期的箱玉系の場合の母関数は有理関数となる.

Conjecture 9. 全ての準周期的な箱玉系（制限箱玉系を含む）で, 母関数は有理関数となる.

References

[1] D.Takahashi and J.Satsuma, A soliton cellular automaton, J.Phys.Soc.Jpn.59(3514-3519), 1990

[2] T.Tokihiro, A.Nagai, and J.Satuma, Proof of solitonical nature of box and ball system by means of inverse ultra-discretization, InverseProblems15(1639-1662), 1999

[3] Daisuke Takahashi and Junta Matsukidaira, Box and Ball System with a Carrier and Ultra-Discrete Modified KdV Equation, J.Phys.A:Math.Gen.30, 1997

[4] M.Okiyoshi, Hakodamakei to Bokansu (Box and ball system and generating functions in Japanese), master thesis, Hiroshima University, 2012

〒 739-8526　東広島市鏡山一丁目 3 番 1 号

E-mail address: d122446@hiroshima-u.ac.jp

Ultradiscrete Painlevé VI with parity variables

竹村　剛一　(中央大学理工学部)
筒井　栄光

概　要

q-差分パンルヴェ第六方程式 (q-PVI) の符号付き超離散化を導出した。また、q-PVI にはリッカチ解という特殊解があるが、これの超離散版も符号付き超離散 PVI の解となっていることがわかった。パラメーターを固定したときの解の具体形についても論ずる。

q-差分パンルヴェ第六方程式 (q-PVI) は、$b_1b_2a_3a_4 = qa_1a_2b_3b_4$ という条件のもとでの連立 q-差分方程式

$$\frac{z(t)z(qt)}{b_3b_4} = \frac{(y(t)-ta_1)(y(t)-ta_2)}{(y(t)-a_3)(y(t)-a_4)},\ \frac{y(t)y(qt)}{a_3a_4} = \frac{(z(qt)-tb_1)(z(qt)-tb_2)}{(z(qt)-b_3)(z(qt)-b_4)},$$

であり [2]、$q \to 1$ の極限で通常のパンルヴェ第六方程式を復元する。本講演では、q-PVI を符号付きで超離散化する。なお、q-PII においてはすでに符号付きで超離散化がなされており [1]、それと同様の手法をとる。

超離散化に際し、以下の符号関数を導入する。

$$s(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta = +1 \\ 0, & \zeta = -1 \end{cases} \quad S(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta = +1 \\ -\infty, & \zeta = -1 \end{cases}$$

通常の変数 $Y_m, Z_m \in \mathbf{R}$ と符号変数 $\omega_m, \zeta_m \in \{\pm 1\}$ を用意して

$$t = q^m,\quad q = e^{Q/\varepsilon},\quad a_i = e^{A_i/\varepsilon},\ b_i = e^{B_i/\varepsilon},\ (i = 1, 2, 3, 4),$$
$$y(q^m) = (s(\omega_m) - s(-\omega_m))e^{Y_m/\varepsilon},\quad z(q^m) = (s(\zeta_m) - s(-\zeta_m))e^{Z_m/\varepsilon}$$

とおき、極限 $\varepsilon \to +0$ を考える。すると、q-PVI から次の式が導出される。

$$\begin{aligned}
&\max[\max(A_1, A_2) + mQ + Y_m + B_3 + B_4 + S(\omega_m), \\
&\quad \max(2Y_m, A_3 + A_4) + Z_m + Z_{m+1} + S(\zeta_m\zeta_{m+1}), \\
&\quad \max(A_3, A_4) + Y_m + Z_m + Z_{m+1} + S(-\zeta_m\zeta_{m+1}\omega_m)] \\
&= \max[\max(2mQ + A_1 + A_2, 2Y_m) + B_3 + B_4, \\
&\quad \max(A_1, A_2) + mQ + Y_m + B_3 + B_4 + S(-\omega_m), \\
&\quad \max(2Y_m, A_3 + A_4) + Z_m + Z_{m+1} + S(-\zeta_m\zeta_{m+1}), \\
&\quad \max(A_3, A_4) + Y_m + Z_m + Z_{m+1} + S(\zeta_m\zeta_{m+1}\omega_m)],
\end{aligned} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
&\max[\max(B_1,B_2)+mQ+Z_{m+1}+A_3+A_4+S(\zeta_{m+1}), \qquad (2)\\
&\quad \max(2Z_{m+1},B_3+B_4)+Y_m+Y_{m+1}+S(\omega_m\omega_{m+1}),\\
&\quad \max(B_3,B_4)+Y_m+Y_{m+1}+Z_{m+1}+S(-\zeta_{m+1}\omega_m\omega_{m+1})]\\
&=\max[\max(2mQ+B_1+B_2,2Z_{m+1})+A_3+A_4,\\
&\quad \max(B_1,B_2)+mQ+Z_{m+1}+A_3+A_4+S(-\zeta_{m+1}),\\
&\quad \max(2Z_{m+1},B_3+B_4)+Y_m+Y_{m+1}+S(-\omega_m\omega_{m+1}),\\
&\quad \max(B_3,B_4)+Y_m+Y_{m+1}+Z_{m+1}+S(\zeta_{m+1}\omega_m\omega_{m+1})].
\end{aligned}
$$

条件 $B_1+B_2+A_3+A_4=Q+A_1+A_2+B_3+B_4$ のもとでの式 (1), (2) を符号付き超離散パンルヴェ第六方程式と呼ぶ。なお、符号変数なしの超離散パンルヴェ第六方程式はすでに Ormerod [3] によって得られているが、それは $\omega_m=\zeta_m=-1$ と符号を固定した場合に対応する。

ところで、q-PVI は $b_1a_3=qa_1b_3$, $b_2a_4=a_2b_4$ という条件のもと、リッカチ解 (超幾何解) と呼ばれる特殊解をもつ [2]。すなわち、同条件のもとで

$$
z(qt)=b_4\frac{y(t)-ta_2}{y(t)-a_4},\quad y(qt)=a_3\frac{z(qt)-tb_1}{z(qt)-b_3}, \qquad (3)
$$

の解は必ず q-PVI の解となる。式 (3) に対しても符号付き超離散化をすることができ、符号付き超離散リッカチ型方程式が得られる。

Theorem 1 [5, 4] 条件 $B_1+A_3=Q+A_1+B_3$, $B_2+A_4=A_2+B_4$ のもと、式 (3) から得られる符号付き超離散リッカチ型方程式の解は、符号付き超離散パンルヴェ第六方程式の解となる。

なお、$\omega_m=\zeta_m=-1$ の場合には超離散リッカチ型方程式は解をもたず、リッカチ型解は超離散化を符号付きで行うことにより残存する。

また、符号付き超離散リッカチ型方程式や符号付き超離散パンルヴェ第六方程式の解についても調べたので、可能であれは講演時に解説する。

参考文献

[1] Isojima S., Satsuma J., *SIGMA* **7** (2011), 074, 9 pp.

[2] Jimbo M., Sakai H., *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145-154

[3] Ormerod C. M., *Phys. Lett. A* **376** (2012), 2855-2859

[4] Takemura K. and Tsutsui T., arXiv:1306.4959

[5] Tsutsui T., Ultradiscretization with parity variables of q-Painlevé VI, Master's thesis, Chuo university (2013).

シュレジンガー系 $\mathcal{H}_{3,2}$ のリジッド方程式による特殊解

鈴木 貴雄 (近畿大学理工学部)*

概 要

シュレジンガー系 $\mathcal{H}_{3,2}$ は津田照久氏によって導入された 2 変数ハミルトン系であり [4], 積分表示と捻れドラム理論から得られる超幾何函数解を持つ [5]. 本講演では, 大島利雄氏による先行研究 [2] に基づいて, $\mathcal{H}_{3,2}$ の既知のものとは異なる超幾何函数解を構成する.

1. シュレジンガー系

シュレジンガー系 $\mathcal{H}_{3,2}$ は, 次のハミルトン系として与えられる.

$$\frac{\partial q_j}{\partial t_i} = \{H_i, q_j\}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t_i} = \{H_i, p_j\} \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4),$$
$$H_1 = \frac{\mathrm{tr} A_1 A_2}{t_1 - t_2} + \frac{\mathrm{tr} A_1 A_3}{t_1 - 1} + \frac{\mathrm{tr} A_1 A_4}{t_1}, \quad H_2 = \frac{\mathrm{tr} A_2 A_1}{t_2 - t_1} + \frac{\mathrm{tr} A_2 A_3}{t_2 - 1} + \frac{\mathrm{tr} A_2 A_4}{t_2},$$

ただし

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 p_1 + q_2 p_2 + \theta_1 & -q_1 & -q_2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 p_3 + q_4 p_4 + \theta_2 & -q_3 & -q_4 \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ q_1 p_1 + q_3 p_3 - \kappa_2 - \rho_2 \\ q_2 p_2 + q_4 p_4 - \rho_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 - q_4 p_4 + \theta_3 + \kappa_2 + \rho_2 + \rho_3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} \kappa_1 & q_1 + q_3 - 1 & q_2 + q_4 - 1 \\ 0 & \kappa_2 & (q_2 - q_1) p_1 + (q_4 - q_3) p_3 + \kappa_2 + \rho_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

注 1.1 ([4]). $\mathcal{H}_{3,2}$ はスペクトル型 $21, 21, 21, 111, 111$ のフックス系から, モノドロミー保存変形として導かれる.

2. 主結果

今回の主結果と比較するために, まずは既知の結果を紹介しておく.

定理 2.1 ([5]). $\mathcal{H}_{3,2}$ の下で特殊化の条件 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \theta_3 + \kappa_2 + \rho_2 + \rho_3 = 0$ を課す. 更に従属変数 $w_0, \ldots, w_4$ を次のように与える.

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \log w_0 = \frac{(\kappa_2 + \rho_2) q_{2i-1} + \rho_3 q_{2i} + \theta_i}{t_i - 1} \quad (i = 1, 2), \quad w_j = q_j w_0 \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

このとき, ${}^t[w_0, \ldots, w_4]$ はスペクトル型 $41, 32, 311, 311$ のリジッド系を満たす.

* 〒577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部
e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

そして次が今回の主結果である. 既知のものとはリジッド系のスペクトル型が異なる.

定理 2.2. $\mathcal{H}_{3,2}$ の下で次の特殊化の条件を課す.

$$q_1 - \frac{\kappa_2+\rho_2}{p_1} = q_2 - \frac{\rho_3}{p_2} = p_3 = p_4 = \theta_1+\kappa_2+\rho_2+\rho_3 = 0.$$

更に従属変数 $w_0,\dots,w_3$ を次のように与える.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_1}\log w_0 = \frac{\theta_2}{t_1-t_2}+\frac{\theta_3}{t_1-1}+\frac{\kappa_1+\rho_3}{t_1}+\frac{p_1+p_2}{t_1(t_1-1)}-\frac{t_2(q_3p_1+q_4p_2)}{t_1(t_1-t_2)},\\
&\frac{\partial}{\partial t_2}\log w_0 = \frac{\theta_2-q_3p_1-q_4p_2}{t_2-t_1},\\
&w_1=p_1w_0,\quad w_2=p_2w_0,\quad w_3=-q_3w_1,\quad w_4=-q_4w_2.
\end{aligned}$$

このとき, ${}^t[w_0,\dots,w_3]$ は t_1 微分についてはスペクトル型 $41,41,221,221$ のリジッド系を, t_2 微分についてはスペクトル型 $41,32,311,311$ のリジッド系をそれぞれ満たす.

注 2.3. t_1 微分と t_2 微分とでスペクトル型が異なる理由は積分表示を考えることで説明出来る. 詳細は本講演にて.

3. 本研究の背景

講演者は最近の研究において, 6 次元パンルヴェ方程式とそのリジッド方程式解について調べることで, 次のような結果を得た.

事実 3.1 ([3])**.** $n=1,2,3$ に対して, スペクトル型 $\{n1,m_1,\dots,m_{n+2}\}$ のフックス系に対応する $2n$ 次元パンルヴェ方程式は, スペクトル型 $\{m_1,\dots,m_{n+2}\}$ のリジッド系によって記述される特殊解を持つ.

この事実は $n\geq 4$ の場合にも正しいことが期待される. 実は今回の結果はその一例であり, フックス系の addition/middle convolution による以下の変形から自然に従う.

$$21,21,21,111,111 \longrightarrow 31,31,31,211,211 \begin{array}{l} \nearrow\ 41,41,41,221,221 \\ \searrow\ 41,41,32,311,311 \end{array}$$

なお, 上記の 4 つのフックス系のモノドロミー保存変形からは, すべて $\mathcal{H}_{3,2}$ が導かれることを注意しておく. これは先行研究 [1] の結果による.

参考文献

[1] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, J. Lond. Math. Soc. **76** (2007) 438-450.

[2] T. Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, MSJ Memoirs **28** (2012).

[3] T. Suzuki, Six-dimensional Painlevé systems and their particular solutions in terms of hypergeometric functions, Preprint (arXiv:1212.5871).

[4] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, J. reine angew. Math., in press.

[5] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math., in press.

A connection problem for linear q-difference equations related to the q-Painlevé equation

大山 陽介　(大阪大学大学院情報科学研究科)

第 6 Painlevé 方程式の大域解析の研究では, 神保 [3], 岩崎 [2] らによってモノドロミ多様体（character varaiety）が有効に使われた. 古典的には Fricke-Klein の 3 次曲面 [5] として知られるこのモノドロミ多様体の類似を q-差分方程式で考察するさい, q-差分の場合は接続係数が定数ではなく楕円函数になることが多少やっかいである. そこで, 神保・坂井による第 6 Painlevé 方程式の q-類似 [4] に関してモノドロミ多様体を考察する.

1. 記号　$0 < |q| < 1$ とする. Jacobi の theta 函数として $\theta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n = (q, -x, -q/x; q)_\infty$ をとり, 以下 $e_c(x) := \theta(x)/\theta(cx)$ とおく.

2. G. D. Birkoff の Riemann-Hilbert 対応 [1]　線型 q-差分方程式

$$Y(qx) = A(x)Y(x), \quad A(x) = A_0 + xA_1 + \cdots + x^N A_N$$

を考える. 行列サイズは r とする. 確定特異点型に話を限ることにして A_0 の固有値 $\rho_1, ..., \rho_r$ はすべて非零, さらに非共鳴的なケースに限り

$$\rho_j \neq \rho_k q^l, \qquad (j \neq k, l \in \mathbb{Z})$$

とする. $A_N = \mathrm{diag}(\kappa_1, \cdots, \kappa_r)$ として, κ_j にも ρ_j 同様の条件を仮定する. また Nr 次の多項式 $\det A(x) = 0$ の根 a_j はすべて異なると仮定する. このとき, Fuchs の関係式の q-類似 $(-)^{Nr}\kappa_1 \cdots \kappa_r \prod_{k=1}^{Nr} a_k = \rho_1 \cdots \rho_r$ が成り立つ.

原点と無限遠の近傍の解は Birkhoff[1] と異なるものを考える：

$$Y_0(x) = L(x)\,\mathrm{diag}(e_{\rho_1}(x), \cdots, e_{\rho_r}(x)), \quad Y_\infty(x) = \theta(x)^{-N} R(x)\,\mathrm{diag}(e_{\kappa_1}(x), \cdots, e_{\kappa_r}(x)).$$

ここで

$$L(x) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j x^j, \quad R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j x^{-j}.$$

$R_0 = I_r$ と固定する. 容易に $L_0\mathrm{diag}(\rho_1, ..., \rho_r) = A_0 L_0$ となることがわかる. また、このような局所解 $Y_0(x), Y_\infty(x)$ は対角行列の右作用を除いて一意である.

$P(x) = Y_0(x)^{-1} Y_\infty(x)$ で定まる接続行列 $P(x)$ は楕円函数になる. $[p_{ij}(x)] = L(x)^{-1}R(x)$ とおくと, $L(x)^{-1}$, $R(x)$ が $\mathbb{C}^\times$ で正則なので, $p_{ij}(x)$ は次数 N の次のテータ函数になる：

$$p_{ij}(x) = p_{ij}^\circ \prod_{k=1}^{N} \theta(x/c_{ij}^{(k)}), \qquad \prod_{k=1}^{N} c_{ij}^{(k)} \kappa_j/\rho_i = 1.$$

本研究は, 平成 25 年度科研費基盤研究 (C) 課題番号 25400113 の助成を受けたものである. また, 本講演の内容は Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy (Toulouse) との共同研究に基づいている

これらより, $\{p_{ij}^\circ;\, c_{ij}^{(k)}\}$ がモノドロミ多様体のパラメタと考えられるが, 対角行列による左右からの作用の自由度を消すことで, 本質的な次元は $Nr^2 - 2r + 1$ となる.

3. 神保・坂井の第 6 Painlevé 方程式 q-P_{VI} 　神保・坂井の q-P_{VI} は $N = 2, r = 2$ の場合である：

$$Y(qx) = [A_0 + xA_1 + x^2 A_2]Y(x).$$

A_0 の固有値は ρ_1, ρ_2 で $A_2 = \mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. 接続行列は

$$P(x) = \theta(x)^{-2} \begin{bmatrix} e_{\rho_1}(x) & 0 \\ 0 & e_{\rho_2}(x) \end{bmatrix}^{-1} Q(x) \begin{bmatrix} e_{\kappa_1}(x) & 0 \\ 0 & e_{\kappa_2}(x) \end{bmatrix}.$$

ここで

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^\circ \theta(x/c_{11}^{(1)})\theta(x/c_{11}^{(2)}) & p_{12}^\circ \theta(x/c_{12}^{(1)})\theta(x/c_{12}^{(2)}) \\ p_{21}^\circ \theta(x/c_{21}^{(1)})\theta(x/c_{21}^{(2)}) & p_{22}^\circ \theta(x/c_{22}^{(1)})\theta(x/c_{22}^{(2)}) \end{bmatrix},$$

であり $c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)} \kappa_j / \rho_i = 1$.

$P(x)$ は左右からの対角行列の作用による自由度があるが $q_{11}(x)q_{22}(x)/q_{12}(x)q_{21}(x)$ はこの作用で不変になる. $\det P(a_j) = 0$ に注意し, a_j は $\rho_j q^{\mathbb{Z}}, \kappa_j q^{\mathbb{Z}}$ に等しくないとすると, $\det Q(a_j) = 0$ より

$$\frac{q_{11}(x)q_{22}(x)}{q_{12}(x)q_{21}(x)} = \begin{cases} 1 & x = a_1, a_2, a_3, a_4 \\ 0 & x = c_{11}^{(1)}, c_{11}^{(2)}, c_{22}^{(1)}, c_{22}^{(2)} \\ \infty & x = c_{12}^{(1)}, c_{12}^{(2)}, c_{21}^{(1)}, c_{21}^{(2)} \end{cases}.$$

定理 モノドロミ不変量として

$$s_{ij} := \frac{q_{11}(a_i)q_{22}(a_i)}{q_{12}(a_j)q_{21}(a_j)}$$

がとれる. ここで $s_{ij} = 1/s_{ji}$ かつ $s_{12}s_{23}s_{31} = 1$.

《参考文献》

[1] Birkhoff, G. D., *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.* **49** (1914), 521–568.
[2] Iwasaki, K., *Comm. Math. Phys.* **242** (2003), 185–219.
[3] Jimbo, M., *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), 1137–1161.
[4] Jimbo, M. and Sakai, H., *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.
[5] Klein, F. and Fricke, R., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*, Erster Band (1897) Teubner. page 366.

Symmetric solutions to the degenerate four dimensional Painlevé type equations NY^{A_4}, IV^{Mat} and II^{Mat}

Kazuo Kaneko (Seki kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi Univ.)

4次元退化Painlevé型方程式 $NY^{A_4}((11))((11)), 31, IV^{Mat}((2))((2)), 211$ および $II^{Mat}(((2)))(((11)))$ は、それぞれ第4および第2 Painlevé 方程式の拡張として川上, 中村, 坂井により導かれた [1]. 本講演では, これらが1のべき根を重みとする対称変換に対し不変なことを用いて対称解を分類したこと, 特に NY^{A_4} について得られた対称解がベックルント変換 [2] で互いに移り合うこと, そのうちの一つについて線型モノドロミを計算した内容について報告する.

Hamiltonian は第4および第2Painlevé 方程式の Hamiltonian H_{IV}, H_{II} を用いてつぎのように与えられる.

(1) $$H_{NY}^{A_4}\begin{pmatrix} \alpha, \beta, & & q_1, p_1 \\ & ; t ; & \\ \gamma, \delta & & q_2, p_2 \end{pmatrix} = H_{IV}(\beta, \alpha; t; q_1, p_1) + H_{IV}\left(\widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}; t; q_2, p_2\right) + 2q_1p_1p_2,$$
$$H_{IV}(\beta, \alpha; t; q, p) = qp(p-q-t) + \alpha p + \beta q,$$
$$\alpha = \theta_1^{\infty} - \theta_3^{\infty} - 1, \quad \beta = \theta_3^{\infty}, \quad \gamma = -\theta_2^{\infty}, \quad \delta = \theta_1^0 + \theta_2^{\infty},$$
$$\widetilde{\alpha} = \theta_1^{\infty} - \theta_2^{\infty} - \theta_3^{\infty} - 1, \quad \widetilde{\beta} = \theta_1^0 + \theta_2^{\infty}.$$

(2) $$H_{IV}^{Mat}\begin{pmatrix} & q_1, p_1 \\ \alpha, \beta, \omega, ; t ; & \\ & q_2, p_2 \end{pmatrix} = tr[QP(P-Q-t) + \beta P + \alpha Q],$$
$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1/2 & -p_2 \\ p_2q_2 - \theta^0 - \theta_1^{\infty} - \theta_2^{\infty} & p_1/2 \end{pmatrix},$$
$$\alpha = \theta^0 + 2\theta_1^{\infty} - 1, \quad \beta = -\theta^0 - \theta_1^{\infty}, \quad \omega = \theta_1^{\infty} - \theta_2^{\infty} - 1.$$

(3) $$H_{II}^{Mat}\begin{pmatrix} & q_1, p_1 \\ \alpha, \omega, ; t ; & \\ & q_2, p_2 \end{pmatrix} = tr[P^2 - (Q^2 + t) - \alpha Q],$$
$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ -q_2 & q_1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1/2 & -p_2 \\ p_2q_2 - \theta_1^{\infty} - \theta_2^{\infty} & p_1/2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\theta_1^{\infty} + 1, \ \omega = \theta_3^{\infty} + 1.$$

定理　4次元退化 Painlevé 型方程式 NY^{A_4}, IV^{Mat} および II^{Mat} はそれぞれつぎの対称変換に対し不変である.

$$NY^{A_4}: \quad q_1 \longrightarrow -q_1, \ p_1 \longrightarrow -p_1, \ q_2 \longrightarrow -q_2, \ p_2 \longrightarrow -p_2, \ t \longrightarrow -t,$$
$$IV^{Mat}: \quad q_1 \longrightarrow -q_1, \ p_1 \longrightarrow -p_1, \ q_2 \longrightarrow q_2, \quad p_2 \longrightarrow p_2, \quad t \longrightarrow -t,$$
$$II^{Mat}: \quad q_1 \longrightarrow \rho^2 q_1, \ p_1 \longrightarrow \rho p_1, \ q_2 \longrightarrow \rho q_2, \ p_2 \longrightarrow \rho^2 p_2, \ t \longrightarrow \rho t, \ (\rho^3 = 1).$$

定理　4次元退化 Painlevé 型方程式 $H_{NY}^{A_4}$ には含まれるパラメータが一般の値をとるとき, 特異点 $t=0$ の近傍につぎの16個の有理型対称解 $(a\text{-}1), (a\text{-}2), \cdots, (a\text{-}16)$ が存在する.

$$q_1 = \frac{a_{-1}}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}t^{2k-1}, \quad p_1 = \frac{\widetilde{a}_{-1}}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{a}_{2k-1}t^{2k-1},$$

$$q_2 = \frac{b_{-1}}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} t^{2k-1}, \quad p_2 = \frac{\widetilde{b}_{-1}}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{b}_{2k-1} t^{2k-1},$$

$(a\text{-}1)$: $\quad a_{-1} = \widetilde{a}_{-1} = b_{-1} = \widetilde{b}_{-1} = 0,\ a_1 = \alpha,\ \widetilde{a}_1 = -\beta,\ b_1 = \widetilde{\alpha},\ \widetilde{b}_1 = -\widetilde{\beta}, \cdots,$

$(a\text{-}2)$: $\quad a_{-1} = -3,\ \widetilde{a}_{-1} = 1,\ b_{-1} = -2,\ \widetilde{b}_{-1} = -3, \cdots,$

$\vdots$

$(a\text{-}16)$: $\quad a_{-1} = 1,\ \widetilde{a}_{-1} = 0,\ \widetilde{a}_1 = \beta,\ b_{-1} = 0,\ b_1 = \widetilde{\alpha} + 2\beta,\ \widetilde{b}_{-1} = 0,\ b_1 = -\widetilde{\beta}, \cdots.$

これらすべての解はベックルント変換で互いに移り合う．IV^{Mat}, II^{Mat} に対しても同様の計算により，特異点 $t=0$ の近傍における有理型対称解の分類が可能である．

定理　4 次元退化 Painlevé 型方程式 NY^{A_4} は解 $(a\text{-}1)$ に対しつぎの線型モノドロミ $\{M_\infty, C, S_1, S_2, S_3, S_4, e^{2\pi i T_0}\}$ を持つ．

$$M_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\theta_1^\infty} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_2^\infty} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\theta_3^\infty} \end{pmatrix}, \quad e^{2\pi i T_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta_1^0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\theta_2^0} \end{pmatrix};$$

$$S_{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{2n-1}^{(1)} & s_{2n-1}^{(2)} & 1 \end{pmatrix}, \ S_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_{2n}^{(1)} \\ 0 & 1 & s_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ CM_\infty C^{-1} S_1 S_2 S_3 S_4 e^{2\pi i T_0} = I_3,$$

$$s_1^{(1)} = \frac{-2\pi i\Gamma(1-\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_1^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_2^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_3^\infty}{2})}, \quad s_1^{(2)} = \frac{-2\pi i\Gamma(1+\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_1^0+\theta_1^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_1^0+\theta_2^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_1^0+\theta_3^\infty}{2})},$$

$$s_2^{(1)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i(-\frac{\theta_2^0}{2})}\Gamma(\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(1-\frac{\theta_1^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_2^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_3^\infty}{2})}, \quad s_2^{(2)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i(\frac{\theta_1^0-\theta_2^0}{2})}\Gamma(-\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(1-\frac{\theta_1^0+\theta_1^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_1^0+\theta_2^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_1^0+\theta_3^\infty}{2})},$$

$$s_3^{(1)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i\theta_2^0}\Gamma(1-\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_1^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_2^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_3^\infty}{2})}, \quad s_3^{(2)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i(\theta_2^0-\theta_1^0)}\Gamma(1+\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(\frac{\theta_1^0+\theta_1^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_1^0+\theta_2^\infty}{2})\Gamma(1+\frac{\theta_1^0+\theta_3^\infty}{2})},$$

$$s_4^{(1)} = \frac{-2\pi i e^{\pi i(-\frac{3\theta_2^0}{2})}\Gamma(\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(1-\frac{\theta_1^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_2^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_3^\infty}{2})}, \quad s_4^{(2)} = \frac{-2\pi i e^{3\pi i(\frac{\theta_1^0-\theta_2^0}{2})}\Gamma(-\frac{\theta_1^0}{2})}{\Gamma(1-\frac{\theta_1^0+\theta_1^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_1^0+\theta_2^\infty}{2})\Gamma(-\frac{\theta_1^0+\theta_3^\infty}{2})}.$$

接続行列 $C = (c_{ij})_{i.j=1,2,3}$ については講演時に示す [3].

Reference

[1] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé type equations, `arXiv:1209.3836v1(2012)`.

[2] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **45** (2002), 237–258.

[3] A. Duval, Confluence procedures in the generalized hypergeometric family, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **5** (1998), 597–625.

[4] N. Tahara, An argumentation of the phase space of the system of type $A_4^{(1)}$, Kyusyu J. Math. **58** (2004), 393–425.

[5] K. Matsuda, Rational solutions of the A_4 Painlevé equation, Proc. Japan Acad. **81**, Ser. A (2005), 85–88.

量子差分ガルニエ系のLax形式

長谷川浩司 (東北大学)
仙波 洋介 (朝倉書店)

Kashaev と Reshetikhin [1] は, アフィン戸田場理論の Lax 形式の量子差分化を, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ の evaluation 表現に対する R 行列について $LLR = RLL$ 関係式を満たす L 作用素を用いて与えたが, 普遍 R 行列との関連は明らかにされていなかった. 本講演ではこれを明らかにしつつ, 量子差分アフィン戸田場の非自励化の周期簡約を求めたので報告する.

定義 複合同順とし、$U_q^{\pm}$ の群環 $V^{\pm} = \mathbb{C}[Q] = \mathbb{C}[e^{\pm\alpha_0}, \ldots, e^{\pm\alpha_{N-1}}]$ 上の表現 $\rho^{\pm} : U_q^{\pm} \to \mathrm{End}(V^{\pm})$ を

$$e_{\pm\alpha_i} \mapsto q^{\partial\epsilon_i} e^{\pm\alpha_i} \quad \left(\partial\epsilon_i := \frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\right), \quad \mathfrak{h} \ni \eta \qquad \mapsto \partial\eta : e^{\alpha} \mapsto (\alpha, \eta) e^{\alpha}$$

で定める. $\pi_z : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_N}) \to \mathrm{End}(\Box_z)$, $\Box_z = \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ を evaluation 表現 とする :

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i} &\mapsto e_{i,i+1}, & e_{-\alpha_i} &\mapsto e_{i+1,i} \quad (i > 0), \\ e_{\alpha_0} &\mapsto e_{N,1} \otimes z, & e_{-\alpha_0} &\mapsto e_{1,N} \otimes z^{-1}, \\ c &\mapsto 0, & d &\mapsto z\frac{d}{dz} =: d_z. \end{aligned}$$

定理 1 普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ の像 $L^+(z) = (\rho^+ \otimes \pi_z)(\mathcal{R}), L^-(z) = (\pi_z \otimes \rho^-)(\mathcal{R})$ は

$$L^+(z) = \begin{bmatrix} q^{-\epsilon_1} & & & e_0 z^{-1} \\ e_1 & q^{-\epsilon_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e_{N-1} & q^{-\epsilon_N} \end{bmatrix} \frac{(q^{N+1}(q-q^{-1})^N e^{\delta} z^{-1}; q^{2N})_\infty}{(q^{N-1}(q-q^{-1})^N e^{\delta} z^{-1}; q^{2N})_\infty} q^{-c^+ \otimes d_z},$$

$$L^-(z) = \begin{bmatrix} q^{-\epsilon_1} & f_1 & & \\ & q^{-\epsilon_2} & \ddots & \\ & & \ddots & f_{N-1} \\ f_0 z & & & q^{-\epsilon_N} \end{bmatrix} \frac{(q^{N+1}(q-q^{-1})^N e^{-\delta} z; q^{2N})_\infty}{(q^{N-1}(q-q^{-1})^N e^{-\delta} z; q^{2N})_\infty} q^{-d_z \otimes c^-}$$

$(c^{\pm} := \rho^{\pm}(c), e_i := (q^{-1} - q)e^{\alpha_i}, f_i := (q^{-1} - q)e^{-\alpha_i})$ で与えられ, 次を満たす.

$$\begin{aligned} &R_{23}\left(\frac{x}{y}\right)(I_N \otimes L^+(y))(L^+(x) \otimes I_N) = (L^+(x) \otimes I_N)(I_N \otimes L^+(y)) R_{23}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &R_{12}\left(\frac{x}{y}\right)(L^-(x) \otimes I_N)(I_N \otimes L^-(y)) = (I_N \otimes L^-(y))(L^-(x) \otimes I_N) R_{12}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &L_1^+(z) R_{13}^{+-} L_3^-(z) = L_3^-(z) R_{13}^{+-} L_1^+(z) \end{aligned}$$

ただし $R(\frac{x}{y}) = (\Box_x \otimes \Box_y)(\mathcal{R})$. また $\epsilon_i = \Lambda_i - \Lambda_{i-1}$ $(\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1})$, $E_i = e_i q^{\epsilon_i}, F_i = f_i q^{\epsilon_{i+1}}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \Delta^+ = E_0 \cdots E_{N-1}, \Delta^- = F_1 \cdots F_N$ として

$$R_{13}^{+-} = (\rho^+ \otimes \rho^-)(\mathcal{R}) = \prod_{i=1}^{N} (qE_i \otimes F_i; q^2)_\infty^{-1} (q^N \triangle^+ \otimes \triangle^-; q^{2N})_\infty q^{-\sum_{i=1}^N \epsilon_i \otimes \epsilon_i - c^+ \otimes d - d \otimes c^-}.$$

非自励量子戸田場のLax行列を, $\mathcal{V} := \otimes_i (V^{i+} \otimes V^{i-})$ 上の $L_z(\Delta^{\pm})^{\pm 1}$ の積で与える.

$$\mathcal{L}_z(1^- 1^+ \cdots N^- N^+) := L_z^-(\Delta_1^-)^{-1} L_z^+(\Delta_1^+) \cdots L_z^-(\Delta_N^-)^{-1} L_z^+(\Delta_N^+) \in \mathrm{End}(\mathcal{V} \otimes \square_z)$$

などと書く。時間発展 T を、$\mathcal{H}_0 := \cdots R_{1^+1^-} R_{2^+2^-} \cdots$, $\mathcal{H}_1 := \cdots R_{2^+1^-} R_{3^+2^-} \cdots$ の積で与える:

$$T := Ad\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \mathcal{H}_1.$$

定理 2 (1)

$$w_i(a^+ b^-) := \begin{cases} E_i^{a+} \otimes F_i^{b-} & (a \equiv b (\mathrm{mod} 2)) \\ (E_i k_i)^{a+} \otimes (k_i^{-1} F_i)^{b-} & (a \not\equiv b (\mathrm{mod} 2)) \end{cases} \quad (i = 0, \cdots, N-1)$$

とおくと、時間発展は次で与えられる.

$$T(w_i(1^+1^-)) w_i(2^+0^-) = \frac{1 - q w_{i+1}(1^+0^-)}{1 - q w_i(1^+0^-)^{-1}} \cdot \frac{1 - q w_{i-1}(2^+1^-)}{1 - q w_i(2^+1^-)^{-1}},$$

$$T^{-1}(w_i(2^+1^-)) w_i(1^+2^-) = \frac{1 - q^{-1} w_{i+1}(1^+1^-)}{1 - q^{-1} w_i(1^+1^-)^{-1}} \frac{1 - q^{-1} w_{i-1}(2^+2^-)}{1 - q^{-1} w_i(2^+2^-)^{-1}}.$$

(2) $c_a^{\pm} = c_{a+2}^{\pm}$ ならば, T は条件 $w_i(a^+ b^-) = w_i((a+2)^+ (b+2)^-)$ を保つ. そして

$$\mathcal{L}(1^- 1^+ 2^- 2^+) \mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(z q^{-c}) \mathcal{L}(1^+ 2^- 2^+ 1^-)$$

($\mathcal{B}(z) := \mathcal{H}_0 \mathcal{L}_z(2^-) \mathcal{H}_1, c := c^{1-} - c^{1+} + c^{2-} - c^{2+}$) が成り立つ.

注意

$T(\Delta^{\pm}) = q^{c^{\mp}} \Delta^{\pm}$ であるので、ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は非自励的である。

(2) はモノドロミー保存条件の離散化 [2] の量子版である. 以上は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の普遍 R 行列に基く Painlevé VI 型方程式の量子差分化の構成 [3] を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ に拡張するものであり, ある種の Garnier 系の量子差分化と考えられる.

参考文献

[1] R. M. Kashaev, N. Reshetikhin. Affine Toda Field Theory as a 3-Dimensional Integrable System. Comm. Math. Phys. 188 (1997), 251-266.

[2] M. Jimbo and H. Sakai, A q-analog of the sixth Painlevé equation. Lett. Math. Phys. 38, 145-154 (1996)

[3] K. Hasegawa, Quantizing the Discrete Painleve VI Equation: The Lax Formalism. Lett. Math. Phys. 103, 8(2013), 865-879.

[4] 仙波洋介、A 型アフィン量子群の L 作用素、東北大学修士論文、2013 年 2 月

[5] K. Hasegawa and Y. Semba, 準備中

8 頂点模型のスピン 1 類似の自発分極について

鈴鹿医療科学大学　桑野泰宏 * **quanoy@suzuka-u.ac.jp**

本講演では 8 頂点模型のスピン 1 類似について考察する．この模型は R 行列のゼロでない行列要素が 21 あるため, 21 頂点模型とも呼ばれる．8 頂点模型の (スピン 1 を含む) 高スピン類似については, 小島・今野・Weston[1] により既に方法論は確立している．対応する面模型であるフュージョン SOS 模型 [2, 3] のタイプ I 頂点作用素 (半無限転送行列) の自由場表示を構成し, 頂点・面対応により 8 頂点模型の高スピン類似とフュージョン SOS 模型をつなぐテール作用素, さらに角転送ハミルトニアン等の自由場表示を構成することにより, 高スピン類似模型の相関関数を原理的に書き下すことができる．なお, テール作用素は 8 頂点模型と SOS 模型の間の変換に関連して, Lashkevich と Pugai[4, 5] により初めて導入されたものの高スピン拡張を与えている．

本講演では, 一般の高スピン類似の中で特にスピン 1 類似である 21 頂点模型の, ある意味での 1 点函数である自発分極 (spontaneous polarization) に焦点を当てる．スピン $\frac{k}{2}$ のハイゼンベルク鎖の臨界極限はレベル k の Wess-Zumino-Witten 模型で記述できる [6] が, その中心電荷は $c = \frac{3k}{k+2}$ である．21 頂点模型 ($k = 2$) では $c = 1 + \frac{1}{2}$ であり, ボソン・フェルミオン各 1 個で自由場表示できることを示唆する．実際, 泉 [7], Bougourzi, Weston[8] は 21 頂点模型の trigonometric 極限である 19 頂点模型に対し, ボソン・フェルミオン各 1 個で $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のレベル 2 規約最高ウェイト表現を構成している．

これに倣い, フュージョン SOS 模型のタイプ I 頂点作用素, テール作用素, 角転送作用素をボソン・フェルミオン各 1 個で自由場表示し, 自発分極の積分表示を書き下した．さらに, フュージョン SOS 模型の高さの自由度に関する和を実行し, テータ函数の 1 重積分の表式を導出した [10]．この表式と各種の極限を比較する．特に trigonometric 極限である 19 頂点模型の自発分極の無限積表示 [9, 7] との比較によって, われわれの公式の妥当性を示す．

---

* http://www015.upp.so-net.ne.jp/quano/quano.htm

References

[1] Kojima T, Konno H and Weston R: The vertex-face correspondence and correlation functions of the fusion eight-vertex model I: The general formalism. *Nucl. Phys.* **B720** [FS] 348–398, 2005.

[2] Date E, Jimbo M, Kuniba Am Miwa T, and Okado M: Exactly solvable SOS models: Local height probabilities and theta function identities, Nucl. Phys. **B290**, 231–273, 1987.

[3] Date E, Jimbo M, Kuniba A, Miwa T and Okado M: Exactly solvable SOS models II: Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities, Adv. Stud. Pure Mate. **16** 17–122, 1988.

[4] Lashkevich M and Pugai L: Free field construction for correlation functions of the eight vertex model, Nucl. Phys. **B516** 623–651, 1998.

[5] Lashkevich, M: Free field construction for the eight-vertex model: representation for form factors. *Nucl. Phys.* **B621** 587–621, 2002.

[6] Reshetikhin N. Yu: S-matrices in integrable models of isotropic magnetic chains. I, *J. Phys. Math. Gen.* **A24** 3299–3309, 1991.

[7] Idzumi M: Correlation functions of the spin-1 analog of the XXZ model, hep-th/9307129, 1993; Level 2 irreducible representations of $U_q(\widehat{sl_2})$, vertex operators, and their correlations, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 4449–4484, 1994.

[8] A.H. Bougourzi and Robert A. Weston: N-point correlation functions of the spin-1 XXZ model, Nuclear Physics **B417**, 439–462, 1994.

[9] Date, E, Jimbo, M, Miki, K and Okado, M: Mean staggered polarization for the higher spin analog of the 6-vertex model, Int. J. Mod. Phys. **A7**, 151–163, 1992.

[10] Quano Y.-H: Spontaneous polarization of spin-1 analogue of the eight-vertex model, in preparation.

Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type

中西　知樹　　(名古屋大学)
Salvatore Stella　(Northeastern 大)

本講演の内容は Salvatore Stella 氏との共同研究 [NS12] にもとづく．

団代数 (cluster algebra) は反対称化可能行列 $B = (b_{ij})$ に付随して定まるが，B に対して対称化可能 Cartan 行列 $A = A(B)$ およびそのルート系が自然に定まる．このように，団代数とルート系には「先天的な」な対応があるが，その内在的な意義はまだ十分理解されいるとは言えない．団代数とルート系の関係を明らかにする手がかりとして期待されるものに，c ベクトルと d ベクトルというものがある．これらはそれぞれ団代数の係数 (y 変数) と団変数 (x 変数のトロピカル化と同一視される．最近，Alfredo Nájera Chávez により以下の重要な事実が証明された．

定理 1 ([NC12]). 反対称行列 B に付随する団代数の c ベクトルは，B に対応するルート系のルートである．

この定理の逆は成り立たない．したがって，c ベクトル全体は B に対応するルート系のどのような部分集合になっているかが基本的な問題となる．

種子 (seed) が有限個の団代数を有限型団代数という．有限型団代数は Kac-Moody 代数における有限次元 Lie 代数に相当する最も重要かつ基本的な団代数のクラスである．反対称化可能行列 B に付随する団代数 $\mathcal{A}(B)$ が有限型であることの必要十分条件は，B と変異同値なある反対称化可能行列 B' が存在して，B' に対応する Cartan 行列が有限型となることである．このとき，B を団有限型 (of finite cluster type) といい，B' に対応する Cartan 行列の型を B の団型 (cluster type) という．

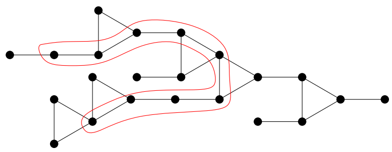
以下の事実が知られている．

定理 2. 任意の団有限型の反対称化可能行列 B に対して，有限型団代数 $\mathcal{A}(B)$ の正の c ベクトル全体の集合 $\mathcal{C}_+$ と正の d ベクトル全体の集合 $\mathcal{D}_+$ は一致する．

さらに上の集合は B の定める団傾代数 (cluster tilted algebra) の直既約表現の次元ベクトル全体の集合と一致することも知られている．以上のことから，団有限型の反対称化可能行列 B に対して，集合 $\mathcal{C}_+ (= \mathcal{D}_+)$ を決定することは基本的な問題となる．

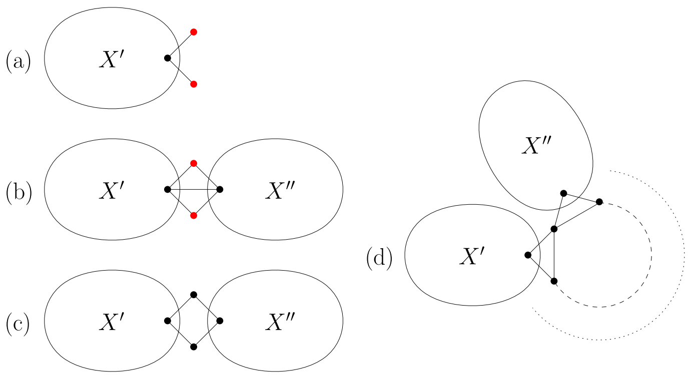
われわれは，任意の団有限型の既約な反対称化可能行列 B に対して集合 $\mathcal{C}_+$ を Dynkin 図の重みつき部分グラフを用いて完全に決定した．例として A 型と D 型の二例を挙げよう．

例 1．A 型．（この場合，結果は既知である．）団型が A 型の行列 B の Dynkin 図 (B に対応する Cartan 行列の Dynkin 図) X は，以下をみたすものであることが知られている．1) X は連結かつ simply laced である．2) X のサイクルは 3 サイクルに限る．3) X の頂点は高々 4 個の隣接点を持つ．4) ちょうど 3 個の隣接点を持つ各頂点において，3 個の隣接点のうちちょうど 2 個が互いに隣接している．4) ちょうど 4 個の隣接点を持つ各頂点において，4 個の隣接点は隣接するペアに二分される．以下のグラフが典型的な例である．

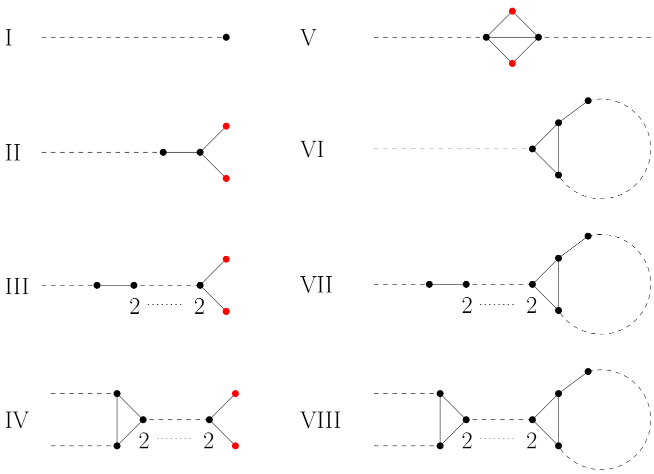


これに対する c ベクトルは，X の充満な線形部分グラフ (A 型の Dynkin 図) で与えられる（上図参照）．

例 2. D 型．団型が D 型の行列 B の Dynkin 図 X のリストは以下の通りである．ただし，X', X'', ... は団型が A 型の行列 B', B'', ... の Dynkin 図である．



これに対する c ベクトルは以下の重みつきグラフのうち，その台グラフが B の Dynkin 図の充満な部分グラフとなるもので与えられる．(重みは c ベクトルの成分を与える．)



参考文献

[NC12] A. Nájera Chávez, *On the c-vectors of an acyclic cluster algebra*, 2012, arXiv:1203.1415 [math.RA].

[NS12] T. Nakanishi and S. Stella, *Diagrammatic description of c-vectors and d-vectors of cluster algebras of finite type*, 2012, arXiv:1210.6299 [math.RA].

Wonder of sine-Gordon Y-systems

中西　知樹　　　(名古屋大学)
Salvatore Stella　(Northeastern 大)

本講演の内容はSalvatore Stella氏との共同研究 [NS12] にもとづく．

一般に，Yang-Baxter 方程式をみたす2次元の S 行列模型や格子模型は共形場理論の良い変形であることが期待される．特に90年代においては，上の観点に対する定量的な根拠を得ることを目的として，熱力学的Bethe仮説 (TBA=thermodynamic Bethe ansatz) の手法により種々の模型が盛んに研究された．TBA法では，Y 系 (Y-system) という関数方程式系が重要な役割を果たす．

このような流れにおいて， 95年頃 Roberto Tateo は S 行列模型の基本例である sine-Gordon 模型に対する Y 系を提唱した [Tat95b, Tat95a]．より正確には，各有理数 $0 < \xi < 1$ の連分数展開に付随して，SG (sine-Gordon) Y 系と RSG (reduced sine-Gordon) Y 系という二種類の Y 系が定まる．さらに，共形場理論と関連して，Tateo はこれらの Y 系の周期性と付随するダイログ恒等式の予想を与えた．これらの予想は，その後 Fomin と Zelevinsky により2000年頃導入された団代数 (cluster algebra) と本質的に関連があることが次第に明らかになり，部分的には解決されたが，全面的解決には至っていなかった．われわれは，これらの Y-system の背後にある連分数に付随する多角形の三角分割の存在を明らかにして，これと団代数の観点を組み合わせることにより，Tateo の予想の証明を完全に一般的に与えた．

例えば，連分数

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6}}} = \frac{25}{81}$$

に付随する RSG Y 系とは，無限個の変数

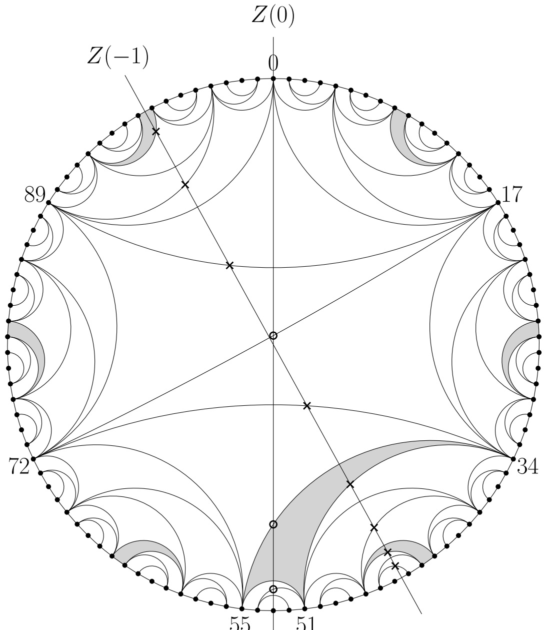
$$Y_1^{(1)}(u),\dots,Y_4^{(1)}(u),Y_1^{(2)}(u),\dots,Y_4^{(2)}(u),Y_1^{(3)}(u),Y_2^{(3)}(u),Y_3^{(3)}(u),\quad (u\in\mathbb{Z})$$

に対する以下の無限個の関数方程式系である．

$$\begin{aligned}
Y_1^{(1)}(u-1)Y_1^{(1)}(u+1) &= 1+Y_2^{(1)}(u),\\
Y_2^{(1)}(u-1)Y_2^{(1)}(u+1) &= (1+Y_1^{(1)}(u))(1+Y_3^{(1)}(u)),\\
Y_3^{(1)}(u-1)Y_3^{(1)}(u+1) &= (1+Y_2^{(1)}(u))(1+Y_4^{(1)}(u)),\\
Y_4^{(1)}(u-1)Y_4^{(1)}(u+1) &= (1+Y_3^{(1)}(u))(1+Y_1^{(2)}(u)^{-1})^{-1}.\\
Y_1^{(2)}(u-6)Y_1^{(2)}(u+6) &= (1+Y_2^{(2)}(u)^{-1})^{-1}(1+Y_1^{(1)}(u))\\
&\quad\times(1+Y_4^{(1)}(u-5)^{-1})^{-1}(1+Y_3^{(1)}(u-4)^{-1})^{-1}\\
&\quad\times(1+Y_2^{(1)}(u-3)^{-1})^{-1}(1+Y_1^{(1)}(u-2)^{-1})^{-1}\\
&\quad\times(1+Y_1^{(1)}(u+2)^{-1})^{-1}(1+Y_2^{(1)}(u+3)^{-1})^{-1}\\
&\quad\times(1+Y_3^{(1)}(u+4)^{-1})^{-1}(1+Y_4^{(1)}(u+5)^{-1})^{-1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Y_2^{(2)}(u-6)Y_2^{(2)}(u+6) &= (1+Y_1^{(2)}(u)^{-1})^{-1}(1+Y_3^{(2)}(u)^{-1})^{-1},\\
Y_3^{(2)}(u-6)Y_3^{(2)}(u+6) &= (1+Y_2^{(2)}(u)^{-1})^{-1}(1+Y_4^{(2)}(u)^{-1})^{-1},\\
Y_4^{(2)}(u-6)Y_4^{(2)}(u+6) &= (1+Y_3^{(2)}(u)^{-1})^{-1}(1+Y_2^{(3)}(u)),\\
Y_1^{(3)}(u-25)Y_1^{(3)}(u+25) &= (1+Y_2^{(3)}(u))(1+Y_4^{(1)}(u))\\
&\quad \times (1+Y_4^{(2)}(u-19))(1+Y_3^{(2)}(u-13))\\
&\quad \times (1+Y_2^{(2)}(u-7))(1+Y_1^{(2)}(u-1))\\
&\quad \times (1+Y_1^{(2)}(u+1))(1+Y_2^{(2)}(u+7))\\
&\quad \times (1+Y_3^{(2)}(u+13))(1+Y_4^{(2)}(u+19)),\\
Y_2^{(3)}(u-25)Y_2^{(3)}(u+25) &= (1+Y_1^{(3)}(u))1+Y_3^{(3)}(u)),\\
Y_3^{(3)}(u-25)Y_3^{(3)}(u+25) &= 1+Y_2^{(3)}(u).
\end{aligned}
$$

この場合，背後にあるのは以下のような106角形 (106=25+81) の三角分割である．



参考文献

[NS12] T. Nakanishi and S. Stella, *Wonder of sine-Gordon Y-systems*, 2012, arXiv:1212.6853.

[Tat95a] R. Tateo, *New functional dilogarithm identities and sine-Gordon Y-systems*, Phys. Lett. **B355** (1995), 157–164; arXiv:hep–th/9505022.

[Tat95b] ______, *The sine-Gordon model as $\frac{SO(n)_1\times SO(n)_1}{SO(n)_2}$ perturbed coset theory and generalizations*, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995), 1357–1376; arXiv:hep–th/9405197.

U_q^+ の PBW 基底と量子座標環

国場敦夫 (東大総合文化)　尾角正人 (阪市大理)　山田泰彦 (神戸大理)

1　量子座標環 $A_q(\mathfrak{g})$

$\mathfrak{g}$ を有限型単純 Lie 環とし，対応する Lie 群 G 上の関数環の q 変形即ち量子座標環を $A_q(\mathfrak{g})$ とする．$A_q(\mathfrak{g})$ の (より一般のクラスの $\mathfrak{g}$ を含む) 定義については [1]，非例外型の場合の生成元と関係式による具体的実現については [5] を参照のこと．以下 q は generic とする．例えば $A_q(sl_2)$ は生成元 $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ と関係式

$$t_{11}t_{21} = qt_{21}t_{11}, \quad t_{12}t_{22} = qt_{22}t_{12}, \quad t_{11}t_{12} = qt_{12}t_{11}, \quad t_{21}t_{22} = qt_{22}t_{21},$$
$$[t_{12}, t_{21}] = 0, \quad [t_{11}, t_{22}] = (q - q^{-1})t_{21}t_{12}, \quad t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21} = 1$$

により定義され, 余積は $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$ で与えられる．一般に $A_q(\mathfrak{g})$ は Drinfeld-Jimbo 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の双対 $U_q(\mathfrak{g})^*$ の部分 Hopf 代数である．

2　$A_q(\mathfrak{g})$ の表現と Intertwiner

$\alpha \neq 0$ とする．以下の τ_α と $\mu_{\alpha,q}$ はそれぞれ $A_q(sl_2)$ の 1 次元および無限次元既約表現を定める．

$$\tau_\alpha : \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mu_{\alpha,q} : \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{a}^- & \alpha\mathbf{k} \\ -q\alpha^{-1}\mathbf{k} & \mathbf{a}^+ \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ここで $\mathbf{a}^+, \mathbf{a}^-, \mathbf{k}$ は Fock 空間 $\mathcal{F}_q = \oplus_{m \geq 0} \mathbb{C}(q)|m\rangle$ に

$$\mathbf{k}|m\rangle = q^m|m\rangle,\ \mathbf{a}^+|m\rangle = |m+1\rangle,\ \mathbf{a}^-|m\rangle = (1 - q^{2m})|m-1\rangle$$

により作用する q-boson である．一般の $\mathfrak{g}$ に対し，Dynkin 図の頂点 i に付随する sl_2 部分代数を $sl_{2,i}$，単純ルートを α_i，$q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)/2}$ とする．埋め込み $U_{q_i}(sl_{2,i}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ の双対により以下の様に $A_q(\mathfrak{g})$ の表現 π_i が定義される．

$$\pi_i : A_q(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow A_{q_i}(sl_{2,i}) \xrightarrow{\mu_{1,q_i}} \mathrm{End}(F_{q_i}).$$

$\mathfrak{g}$ の Weyl 群 W の単純鏡映を $s_1, \ldots, s_n$ とする ($n = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}$).

定理 1 ([7])

1. $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W$ が簡約表示であれば $\pi_w := \pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{i_r}$ は $A_q(\mathfrak{g})$ の既約表現であり，簡約表示のとり方に依らず同型.
2. $A_q(\mathfrak{g})$ の任意の既約表現 π に対して $\pi \simeq \pi_w \otimes \tau$ となる $w \in W$ と 1 次元表現 τ (G の極大トーラスの元でラベルされる) が存在する.

(1) に与えた $A_q(sl_2)$ の二つの表現は 2 の $\pi_1 \otimes \tau_\alpha$ と $\pi_{s_1} \otimes \tau_{\alpha^{-1}}$ に対応する.

簡約表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ に対応する既約表現 π_w を改めて $\pi_{\mathbf{i}} = \pi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \pi_{i_r}$ と書く．ここで $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ である．$s_{i_1} \cdots s_{i_r} = s_{j_1} \cdots s_{j_r} \in W$ が簡約表示とすると，定理 1 により同型写像 (intertwiner と呼ぶ)

$$\Phi = \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{j}} : \mathcal{F}_{q_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{q_{i_r}} \to \mathcal{F}_{q_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{q_{j_r}} \ \text{ s.t. } \ \pi_{\mathbf{j}}(g) \circ \Phi = \Phi \circ \pi_{\mathbf{i}}(g) \quad \forall g \in A_q(\mathfrak{g})$$

が定数倍を除いて一意的に定まる．表現空間 $\mathcal{F}_{q_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{q_{i_r}}$ の基底 $|a_1\rangle \otimes \cdots \otimes |a_r\rangle$ を boson 数の列 $A = (a_1, \ldots, a_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ により $|A\rangle$ と略記し，Φ の行列要素 Φ_B^A を $\Phi|B\rangle = \sum_A \Phi_B^A |A\rangle$ と規格化条件 $\Phi_{0,\ldots,0}^{0,\ldots,0} = 1$ により定義する．$\mathfrak{g} = A_2, C_2$ の場合の Φ の具体形については [2] を参照.

3　$U_q^+(\mathfrak{g})$ の PBW 基底と遷移行列

$U_q(\mathfrak{g})$ の Chevalley 生成元 $e_1, \dots, e_n$ により生成される部分代数を $U_q^+ = U_q^+(\mathfrak{g})$ とする．W の最長元 w_0 の簡約表示 $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ ごとに U_q^+ の Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) 基底

$$E_{\mathbf{i}}^A := e_{\beta_1}^{(a_1)} e_{\beta_2}^{(a_2)} \cdots e_{\beta_l}^{(a_l)}, \quad A = (a_1, \dots, a_l) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l, \quad \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$$

が構成される [4]．ここで $\{\beta_j\}$ は正ルートの集合であり $\beta_1 = \alpha_{i_1}$, $\beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \dots, \beta_l = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l})$ により定義される．また $e_{\beta_i}^{(a_i)} = (e_{\beta_i})^{a_i}/[a_i]_i!$, $[m]_i! = \prod_{j=1}^m (p_i^j - p_i^{-j})/(p_i - p_i^{-1})$, $p_i = q^{(\beta_i, \beta_i)/2}$ である．「ルートベクトル」$e_{\beta_r} (r = 1, \dots, l)$ は

$$e_{\beta_r} = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{r-1}}(e_{i_r})$$

により定義される (記号 $e_i\,(i \in \{1, \dots, n\})$ と $e_\beta\,(\beta = \text{正ルート})$ の併用に注意．) T_i は $U_q(\mathfrak{g})$ 上の組紐群作用素と呼ばれるもので，本稿の規約に適合するものについては [3] の 2 章を参照のこと．

$w_0 = s_{j_1} \cdots s_{j_l}$ をもう一つの簡約表示とし，$\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_l)$ とおいて対応する PBW 基底を $\{E_{\mathbf{j}}^A \mid A \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l\}$ とする．二つの PBW 基底の変換行列 $\gamma = \gamma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ の成分 γ_B^A を関係式

$$E_{\mathbf{i}}^A = \sum_{B \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^l} \gamma_B^A E_{\mathbf{j}}^B$$

により定義する．$\gamma_B^A \in \mathbb{Z}[q]$ であることが知られている [4].

4　結果

2 節の Interwiner $\Phi = \Phi_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ で Weyl 群の最長元 w_0 に該当する場合，即ち $r = l$ の状況を考える．

定理 2 ([3])

任意の $\mathfrak{g}$ と列 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ に対応する w_0 の二つの簡約表示に対して以下の等式が成り立つ．

$$\gamma_B^A = \Phi_B^A.$$

この結果により $\mathfrak{g} = sl_3$ の場合の γ_B^A が四面体方程式を満たすことが従うが ([2] を参照)，この事実は Sergeev [6] において知られていた．

参考文献

[1] M. Kashiwara, Duke Math. J. **69** 455 (1993).

[2] A. Kuniba and M. Okado, J. Phys. A: Math. Theor. **45** 465206 (2012).

[3] A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, A common structure in PBW bases of the nilpotent subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$ and quantized algebra of functions (arXiv:1302.6298)

[4] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** 447–498 (1990).

[5] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan L. D. Faddeev, Lenin. Math. J. **1** 193 (1990).

[6] S. M. Sergeev, *Tetrahedron equations and nilpotent subalgebras of $\mathcal{U}_q(sl_n)$*, Lett. Math. Phys. **83** 231–235 (2008).

[7] Y．S．Soibelman, Lenin. Math. J. **2** 161 (1991).

量子アフィン展開環上のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底のパス模型

石井 基裕 (筑波大学)*1
内藤 聡 (東京工業大学)*2
佐垣 大輔 (筑波大学)*3

1. 背景

$U_q(\mathfrak{g})$ をアフィン Lie 環 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環とし, $W \subset W_{\mathrm{af}}$ を有限 Weyl 群とアフィン Weyl 群とする. 整ウェイト λ を extremal ウェイトとする extremal ウェイト加群を $V(\lambda)$, その結晶基底を $\mathcal{B}(\lambda)$ とする ([1, §3]); $V(\lambda)$ は, extremal ベクトルの集合 $\{u_w\}_{w \in W_{\mathrm{af}}}$ により生成される可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群である. 整ウェイト λ のレベル (= $\mathfrak{g}$ の標準的中心元と λ とのペアリングの値) が 0 でないならば, $V(\lambda)$ は既約な最高 (又は, 最低) ウェイト加群, $\mathcal{B}(\lambda)$ のクリスタル・グラフは連結となる (一般には無限個の連結成分が現れる).

型 λ の Lakshmibai–Seshadri (LS) パス全体のなすクリスタルを $\mathbb{B}(\lambda)$ とする ([2, §4]). 以下の定理 1 は, 一般の対称化可能 Kac–Moody Lie 環に対して, 柏原と A. Joseph により, それぞれ異なる方法で独立に証明された結果の特別な場合である.

定理 1 整ウェイト λ のレベルが 0 でないならば, $\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathbb{B}(\lambda)$ が成り立つ.

$\mathfrak{g}$ に付随する有限 Dynkin 図形の頂点 i に対応するレベル・ゼロ基本ウェイトを ϖ_i とする. 定理 1 のレベル・ゼロの場合への拡張の試みとして, 内藤–佐垣は次の結果を得た:

定理 2 ([3, Corollary 3.8.1]). $\lambda = m\varpi_i$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, ならば, $\mathcal{B}(\lambda) \cong \mathbb{B}(\lambda)$ が成り立つ.

実は, 一般の $\lambda = \sum_i m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, については, $\mathcal{B}(\lambda)$ と $\mathbb{B}(\lambda)$ がクリスタルとして同型になるとは限らない. これには, λ が $m\varpi_i$ という形でないならば, $\mathcal{B}(\lambda)$ と $\mathbb{B}(\lambda)$ における (標準的な) extremal ベクトルの集合 $\{u_w\}_{w \in W_{\mathrm{af}}} \subset \mathcal{B}(\lambda)$ と $\{\pi_{w\lambda}\}_{w \in W_{\mathrm{af}}} \subset \mathbb{B}(\lambda)$ との間に, 自然な 1:1 対応が存在しないという事情がある.

Beck–中島 ([4, Remark 4.17]) (cf. [1, §13]) により, $\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_i \mathcal{B}(m_i\varpi_i)$ なる同型が証明されている. よって, 定理 2 と合わせると, $\mathcal{B}(\lambda) \cong \bigotimes_i \mathbb{B}(m_i\varpi_i)$ という形として, $\mathcal{B}(\lambda)$ に対する LS パスによる実現が得られる. しかし, 定理 1 の自然な拡張と見なせるような結果は, 現在までのところ知られていなかった.

我々は, 従来の LS パスの定義に利用される Bruhat 順序ではなく, アフィン Lie 環の臨界レベルの表現論等に現れる semi-infinite 旗多様体や, 半単純代数群のモジュラー表現論に現れる "generic" なアフィン Kazhdan–Lusztig 多項式 (Lusztig 予想) から来る, W_{af} 上の **semi-infinite** (又は, **generic**) **Bruhat** 順序を用いて定義される LS パスの類似物のなすクリスタル $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ が, $\mathcal{B}(\lambda)$ の実現を与えることを証明した. 証明の議論においては, 旗多様体の量子コホモロジーの環構造から来る, W に付随する量子 **Bruhat** グラフが重要な役割を果たす.

本研究は科研費 (研究課題番号:12J01376, 24540010, 23740003) の助成を受けたものである.
キーワード：量子アフィン展開環, レベル・ゼロ extremal ウェイト加群, 結晶基底, アフィン Weyl 群, semi-infinite (又は, generic) Bruhat 順序, 量子 Bruhat グラフ, パス模型.
*1 e-mail: `ishii731@math.tsukuba.ac.jp`
*2 e-mail: `naito@math.titech.ac.jp`
*3 e-mail: `sagaki@math.tsukuba.ac.jp`

2. 主結果

以下, $\mathfrak{g}$ を untwisted アフィン Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の頂点集合を $I = I_0 \sqcup \{0\}$, $\{\alpha_i^\vee\}_{i \in I}$ を単純コルート, $Q^\vee = \sum_{i \in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ とする. Φ を有限ルート系, $\Phi_{\mathrm{af}} := \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Phi, n \in \mathbb{Z}\}$ を $\mathfrak{g}$ の実ルート全体とする. ただし, δ は null ルートである. $\beta \in \Phi_{\mathrm{af}}$ に対して, 対応するコルートを $\beta^\vee$, 対応する鏡映を $r_\beta \in W_{\mathrm{af}}$ とする. $x = wt_\mu \in W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes Q^\vee$, $w \in W$, $\mu \in Q^\vee$, の **semi-infinite length** を, $\ell^{\frac{\infty}{2}}(x) := \ell(w) + 2\langle \mu, \rho \rangle$ と定める. ただし, $\ell(-)$ は W 上の長さ関数, $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$ である.

定義 3 (**semi-infinite Bruhat 順序**). $x = wt_\mu, y \in W_{\mathrm{af}}$, $w \in W$, $\mu \in Q^\vee$, $\beta \in \Phi_{\mathrm{af}}^+$ に対して, 関係 $y \xleftarrow{\beta} x$ を次の 3 条件で定義する:

(1) $y = r_\beta x$, (2) $\ell^{\frac{\infty}{2}}(y) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$, (3) $\alpha \in \Phi^+$, $\chi \geq 0$ が存在して, $\beta = w\alpha + \chi\delta$.

そして, W_{af} 上の半順序 $\geq$ を, $y \xleftarrow{\beta_1} \cdots \xleftarrow{\beta_l} x$ ならば, $y \geq x$ として定義する.

注意 4 $w, v \in W$, $\alpha \in \Phi^+$ に対して, 関係 $v \xleftarrow{\alpha} w$ を, $v = wr_\alpha$ かつ, (i) $\ell(v) = \ell(w) + 1$, 又は (ii) $\ell(v) = \ell(w) + 1 - 2\langle \alpha^\vee, \rho \rangle$, が成り立つことと定義する. このようにして得られる, W の元を頂点とする色付有向グラフを量子 **Bruhat** グラフと呼ぶ. 実は, $x = wt_\mu \in W_{\mathrm{af}}$ を固定したとき, $y \in W_{\mathrm{af}}$, $\beta = w\alpha + \chi\delta \in \Phi_{\mathrm{af}}^+$ に対して, $y \xleftarrow{\beta} x$ であることと, 量子 Bruhat グラフにおいて $wr_\alpha \xleftarrow{\alpha} w$ となることは同値である. このとき, $\chi \in \{0, 1\}$ であり, 辺 $wr_\alpha \xleftarrow{\alpha} w$ は, $\chi = 0$ ならば条件 (i) を, $\chi = 1$ ならば条件 (ii) を満たす ([5, §5]).

簡単のために, $\lambda = \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $i \in I_0$, の場合に主結果の主張を述べる.

定義 5 有理数 $a \in \mathbb{Q}$ に対して, W_{af} の元の組 (y, x) に対する a-chain とは, W_{af} の元の列

$$y = y_0 \xleftarrow{\beta_1} y_1 \xleftarrow{\beta_2} \cdots \xleftarrow{\beta_l} y_l = x$$

であって, $a\langle \beta_i^\vee, y_i\lambda \rangle \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq l$, を満たすものを言う (この定義は λ に依存する).

$\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) := \{(x_1, \ldots, x_k\ ;\ 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = 1) \mid$ 各 (x_i, x_{i+1}) に対して, a_i-chain が存在する $\}$ とおく. すると, 自然な写像 $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda) \twoheadrightarrow \mathbb{B}(\lambda)$ が存在し, これがクリスタルの射となるように, $\widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ 上にクリスタルの構造を定義することができる.

定理 6 クリスタルとしての同型 $\mathcal{B}(\lambda) \cong \widetilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ が成り立つ.

参考文献

[1] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, Duke Math J. **112** (2002) 117-124.

[2] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, Ann. of Math. **124** (1995) 499-525.

[3] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra II, Adv. Math. **200** (2006) 102-124.

[4] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, Duke Math. J. **123** (2004) 335-402.

[5] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov–Reshetikhin crystals I: lifting the parabolic quantum Bruhat graph, preprint, 2012; arXiv:1211.2042v2.

An approach to the $X = M$ conjecture using modules over a current algebra

直井克之 (カブリ数物連携宇宙研究機構)

1 はじめに

$X = M$ 予想は, それぞれ X (1 **次元状態和**と呼ばれる) および M (**フェルミ型和**と呼ばれる) と表される二つの多項式が一致する, という予想である. よってこれらの多項式を定義しさえすれば, その主張を述べることはできる. しかしながらただこれらの定義を並べるだけでは, 予想の意義や, そもそもなぜこのような等式を考えるに至ったか, についてはほとんど明らかにならないように思われる. そこでこれらの厳密な定義は付録として最終節に回し, 本稿の前半ではこの予想が提唱されるに至った歴史的背景を交えて, $X = M$ 予想がどのような予想であるかについて紹介したいと思う.

後半では, カレント代数 $\mathfrak{g}_0[t]$ の表現論を用いた $X = M$ 予想の証明の概略について述べる. 筆者は [Nao12b] および [Nao13] において, 古典型の場合に (BC 型の場合にはさらに条件を加える必要がある) この予想に証明を与えた. ここで証明の鍵となるアイデアは, X と M をともに $\mathfrak{g}_0[t]$ 上の加群の次数付き指標と関連付けることである. 全体像をつかんでもらえるように, 後半の最初の小節でまず方針を述べ, その後にもう少し詳細な解説を行うことにした.

本稿では, 代数や加群は $\mathbb{C}$ 上または $\mathbb{C}(q)$ 上で定義されていると仮定する.

2 $X = M$ 予想とは?

2.1 Bethe 仮説

まず $X = M$ 予想の源泉となった **Bethe 仮説** (**Bethe Ansatz**) について, 非常に大雑把に紹介する. Bethe は [Bet31] において, 以下のような結果を得た (らしい).

> L 個のサイトをもつスピン $\frac{1}{2}$ Heisenberg 鎖 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ を適当な部分空間の直和 $\bigoplus_r W_r$ に分解したとき, 各 W_r における Bethe ベクトルは, Bethe 方程式と呼ばれる代数方程式の解によってパラメトライズされる. またこの解はある種の組み合わせ論的な対象 (string) により記述することができ[*1], 結果として W_r における Bethe ベクトルの個数 b_r について以下の等式が得られる.
>
> $$b_r = \sum_{\{m_j\}_{j\geq 1}} \prod_j \binom{p_j + m_j}{m_j}, \qquad \big(p_j = L - 2\sum_{k\leq 1} \min(j,k) m_k\big). \tag{2.1}$$
>
> ここで $\{m_j\}_{j\geq 1}$ は $L - r = 2\sum_{j\geq 1} jm_j$ を満たす全ての非負整数列を走る.

[*1] 「Bethe 方程式の解を string を用いて記述できる」という主張を string 仮説という. この主張は厳密には正しくないが, 結果として得られる (2.1) は真に正しい等式となる.

上の式において p_j を **vacancy 数**と呼ぶ．ここでは「スピン $\frac{1}{2}$ Heisenberg 鎖」や「Bethe ベクトル」とはなんであるかを説明することはせず[*2], 上の結果が数学的にどのように翻訳させるか, について述べたいと思う．適当に作用を定めることで全空間 $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ は $\mathfrak{sl}_2$ のベクトル表現のテンソル積とみなすことができ, このとき W_r はウェイト r のウェイト空間となる．またこの見方では, Bethe ベクトルは最高ウェイトベクトルに対応する．これらを総合すると, b_r は $(r+1)$ 次元既約加群 $V(r)$ の $(\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$ における**重複度**となることがわかる．すなわち (2.1) を以下の分解公式に読み替えることができる．

$$\left[(\mathbb{C}^2)^{\otimes L} : V(r)\right] = \sum_{\{m_j\}_{j\geq 1}} \prod_j \binom{p_j + m_j}{m_j}. \tag{2.2}$$

右辺のように 2 項係数の積の和の形で表される式を**フェルミ型和** (**fermionic sum**) と呼ぶ[*3]．以下この分解公式をさまざまな方向に拡張していくことで, 最終的に $X = M$ 予想が定式化される．

2.2 Kerov-Kirillov-Reshetikhin の仕事

本小節では $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}_{n+1}$ とし, 長さ $n+1$ 以下の分割 λ に対応する既約加群を $V(\lambda)$ で表す．

等式 (2.2) は Kerov-Kirillov-Reshetikhin [KKR86, KR86] により, $\mathfrak{gl}_{n+1}$ の対称テンソル積表現の場合に拡張された．すなわち, 長さ $n+1$ 以下の分割 λ と任意の長さの分割 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ に対し, 以下の等式が成り立つことが示された (ただし (μ_j) は長さ 1 の分割を表す).

$$\left[V\big((\mu_1)\big) \otimes V\big((\mu_2)\big) \otimes \cdots \otimes V\big((\mu_p)\big) : V(\lambda)\right] = \sum_{m=\{m_j^{(a)}\}\in\mathcal{H}_{\mu,\lambda}} \prod_{a,j} \binom{p_j^{(a)} + m_j^{(a)}}{m_j^{(a)}}. \tag{2.3}$$

ここで非負整数列 m の走る集合 $\mathcal{H}_{\mu,\lambda} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}^{I\times\mathbb{Z}_{>0}}$, および vacancy 数 $p_j^{(a)}$ は (2.2) を適宜拡張することで与えられる[*4]．この式で $n=1$, $\mu_j = 1$ $({}^\forall j)$ とおくと (2.2) になる．

ここで重要なことは, 上の等式の **q 変形**がやはり成り立つことである．すなわち以下の等式が示せる．

定理 2.1 ([KR86])**.** $K_{\lambda\mu}(q)$ で分割の組 (λ, μ) に対応する **Kostka 多項式** (e.g., [Mac95]) を表すことにすると,

$$K_{\lambda\mu}(q) = \sum_{m\in\mathcal{H}_{\mu,\lambda}} q^{cc(m)} \prod_{a,j} \begin{bmatrix} p_j^{(a)} + m_j^{(a)} \\ m_j^{(a)} \end{bmatrix}_q \tag{2.4}$$

が成り立つ．ただし $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_q$ は q-2 項係数とする ($cc(m) \in \mathbb{Z}$ は第 4 節参照).

(2.4) の右辺に $q=1$ を代入すると, (2.3) の右辺となる．一方左辺に $q=1$ を代入して得られる $K_{\lambda\mu}(1)$ は **Kostka 数**であり, これは (2.3) の左辺と等しいことが知られている (cf. [Ful97])．これが上で述べた q 変形の意味である．後に $X = M$ 予想を定式化するときにも, この「q 変形を考える」という発想が鍵となる．(2.4) の右辺のように q 変形されたものも, やはり**フェルミ型和**と呼ばれる．

[*2] 本稿の目的に必要がないことと, 筆者にそれを説明する力量がないことが理由である．これらについては [国場 11, 第 1.1 節], [Sch07, Section 2] を参照いただきたい．

[*3] この名前も物理的な背景があるようだが, 筆者はよく知らない．

[*4] 正確な定義は第 4 節を参照．ただ今のところは, 右辺が 2 項係数の積の和 (すなわちフェルミ型和) となっていることだけ確認してもらえれば十分である．

定理 2.1 を示すために用いられた, 組み合わせ論的な背景についても簡単に紹介しておこう．二つの分割 λ と μ に対し, Young 図 λ 上の半標準盤で $\boxed{\mathrm{i}}$ が μ_i 個あるものの集合を $\mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ と表す[*5]．Kerov らは [KKR86, KR86] において, 全単射[*6]

$$\mathrm{SST}(\lambda,\mu) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{RC}(\mu,\lambda) \tag{2.5}$$

を構成した．ここで $\mathrm{RC}(\mu,\lambda)$ は**艤装配位** (**rigged configuration**) と呼ばれる組み合わせ論的対象の集合である．艤装配位は各行に非負整数 (**rigging**) を割り振られた Young 図の n 個の列 (で適当な条件を満たすもの) として定義される[*7]．上の $\mathrm{RC}(\mu,\lambda)$ は, 型 μ でウェイトが λ の艤装配位の集合を表している (詳しい定義は [国場 11, 第 5 章] を参照いただきたい)．このとき (2.3) は, 全単射 (2.5) の両辺の濃度が等しいことを表した等式に他ならない．また (2.4) は, それぞれの集合の母関数に関する等式である．

(2.4) の導出について, もう少し詳しく述べよう．半標準盤には **Lascoux-Schützenberger** (LS) **charge** と呼ばれる量が定義され (cf. [Mac95]), $\mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ における LS charge の母関数は Kostka 多項式 $K_{\lambda\mu}(q)$ となる．一方艤装配位に対しても **cocharge** と呼ばれる量が定まり, この量に関する母関数を具体的に計算すると (2.4) の右辺になる．このとき KKR 全単射 (2.5) のもとでこれらの量が (本質的に) 一致することが示せるので [KR86], 結論として (2.4) が得られる．

2.3 Kirillov-Reshetikhin 予想

A 型における分解公式 (2.3) を, 他の型へ拡張することを考える．この場合には, 以下で述べるように量子アフィン代数の有限次元加群が必要となる．

$\mathfrak{g}$ をアフィンリー代数とし, $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の頂点集合を $I=\{0,1,\ldots,n\}$ とする (ラベル付けは [Kac90] に従う)．$U_q(\mathfrak{g})$[*8]で量子アフィン代数を表す．また $\mathfrak{g}_0$ を $I_0 := I\setminus\{0\}$ に付随する単純部分リー代数とすると, $U_q(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}_0$ の量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ を部分代数として含む．$\mathfrak{g}_0$ の支配的整ウェイト $\lambda\in P_0^+$ に対し, $V_q(\lambda)$ で最高ウェイト λ の既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群を表す．

Kirillov-Reshetikhin (KR) **加群**は, I_0 の元と正整数によってパラメトライズされる $U'_q(\mathfrak{g})$ [*9]の有限次元既約加群の族である[*10]．$W^{r,\ell}$ で $r\in I_0$, $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対応する KR 加群を表す．Kirillov-Reshetikhin は KR 加群のテンソル積に対し, 以下のような分解公式を予想した[*11][KR87]．

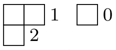
予想 2.2 (Kirillov-Reshetikhin 予想)**.** I_0 の元と正整数の組の列 $\boldsymbol{\nu}=\big((r_1,\ell_1),(r_2,\ell_2),\ldots,(r_p,\ell_p)\big)$ に対し, $W^{\boldsymbol{\nu}}=\bigotimes_{j=1}^{p}W^{r_j,\ell_j}$ とおく．このとき, $W^{\boldsymbol{\nu}}$ を $U_q(\mathfrak{g}_0)$ に制限したときの $V_q(\lambda)$ ($\lambda\in P_0^+$) に関する重複度は,

$$\Big[W^{\boldsymbol{\nu}}:V_q(\lambda)\Big]=\sum_{m=\{m_j^{(a)}\}\in\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu},\lambda}}\prod_{a,j}\binom{p_j^{(a)}+m_j^{(a)}}{m_j^{(a)}} \tag{2.6}$$

と表すことができる (右辺の詳しい定義は第 4 節参照)．

[*5] このとき $K_{\lambda\mu}(1)=\#\,\mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ となる．

[*6] **KKR 全単射**と呼ばれる．

[*7] 例えば $n=2$ のとき  は型 $\mu=(2,2,2)$ の艤装配位の例である．

[*8] このパラメータ q とフェルミ型和に現れる q は関係がないことを注意しておく．

[*9] $U'_q(\mathfrak{g})$ は $U_q(\mathfrak{g})$ から次数作用素 q^d を取り除いたものである．

[*10] KR 加群は, Drinfeld 多項式を指定することで定義される [HKO+99]．また, 最高ウェイト $\ell\varpi_r$ の minimal affinization (cf. [Cha95]) として特徴づけることもできる．

[*11] 実際には, 彼らは Yangian $Y(\mathfrak{g}_0)$ の KR 加群について予想を述べた．また twisted 型の場合は [HKO+02] による．

現在では中島 [Nak03], Hernandez [Her06] および Di Francesco-Kedem [DFK08] の結果を組み合わせることにより, 全ての nontwisted 型 $\mathfrak{g}$ に対し証明が与えられている.

$\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ のとき, $W^{r,\ell}$ は $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 加群として $V_q(\ell\varpi_r)$ と同型である (cf. [Jim86], [CP94]. ただし ϖ_r は基本ウェイトを表す). よって (2.3) は (2.6) の特別な場合である.

2.4 $X = M$ 予想

小節 2.2 では, 等式 (2.3) の両辺を q 変形することにより (2.4) を得た. これと同様にして, 等式 (2.6) の両辺を q 変形したものをそれぞれ $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$, $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ と表すとき,

$$X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$$

を主張するのが $X = M$ 予想である. 右辺の q 変形 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ は A 型の場合とほぼ同様に定義され, やはり**フェルミ型和**と呼ばれる. しかしながら左辺の q 変形 $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ に関しては A 型とは事情が異なるので*12, 定義するには新たなアイデアが必要である. 以下細かい定義は第 4 節に回して, どのような方針で $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ を定義するかについて述べる.

Kostka 多項式が, 半標準盤 $\mathrm{SST}(\lambda, \mu)$ 上の LS charge に関する母関数として定義できたことを思い出していただきたい. 他の型の場合には, 半標準盤の代わりに結晶基底 (cf. [Kas91]) の上の母関数を考えることになる. 実際 KR 加群は結晶基底を持つことが古くから期待されており, 以下の場合には証明も与えられている ((i) は柏原 [Kas02], (ii) は尾角-Schilling [OS08] による).

定理 2.3. KR 加群 $W^{r,\ell}$ は以下の場合に結晶基底を持つ.

(i) $\ell = 1$ のとき ($\mathfrak{g}$ および r は任意).
(ii) $\mathfrak{g}$ が非例外型*13 となる場合 (r および ℓ は任意).

以下 KR 加群 $W^{r,\ell}$ は結晶基底を持つと仮定し, それを $B^{r,\ell}$ と表し **KR クリスタル**と呼ぶ. $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1, \ell_1), \ldots, (r_p, \ell_p)\big)$ に対し $B^{\boldsymbol{\nu}} := \bigotimes_{j=1}^{p} B^{r_j,\ell_j}$ は $W^{\boldsymbol{\nu}}$ の結晶基底となる. よって I_0 に関する最高ウェイト元でウェイト λ であるものの集合を

$$B^{\boldsymbol{\nu}}_{\mathrm{hw}}(\lambda) = \{b \in B^{\boldsymbol{\nu}} \mid \widetilde{e}_i(b) = 0 \ (i \in I_0),\ \mathrm{wt}(b) = \lambda\}$$

と表すと,

$$\# B^{\boldsymbol{\nu}}_{\mathrm{hw}}(\lambda) = \big[W^{\boldsymbol{\nu}} : V_q(\lambda)\big] \tag{2.7}$$

が成り立つ. $B^{\boldsymbol{\nu}}$ の上には, **エネルギー関数**と呼ばれる $\mathbb{Z}$ 値の関数 $D\colon B^{\boldsymbol{\nu}} \to \mathbb{Z}$ が定義できる*14. そこで $B^{\boldsymbol{\nu}}_{\mathrm{hw}}(\lambda)$ 上の E に関する母関数を $X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q)$ と表せば, (2.7) から $X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, 1) = \Big[W^{\boldsymbol{\nu}} : V_q(\lambda)\Big]$ となることがわかる. この $X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q)$ が求めていた q 変形であり, **1 次元状態和**と呼ばれる. 実際以下の定理が述べるように, $X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q)$ は Kostka 多項式の拡張となっている.

定理 2.4 ([NY97])**.** $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$, $r_j = 1$ $({}^\forall j)$, $\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_p$ のとき, $\mu = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$ とおくと

$$X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = K_{\lambda\mu}(q)$$

---

*12 A 型の場合は重複度が Kostka 数であったので, 自然な q 変形として Kostka 多項式が存在した.

*13 $\mathfrak{g}_0$ が古典型となるアフィンリー代数を**非例外型**と呼ぶ.

*14 エネルギー関数はもともと最高ウェイト加群の結晶基底の**パス実現**において, 次数の役割を果たすものとして導入された [KKM+92]. この「エネルギー関数により次数を与える」というアイデアは, 後に述べる定理 3.5 でも本質的に用いられている.

が任意の $\lambda \in P_0^+$ に対して成り立つ.

よって A 型における定理 2.1 の拡張として, $X = M$ 予想が以下の形で述べられる.

予想 2.5 ($X = M$ 予想 [HKO+99, HKO+02])**.** 任意の $\boldsymbol{\nu}$ および λ に対し

$$X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) \tag{2.8}$$

が成り立つ.

予想が提唱された後に, 以下の場合に証明が与えられた.

- $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ のとき: Kirillov-Schilling-Shimozono [KSS02] は, KKR 全単射を Littlewood-Richardson 盤の集合へと拡張することで, 任意の $\boldsymbol{\nu}$ および λ に対し予想 2.5 を証明した.
- $\mathfrak{g}$: 非例外型, $\mathrm{rk}\,\mathfrak{g}_0 \gg 0$ のとき: Lecouvey-尾角-Shimozono [LOS12] は, ($\boldsymbol{\nu}$ と λ を固定すると) $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ が十分大きいランクで安定となり, A 型の 1 次元状態和と Littlewood-Richardson 係数により表せることを示した (この主張は $\mathbf{X} = \mathbf{K}$ **予想**と呼ばれ, Shimozono-Zabrocki により提唱された [SZ06]). 一方尾角-坂本 [OS11] は, $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ もやはり A 型のフェルミ型和と LR 係数により表せることを示した. よってこの場合には, 予想 2.5 は A 型の結果から従うことがわかる.
- $\mathfrak{g}$: non-twisted 型, $\ell_j = 1$ ($^\forall j$) のとき: このとき KR クリスタルのテンソル積 $B^{\boldsymbol{\nu}}$ とエネルギー関数は, Lakshmibai-Seshadri パスを用いて記述できる [NS06, NS08]. また $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ はカレント代数 $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t]$ の Weyl 加群の次数付重複度と等しくなる (これは後の述べる定理 3.2 の特別な場合である). 筆者はこれらの対象を詳しく調べることで, この場合に予想 2.5 を示した [Nao12a].

これらの結果に加えて, 筆者は近年以下の場合に $X = M$ 予想に証明を与えた. この定理の証明の概略を述べることが, 本稿の後半部分の主目的である.

定理 2.6 ([Nao12b, Nao13])**.** $\mathfrak{g}$ を $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ のいずれかの型とし, $r \in I_0$ に対し α_r が長ルートならば $c_r = 1$, 短ルートならば $c_r = 2$ と定める (AD 型のときはつねに $c_r = 1$ とする). このとき与えられた $\boldsymbol{\nu}$ の全ての組 (r_j, ℓ_j) が $c_{r_j} | \ell_j$ を満たすならば, 予想 2.5 が成り立つ.

3 定理 2.6 の証明の概略

3.0 証明の方針

ここではまず, 証明の大まかな流れについて紹介する (いくつかの未定義語については, 次小節以降で定義を与える). 証明は以下の 3 つのステップに分けられる. I_0 の元と正整数の組の列 $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p)\big)$ が与えられているとしよう.

ステップ 1: ある次数付き $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群 $\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{W}_k^{\boldsymbol{\nu}}$ (KR 加群の次数付き極限のフュージョン積) の次数付

き指標 (graded character) を $\mathrm{gch}\,\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k \mathrm{ch}\, W_k^{\boldsymbol{\nu}}$ と定義し[*15],

$$\mathrm{gch}\,\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\lambda\in P_0^+} M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q^{-1})\mathrm{ch}\, V(\lambda) \tag{3.1}$$

を示す ($V(\lambda)$ は $\mathfrak{g}_0$ の最高ウェイト λ の既約加群を表す).

ステップ 2: 別の次数付き $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群 $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ (一般化 Demazure 加群) を定義し, $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群としての同型

$$\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}} \tag{3.2}$$

を示す. $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ を考えることの利点は, 次数付き指標 $\mathrm{gch}\,\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ を Demazure 作用素を用いて具体的に表すことができる点である.

ステップ 3: まず一般化 Demazure 加群 $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ に対し, そのクリスタルにおける類似 $B\big(D^{\boldsymbol{\nu}}\big)$ を構成する. 続いて, クリスタルのテンソル積 $B^{\boldsymbol{\nu}} = B^{r_1,\ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p,\ell_p}$ から $B\big(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\big)$ への $U_q(\mathfrak{g}_0)$ クリスタルとしての同型

$$\Psi\colon B^{\boldsymbol{\nu}} \xrightarrow{\sim} B\big(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\big)$$

で, 任意の $b \in B^{\boldsymbol{\nu}}$ に対し

$$\big\langle d, \mathrm{wt}\,\Psi(b)\big\rangle = -D(b)$$

を満たすものが存在することを示す (D は $B^{\boldsymbol{\nu}}$ 上のエネルギー関数, d は次数作用素). するとこのことから,

$$\begin{aligned}\mathrm{gch}\,\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}} = \mathrm{gch}\,B\big(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\big) &= \sum_{u\in B(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}})} q^{\langle d, \mathrm{wt}(u)\rangle} e^{\mathrm{wt}_0(u)} \\ &= \sum_{b\in B^{\boldsymbol{\nu}}} q^{-D(b)} e^{\mathrm{wt}(b)} = \sum_{\lambda\in P_0^+} X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q^{-1})\mathrm{ch}\, V(\lambda)\end{aligned} \tag{3.3}$$

という等式を示すことができる[*16]. ただし wt_0 は $\mathfrak{h}_0$ に関するウェイト関数を表す.

よって (3.1)–(3.3) と $\mathrm{ch}\, V(\lambda)$ たちが線形独立であることから, $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ が任意の $\lambda \in P_0^+$ に対し成り立つことがわかる.

ステップ 1 は Ardonne-Kedem [AK07] と Di Francesco-Kedem [DFK08] の結果であり, ステップ 2 は [Nao12b], ステップ 3 は [Nao13] の結果である.

3.1 ステップ 1: フェルミ型和と KR 加群の次数付き極限のフュージョン積

本小節では $\mathfrak{g}$ を non-twisted 型と仮定し, $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ と同一視する. $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0[t] := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t]$ はカレント代数 (**current algebra**) と呼ばれる. t の次数により $U(\mathfrak{g}_0[t])$ は自然な $\mathbb{Z}$-grading $U(\mathfrak{g}_0[t]) = \bigoplus_{s\geq 0} U(\mathfrak{g}_0[t])^s$ を持つ. $c \in \mathbb{C}^\times$ に対し, $\mathfrak{g}_0[t]$ の自己同型 φ_c を $\varphi_c(x\otimes t^k) = x \otimes (t+c)^k$ により定義する[*17].

KR 加群 $W^{r,\ell}$ の古典極限 (q に 1 を代入する操作) を考えることで, ループ代数 $\mathfrak{g}_0[t, t^{-1}]$ 上の加群 $\overline{W}^{r,\ell}$ が得られる[*18]. またこのとき, $\mathfrak{g}_0 \otimes (t+a)^N \cdot \overline{W}^{r,\ell} = 0$ ($N \gg 0$) なる $a \in \mathbb{C}^\times$ が存在する. そこで $\overline{W}^{r,\ell}$ をカレン

[*15] 各次数空間 $W_k^{\boldsymbol{\nu}}$ は有限次元 $\mathfrak{g}_0$ 加群となるから, $\mathrm{ch}\, W_k^{\boldsymbol{\nu}}$ が定義できる.
[*16] 一つ目の等式は, $\mathcal{B}\big(D^{\boldsymbol{\nu}}\big)$ が $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ のクリスタルにおける類似であることから従う.
[*17] この自己同型はループ代数 $\mathfrak{g}_0[t, t^{-1}]$ には定義できない. これが以下で加群をカレント代数に制限する一つの理由である.
[*18] アフィンリー代数 $\mathfrak{g}$ の加群で中心元 K が自明に作用するものが得られるので, $\mathfrak{g}_0[t, t^{-1}]$ 加群とみなすことができる.

ト代数 $\mathfrak{g}_0[t]$ へ制限し, その加群の自己同型 φ_a による引き戻しを $\widetilde{W}^{r,\ell}$ としよう. すると $(\mathfrak{g}_0 \otimes t^N) \cdot \widetilde{W}^{r,\ell} = 0$ $(N \gg 0)$ となることはすぐにわかるが, 実はより強く $\widetilde{W}^{r,\ell}$ は**次数付き** $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群となる. $\widetilde{W}^{r,\ell}$ を KR 加群 $W^{r,\ell}$ の**次数付き極限** (**graded limit**) と呼ぶ[*19].

補足 3.1. 次数付き極限 $\widetilde{W}^{r,\ell}$ は, 生成元と関係式により定義することもできる [CM06, Definition 2.1]. 定理 3.2 の証明には, こちらの定義が用いられている.

Feigin と Loktev により定義された**フュージョン積** [FL99] について復習しよう. $M^1, \ldots, M^p$ を一元生成次数付き $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群とし, それぞれの生成元を $v_1, \ldots, v_p$ とする. $c_1, \ldots, c_p$ を互いに異なる複素数とし, $M^j_{c_j} = \varphi^*_{c_j} M_j$ とおく. このとき, テンソル積 $M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}$ は $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ から生成される一元生成 $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群となる [FL99, Proposition 1.4]. よって $M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}$ 上にフィルトレーション

$$F^s\big(M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}\big) := U(\mathfrak{g}_0[t])^{\leq s}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$$

が定義できる. このフィルトレーションから得られる次数付き $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群

$$\mathrm{gr}_F(M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}) := \bigoplus_{s \geq 0} F^s\big(M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}\big)/F^{s-1}\big(M^1_{c_1} \otimes \cdots \otimes M^p_{c_p}\big)$$

を $M^1 * \cdots * M^p$ と表し[*20] **フュージョン積** (**fusion product**) と呼ぶ.

KR 加群の次数付き極限 $\widetilde{W}^{r,\ell}$ は一元生成次数付き加群であるので, フュージョン積が定義できる. $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1, \ell_1), \ldots, (r_p, \ell_p)\big)$ に対し,

$$\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \widetilde{W}^{r_1,\ell_1} * \cdots * \widetilde{W}^{r_p,\ell_p}$$

とおこう. このとき Ardonne-Kedem [AK07] および Di Francesco-Kedem [DFK08] により, この加群の次数付き指標 $\mathrm{gch}\, W^{\boldsymbol{\nu}}$ が, フェルミ型和と既約 $\mathfrak{g}_0$ 加群の指標を用いて表せることが示された.

定理 3.2. 任意の $\boldsymbol{\nu}$ に対し,

$$\mathrm{gch}\, \widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\lambda \in P_0^+} M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q^{-1}) \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が成り立つ[*21].

3.2 ステップ 2: 次数付き極限のフュージョン積と一般化 Demazure 加群

引き続き $\mathfrak{g}$ を non-twisted 型とし, Cartan 部分代数と Borel 部分代数を $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b}$ で表す. $\mathfrak{p}_i$ $(i \in I)$ を $\{i\}$ に付随する $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とし, $\mathfrak{p}_i$-Mod を $\mathfrak{h}$ 半単純有限次元 $\mathfrak{p}_i$ 加群の圏とする. $\mathfrak{b}$-Mod も同様に定義する. このとき, 忘却関手 $\mathfrak{p}_i$-Mod $\to$ $\mathfrak{b}$-Mod は左随伴関手 $\mathcal{D}_i \colon \mathfrak{b}$-Mod $\to \mathfrak{p}_i$-Mod を持つことが知られている [Jos85, Kum02] [*22]. このとき, 任意のアフィン Weyl 群の元 $w \in W$ とその最短表示 $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ に対し

$$\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{i_k} \cdots \mathcal{D}_{i_1} : \mathfrak{b}\text{-Mod} \to \mathfrak{b}\text{-Mod}$$

[*19] [CM06] では **KR module for** $\mathfrak{g}_0[t]$ と呼んでいる.
[*20] 定義はパラメータ $c_1, \ldots, c_p$ に依っているが, 簡略化のためこれを省略する.
[*21] フュージョン積は共形場理論における **coinvariant** の高次化と思うこともできる. 共形場理論においてもフェルミ型和はよく登場するものであり (cf. [HKO$^+$02, Subsection 1.1]), このあたりの事情がこの定理の背景にはあるように思われる.
[*22] 以下忘却関手を合成して $\mathcal{D}_i \colon \mathfrak{b}$-Mod $\to \mathfrak{b}$-Mod とみなす.

と定め[*23], これを **Joseph 関手**と呼ぶ. Γ を $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形とし, $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ で Dynkin 自己同型の集合を表す. Dynkin 自己同型 $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ に対し $\mathcal{D}_\tau$ を τ^{-1} に関する引き戻しと定義し[*24], $\mathcal{D}_{w\tau} = \mathcal{D}_w \circ \mathcal{D}_\tau$ とすることで $\mathcal{D}_*$ を $W \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$ に拡張しておく.

Λ_i $(i \in I)$ と ϖ_i $(i \in I_0)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}_0$ の基本ウェイトとし, w_0 を $\mathfrak{g}_0$ の Weyl 群 W_0 の最長元とする. また $r \in I_0$ に対し, $c_r \in \{1,2,3\}$ を定理 2.6 と同様に定義する (ただし $\mathfrak{g}_0$ が G_2 型で α_r が短ルートのときは $c_r = 3$ とする). 以下の定理は, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_2$ のときは Feigin-Loktev [FL99], $\ell_1/c_{r_1} = \cdots = \ell_p/c_{r_p}$ のときは Fourier-Littelmann [FL07], 一般の場合は筆者 [Nao12b] により示された[*25].

定理 3.3. $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1,\ell_1),\dots,(r_p,\ell_p)\big)$ が $c_{r_j}|\ell_j$ かつ $\ell_1/c_{r_1} \geq \cdots \geq \ell_p/c_{r_p}$ を満たすとき, $\ell'_j = \ell_j/c_{r_j}$ とおくと $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群としての同型

$$\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} \cong \mathcal{D}_{t_{c_{r_1}w_0(\varpi_{r_1})}}\Big(\mathbb{C}_{(\ell'_1-\ell'_2)\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_{c_{r_{p-1}}t_{w_0(\varpi_{r_{p-1}})}}\big(\mathbb{C}_{(\ell'_{p-1}-\ell'_p)\Lambda_0} \otimes \mathcal{D}_{c_{r_p}t_{w_0(\varpi_{r_p})}}\mathbb{C}_{\ell'_p\Lambda_0}\big)\cdots\Big)$$

が存在する[*26]. ただし $\mathbb{C}_\Lambda$ はウェイト Λ の一次元 $\mathfrak{b}$ 加群, $t_\lambda \in W \ltimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$ は $\lambda \in P_0$ に関する平行移動を表す.

定理の右辺を $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ と表そう. $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ は Lakshmibai-Littelmann-Magyar が [LLM02] において定義した**一般化 Demazure 加群** (**generalized Demazure module**) になっている[*27]. その論文で与えられた, 一般化 Demazure 加群の指標公式から以下が得られる ($\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に関する指標であることを強調するため, 指標を $\mathrm{ch}_\mathfrak{h}$ と表している).

命題 3.4 ([LLM02, Theorem 5])**.**

$$\mathrm{ch}_\mathfrak{h}\,\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}} = D_{t_{c_{r_p}w_0(\varpi_{r_p})}}\Big(e^{(\ell'_p-\ell'_{p-1})\Lambda_0}\cdots D_{t_{c_{r_2}w_0(\varpi_{r_2})}}\big(e^{(\ell'_2-\ell'_1)\Lambda_0}\cdot D_{t_{c_{r_1}w_0(\varpi_{r_1})}}e^{\ell'_1\Lambda_0}\big)\cdots\Big).$$

ただし $i \in I$ に対し $\mathbb{Z}[P]$ 上の作用素 D_i (**Demazure 作用素**) を

$$D_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i}s_i(f)}{1-e^{-\alpha_i}}$$

と定義し, $w\tau \in W \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$ に対し $D_{w\tau} = D_{i_k}\cdots D_{i_1}\tau$ ($w = s_{i_k}\cdots s_{i_1}$ は w の最短表示) と表した[*28].

上の命題の右辺で $e^\delta = q$, $e^{\Lambda_0} = 1$ とおいたものを $\mathrm{gch}\,\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ と表すことにする (δ は零ルート). これは $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ を $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群とみなした時の, これまでの意味での次数付き指標となる. とくに定理 3.3 から $\mathrm{gch}\,\widetilde{W}^{\boldsymbol{\nu}} = \mathrm{gch}\,\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}$ が成り立つ.

3.3 ステップ 3: 一般化 Demazure クリスタルと 1 次元状態和

本小節では, $\mathfrak{g}$ は非例外型であると仮定する (twisted 型でもよい). $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト $\Lambda \in P^+$ に対し, $B(\Lambda)$ で最高ウェイト Λ の既約可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群の結晶基底, $u_\Lambda \in B(\Lambda)$ でその最高ウェイト元を表す.

[*23] $\mathcal{D}_w$ は最短表示の選び方によらない [Kum02, Remark 8.1.18].

[*24] τ^{-1} は $\mathfrak{b}$ の自己同型であるから, $(\tau^{-1})^*: \mathfrak{b}\text{-Mod} \to \mathfrak{b}\text{-Mod}$ が定義できる.

[*25] [Nao12b] では $\mathfrak{g}_0$ を ADE 型と仮定している. しかしこの条件が本質的に使われているのは, Proposition 9.3 の後半で Demazure flag の存在を用いて指標を計算する箇所だけである. この部分の議論を本稿の命題 3.4 で取り換えれば, 残りの部分の証明はそのままで古典型の $\mathfrak{g}_0$ に対して定理が証明できる.

[*26] 右辺はもともとは $\mathfrak{b}$ 加群であるが, $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群に持ち上げることができる.

[*27] 実際には構成の仕方は少し異なるが, [Jos85] の結果により同型であることを示すことができる.

[*28] これも最短表示の選び方によらない [Kum02, Corollary 8.2.10].

テンソル積 $B = B(\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes B(\Lambda^p)$ とその部分集合 $S \subseteq B$, および $w\tau \in W \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$ が与えられたとする．このとき, 新たなクリスタルの部分集合 $\mathcal{F}_{w\tau}(S)$ を以下のように定義する[*29]．まず $p = 1$ のとき, 全単射 $F_\tau \colon B(\Lambda) \to B\bigl(\tau(\Lambda)\bigr)$ を

$$F_\tau\bigl(\widetilde{f}_{i_1} \cdots \widetilde{f}_{i_k} u_\Lambda\bigr) = \widetilde{f}_{\tau(i_1)} \cdots \widetilde{f}_{\tau(i_k)} u_{\tau(\Lambda)} \quad (k \geq 0,\ i_1, \dots, i_k \in I)$$

により定義する．$p > 1$ のときはこれを自然に拡張することで, $F_\tau \colon B \to B' = B\bigl(\tau(\Lambda^1)\bigr) \otimes \cdots \otimes B\bigl(\tau(\Lambda^p)\bigr)$ が定義される．$S' = F_\tau(S) \subseteq B'$ を S の像とし, 最短表示 $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ を一つ固定して

$$F_{w\tau}(S) = \mathcal{F}_w(S') = \bigl\{\widetilde{f}_{i_k}^{m_k} \cdots \widetilde{f}_{i_1}^{m_1}(b) \bigm| b \in S',\ k \geq 0,\ m_j \geq 0\bigr\} \setminus \{0\} \subseteq B'$$

とすることで, クリスタルの部分集合 $F_{w\tau}(S) \subseteq B'$ が定義される．

$\mathfrak{g}$ が twisted 型のとき, 任意の $r \in I_0$ に対し $c_r = 1$ とおく (non-twisted 型の場合は前小節で与えた)．以下の定理は, $\mathfrak{g} = A_n^{(1)},\ D_n^{(1)},\ E_n^{(1)}$ 型で $\ell_j = 1$ $({}^\forall j)$ のときは Fourier-Littelmann [FL07], $\mathfrak{g}$ が非例外型で $\ell_1/c_{r_1} = \cdots = \ell_p/c_{r_p}$ のときは Schilling-Tingley [ST12], 一般の場合は筆者 [Nao13] により示された．

定理 3.5. $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\boldsymbol{\nu} = \bigl((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p)\bigr)$ が $c_{r_j} | \ell_j$ かつ $\ell_1/c_{r_1} \geq \cdots \geq \ell_p/c_{r_p}$ を満たすとき, $\ell'_j = \ell_j/c_{r_j}$ とおくと $U_q(\mathfrak{g}_0)$ クリスタルとしての同型

$$\Psi \colon B^{\boldsymbol{\nu}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{t_{c_{r_1}} w_0(\varpi_{r_1})}\Bigl(u_{(\ell'_1 - \ell'_2)\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_{p-1}}} w_0(\varpi_{r_{p-1}})}\bigl(u_{(\ell'_{p-1} - \ell'_p)\Lambda_0} \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_p}} w_0(\varpi_{r_p})}(u_{\ell'_p \Lambda_0})\bigr) \cdots\Bigr) \quad (3.4)$$

で, $b \in B^{\boldsymbol{\nu}}$ に対し

$$\langle d, \mathrm{wt}\,\Psi(b)\rangle = -D(b)$$

を満たすものが存在する (D は $B^{\boldsymbol{\nu}}$ 上のエネルギー関数を表す)．

(3.4) の右辺のクリスタルの部分集合を $B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr)$ と表すことにし, その次数付き指標 $\mathrm{gch}\, B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr)$ を

$$\mathrm{gch}\, B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr) = \sum_{u \in B(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}})} q^{\langle d, \mathrm{wt}(u)\rangle} e^{\mathrm{wt}_0(u)}$$

と定める (ただし $\mathrm{wt}_0 \colon B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr) \to P_0$ は $\mathfrak{h}_0$ に関するウェイト関数を表す)． すると柏原 [Kas93] と Lakshmibai-Littelmann-Magyar [LLM02] の結果を用いることで $\mathrm{gch}\, B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr)$ を具体的に求めることができ, それが命題 3.4 と一致することから $\mathrm{gch}\, \mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}} = \mathrm{gch}\, B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr)$ が示せる[*30]．

一方上の定理から,

$$\begin{aligned}\mathrm{gch}\, B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr) &= \sum_{u \in B(D^{\boldsymbol{\nu}})} q^{\langle d, \mathrm{wt}(u)\rangle} e^{\mathrm{wt}_0(u)} = \sum_{b \in B^{\boldsymbol{\nu}}} q^{-D(b)} e^{\mathrm{wt}(b)} \\ &= \sum_{\lambda \in P_0^+} \mathrm{ch}\, V(\lambda) \sum_{b \in B^{\boldsymbol{\nu}}_{\mathrm{hw}}(\lambda)} q^{-D(b)} = \sum_{\lambda \in P_0^+} X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q^{-1}) \mathrm{ch}\, V(\lambda)\end{aligned}$$

が従うことがわかる．ただし 3 番目の等式では, エネルギー関数が $U_q(\mathfrak{g}_0)$-連結成分で不変であることを用いた (第 4 節参照)．よって結論として

$$\mathrm{gch}\, \mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\lambda \in P_0^+} X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q^{-1}) \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

[*29] この $\mathcal{F}_{w\tau}$ は前小節で定義した $\mathcal{D}_{w\tau}$ のクリスタルにおける類似である．
[*30] むしろ, このような等式が成り立つように $B\bigl(\mathcal{D}^{\boldsymbol{\nu}}\bigr)$ を構成したのである．

が成り立つ.

定理 3.3 と定理 3.5 の仮定を合わせたものが, ちょうど定理 2.6 の仮定となる[*31]. よってこの仮定の下に, ステップ 1–3 を組み合わせることにより

$$\sum_{\lambda \in P_0^+} M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) \mathrm{ch}\, V(\lambda) = \sum_{\lambda \in P_0^+} X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) \mathrm{ch}\, V(\lambda)$$

が従うことがわかる. 既約 $\mathfrak{g}_0$ 加群の指標たちは互いに線形独立であるから, 任意の $\lambda \in P_0^+$ に対し $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ が従い, 証明が完了する.

4 付録: 1 次元状態和 $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$, フェルミ型和 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda.q)$ の詳細な定義

最後に, 1 次元状態和 $X(\boldsymbol{\mu}, \lambda, q)$ とフェルミ型和 $M(\boldsymbol{\mu}, \lambda, q)$ の正確な定義を述べておく. この節を通して $\mathfrak{g}$ はアフィンリー代数とし, $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\boldsymbol{\nu} = \big((r_1, \ell_1), \ldots, (r_p, \ell_p)\big)$ を固定しておく.

1 次元状態和 $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ の定義:

任意の KR クリスタル $B_1 = B^{r_1, s_1}, B_2 = B^{r_2, s_2}$ に対し $B_1 \otimes B_2$ は連結であり, クリスタルとしての同型 $R_{B_1, B_2} \colon B_1 \otimes B_2 \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes B_1$ がただ一つ存在する. R_{B_1, B_2} (以下省略して R と書くことも多い) は**組み合わせ R 行列**と呼ばれる.

定理 4.1 ([KKM+92])**.** 任意の KR クリスタル B_1, B_2 に対し, 関数 $H = H_{B_1, B_2} \colon B_1 \otimes B_2 \to \mathbb{Z}$ で

- 各 $U_q(\mathfrak{g}_0)$-連結成分で定数となる,
- $b_1 \otimes b_2 \in B_1 \otimes B_2$, $R(b_1 \otimes b_2) = \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1$ に対し

$$H(\tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2)) = \begin{cases} H(b_1 \otimes b_2) + 1 & \tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = \tilde{e}_0 b_1 \otimes b_2,\ \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{e}_0 \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) - 1 & \tilde{e}_0(b_1 \otimes b_2) = b_1 \otimes \tilde{e}_0 b_2,\ \tilde{e}_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{b}_2 \otimes \tilde{e}_0 \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) & \text{その他} \end{cases}$$

を満たすものが定数差を除いて一意に存在する.

定理の H_{B_1, B_2} (または H) を**局所エネルギー関数**と呼ぶ. 以下 H は適当に正規化されていると仮定する. $U_q'(\mathfrak{g})$ クリスタル B に対し, その**レベル** $\mathrm{lev}(B)$ を

$$\mathrm{lev}(B) = \min\{\langle K, \varepsilon(b) \rangle \mid b \in B\}$$

と定義する. ただし $\varepsilon \colon B \to P^+$ は $\varepsilon(b) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i(b) \Lambda_i$ と定義する. このとき KR クリスタル $B = B^{r, \ell}$ には, $\varepsilon\big(m'(B)\big) = \mathrm{lev}(B) \Lambda_0$ となる元 $m'(B)$ がただ一つ存在する.

定義 4.2. KR クリスタルのテンソル積 $B^{\boldsymbol{\nu}} = B^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p, \ell_p}$ 上に **(大域) エネルギー関数** $D = D_B \colon B \to \mathbb{Z}$ を以下で定義する.

(1) $B = B^{r,s}$ のとき, $b \in B$ に対し $D(b) = H(m'(B) \otimes b)$ と定義する.

[*31] 1 次元状態和 $X(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ は, 列 $\boldsymbol{\nu}$ の順序によらないことが知られている [OSS03, Proposition 2.15]. 一方フェルミ型和 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ も, 定義から明らかにこの性質を満たす. そのため $\ell_1 / c_{r_1} \geq \cdots \geq \ell_p / c_{r_p}$ という条件は無視してよい.

(2) $B = B_1 \otimes \cdots \otimes B_p$ $(B_i = B^{r_i,s_i})$ のとき, $b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \in B$ と $1 \le i \le j \le p$ に対し $b_j^{(i)}$ で

$$\begin{aligned} B_i \otimes B_{i+1} \otimes \cdots \otimes B_j &\xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \otimes \cdots \otimes B_{j-1} \\ b_i \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_j &\mapsto b_j^{(i)} \otimes \tilde{b}_i \otimes \cdots \otimes \tilde{b}_{j-1} \end{aligned}$$

となる元を表し,

$$D(b_1 \otimes \cdots \otimes b_p) = \sum_{1 \le i \le p} D(b_i^{(1)}) + \sum_{1 \le i < j \le p} H(b_i \otimes b_j^{(i+1)})$$

と定義する.

KR クリスタルのテンソル積 $B^{\boldsymbol{\nu}}$ 上のウェイト $\lambda \in P_0^+$ に関する 1 **次元状態和**は, このエネルギー関数 D を用いて

$$X(B^{\boldsymbol{\nu}}, \lambda, q) = \sum_{\substack{b \in B^{\boldsymbol{\nu}} \\ \widetilde{e}_i b = 0\ (i \in I_0) \\ \mathrm{wt}(b) = \lambda}} q^{D(b)}$$

と定義される.

フェルミ型和 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ の定義:

簡単のため $\mathfrak{g} \neq A_{2n}^{(2)}$ とする. $\boldsymbol{\nu}$ と $r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, 非負整数 $n_{r,\ell}$ を $n_{r,\ell} = \#\{1 \le j \le p \mid r_j = r,\ \ell_j = \ell\}$ によって定義する. 非負整数の無限列 $m = \{m_j^{(a)}\}_{a \in I_0, j \in \mathbb{Z}_{>0}}$ で和が有限なものに対し, 各 $a \in I_0$ と $j \ge 1$ ごとに **vacancy 数**

$$p_j^{(a)} \big(= p_j^{(a)}(m) \big) = \sum_{s \ge 0} n_{a,s} \min\{j, s\} - \frac{1}{{}^t t_a} \sum_{b \in I_0, s \ge 1} (\alpha_a, \alpha_b) \min\{j t_b, s t_a\} m_s^{(b)}$$

が定義される. ここで α_a は単純ルート, (,) は P_0 上の W_0 不変対称双線形形式で $\mathfrak{g}$ が non-twisted 型 (resp. twisted 型) のとき長ルート (resp. 短ルート) α に対し $(\alpha, \alpha) = 2$ となるもの, t_a は

$$t_a = \begin{cases} \frac{2}{(\alpha_a, \alpha_a)} & \mathfrak{g} : \text{non-twisted 型}, \\ 1 & \mathfrak{g} : \text{twisted 型}, \end{cases}$$

${}^t t_a$ は ${}^t\mathfrak{g}$（$\mathfrak{g}$ の Cartan 行列の転置に付随するアファイン Lie 代数）に関する t_a を表す. またこの vacancy 数を用いて, $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ によりパラメトライズされた無限非負整数列の集合 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu},\lambda}$ を

$$m = \{m_j^{(a)}\}_{1 \le a \le n, j \ge 1} \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu},\lambda} \Longleftrightarrow \text{任意の } a, j \text{ に対し } p_j^{(a)}(m) \ge 0,\ \text{かつ } \sum_{a,j} j m_j^{(a)} \alpha_a = \sum_{a,j} n_{a,j} j \varpi_a - \lambda$$

と定める (ϖ_a は基本ウェイト). また $cc(m) \in \mathbb{Z}$ を

$$cc(m) = \frac{1}{2} \sum_{a,b \in I_0, j,s \ge 1} (\alpha_a, \alpha_b) \min\{j t_b, s t_a\} m_j^{(a)} m_s^{(b)} - \sum_{a \in I_0} {}^t t_a \sum_{j,s \ge 1} n_{a,j} \min\{j, s\} m_s^{(a)}$$

と定める. このときフェルミ型和 $M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q)$ は以下のように定義される.

$$M(\boldsymbol{\nu}, \lambda, q) = \sum_{m \in \mathcal{H}_{\boldsymbol{\nu},\lambda}} q^{cc(m)} \prod_{a \in I_0, j \ge 1} \begin{bmatrix} p_j^{(a)} + m_j^{(a)} \\ m_j^{(a)} \end{bmatrix}_{q^{t_a}}.$$

ただし

$$\begin{bmatrix} p+m \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{p+1};q)_m}{(q;q)_m}, \qquad (x;q)_m = \prod_{j=0}^{m-1}(1-xq^j)$$

とする.

参考文献

[AK07] E. Ardonne and R. Kedem. Fusion products of Kirillov-Reshetikhin modules and fermionic multiplicity formulas. *J. Algebra*, Vol. 308, No. 1, pp. 270–294, 2007.

[Bet31] H. A. Bethe. Zur Theorie der Metalle, I. Eignwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette. *Z. Physik*, Vol. 71, pp. 205–231, 1931.

[Cha95] V. Chari. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 31, No. 5, pp. 873–911, 1995.

[CM06] V. Chari and A. Moura. The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 266, No. 2, pp. 431–454, 2006.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. Small representations of quantum affine algebras. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 30, No. 2, pp. 131–145, 1994.

[DFK08] P. Di Francesco and R. Kedem. Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, No. 7, pp. Art. ID rnn006, 57, 2008.

[FL99] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, Vol. 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pp. 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[FL07] G. Fourier and P. Littelmann. Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions. *Adv. Math.*, Vol. 211, No. 2, pp. 566–593, 2007.

[Ful97] W. Fulton. *Young tableaux*, Vol. 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

[Her06] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 596, pp. 63–87, 2006.

[HKO$^+$99] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Remarks on fermionic formula. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, Vol. 248 of *Contemp. Math.*, pp. 243–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[HKO$^+$02] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi. Paths, crystals and fermionic formulae. In *MathPhys odyssey, 2001*, Vol. 23 of *Prog. Math. Phys.*, pp. 205–272. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.

[Jim86] M. Jimbo. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, Vol. 11, No. 3, pp. 247–252, 1986.

[Jos85] A. Joseph. On the Demazure character formula. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 18, No. 3, pp. 389–419, 1985.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[Kas91] M. Kashiwara. On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 63, No. 2, pp. 465–516, 1991.

[Kas93] M. Kashiwara. The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula. *Duke Math. J.*, Vol. 71, No. 3, pp. 839–858, 1993.

[Kas02] M. Kashiwara. On level-zero representations of quantized affine algebras. *Duke Math. J.*, Vol. 112, No. 1, pp. 117–175, 2002.

[KKM$^+$92] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K.C̃. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki. Affine crystals and vertex models. In *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, Vol. 16 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pp. 449–484. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[KKR86] S. V. Kerov, A. N. Kirillov, and N. Yu. Reshetikhin. Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, Vol. 155, No. Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII, pp. 50–64, 193, 1986.

[KR86] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin. The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, Vol. 155, No. Differentsialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII, pp. 65–115, 194, 1986.

[KR87] A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin. Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, Vol. 160, No. Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 8, pp. 211–221, 301, 1987.

[KSS02] A.N. Kirillov, A. Schilling, and M Shimozono. A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 8, No. 1, pp. 67–135, 2002.

[Kum02] S. Kumar. *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, Vol. 204 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2002.

[LLM02] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar. Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties. *Compositio Math.*, Vol. 130, No. 3, pp. 293–318, 2002.

[LOS12] C. Lecouvey, M. Okado, and M. Shimozono. Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig q-analogues. *Math. Z.*, Vol. 271, No. 3-4, pp. 819–865, 2012.

[Mac95] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.

[Nak03] H. Nakajima. t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, Vol. 7, pp. 259–274 (electronic), 2003.

[Nao12a] K. Naoi. Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type. *Adv. Math.*, Vol. 229, No. 2, pp. 875–934, 2012.

[Nao12b] K. Naoi. Fusion products of Kirillov–Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. *Adv. Math.*, Vol. 231, No. 3-4, pp. 1546–1571, 2012.

[Nao13] K. Naoi. Demazure crystals and tensor products of perfect Kirillov-Reshetikhin crystals with various levels. *J. Algebra*, Vol. 374, pp. 1–26, 2013.

[NS06] S. Naito and D. Sagaki. Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II. *Adv. Math.*, Vol. 200, No. 1, pp. 102–124, 2006.

[NS08] S. Naito and D. Sagaki. Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations. *Compos. Math.*, Vol. 144, No. 6, pp. 1525–1556, 2008.

[NY97] A. Nakayashiki and Y. Yamada. Kostka polynomials and energy functions in solvable lattice models. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 3, No. 4, pp. 547–599, 1997.

[OS08] M. Okado and A. Schilling. Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. *Represent. Theory*, Vol. 12, pp. 186–207, 2008.

[OS11] M. Okado and R. Sakamoto. Stable rigged configurations for quantum affine algebras of nonexceptional types. *Adv. Math.*, Vol. 228, No. 2, pp. 1262–1293, 2011.

[OSS03] M. Okado, A. Schilling, and M. Shimozono. Virtual crystals and fermionic formulas of type $D^{(2)}_{n+1}, A^{(2)}_{2n}$, and $C^{(1)}_n$. *Represent. Theory*, Vol. 7, pp. 101–163 (electronic), 2003.

[Sch07] A. Schilling. $X = M$ theorem: fermionic formulas and rigged configurations under review. In *Combinatorial aspect of integrable systems*, Vol. 17 of *MSJ Mem.*, pp. 75–104. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.

[ST12] A. Schilling and P. Tingley. Demazure crystals, Kirillov-Reshetikhin crystals, and the energy function. *Electron. J. Combin.*, Vol. 19, No. 2, pp. Paper 4, 42, 2012. [Second author's name now "Tingley" on article].

[SZ06] M. Shimozono and M. Zabrocki. Deformed universal characters for classical and affine algebras. *J. Algebra*, Vol. 299, No. 1, pp. 33–61, 2006.

[国場 11] 国場敦夫. ベーテ仮説と組み合わせ論. 開かれた数学 5. 朝倉書店, 2011.

A connection formula of a divergent bilateral basic hypergeometric function

Takeshi MORITA (Osaka University)*

1. Aim and main methods

We show a connection formula for a divergent bilateral basic hypergeometric function

$$ {}_2\psi_1(a_1, a_2; b_1; q, x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n}{(b_1;q)_n (q;q)_n} \left\{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right\}^{-1} x^n \tag{1} $$

with the using of *the q-Borel-Laplace transformations*. Here, $(a;q)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ is the q-shifted factorial (see [2] for more details). The function (1) satisfies the second order linear q-difference equation

$$ \left(\frac{b_1}{q^2} - a_1a_2x\right) u(q^2x) - \left\{\frac{1}{q} - (a_1+a_2)x\right\} u(qx) - xu(x) = 0. \tag{2} $$

We deal with the divergent series (1) from the viewpoint of connection problems on linear q-difference equations. At first, we review connection problems on linear q-difference equations in unilateral cases and q-Borel-Laplace resummation methods.

2. Connection problems on q-difference equations

Connection problems on linear q-difference equations between solutions around the origin and infinity were studied by G. D. Birkhoff [1]. On second order q-difference equations, connection formulae between solutions around the origin and infinity are given by the following matrix form:

$$ \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}. $$

Here, $(u_1(x), u_2(x))$ is a fundamental system of solutions of second order linear q-difference equation around the origin and $(v_1(x), v_2(x))$ is a fundamental system of solutions around the infinity. We remark that the connection coefficients $C_{ij}(x)(1 \leq i, j \leq 2)$ are given by q-elliptic functions(i.e., $C_{ij}(qx) = C_{ij}(x)$ and unique valued). The first example with regular singular points was given by G. N. Watson [7]. Watson gave the connection formula for Heine's basic hypergeometric series. But other cases, namely, irregular singular cases has not known for a long time. Recently, J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang study local theory of q-difference equations with irregular singular points [6]. They introduce the q-Borel-Laplace transformations to study the q-Stokes phenomenon and Zhang gives connection formulae for some q-special functions. The author also give connection formulae for the q-confluent type basic hypergeometric function, the Hahn-Exton q-Bessel function and the divergent basic hypergeometric series which is related to the Ramanujan entire function [3, 4, 5].

This work was supported by KAKENHI (25-1840).
2000 Mathematics Subject Classification: 33D15, 34M40, 39A13.
Keywords: q-Borel-Laplace transformation, bilateral basic hypergeometric function.
*e-mail: `t-morita@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp`

3. The q-Borel-Laplace transformations

We define the q-Borel transformation and the q-Laplace transformation as follows:

Definition 1. *We assume that the function $f(x)$ is a formal power series such that $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n, \quad a_0 := 1$.*

1. *The q-Borel transformation of the first kind is*

$$\left(\mathcal{B}_q^+ f\right)(\xi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n = \varphi(\xi).$$

2. *The q-Laplace transformation of the first kind is*

$$\left(\mathcal{L}_q^+ \varphi\right)(x) := \frac{1}{1-q}\int_0^{\lambda\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\theta\left(\frac{\xi}{x}\right)} \frac{d_q\xi}{\xi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\varphi(\lambda q^n)}{\theta\left(\frac{\lambda q^n}{x}\right)}.$$

Here, $\theta(x)$ is the theta function of Jacobi and we remark that the q-Borel transformation is the formal inverse of the q-Laplace transformation. These resummation methods are powerful tools for the divergent series.

4. Local solutions around the infinity and Main theorem

The equation (2) also has solutions around the infinity:

$$v_1(x) = \frac{\theta(a_1x)}{\theta(x)} \sum_{n\geq 0} \frac{(qa_1/b_1;q)_n (b_1/a_1a_2x)^n}{(qa_1/a_2;q)_n (q;q)_n}, \quad v_2(x) = \frac{\theta(a_2x)}{\theta(x)} \sum_{n\geq 0} \frac{(qa_2/b_1;q)_n (b_1/a_1a_2x)^n}{(qa_2/a_1;q)_n (q;q)_n}.$$

We give the following theorem with the using of the q-Borel-Laplece transformations.

Theorem. *For any $x \in \mathbb{C}^* \setminus [-\lambda; q]$, we have*

$$\begin{aligned}
&\left(\mathcal{L}_{q,\lambda}^+ \circ \mathcal{B}_q^+ {}_2\psi_1(a_1, a_2; b_1; q, x)\right)(x) \\
&= \frac{(1/a_2, qa_1/a_2, b_1/a_1, q;q)_\infty}{(b_1, q/a_1, a_1/a_2, qa_2/a_1;q)_\infty} \frac{\theta(a_1\lambda/q)}{\theta(\lambda/q)} \frac{\theta(a_1qx/\lambda)}{\theta(qx/\lambda)} \frac{\theta(x)}{\theta(a_1x)} v_1(x) \\
&= \frac{(1/a_1, qa_2/a_1, b_1/a_2, q;q)_\infty}{(b_1, q/a_2, a_2/a_1, qa_1/a_2;q)_\infty} \frac{\theta(a_2\lambda/q)}{\theta(\lambda/q)} \frac{\theta(a_2qx/\lambda)}{\theta(qx/\lambda)} \frac{\theta(x)}{\theta(a_2x)} v_2(x),
\end{aligned}$$

provided that the set $[\lambda; q]$ is the q-spiral such that $[\lambda; q] := \left\{\lambda q^k | k \in \mathbb{Z}\right\}$ for any fixed $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$.

References

[1] G. D. Birkhoff, Proc. Am. Acad. Arts and Sciences, **49** (1914), 521 – 568.

[2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge, 2004.

[3] T. Morita, A connection formula between the Ramanujan function and the q-Airy function, `arXiv:1104.0755`.

[4] T. Morita, A connection formula of the Hahn-Exton q-Bessel Function, SIGMA,**7** (2011), 115, 11pp.

[5] T. Morita, A connection formula of the q-confluent hypergeometric function, `arXiv:1105.5770`.

[6] J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, Local analytic classification of q-difference equations, `arXiv:0903.0853`.

[7] G. N. Watson, The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

q-Dixon–Anderson 積分

– 多変数 Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式 –

伊藤 雅彦　(東京電機大学・未来科学部)

ベータ関数の多重積分による一般化の一つとして, 以下の積分公式が知られている:

$$\int_{z_n=x_{n-1}}^{x_n}\cdots\int_{z_2=x_1}^{x_2}\int_{z_1=x_0}^{x_1}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{n}|z_i-x_j|^{s_j-1}\prod_{1\le k<l\le n}(z_l-z_k)\,dz_1dz_2\cdots dz_n$$
$$=\frac{\Gamma(s_0)\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_n)}{\Gamma(s_0+s_1+\cdots+s_n)}\prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)^{s_i+s_j-1}. \tag{1}$$

($n=1$ のとき $x_0=0, x_1=1$ とおくとベータ関数とガンマ関数の関係になっている.) この公式 (1) は Dixon(1907) によって発見された。その後 1980 年代に Anderson [1] は公式 (1) を再発見し, Selberg 積分のガンマ関数による積表示 (ベータ関数の多重積分によるもう一つの一般化) を証明する際に, 公式 (1) を応用した. ここでは公式 (1) を Dixon–Anderson 積分と呼ぶ.

公式 (1) を経由して Selberg 積分の積表示を証明する Anderson の方法は, 1990 年代に Evans [3] によってその q-類似が考えられており, q-Selberg 積分の場合にも Anderson の方法が有効であることが確かめられた. (最近では, 楕円超幾何積分および級数の話題においても, 楕円 Selberg 積分に対して Anderson の方法は積極的に使われている.)

論文 [3] において, Evans は公式 (1) の q-類似として以下の公式を与えた:

$$\int_{z_n=x_{n-1}}^{x_n}\cdots\int_{z_2=x_1}^{x_2}\int_{z_1=x_0}^{x_1}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{n}\frac{(qz_i/x_j)_\infty}{(q^{s_j}z_i/x_j)_\infty}\prod_{1\le k<l\le n}(z_l-z_k)\,d_qz_1d_qz_2\cdots d_qz_n$$
$$=(1-q)^n\frac{(q)_\infty^n(q^{s_0+s_1+\cdots+s_n})_\infty}{(q^{s_0})_\infty(q^{s_1})_\infty\cdots(q^{s_n})_\infty}\prod_{0\le i<j\le n}\frac{x_j\theta(x_i/x_j)}{(x_iq^{s_j}/x_j)_\infty(x_jq^{s_i}/x_i)_\infty}. \tag{2}$$

ただし, $0<q<1$ とし $(a)_\infty:=\prod_{i=0}^\infty(1-aq^i)$, $\theta(x):=(x)_\infty(q/x)_\infty$ とする. また上記の「積分」は, 次で定義されるジャクソン積分 (q-級数) の累次積分である:

$$\int_0^a f(z)d_qz:=(1-q)\sum_{\nu=0}^\infty f(aq^\nu)aq^\nu,\qquad \int_a^b f(z)d_qz:=\int_0^b f(z)d_qz-\int_0^a f(z)d_qz.$$

公式 (2) を q-Dixon–Anderson 積分と呼ぶことにする. Evans はパラメータ s_i を自然数に制限して (2) を証明し, 解析接続によって s_i は複素数に拡張できるとしていた.

ところで, 1990 年代には Aomoto も超幾何関数の積分表示の立場から q-Selberg 積分を研究した ([2] 等). その一連の研究において Aomoto 自身は q-Dixon–Anderson 積分に関して触れていないが, 彼が q-Selberg 積分に対して使った手法は, 平行して q-Dixon–Anderson 積分にも適用できる.

今回, パラメータ s_i が複素数である条件のもとで q-Dixon–Anderson 積分を両側級数に拡張した後, (Aomoto が使った)q-差分方程式および漸近展開の方法を用いて, 拡張された q-Dixon–Anderson 積分の積表示を求め, その系として Evans の q-Dixon–Anderson 積分の公式を捉えた. 以下, 今回得られた結果を述べる.

$\Phi(z)$ と $\Delta(z)$ を

$$\Phi(z):=z_1z_2\cdots z_n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n+1}\frac{(qa_j^{-1}z_i)_\infty}{(b_jz_i)_\infty},\qquad \Delta(z):=\prod_{1\le i<j\le n}(z_i-z_j). \tag{3}$$

とし, 任意の $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対して, 関数 $I(x)$ を以下で定義する:

$$I(x) := \int_0^{x\infty} \Phi(z)\Delta(z)\,\frac{d_qz_1}{z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qz_n}{z_n}. \tag{4}$$

ただし, 上記の「積分」は格子 $\mathbb{Z}^n$ 上で定義される無限和で, 以下で与えられる:

$$\int_0^{x\infty} f(z)\,\frac{d_qz_1}{z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qz_n}{z_n} := (1-q)^n\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n} f(x_1q^{\nu_1},\ldots,x_nq^{\nu_n}).$$

主定理 任意の $x_1,\ldots,x_{n+1}\in\mathbb{C}^*$ に対し $(\widehat{x}_i) := (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1})\in(\mathbb{C}^*)^n$ とおくとき, 次が成立する:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}I(\widehat{x}_i) = C_0\,\frac{\theta(x_1x_2\cdots x_{n+1}b_1b_2\cdots b_{n+1})}{\prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}\theta(x_ib_j)}\prod_{1\le i<j\le n+1} x_j\theta(x_i/x_j). \tag{5}$$

ただし, C_0 は $x_1,\ldots,x_{n+1}$ によらない定数で, 以下で与えられる:

$$C_0 = (1-q)^n\frac{(q)_\infty^n\prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(qa_i^{-1}b_j^{-1})_\infty}{(qa_1^{-1}\cdots a_{n+1}^{-1}b_1^{-1}\cdots b_{n+1}^{-1})_\infty}.$$

特に (5) において特殊値 $x_i=a_i$ $(i=1,\ldots,n+1)$ をとると, Evans による (2) を得る:

系 $$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}I(\widehat{a}_i) = (1-q)^n\frac{(q)_\infty^n(a_1\cdots a_{n+1}b_1\cdots b_{n+1})_\infty}{\prod_{i=1}^{n+1}\prod_{j=1}^{n+1}(a_ib_j)_\infty}\prod_{1\le i<j\le n+1} a_j\theta(a_i/a_j).$$

(この式はパラメータの置き換え $a_j\to x_{j-1}$, $b_j\to q^{s_{j-1}}/x_{j-1}$ によって (2) と一致する.)

ところで、元の公式 (1) の場合, あるいはパラメータ s_i を自然数として公式 (2) の場合を考えるとき, $x_0=0$ にすることは単純に特別な場合に過ぎないが, パラメータ s_i を複素数として (5) にあたる式を考えるとき, $x_0=0$ とすることはその定義から意味をなさない. したがって, $x_0=0$ としたときの公式 (1) の q-類似は (5) とは独立に与える必要がある. 今, $\Phi(x)$ のパラメータのうまい極限をとると, $\Phi(x)$ は

$$\Phi'(z) := (z_1z_2\cdots z_n)^\alpha\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n\frac{(qa_j^{-1}z_i)_\infty}{(b_jz_i)_\infty}$$

に退化する. $I(x)$ の定義 (4) と同様に $\Phi'(z)$ を使って $I'(x)$ を定義すると, 次が成立する:

系 $$\begin{aligned} I'(x) = {}& \frac{(1-q)^n(q)_\infty^n\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n(qa_i^{-1}b_j^{-1})_\infty}{(q^\alpha)_\infty(q^{1-\alpha}a_1^{-1}\cdots a_n^{-1}b_1^{-1}\cdots b_n^{-1})_\infty} \\ &\times(x_1\cdots x_n)^\alpha\frac{\theta(q^\alpha x_1\cdots x_nb_1\cdots b_n)}{\prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n\theta(x_ib_j)}\prod_{1\le i<j\le n}x_j\theta(x_i/x_j). \end{aligned} \tag{6}$$

この式で $(x_1,\ldots,x_n)=(a_1,\ldots,a_n)$ とおいた後にパラメータの置き換え $\alpha\to s_0$, $a_j\to x_{j-1}$, $b_j\to q^{s_{j-1}}/x_{j-1}$ を行うことで, (1) の $x_0=0$ での q-類似が与えられる. よって単純ではないが結果的に, $x_0\neq 0$ の場合の (1) の q-類似である $I(x)$ が, $x_0=0$ の場合の (1) の q-類似である $I'(x)$ を含んでいることがわかる. また, この等式 (6) は Milne [5] と Gustafson [4] による「$U(n)$ 型多変数 Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式」に一致することが確認できる. (特に $n=1$ のとき, (6) は Ramanujan の ${}_1\psi_1$ 和公式と一致する.) したがって, 主定理の公式 (5) は Milne–Gustafson の多変数 Ramanujan ${}_1\psi_1$ 和公式の一般化としても理解できる. 講演では, 主定理の証明の概要等も紹介する予定である.

参考文献

[1] G. W. Anderson, Forum. Math. 3 (1991), 415–417. [2] K. Aomoto, Progr. Math. 131, Birkhäuser 1995, 1–12. [3] R. J. Evans, Contemp. Math. 166, 1994, 341–357.
[4] R. A. Gustafson, SIAM J. Math. Anal. 18 (1987), 1576–1596.
[5] S. C. Milne, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986), 263–277.

両側級数に拡張された q-Selberg 積分の積表示

– q-差分方程式, シフト付き基本対称式, 接続関係式 –

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部)

Selberg 積分 (1941) は多重積分によるベータ関数の一般化の一つであり, 以下で与えられる:

$$\frac{1}{n!}\int\cdots\int_{[0,1]^n}\prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha-1}(1-z_i)^{\beta-1}\prod_{1\le j<k\le n}|z_j-z_k|^{2\tau}\,dz_1dz_2\cdots dz_n$$
$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+(j-1)\tau)\Gamma(\beta+(j-1)\tau)\Gamma(j\tau)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-2)\tau)\Gamma(\tau)}. \tag{1}$$

この公式 (1) の q-類似は 1980 年代から 90 年代にかけて Askey [2] に始まり, Kadell [6], Habsieger [5], Evans [3] らによって研究された. ただし, この一連の研究ではパラメータ τ は自然数に制限されていた. 一方, 上記研究とは独立に, 1990 年代に Aomoto [1] は Selberg 積分の q-類似を超幾何関数の積分表示の観点から研究したが, パラメータ τ には自然数を除く複素数という条件があった. パラメータ τ に課する上記の条件によって, 両者が得た結果はほとんど似ているものの見かけ上微妙に異なっており, またそれら結果の証明方法にはそれぞれ異なる手法が用いられていた. (大雑把に言えば, Askey らの手法は代数的な式変形であり, Aomoto のものは漸近展開を用いる解析的なものである.) τ に課する条件が異なっていても, それぞれの場合に同様の結果が導出されていることで, その後この微妙な食い違いは注目されずに今日に至ったと思われる. しかしながら, τ に関する関数として q-Selberg 積分の解析接続を考えたときに, 両者の微妙な食い違いは気持ち悪く, また解析接続によって片方の結果から他方の結果が得られると結論付けられないジレンマが起こる.

ところで, 80 年代に Askey は, τ が自然数という条件のもとで, 他にも q-Selberg 積分に関する予想を述べている. その一つは公式 (1) における積分領域を $[0,1]^n$ から $[a,b]^n$ に平衡移動した結果の q-類似である. 通常の積分において, この平衡移動は単なる線形の変数変換に過ぎないが, q-類似の場合には, 使用される離散 q-積分 (ジャクソン積分) の制約から単純な変数変換を行うことができない. このことから変数変換を使わずに予想の証明をする必要があった. (さらに q-類似の場合には積分領域が原点から離れるほど状況が複雑になる傾向がある.) その後, この Askey による q-Selberg 積分の公式は Evans [4] によってその証明が述べられている (しかし証明の鍵となる補題は、証明が与えられることなく用いられているように講演者には思える). では, τ が自然数ではない (複素数の) 場合には、Askey–Evans による平衡移動した q-Selberg 積分の公式は自然に成立するのかという問題が, この講演の話題にいたる出発点であった.

今回まず, パラメータ τ が自然数かそうでないかで, q-Selberg 積分において Askey らと Aomoto によって与えられた状況をそれぞれ比較検討することにより, 両者の見かけの違いを解消した. そのことで τ に関して q-Selberg 積分の自然な解析接続が可能になり, τ が複素数の条件のもとで得られた Aomoto の結果の系として Askey らの仕事を捉えることができる. さらに, Askey–Evans による平衡移動した q-Selberg 積分に対しても, パラメータ τ を複素数として出発し, Aomoto による超幾何関数の積分表示を用いた解析的な手法を活用して結果を導き, その系として Askey–Evans による仕事を捉えた. 以下, 今回得られた結果を述べる.

$0<q<1$ とし $(a)_\infty := \prod_{i=0}^\infty (1-aq^i)$, $(a)_N := (a)_\infty/(aq^N)_\infty$ とする. $\Phi(z)$, $\Delta(z)$ を

$$\Phi(z) := \prod_{i=1}^n z_i \frac{(qa_1^{-1}z_i)_\infty}{(b_1z_i)_\infty}\frac{(qa_2^{-1}z_i)_\infty}{(b_2z_i)_\infty} \prod_{1\le i<j\le n} z_i^{2\tau-1}\frac{(qt^{-1}z_j/z_i)_\infty}{(tz_j/z_i)_\infty}, \quad \Delta(z) := \prod_{1\le i<j\le n}(z_i-z_j).$$

によって定義する. $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対して関数 $J(x)$ を以下で定義する:

$$J(x)=J(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \int_0^{x\infty}\Phi(z)\Delta(z)\,\frac{d_qz_1}{z_1}\cdots\frac{d_qz_n}{z_n}.$$

ただし, 上記の「積分」は格子 $\mathbb{Z}^n$ 上の q-級数で定義され「ジャクソン積分」と呼ばれる.

主定理 任意の $x_1,x_2\in\mathbb{C}^*$ に対し $\zeta_i(x_1,x_2) := (\underbrace{x_1,x_1t,\ldots,x_1t^{i-1}}_{i},\underbrace{x_2,x_2t,\ldots,x_2t^{n-i-1}}_{n-i})$ とおくとき, 次が成立する:

$$\sum_{i=0}^n J(\zeta_i(x_1,x_2))\prod_{j=1}^i \frac{(x_1t^{j-1})^{-1-2(n-j)\tau}}{\theta(x_2x_1^{-1}t^{-j+1})}\prod_{k=1}^{n-i}\frac{(x_2t^{k-1})^{-1-2(n-i-k)\tau}}{\theta(x_1x_2^{-1}t^{i-k+1})} = C\prod_{k=1}^n\frac{\theta(x_1x_2b_1b_2t^{n+k-2})}{\prod_{i=1}^2\prod_{j=1}^2\theta(x_ib_jt^{k-1})}.$$

ここで $\theta(x) := (x)_\infty(q/x)_\infty$ であり, C は x_1,x_2 によらない定数で, 以下で与えられる:

$$C=(1-q)^n\prod_{k=1}^n\frac{(q)_\infty(t)_\infty}{(t^k)_\infty}\frac{\prod_{i=1}^2\prod_{j=1}^2(qa_i^{-1}b_j^{-1}t^{-(k-1)})_\infty}{(qa_1^{-1}a_2^{-1}b_1^{-1}b_2^{-1}t^{-(n+k-2)})_\infty}.$$

特に τ が自然数のときには, 上記の公式は以下のように少し簡単な表示になる:

$$\sum_{i=0}^n(-1)^iJ(\zeta_i(x_1,x_2)) = C\,(-1)^{\tau\binom{n}{2}}q^{-\binom{\tau}{2}\binom{n}{2}}\prod_{j=1}^n\frac{(x_1x_2t^{j-1})^{(n-j)\tau}x_2\theta(x_1/x_2)\theta(x_1x_2b_1b_2t^{n+j-2})}{\theta(x_1b_1t^{j-1})\theta(x_1b_2t^{j-1})\theta(x_2b_1t^{j-1})\theta(x_2b_2t^{j-1})}.$$

さらに, ここで $x_1=a_1$, $x_2=a_2$ とおけば上式左辺は (ジャクソン積分の) 累次積分の形で表現できて, 以下のように Askey–Evans の q-Selberg 積分と等価な式を得る:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!}\int_{a_1}^{a_2}\cdots\int_{a_1}^{a_2}\prod_{i=1}^n z_i^{(n-1)\tau}\frac{(qa_1^{-1}z_i)_\infty}{(b_1z_i)_\infty}\frac{(qa_2^{-1}z_i)_\infty}{(b_2z_i)_\infty}\prod_{1\le j<k\le n}(z_j/z_k)_\tau(z_k/z_j)_\tau\,d_qz_1\cdots d_qz_n\\ &\quad=(1-q)^n\prod_{j=1}^n\frac{(q)_\infty(t)_\infty(a_1a_2b_1b_2t^{n+j-2})_\infty\,(a_1a_2t^{j-1})^{(n-j)\tau}a_2\theta(a_1/a_2)}{(t^j)_\infty(a_1b_1t^{j-1})_\infty(a_1b_2t^{j-1})_\infty(a_2b_1t^{j-1})_\infty(a_2b_2t^{j-1})_\infty}.\end{aligned}$$

ここで特徴的なのは, τ を複素数から自然数に制限すると, 主定理の公式の左辺の因子に退化が起こっていることである. つまり, Askey–Evans による既存の結果から主定理の公式を類推することは容易ではなく, ここが本研究の新しい部分である.

主定理の証明には (1) $J(x)$ が満たすパラメータに関する q-差分方程式を導出し, (2) パラメータの極限における漸近展開を与えることを用いた. q-差分方程式の導出には, Knop–Sahi [7] による A 型シフト付き対称多項式を応用した. また漸近展開を与える際, 鞍点が通常の積分領域 (サイクル) 上に見つけられないため, サイクルの取り替えによる接続公式を求めて, 鞍点をもつ虚サイクル上での漸近展開を求めた.

講演では, 以上の状況の概要を紹介する.

参考文献

[1] K. Aomoto, J. Algebraic Combin. 8 (1998), 115–126. [2] R. Askey, SIAM J. Math. Anal. 11 (1980), 938–951. [3] R. J. Evans, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 758–765.
[4] R. J. Evans, Contemp. Math. 166, 1994, 341–357. [5] L. Habsieger, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 1475–1489. [6] K. W. J. Kadell, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 969–986.
[7] F. Knop, S. Sahi, IMRN (1996), 473–486.

Dual Grothendieck polynomials and finite sum Cauchy formula

成瀬　弘　　　(岡山大学)*1
Alain Lascoux　(Université de Marne-la-Vallée)*2

記号の準備

$\mathbf{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y}_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とおく。$r^n = (r, \ldots, r)$ は、r を n 個ならべてできる分割とする。また、分割の順序は、Young 図形としての包含で定める。対称関数に関する記号法については、[5] に従うものとする。

グラスマン多様体の cohomology 環におけるシューベルト類を表す多項式として、Schur 関数 $S_\lambda(x)$ がよく知られている。また、K-theory でのシューベルトクラスを表す多項式としては、Lascoux-Schutzenberger が導入した Grothendieck 多項式 $G_\lambda(x)$ が知られている。(cf.[1]) Buch は、集合値 Young 半標準盤を用いて $G_\lambda(x)$ を定義している。行列式を用いた公式なども知られている。(cf.[3])

一方、dual Grothendieck 多項式 $g_\lambda(x)$ は、本質的には Lenart[7] に導入されているが、具体的な多項式としては、Lam-Pylyavskyy [4] で、定義されている。ここでは、この dual Grothendieck 多項式が、Schubert 多項式の特殊値として得られることに着目して、Jacobi-Trudi 型などの種々の行列式公式が自然に作れることを見る。また、この解釈から Cauchy 等式を導くことができることが示される。詳細は、[6] を参照のこと。

命題 1 (Giambelli 型公式) $\lambda = (a_1, a_2, ..., a_r | b_1, b_2, ..., b_r)$ を 分割 λ の Frobenius 表記とすると次が成り立つ。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) \quad = \quad \det\left(g^{(i,j)}_{(a_i|b_j)}(\mathbf{x}_n) \right)_{r\times r}$$

ここで、

$$\begin{aligned} g^{(i,j)}_{(a|b)}(\mathbf{x}_n) \quad := \quad & \sum_{p=0}^{a}\sum_{q=0}^{b} \binom{p+i-2}{p}\binom{q+j-2}{q} g_{(a-p|b-q)}(\mathbf{x}_n) \\ & + \sum_{t=2}^{\min(i,j)} \binom{a+i-t}{a}\binom{b+j-t}{b}. \end{aligned}$$

証明の方針： Flagged Schur 関数を Excited Young 図形 (cf.[2]) で表示し、その行列式公式を適用する。

本研究は科研費 (課題番号:25400041) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 41M15, 19L47
キーワード : Schubert calculus,factorial Schur function
*1 〒 700-8530 岡山市北区津島中３－１－１　岡山大学 大学院教育学研究科
e-mail: rdcv1654@okayama-u.ac.jp
web: http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/
*2 e-mail: Alain.Lascoux@univ-mlv.fr
web: http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al/

命題 2 λを分割とする。このとき、次が成立する。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n + y) = \sum_{\mu\subseteq\lambda} y^{c(\lambda/\mu)}\, g_\mu(\mathbf{x}_n)$$

ここで、$c(\lambda/\mu)$ は、skwe Young図形 λ/μ における空でない列の個数とする。

証明の方針： Young半標準盤についての全単射を作ることで証明できる。

系 3 平面分割Tに対して、$x^T = \prod_i x_i^{T(i)}$ と定める。ただし、$T(i)$ は iを成分に含むTの列の個数である。このとき、次が成立する。

$$g_\lambda(\mathbf{x}_n) = \sum_T x^T.$$

ここで、Tは1からnまでの自然数を成分にもつ平面分割の全体をうごく。

定理 4 （有限Cauchy等式）n, r を、自然数とする。このとき、次が成立する。

$$\sum_{\lambda\le r^n} G_\lambda(\mathbf{x}_n)\, g_\lambda(\mathbf{y}_n) = \sum_{\lambda\le r^n} s_\lambda(\mathbf{x}_n)\, s_\lambda(\mathbf{y}_n)\,.$$

注意：yの変数の個数は任意でよい。

証明の方針： より一般的な等式を、帰納法により示すことができる。

nを無限大にすることで、次のCauchy等式が得られる。

系 5

$$\sum_\lambda G_\lambda(\mathbf{x}_\infty)\, g_\lambda(\mathbf{y}_\infty) = \sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{x}_\infty)\, s_\lambda(\mathbf{y}_\infty) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}\,.$$

参考文献

[1] A.S.Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta. Math. 189 (2002) 37–8.

[2] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus,

[3] T.Ikeda and H.Naruse, K-theory analogue of factorial Schur P-,Q- functions, Advances in Mathematics 243 (2013), 22–66.

[4] T. Lam and P. Pylyavskyy, Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians, International Mathematics Research Notices 2007 rmn 125, (2007).

[5] A. Lascoux, *Symmetric Functions and Combinatorial Operators on Polynomials*, CBMS/AMS Lecture Notes **99** (2003).

[6] A. Lascoux and H. Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, preprint.

[7] C. Lenart, Combinatorial aspects of the K-theory of grassmannians, Ann Combin, 4:82, (2000).

Factorial Schur functions and vexillary permutations of types B, C and D

成瀬　弘　(岡山大学)*

トーラス同変cohomology環におけるSchubert類を表す二重Schubert多項式については、[2]においてB, C, D型の旗多様体に対して定義した。そこでは、差分商作用素が大きな役割を果たした。Weyl群の最長元に対して、多項式が定まれば、それから差分商作用素を施すことで、すべてのSchubert多項式は構成できる。最長元に対応する多項式は、Facotrial Schur関数を1個だけ使って表すことができた。この性質に注目して、Facotrial Schur関数を1個だけで表せるSchubert類がどれくらい存在するかという問題を考えた。

Facotrial Schur関数が差分商作用素に対してどのように振る舞うかを考慮することで、このようなSchubert類を次々と見つけてゆくことができる。結果として得られる類に対応するWeyl群の元は、Anderson-Fulton[1]が、vexillary permutationと呼んでいるものに丁度対応していることが判明した。この講演では、この事実について説明をする。

Factorial Schur 関数 Factorial Schur 関数は、[4]において導入された。次の通り、Hall-Littlewood関数の形を同変パラメータで変形したものである。

$(x|t)^k = (x-t_1)(x-t_2)\cdots(x-t_k)$とおく。$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$がstrict partitionのとき、すなわち自然数列で$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r > 0$を満たすものに対して、

$$P_\lambda^{(n)}(x|t) = \frac{1}{(n-r)!}\sum_{w\in S_n} w\left((x_1|t)^{\lambda_1}\cdots(x_r|t)^{\lambda_r}\prod_{1\le i\le r,\, i<j\le n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right)$$

と定める。対称群S_nは、変数$x_1, \ldots, x_n$の置換として作用する。また、

$$Q_\lambda^{(n)}(x|t) = 2^r P_\lambda^{(n)}(x|0,t)$$

と定める。

これらの多項式は、$x_1, \ldots, x_n$に関しては対称であるが、パラメータ$t_1, t_2, \ldots$に関しては一般に対称ではなく、ならべる順序に依存する。どのt_iとt_jが可換になるかは、分割λから容易にわかる。(これは、これらの多項式がSchubert類を代表していることの帰結でもある。)

$W(C_n)$で、C_n型のWeyl群を表す。この元は、次のように$1, 2, \ldots, n$の符号付置換で表示できる。Coxeter群としての生成元を次のように定める。$s_0 = [\bar{1}, 2, \ldots, n]$は、1と$-1$を互換し、他の文字は固定する。$s_i = [1, \ldots, i+1, i, \ldots, n]$ $(1 \le i < n)$は、iと$i+1$を入れ替え、$-i$と$-(i+1)$を入れ替える。残りの文字は固定する。

本研究は科研費(課題番号:25400041)の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 41M15, 19L47
キーワード：Schubert calculus,factorial Schur function
*〒700-8530 岡山市北区津島中３－１－１　岡山大学 大学院教育学研究科
e-mail: rdcv1654@okayama-u.ac.jp
web: http://ed-www.ed.okayama-u.ac.jp/~suugaku/naru/

Anderson-Fulton([1]) に従って、符号付き置換が vexillay であるということを次のように定める。

定義 1 type C の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ とは、3個の正整数の列

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= (k_1, \ldots, k_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } k_i < k_{i+1} \\ \mathbf{p} &= (p_1, \ldots, p_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } p_i \geq p_{i+1} \\ \mathbf{q} &= (q_1, \ldots, q_s) \text{ ただし、} \forall i \text{ について } q_i \geq q_{i+1}\end{aligned}$$

であって、すべての i について次の条件式を満たすものである。

$$(p_i - p_{i+1}) + (q_i - q_{i+1}) > k_{i+1} - k_i$$

このような、C の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、$W(C_n)$ の元 $w = w(\boldsymbol{\tau})$ を次の性質を満たすように、一意に定めることができる。

> $1 \leq i \leq s$ を満たす各整数 i に対して $a \geq p_i$ で $w(a) = \bar{b}$, $b \geq q_i$ を満たす a の個数が k_i に等しくなるような最小の長さの $w \in W(C_n)$

さらに、この C の三つ組 $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ に対して、strict partition $\lambda = \lambda(\boldsymbol{\tau})$ を、次のように定めることができる。

> 第 k 成分 λ_k を、ある i について $k = k_i$ となっているときは、$\lambda_k = p_i + q_i - 1$ とし、それ以外なら、$k_{i+1} < k < k_i$ となる i を用いて $\lambda_k = \lambda_{k_i} + k_i - k$ と定める。

定理 2 (1) 任意の strict partition λ が与えられたとき、これに対応する factorial Schur 関数 $Q_\lambda(x|t)$ のパラメータ t に、$-z_1, -z_2, \ldots$ および $t_1, t_2, ..$ を重複なくそれぞれの変数について添え字が小さい順に代入した多項式は、Schubert 多項式である。

(2) このようにして作られる Schubert 多項式に対応する Weyl 群の元は、Anderson-Fulton の意味での vexillary permutation である。

証明の方針は、差分商の列をうまく構成することで最長元からこの形の多項式が作れることを示す。

補足：K-理論の場合についても同様のことが成立している。この詳細については、[3] において、論じる予定である。

参考文献

[1] D. Anderson and W. Fulton, Degeneracy loci, Pfaffians, and vexillary signed permutations in types B,C, and D. ArXiv:1210.2066

[2] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, Adv. Math. 226 (2011) 840-886.

[3] T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse, work in progress.

[4] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q-functions. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 307 (2004), Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody. 10, 99–119, 281–282; translation in J. Math. Sci. (N. Y.) 131 (2005), no. 2, 5495–5507.

[5] H.Naruse, Factorial Schur functions and vexillary permutations of types B, C and D, in preparation.

$A_2^{(2)}$ の基本表現から得られるシューア関数の恒等式

Schur function identities and the basic representation of $A_2^{(2)}$

水川 裕司　(防衛大学校)*1
中島 達洋　(明海大学)*2
山田 裕史　(岡山大学)*3

1. 記号の準備

1.1. i-addable と 3-bar core

ストリクトな分割全体を SP で表す．$\lambda \in SP$ の第 j 列にある node x に対して $a(x) = \begin{cases} 0, & j \equiv 0,1 \pmod 3 \\ 1, & j \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$ と定める．例えば，$\lambda = (5,4,2)$ のとき $a(x)$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & & & \end{array}$$

と視覚的にあらわされる．そして，λ にいくつかの node を加えることで得られる $\mu \in SP$ において $x \in \mu \backslash \lambda$ が $a(x) = i$ $(i = 0,1)$ を満たす時，node x は **i-addable** という．

いま，$c_m \in SP$ $(m \in \mathbb{Z})$ を $\begin{cases} c_m = (3m-2, \ldots, 4, 1) & (m > 0), \\ c_0 = \emptyset & (m = 0), \\ c_{-m} = (3m-1, \ldots, 5, 2) & (m > 0). \end{cases}$ で定め，これらを **3-bar core** と呼ぶ．そして，

$$I_i^n(c_m) = \{\mu \in SP \mid \mu \supset c_m, |\mu| = |c_m| + n, a(x) = i \ (\forall x \in \mu/c_m)\}.$$

とおく，つまり，$I_i^n(c_m)$ は n 個の i-addable な node を c_m に加えて出来るストリクトな分割の全体のことである．例をあげると，$I_0^2(c_{-2}) = \{(7,2),(6,3),(6,2,1),(5,4),(5,3,1)\}$，$I_1^2(c_3) = \{(8,5,1),(8,4,2),(7,5,2)\}$ である．

1.2. 3-bar quotient

ストリクトな分割 $\lambda = (11,9,8,4,3,2,1)$ を例にとって **3-bar quotient** の説明をする．まず，図 0 を書き，その上にある λ の和因子に○を付ける（図 1，これを λ の 3-bar abacus という）．

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & -5 \end{array} \to \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 4 & 4 & -5 \end{array}.$$

図 0　　図 1　　図 2　　図 3

つぎに，図 2 のように，3-bar abacus の各数字を置き換える．さらに図 3 のように最後の列において○と空白の位置を逆転させる（この操作により，-5 以下の数字には全て丸がつくことに注意せよ）．以上

本研究は科研費 (課題番号:24740033, 24540020) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 22E65
キーワード：シューア関数, シューアの Q-関数, ボゾン-フェルミオン対応

*1 e-mail: mzh@nda.ac.jp
*2 e-mail: tatsu.nkjm@gmail.com
*3 e-mail: yamada@math.okayama-u.ac.jp

の操作により，先頭の列にある○のついた数字をそのまま読み取ることで，分割 $\lambda[0]=(3,1)$ が得られ，中央と最後の列の数字を小さい順に並べて出来るマヤ図形

$$\ldots \ \text{-8}\ \ \text{-7}\ \ \text{-6}\ \ \text{-5}\ \ -4\ \ -3\ \ \text{-2}\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ 3\ 4\ \ldots$$

から分割 $\lambda[1]=(3,3,2)$ を読み取ることが出来る．このようにして得られた分割の組 $(\lambda[0],\lambda[1])=((3,1),(3,3,2))$ を λ の 3-bar quotient と呼ぶ．

2. 主結果

佐藤変数 $t=(t_1,t_2,\ldots)$ および，$s=(s_1,s_3,s_5,\ldots)$ に対して，$S_\lambda(t)$ はシューア関数，$Q_\lambda(s)$ はシューアの Q-関数とする．ただし，佐藤変数と冪和対称関数との対応は $t_j=p_j/j$, $s_j=2p_j/j$ である．また，$\square(m,n)$ と書いて m 行 n 列の長方形で表される分割とする．このとき次のような結果を得た．

定理 2.1. m と n は非負整数とする．このとき，

$$(1)\quad \sum_{\mu\in I_1^n(c_m)}\delta_1(\mu)S_{\mu[1]}(t)=S_{\square(m-n,n)}(2t^{(2)}),$$

$$(2)\quad \sum_{\mu\in I_0^n(c_{-m})}\delta_0(\mu)Q_{\mu[0]}(s)S_{\mu[1]}(t)=\sum_{\mu\in I_0^n(c_{-m}),\mu[0]=\emptyset}\delta_0(\mu)S_{\mu[1]}(u)$$

が成り立つ．ここで，(1) において $S_\nu(2t^{(2)})=S_\nu(t)|_{t_j\mapsto 2t_{2j}}$，(2) において $u_j=\begin{cases}t_j & (j:even),\\ t_j-s_j & (j:odd)\end{cases}$ とする．ここで，$\delta_i(\mu)$ は $\mu\in SP$ によって定まる組合せ論的な記述が可能な符号である．

この定理の証明の概略を述べる：まず，アフィンリー環 $A_2^{(2)}$ の fermionic な実現において基本表現の各 maximal vector に Chevalley generator f_i ((1) は $i=1$ のとき，(2) は $i=0$ のときである) を繰り返し作用させる．これの boson-fermion 対応による像が左辺になる．一方で右辺は，$A_2^{(2)}$ の bosonic な実現において同様な事を行うことで得られる．

この定理の (1) は [5] によって与えられた Chen-Garsia-Remmel[1] による有名なプレシズムの公式の別表現である（[5] ではこの公式を組合せ論的な議論で示している）．また，[2] においてこれの $A_1^{(1)}$ 版の類似の公式が得られている．

(2) は”和イコール和”という式なので (1) ほど簡明ではない．しかし，これを導出する過程にあらわれる積分表示において変数 t にゼロを代入することにより次の定理を得た．

定理 2.2. 非負整数 m, n が $m-n+1\geq 0$ を満たすとき，

$$Q_{\Delta(m,n)}(u)=(-1)^{\binom{n+m+1}{2}}\sum_{\mu\in I_0^n(c_{-m}),\mu[0]=\emptyset}\delta_0(\mu)S^{odd}_{\mu[1]}(u),$$

が成り立つ．ここで, $\Delta(m,n)$ を分割 $(m,m-1,\ldots,m-(n-1))$ とし，さらに $S^{odd}_\lambda(u)=S_\lambda(u)\big|_{u_{2j}\mapsto 0}$ とする．

参考文献

[1] Y. Chen, A. Garsia and J. Remmel, Algorithms for plethysm, in Combinatorics and Algebra, Contemporary Math. 34(1984), 109-153.

[2] T. Ikeda, H. Mizukawa, T. Nakajima and H.-F. Yamada, Mixed expansion formula for the rectangular Schur functions and the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Adv. in Appl. Math. 40 (2008), no. 4, 514-535.

[3] V. G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, 3rd. ed. , Cambridge, 1990.

[4] H. Mizukawa, T. Nakajima, R. Seno and H.-F. Yamada, Schur function identities arising from the basic representation of $A_2^{(2)}$, arXiv:1305.1394.

[5] H. Mizukawa and H.-F. Yamada, Rectangular Schur functions and the basic representation of affine Lie algebras, Discrete Math. 298 (2005), no. 1-3, 285-300.

楕円 Ding-Iohara 代数と楕円 Feigin-Odesskii 代数から現れる可換な作用素の族

齋藤 洋介 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

Feigin, Hashizume, Hoshino, Shiraishi, Yanagida らは [1] において, Macdonald 作用素の自由場表示から Ding-Iohara 代数が現れることを示し, これと三角 Feigin-Odesskii 代数を用いて Macdonald 作用素と可換な作用素の族を構成した．一方 [2] において, 楕円 Macdonald 作用素の自由場表示および楕円 Ding-Iohara 代数が講演者によって構成された．今回の講演は論文 [3] に基づいている．主結果は, 楕円 Ding-Iohara 代数と既に存在が知られていた楕円 Feigin-Odesskii 代数を用いて, 楕円 Macdonald 作用素と可換な作用素の族を構成することができるということである.

分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$ $(N\in\mathbf{Z}_{>0})$ に対して, $\ell(\lambda):=\sharp\{i:\lambda_i\neq 0\}$ を分割 λ の長さ, $|\lambda|:=\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}\lambda_i$ を分割 λ の大きさとする．q-無限積 $(x;q)_\infty$ とテータ関数 $\Theta_p(x)$ をそれぞれ $(x;q)_\infty:=\prod_{n\geq 0}(1-xq^n)$, $\Theta_p(x):=(p;p)_\infty(x;p)_\infty(px^{-1};p)_\infty$ と定める.

定義 (作用素 $E(p;z)$, $F(p;z)$). 生成元 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}}$ と次の関係式で生成されるボソン $\mathcal{B}_{a,b}$ を用意する.

$$[a_m,a_n]=m(1-p^{|m|})\frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0},\quad [b_m,b_n]=m\frac{1-p^{|m|}}{(qt^{-1}p)^{|m|}}\frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0}.$$

$\gamma:=(qt^{-1})^{-1/2}$ として作用素 $\eta(p;z)$, $\xi(p;z)$ を次で定める：

$$\eta(p;z):=:\exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}p^{|n|}b_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{n}}{1-p^{|n|}}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right):,$$

$$\xi(p;z):=:\exp\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{-n}}{1-p^{|n|}}\gamma^{-|n|}p^{|n|}b_n\frac{z^n}{n}\right)\exp\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1-t^{n}}{1-p^{|n|}}\gamma^{|n|}a_n\frac{z^{-n}}{n}\right):.$$

ゼロモード a_0, Q で次の関係式を満たすものを用意する.

$$[a_0,Q]=1,\quad [a_n,a_0]=[b_n,a_0]=0,\quad [a_n,Q]=[b_n,Q]=0\quad (n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}).$$

記号 $\widetilde{\eta}(p;z):=(\eta(p;z))_-(\eta(p;p^{-1}z))_+$, $\widetilde{\xi}(p;z):=(\xi(p;z))_-(\xi(p;p^{-1}z))_+$ を用いて作用素 $E(p;z)$, $F(p;z)$ を $E(p;z):=\eta(p;z)-\widetilde{\eta}(p;z)t^{-a_0}$, $F(p;z):=\xi(p;z)-\widetilde{\xi}(p;z)t^{a_0}$ で定める.

定義 (楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$ [1]). 関数 $\varepsilon_n(q,p;x)\,(n\in\mathbf{Z}_{>0})$ を次で定める.

$$\varepsilon_n(q,p;x):=\prod_{1\leq a<b\leq n}\frac{\Theta_p(qx_a/x_b)\Theta_p(q^{-1}x_a/x_b)}{\Theta_p(x_a/x_b)^2}.$$

関数 $\omega_p(x,y)$ を次で定める.

$$\omega_p(x,y):=\frac{\Theta_p(q^{-1}y/x)\Theta_p(ty/x)\Theta_p(qt^{-1}y/x)}{\Theta_p(y/x)^3}.$$

n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ による対称子を $\mathrm{Sym}(f(x_1,\cdots,x_n)) := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\sigma\cdot(f(x_1,\cdots,x_n))$ とする. m 変数関数 $f(x_1,\cdots,x_m)$ と n 変数関数 $g(x_1,\cdots,x_n)$ の star product を次で定める.

$$\begin{aligned}&(f*g)(x_1,\cdots,x_{m+n})\\ &:= \mathrm{Sym}\Bigg[f(x_1,\cdots,x_m)g(x_{m+1},\cdots,x_{m+n})\prod_{\substack{1\leq\alpha\leq m\\ m+1\leq\beta\leq m+n}}\omega_p(x_\alpha,x_\beta)\Bigg].\end{aligned}$$

分割 λ に対し $\varepsilon_\lambda(q,p;x) := \varepsilon_{\lambda_1}(q,p;x)*\cdots*\varepsilon_{\lambda_{\ell(\lambda)}}(q,p;x)$ とおく. $\mathcal{A}_0(p) := \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_n(p) := \mathrm{span}\{\varepsilon_\lambda(q,p;x) : |\lambda| = n\}\,(n\geq 1)$ とし, 楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$ を $\mathcal{A}(p) := \bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{A}_n(p)$ に上で定めた star product によって積構造を入れたものとして定める. 楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$ は star product について unital, associative, commutative な代数であることが知られている [1].

定義 (写像 $\mathcal{O}_p$). 写像 $\mathcal{O}_p$ ($\mathcal{A}(p)$ の元をボソンの作用素に対応させる写像) を次で定める.

$$\mathcal{O}_p(f) := \Bigg[f(z_1,\cdots,z_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}\omega_p(z_i,z_j)^{-1}E(p;z_1)\cdots E(p;z_n)\Bigg]_1 \quad (f\in\mathcal{A}_n(p)).$$

ここで記号 $[f(z_1,\cdots,z_n)]_1$ は関数 $f(z_1,\cdots,z_n)$ の $z_1,\cdots,z_n$ についての定数項を表し, これを $\mathcal{A}(p)$ 全体に線型に拡張する.

定理. 楕円 Feigin-Odesskii 代数 $\mathcal{A}(p)$ の写像 $\mathcal{O}_p$ による像 $\mathcal{M}(p) := \mathcal{O}_p(\mathcal{A}(p))$ は可換なボソンの作用素の族である.

写像 $\mathcal{O}_p$ の定義において, $\omega_p(x,y)\to\omega'_p(x,y) := \omega_p(x,y)\big|_{\substack{q\to q^{-1}\\ t\to t^{-1}}}$, $E(p;z)\to F(p;z)$ としたものによって写像 $\mathcal{O}'_p$ を定める. $\mathcal{M}'(p) := \mathcal{O}'_p(\mathcal{A}(p))$ とおくと, これも可換なボソンの作用素の族になる. 更に作用素の族 $\mathcal{M}(p)$, $\mathcal{M}'(p)$ について次が成り立つ.

定理. 作用素の族 $\mathcal{M}(p)$, $\mathcal{M}'(p)$ は互いに可換である : $[\mathcal{M}(p),\mathcal{M}'(p)] = 0$.

以上で得られたボソンの作用素の族 $\mathcal{M}(p)$, $\mathcal{M}'(p)$ を楕円 Macdonald 作用素と可換な作用素の族に対応させる規則は [3] にある.

参考文献

[1] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida. *A Commutative Algebra on Degenerate* $\mathbf{CP}^1$ *and Macdonald Polynomials*. J. Math. Phys. **50** (2009) arXiv:0904.2291.

[2] Y. Saito. *Elliptic Ding-Iohara Algebra and the Free Field Realization of the Elliptic Macdonald Operator*. (2013) arXiv:1301.4912.

[3] Y. Saito. *Commutative Families of the Elliptic Macdonald Operator*. (2013) arXiv:1305.7097.

特別講演

正の有理レベルにおける sl_2 型拡大 W 代数と その表現

土屋 昭博　(東京大学IPMU)

1. 共形場理論と頂点作用素代数

共形場理論はロシアの３人の物理学者Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [BPZ] によって２次元統計力学における臨界現象を記述する場の量子論として展開された。そこでは、V. G. Kac, Feigin-Fuchs [FF1][FF2][FF3] により展開されていた Virasoro 代数の表現論、特に共形異常＝中心荷電 c が $c_{p_+,p_-} = 1 - 6\frac{(p_+-p_-)^2}{p_+p_-}$, $p_+, p_- \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ は互いに素, な場合の極小表現を用いて理論が展開された。結果として、臨界現象における最も重要な物理量である臨界指数が表現論における共形次元に同定されたのみでなく、対応する場の量子論における primary fields 達に関する N 点関数系を完全に特徴づける確定特異点型のホロノミック系が発見された。このホロノミック系は、極小表現の圏においては primary field に対応する Verma 加群は十分たくさんの Null ベクトルを持つことから、この Null ベクトルに対応する子孫場を N 点関数系の中で零とおいて得られた。

頂点作用素代数は、共形場理論における最も重要な概念であるエネルギー・モーメント・テンソル＝ Virasoro 代数の生成作用素、primary 場とその子孫場、場の作用素達の局所性と作用素展開等を公理化して Borcherds やその他の人々により導入された。

現段階では、頂点作用素代数V を与えた時、V 加群のなすアーベル圏をどのように設定するかは良くわかっていない。V に更にデータを付け加えた上で、このデータに基いて V 加群のなすアーベル圏を設定する必要があると思われる。このためこの論考では、sl_2 型の W 代数および拡大 W 代数とよぶ頂点作用素代数にあてはまる形で表現のなすアーベル圏を設定する。たとえば $\mathfrak{g}$ を ADE 型単純リー環で、そのランクが１より大きいとする。$\mathfrak{g}$ 型の W 代数や拡大 W 代数を考える際、対応する表現については少々異なる条件をつけてアーベル圏を設定する必要がある。これは将来の課題である。

頂点作用素代数は共形場理論の代数的部分であり、共形場理論を頂点作用素代数とその表現論の上に展開することが一つの方法であり、数学者にとって分かりやすい。

頂点作用素代数に付随する共形場理論において [BPZ] による極小系列のようにＮ点関数系を特徴づける確定特異点型微分方程式系が存在するためには、頂点作用素代数は非常に強い有限性条件を満たす必要がある。この講演の目的はそのような頂点作用素代数の例を構成し、表現論を展開することである。

念のために注意しておくが、超弦理論においても共形場理論は大きな役割を持つが、そこで現れる頂点作用素代数はこのような強い有限性条件を持っていない。弦の中心モーメントがもつ共形次元が連続パラメータを持つためである。頂点作用素代数の有限性に注目したこの講演とは別の側面を持っているのである。

上に述べた強い有限性条件を持つ頂点作用素代数の典型例は、Virasoro代数の極小表現に付随する頂点作用素代数およびその拡張である単純 Lie 環に対応して定義される W 代数の極小表現に付随する頂点作用素代数である。これについては 2013 年春の学会における荒川知幸氏の代数学特別講演を参照されたい。さらに affine リー環の可

2013 年 9 月 日本数学会無限可積分系セッション特別講演

積分表現に付随する頂点作用素代数や、even integral lattice に付随して定義される格子頂点作用素代数がある。

これらの頂点作用素代数は、次のような強い有限性を持つ。すなわち、この頂点作用素代数の表現のつくるアーベル圏を考えると、そのアーベル圏の既約表現の数は有限であり、アーベル圏としては半単純である。すなわち、すべての表現は単純加群の有限個の直和である。

近年、物性物理学において、N 点関数系を特徴づける確定特異点型のホノロミック系が存在するが、その解に log 型の関数が現れる log 型共形場理論が注目を浴びている。このような共形場理論を記述する頂点作用素代数は、その表現のつくるアーベル圏の既約表現の数は有限個であるが、アーベル圏としては半単純でなく、表現に対して Virasoro 代数の零モード作用素 $L[0]$ の固有空間分解を考えると、一般には対角化できず、Jordan block が現れる。

このような頂点作用素代数の例を構成し、その表現のカテゴリーの性質を明らかにすることは非常に難しいことである。

2006 年、Feigin 達 4 人の数学者 [FGST06][FGST07] は、互いに素な正の整数の組 p_+, p_- に対して (p_+, p_-) 型の W 代数と呼んでいる頂点作用素代数を定義し、既約表現の構成とその構造、表現の指標をテータ関数を使って表示し、指標達に関する modular 不変性を確立するなど、数々の注目すべき結果を発表した。しかし、その議論や結論は非常に荒っぽいものであり、その結果を厳密化し、精密化し、さらに発展させることが期待される。

講演者は、Simon Wood 氏（IPMU）と共同でこの問題に取り組み、$p_+, p_- \geq 2$ の場合に現れる screening 作用素代数の積を積分する twisted cycle の正則化を、理論を $\mathbb{C}$ 係数から discrete valuation ring $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ に持ち上げることにより行ない、Feigin 達 4 人の結果の厳密化、精密化を行なった。

講演では我々の論文 [TW] の主結果を話す予定であるが、この予稿ではそれに先立って共形場理論における場の作用素、互いに局所的であること、作用素展開などについて丁寧に説明を行った。この部分の解説が役に立つことを願っている。

2. 場の作用素と局所性

共形場理論における最も重要な概念は、(1) エネルギー・モーメント・テンソル $T(z)$ の存在、(2) 2 つの場の作用素 $A(z)$, $B(z)$ が互いに局所的であること、そこより生じる場の作用素の積 $A(z)B(w)$ の $z = w$ のまわりでの作用素展開、(3) 場の作用素 $A(z)$ の子孫の場の作用素の存在、これを言い切った field-state 対応である。

頂点作用素代数（vertex operator algebras, VOA）はこの性質を公理化して得られた。頂点作用素代数の公理系は一見複雑なものであるが、共形場理論の視点を持ってみると見通しが良くなる。さらに言えば、共形場理論の視点を持たないとその性質は解明できない。

まず、共形場理論で重要な場の作用素であるエネルギー・モーメント・テンソル

$$T(z) = \sum_n L[n] z^{-n-2}$$

を見ておく。このとき、$T(z)$ の Fourier 係数 $L[n]$ は、考えているベクトル空間に作用している作用素である。これらは次のリー環の構造をもち、このリー環を Virasoro

リー代数という。

$$\mathfrak{L} = \sum_n \mathbb{C}L[n] \oplus \mathbb{C}C$$

$$[L[m], L[n]] = (m-n)L[m+n] + \frac{1}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n.0}C$$

C は $\mathfrak{L}$ の中心の元である。共形場理論を考えるとき、$C = c\,\mathrm{id},\ c \in \mathbb{C}$ と固定される。このとき、共形場理論は共形異常あるいは中心荷電 c をもつという。

$c \in \mathbb{C}$ を固定したとき、中心荷電 c をもつ $\mathfrak{L}$ の表現論を考える。表現の種類として次の２つの場合が重要である。

1. $c = 0$ のとき、$\mathfrak{L}$ の自分自身への adjoint 表現が典型例である。

2. $c \neq 0$ のとき、$\mathfrak{L}$ の $C = c\,\mathrm{id}$ の表現で次の条件を満たすものを考える。

$$M = \sum_{h \in \mathbb{C}} M[h],\ \dim M[h] < \infty\ \bigl(M[h] = \{m \in M;\ (L[0]-h)^k m = 0,\ k \geq 1\}\bigr)$$

であり、

$$H(M) = \{h \in \mathbb{C};\ M[h] \neq 0\}$$

とおけば高々可算個の複素数 h_i で $h_i - h_j \notin \mathbb{Z}\ (i \neq j)$ を満たすものが存在して、

$$H(M) \subseteq \bigcup_i h_i + \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

をみたす。

この条件をみたす左 $\mathfrak{L}$ 加群のつくる Abel 圏を $\mathfrak{L}_c$-Mod と表すことにする。

$\mathfrak{L}$ の部分リー環を

$$\mathfrak{L}_{\geq 0} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{C}L[n] \oplus \mathbb{C}C, \quad \mathfrak{L}_{>0} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{C}L[n], \quad \mathfrak{L}_{<0} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{C}L[-n]$$

とおく。定義により、$M \in \mathfrak{L}_c$-Mod は次の性質をもつ：任意の $m \in M$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{L}_{\geq 0})m < \infty.$$

$U(\mathfrak{L})$ で $\mathfrak{L}$ の普遍展開環を表し、$c \in \mathbb{C}$ について、$U_c(\mathfrak{L})$ で $U(\mathfrak{L})$ において $C = c\,\mathrm{id}$ とおいたものを表す。

ここで、Abel 圏 $\mathfrak{L}_c$-Mod の単純対象をすべて求めておく。

$h \in \mathbb{C}$ について、$|h\rangle$ を生成元として次の基本関係式で定義される $\mathfrak{L}_c$-Mod の元を共形次元 $h \in \mathbb{C}$ をもつ Verma 加群と呼び、M_h で表す。

$$L[n]|h\rangle = 0\ (n \geq 1),\ C|h\rangle = c|h\rangle$$

$$L[0]|h\rangle = h|h\rangle$$

リー環の普遍展開環に関する Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により、左 $U(\mathfrak{L}_{<0})$ 加群として次は同型である。

$$U(\mathfrak{L}_{<0}) \longrightarrow M_h, \quad P \mapsto P|h\rangle$$

各 $h \in \mathbb{C}$ について、M_h は唯一の既約商加群 L_h を持つことが分かる。$\mathfrak{L}_c$-Mod の単純対象は $\{L_h : h \in \mathbb{C}\}$ でつくされる。

重要な問題として、M_h はいつ可約か、言い換えると、いつ M_h と L_h は異なるか、また、そのとき L_h の $\mathfrak{L}_c$-module としての構造が問題になる。この問題は、V. G. Kac, Feigin-Fuchs により 1980 年代初めに完全に解決された。これを述べる前に記号を用意する。

複素数の組 (κ_+, κ_-) で $\kappa_+ \cdot \kappa_- = 1$, $c = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ となるものを取る。c と組 (κ_+, κ_-) は 1 対 1 に対応する。整数の組 $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ について、

$$h_{r,s} = \frac{r^2 - 1}{4}\kappa_+ - \frac{1}{2}(rs - 1) + \frac{s^2 - 1}{4}\kappa_-$$

とおく。$h_{r,s} = h_{-r,-s}$ である。

定理 (V. G. Kac, Feigin-Fuchs). Verma 加群 $M_h \in \mathfrak{L}_c$-Mod が可約であるための必要十分条件は、$r \geq 1$, $s \geq 1$ なる (r, s) が存在して $h = h_{r,s}$ と表されることである。

注意. $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ のとき、$\{h_{r,s},\ r \geq 1, s \geq 1\}$ は互いに相異なる元よりなる。しかし、$\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q}^*$ のときは、$\{h_{r,s}\}$ 達の間には関係が生じる。例えば、$\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}$, $p_+, p_- \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, (p_+, p_-) が互いに素なとき、$h_{r+p_+, s+p_-} = h_{r,s}$ が成立する。

さらに、$r \geq 1$, $s \geq 1$ のとき、$L_{h_{r,s}}$ の $\mathfrak{L}$ -加群の構造は Fegin-Fuchs により完全に分かっている。この講演では $p_+, p_- \geq 2$, $(p_+, p_-) = 1$ のときが現れ、そのとき $L_{h_{r,s}}$ の詳しい構造が問題となる。

共形場理論における最も重要な概念である 2 つの場の作用素 $A(z)$, $B(z)$ が互いに局所的であること, 互いに局所的な場の作用素の積 $A(z)B(w)$ の $z = w$ の周りでの作用素展開について説明する。ここでは、共形場理論に則した説明をする。大事な概念なので、丁寧に行う。

中心荷電 $c \neq 0$ を固定し、$M \in \mathfrak{L}_c$-Mod とし、M について考える。

$$\mathrm{End}^f(M) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}^f(M)[d]$$

とおく。ここに、

$$\mathrm{End}^f(M)[d] = \{f : M \longrightarrow M, \mathbb{C}\text{-linear}, [L[0], f] = df\}$$

このとき、$\mathrm{End}^f(M)$ は $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Z}$-graded algebra となる。また、各 $d \in \mathbb{Z}$ と $N \in \mathbb{Z}$ について、

$$\begin{aligned} I_N[d] = \{f \in \mathrm{End}^f(M)[d]\ ;\ &\text{各}\, h \in \mathbb{C}\, \text{について}\, f = f_2 \circ f_1 \text{と分解する}, \\ & f : M[h] \xrightarrow{f_1} M[h - N] \xrightarrow{f_2} M[h + d]\} \end{aligned}$$

とおけば、次が成立する。

$$\mathrm{End}^f(M)[d] \supseteq I_0[d] \supseteq I_1[d] \supseteq \ldots, \quad \bigcap_N I_N[d] = 0,\ \bigcup_N I_N[d] = \mathrm{End}^f(M).$$

$\mathrm{End}^f(M)[d]$ には、$\{I_N[d]\}$ を零の近傍系としてコンパクトな線形位相が入る。$\mathrm{End}^f(M) = \sum_d \mathrm{End}^f(M)[d]$ の積はこの位相について連続である。また、$\mathrm{End}^f(M) \times M \longrightarrow M$ なる積は M に discrete 位相を入れて連続である。

さて、$\mathrm{End}^f(M)$ は $U(\mathfrak{L})$ について両側加群となる：

$$f \in \mathrm{End}^f(M),\ P, Q \in U(\mathfrak{L}), m \in M \text{ に対し、} (PfQ)(m) = Pf(Qm)$$

である。さらに、$\mathfrak{L}$ は adjoint で $\mathrm{End}^f(M)$ に作用する：$\ell \in \mathfrak{L}$ として、

$$\mathrm{ad}(\ell)(f) = \ell f - f\ell.$$

$\mathfrak{L}$ の adjoint action は $U(\mathfrak{L})$ の derivation として拡張され、

$$\mathrm{ad} :\ U(\mathfrak{L}) \longrightarrow \mathrm{End}^f(M)$$

を得る。

$\mathrm{End}^f(M)$ が $U(\mathfrak{L})$ の adjoint 表現付両側 $U_c(\mathfrak{L})$ 加群の構造を持つことは重要である。両側 $U(\mathfrak{L})$ action は中心荷電 c をもち、$U_c(\mathfrak{L})$ の作用となり、adjoint 表現は中心荷電 $c = 0$ をもち、$U_0(\mathfrak{L})$ の作用に落ちることを注意しておく。

M 上の場の作用素を定義しよう。$\Delta \in \mathbb{Z}$ を固定する。$A(z) \in \mathrm{End}^f(M)[[z, z^{-1}]]$ が M 上の共形次元 Δ をもつ場の作用素とは $A(z)$ が次の形の Fourier 展開を持つことをいう。

$$A(z) = \sum_n A[n] z^{-n-\Delta}, \quad A[n] \in \mathrm{End}^f(M)[-n]$$

共形次元 Δ をもつ M 上の場の作用素全体のつくるベクトル空間を $\mathfrak{F}(M)[\Delta]$ と表し、$\mathfrak{F}(M) = \sum_\Delta \mathfrak{F}(M)[\Delta]$ とおく。$\mathfrak{F}(M)$ を M 上の場の作用素空間という。

上の Fourier 展開における次数の関係式は、次の微分方程式と等価である。

$$\left(z\frac{d}{dz} + \Delta_A \right) A(z) = [L[0], A(z)]$$

$A(z)$ を $\mathfrak{F}(M)$ の元として、$u \in M, \varphi \in M^\vee$ を固定する。ここで

$$M^\vee = \sum_h \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M(h), \mathbb{C})$$

である。$A(z)$ の行列要素について

$$\langle \varphi | A(z) | u \rangle \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

が成立する。このことより、$A(z)$ は $\mathbb{P}^1 \ni z$ 上 $z = 0, \infty$ のみに極をもつ、無限次元行列環 $\mathrm{End}^f(M)$ に値をもつ有理関数と考えることが出来る。行列要素を考えることにより、$A(z)$ は $\mathrm{End}^f(M)[[z, z^{-1}]]$ の元としてのみでなく、$\mathrm{End}^f(M)$ に値を持つ $\mathbb{P}^1$ 上の有理関数と考えることが出来る。

今、$A(z)$, $B(z)$ を $\mathfrak{F}(M)$ の２つの元とする。$A(z)B(w)$, $B(w)A(z)$ はとりあえず $\mathrm{End}^f(M)[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$ の元であるが、この２つを $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上定義された $\mathrm{End}^f(M)$ に値を持つ有理関数と考えることが出来るか、という問題を考える。これは一般には不可能であるが、$\mathfrak{F}(M)$ の元の組 $(A(z), B(z))$ が次に述べる互いに局所的と呼ばれる非

常に強い条件をみたすときに可能である。なお、ここではボゾン的である場合のみを扱い、フェルミ的である場合は扱わない。まず、$\mathfrak{F}(M)$ 上には $\mathbb{Z}$-graded algebra $\mathrm{End}^f(M)$ が両側から作用していることに注意しよう:

$$f, g \in \mathrm{End}^f(M), A(z) \in \mathfrak{F}(M) \mapsto fA(z)g = \sum_n (fA[n]g) z^{-n-\Delta_A}.$$

である。なお、$\mathrm{deg} f = k$, $\mathrm{deg} g = \ell$ のとき、$fA(z)g$ の共形次元は $k + \Delta_A - \ell$ となる。このため、$A(z) = \sum_n A[n] z^{-n-\Delta_A}$ と共形次元を意識した表示ではなく $A(z) = \sum A_{(n)} z^{-n-1}$ という表示を使うこともある。

さて、$(A(z), B(z))$ が互いに局所的であることを定義しよう。このため、次の 4 つの条件を考える。$A(z)$, $B(z)$ はそれぞれ共形次元 Δ_A, Δ_B を持つとしよう。自然数 $N \geq 0$ が存在して、任意の $u \in M$ と $\varphi \in M^\vee$ について次の条件達を考える:

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数 $C_{\varphi,u}$ で次の性質のものが存在する。$C_{\varphi,u}$ はその極を $z = 0, \infty$, $w = 0, \infty$ および $z = w$ のみにもち、$z = w$ での極の位数は N 以下である。さらに、次の 1, 2, 3, 4 がみたされる。

1. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_1 = \{|z| > |w| > 0\}$ で局所座標 (z, w) で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} = \langle \varphi | A(z) B(w) | u \rangle &= \sum_n \langle \varphi | [A[n] B(w)] | u \rangle z^{-n-\Delta_A} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | A[n] B(w) | u \rangle z^{-n-\Delta_A} w^{-n-\Delta_B}. \end{aligned}$$

2. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_2 = \{|w| > |z| > 0\}$ で局所座標 (z, w) で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} = \langle \varphi | B(w) A(z) | u \rangle &= \sum_m \langle \varphi | [B[m] A(z)] | u \rangle w^{-m-\Delta_B} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | B[m] A(z) | u \rangle z^{-n-\Delta_A} w^{-m-\Delta_B}. \end{aligned}$$

3. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_3 = \{|w| > |z - w| > 0\}$ で局所座標 $(w, z - w)$ で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} = \langle \varphi | A(z - w) B(w) | u \rangle &= \sum_n \langle \varphi | (A[n] B)(w) | u \rangle (z - w)^{-n-\Delta_A} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | A[n] B[m] | u \rangle w^{-m-\Delta_B} (z - w)^{-n-\Delta_A}. \end{aligned}$$

4. $C_{\varphi,u}$ を領域 $U_4 = \{|z| > |w - z| > 0\}$ で局所座標 $(z, w - z)$ で展開するとき、次が成立する。

$$\begin{aligned} C_{\varphi,u} = \langle \varphi | B(w - z) A(z) | u \rangle &= \sum_m \langle \varphi | (B[m] A)(z) | u \rangle (w - z)^{-m-\Delta_B} \\ &= \sum_{n,m} \langle \varphi | B[m] A[n]] | u \rangle z^{-m-\Delta_A} (w - z)^{-m-\Delta_B}. \end{aligned}$$

組 $(A(z), B(z))$ は上の条件 1, 2, 3, 4 をみたすとき、互いに局所的(local) であるという。

組 $(A(z), B(z))$ が互いに局所的であれば、無限行列環 $\mathrm{End}^f(M)$ に値を持つ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数 $C(z, w)$ で、その行列要素が $\langle \varphi | C(z, w) | u \rangle = C_{\varphi, u}$ となるものが唯一つ存在する。

この $C(z, w)$ を $A(z)B(w)$, $B(w)A(z)$, $A(z-w)B(w)$, $B(w-z)A(z)$ と表す。この書き方は、これらが表す $\mathrm{End}^f(M)$ に値を持つ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数として、どの領域で展開して定義されたかを表す。そこで $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数としては、次が成立している:

$$A(z)B(w) = B(w)A(z) = A(z-w)B(w) = B(w-z)A(z).$$

この解析接続して得られた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数において、$z = w$ のまわりでの展開

$$A(z)B(w) = \sum_n (A[n]B)(w)(z-w)^{-n-\Delta_A}$$

の全作用素展開と呼び、その $z = w$ での極の主要部を次のように表して、$z = w$ での作用素展開と呼ぶ。

$$A(z)B(w) \sim \sum_{n \geq -\Delta_A + 1} (A[n]B)(w)(z-w)^{-n-\Delta_A}$$

同様なことが、

$$\begin{aligned} B(w)A(z) &= \sum_m (B[m]A)(z)(w-z)^{-m-\Delta_B} \\ &\sim \sum_{m \geq -\Delta_B + 1} (B[m]A)(z)(w-z)^{-m-\Delta_B} \end{aligned}$$

についても言える。

注意.

1. $A(z) \in \mathfrak{F}(M)$ に対して、一般には組 $(A(z), A(z))$ は互いに局所的ではない。これより、組 $(A(z), A(z))$ が互いに局所的であるという言明は意味あることである。

2. $T(z) = \sum_n L[n]z^{-n-2} \in \Phi(M)$ とおくと、組 $(T(z), T(z))$ は互いに局所的であり、作用素展開

$$T(z)T(w) \sim \frac{\frac{1}{2}c}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\mathfrak{L}_w T(w)$$

が成立する。この作用素展開は $\{L(n)\}$ のなすリー環 $\mathfrak{L}$ の定義式と同値である。

3. $A(z), B(z) \in \mathfrak{F}(M)$ について、組 $(A(z), A(z))$, $(B(z), B(z))$, $(A(z), B(z))$ は互いに局所的であるとする。このとき、次の表示が成立する: $R > r > 0$ とするとき、

$$\begin{aligned} &[A[n], B[m]] \\ &= \frac{1}{(2\pi r)^2} \int_{|w|=R} \int_{|z-w|=r} (z-w)^{n+\Delta_A-1} w^{m+\Delta_B-1} A(z)B(w) dz dw \\ &= \sum_{\ell \geq -\Delta_{A+1}} \int_{|w|=R} \int_{|z-w|=r} (z-w)^{n+\Delta_A-1} w^{m+\Delta_B-1} (A[n]B)(w)(z-w)^{-\ell-\Delta_A} dz dw. \end{aligned}$$

これより、交換関係 $[A[n], B[m]]$ は $A(z)B(w)$ の $z=w$ での作用素展開のみに依存することが分かる。さらに、$z=w$ における作用素展開の極の主要部は交換関係 $[A[n], B[m]]$, $n, m \in \mathbb{Z}$ で完全に決まる。

ここで述べた局所性作用素展開について詳しく知りたい方は、例えば E.Frenkel, D.Ben-Zvi の教科書 [FBZ] を参照されたい。

次の命題は共形場理論の専門家には暗に知られていたが、頂点作用素代数の一部の専門家では Dong の補題として知られている。

補題 (局所性の伝播). $A(z), B(z) \in \mathfrak{F}(M)$ について、組 $(A(z), A(z))$, $(B(z), B(z))$, $(A(z), B(z))$ は互いに局所的であるとする。このとき、$A(z)$, $B(z)$, $\dfrac{dA(z)}{dz}$, $\dfrac{dB(z)}{dz}$ および $(A[n]B)(z)$, $(B[m]A)(z)$, $m, n \in \mathbb{Z}$ はどの 2 つの対についても互いに局所的である。

3. 頂点作用素代数とその表現

局所性の伝播についての補題に基づくと、局所作用素の空間 $\Phi(M) \subseteq \mathfrak{F}(M)$ という概念が定義される。

定義 (局所作用素の空間). 部分空間 $\Phi(M) \subseteq \mathfrak{F}(M)$ が局所作用素の空間であるとは、以下を満たすことを言う。

1. $\Phi(M) \ni \mathrm{id}_M, T(z)$
2. $A(z), B(z) \in \Phi(M)$ とすると $(A(z), B(z))$ は互いに local
3. $A(z), B(z) \in \Phi(M)$ とすると $(A[n]B)(z), (B[n]A)(z) \in \Phi(M)$ $(n \in \mathbb{Z})$
4. $A(z) \in \Phi(M)$ ならば $\dfrac{dA}{dz}(z) \in \Phi(M)$

注意. ・$(T(z), T(z))$ は互いに local であるので、局所性の伝播により少なくとも一つの局所作用素の空間が存在する。

・局所作用素の空間は数多くあり得る。

・S を $\mathfrak{F}(M)$ の部分集合とし、S のどの 2 つの組－自分自身の組も含めて－についても、その 2 つは互いに局所的であるとする。このとき、S を含む包含関係について、最小の局所作用素の空間 $\Phi(M)$ が存在する。この S を $\Phi(M)$ の生成元という。S の各元は共形次元をもつと仮定しておく。また、$T(z) \in S$ となるものとしておく。

定義. 局所作用素の空間 $\Phi(M)$ は、有限集合よりなる生成元の集合をもつとき、有限生成であるという。

この局所作用素の空間の性質を抽象化して、頂点作用素代数 (Vertex Operator Algebra, VOA) の概念が定義される。

定義. (頂点作用素代数) $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ が中心荷電 $c_V \in \mathbb{C}$ をもつ頂点作用素代数であるとは、次の 1, 2, 3 を満たすことをいう。

1. $V \in \mathfrak{L}_{c_V}$-Mod.

2. $L[0]$ について V は次の性質をもつ。

$$V = \sum_{\Delta \geq 0} V[\Delta] \quad \dim_{\mathbb{C}} V[\Delta] < \infty \text{ であって}$$

$$V[0] = \mathbb{C}|0\rangle,\ V[2] \ni T = L[-2]|0\rangle,\ T \neq 0.$$

$V \ni |0\rangle$ を真空元、$V \ni T$ を Virasoro 元という。

3. 線型写像

$$\begin{aligned} Y : V &\longrightarrow \mathrm{End}^f(V)[[z, z^{-1}]] \\ A &\mapsto Y(A:z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A[n] z^{-n-\Delta_A}\ (A \in V[\Delta_A]) \end{aligned}$$

が存在して、次をみたす。

(a) $Y(|0\rangle : z) = \mathrm{id}$,
$Y(T : z) = T(z)$,
$Y(A : z)|0\rangle \in A + V[[z]]z$.

(b) $A, B \in V$ について $Y(A:z), Y(B:z)$ は互いに局所的で、全作用素展開

$$\begin{aligned} Y(A:z)Y(B:z) &= Y(A(z)B : w) \\ &= \sum_n Y(A[n]B : w)(z-w)^{-n-\Delta_A}. \end{aligned}$$

が成立する。

(c) $A \in V$ について微分方程式

$$\frac{d}{dz} Y(A:z) = Y(L[-1]A : z) = [L[-1], Y(A:z)]$$

が成立する。

以下、本論説で扱う頂点作用素代数は、その中心荷電が $c_V \neq 0$ であると仮定する。$c_V = 0$ の時は少し注意が必要だからである。

T を含む V の 有限部分集合 $S \ni T$ が存在して、$\Phi(V) = \{Y(A;z); A \in V\}$ が局所作用素の空間として $\{Y(A;z), A \in S\}$ で生成されるとき、V は有限生成であり S で生成されるという。

ところで V が頂点作用素代数であると、$A, B, C \in V$ について、$Y(A;z), Y(B;z), Y(C;z)$ はその作用素積について数々の compatibility 条件をみたす。この条件が Borcherds により確立され、今日 Borcherds の関係式と呼ばれる。詳しくは E.Frenkel 達の教科書 [FBZ] を参照されたい。

さて、頂点作用素代数を定義する最も重要な性質は、$\frac{d}{dz}Y(A;z) = Y(L[-1]A;z)$ および、組 $(Y(A;z), Y(B;z))$ が互いに局所的であることである。この関係式は D-加群の概念を使って表すことができる。頂点作用素代数は Beilinson-Drinfeld により chiral algebra D-加群の言葉を使って定義された。これについても、E.Frenkel 達の教科書を参照されたい。

講演者は、頂点作用素代数の定義はこの D-加群を使った chiral algebra によるものが自然であると考える。しかし、このためには D-加群についての非常に抽象的な概念を駆使する必要があり、使いこなすのが難しい。近い将来この概念を使いこなす若い意欲ある研究者が出現することを待ち望むものである。

頂点作用素代数の定義が出来ると、頂点作用素代数の表現という概念が定式化される。(M, Y^M) が $V = (V, |0\rangle, T, Y)$ の表現とは、$M \in \mathfrak{L}_{c_V}$-Mod であり、$Y^M : V \longrightarrow \mathrm{End}^f(M)[[z, z^{-1}]]$ が存在して、想像される関係式がみたされる時をいう。これも詳しくは、E.Frenkel 達の教科書を参照されたい。

頂点作用素代数 V の表現論を展開するには、V の普遍展開環 $U(V)$ を定義しておくと便利である。

V の普遍展開環は $A \in V$ と $n \in \mathbb{Z}$ について、その Fourier 係数 $A[n]$ で生成される $\mathbb{Z}$-graded $\mathbb{C}$-algebra であり、頂点作用素代数の定義にある数々の関係式を、その Fourier 成分の関係で書き表したものを基本関係式とすることで定義される。

普遍展開環は $U(V) = \sum_{d\in\mathbb{Z}} U(V)[d]$ なる $\mathbb{Z}$-graded algebra であり、$U(V)[d] = \{P \in U(V); [L[0], P] = dP\}$ と $L[0]$ の adjoint 作用で degree 付けられている。$A(z)$ 達の間の互いに局所的という条件は、その Fourier 成分の間の無限個の元で構成される、Borcherds の関係式とよばれる 2 次関係式となる。このため、各 $U(V)[d]$ に次のように位相を導入して linearly compact Hausdorff 空間にする。すなわち $U(V)[d]$ の位相は、各 $N \geq 0, d \in \mathbb{Z}$ について $I_N[d]^f = \sum_{n\geq N} U(V)[d-n]U(V)[n]$ とおき、$I_N[d]$ を $U(V)[d]$ に入っている位相による閉包とするとき、$U(V)[d]$ には $\{I_N[d]; N = 1, 2, \cdots\}$ が 0 の開近傍系となるよう位相が入れられる。$U(V) = \sum_d U(V)[d]$ には $U(V)[d]$ の直和として locally compact linear topology が入る。詳しくは、[FZ92], [MNT] を参照されたい。

V の頂点作用素代数としての表現 (M, Y^M) と $U(V)$ の適当な条件を持つ $U(V)$ 加群とは同値である。これより、V の表現のつくる Abel 圏 V-Mod と $U(V)$ 加群のつくる Abel 圏 $U(V)$-Mod は Abel 圏の同値となる。

頂点作用素代数 V に従う共形場理論を展開するためには、左 $U(V)$-加群だけでなく両側 $U(V)$ 加群を考えることが重要である。しかし、頂点作用素代数の表現を上のように定義しただけではよい表現論が期待できない。目的によって内在的条件を付け加える必要があると考える。

我々の目的である sl_2 型の拡大 W-代数の理論を展開するためには、後に定義する V-Mod の部分アーベル圏 V-mod を考えれば十分である。

$U(V)$ は, I.Frenkel と Zhu [FZ92] により 1990 年代初めに定式化された。C_2-有限性をもつ強い条件の下での定式化とその性質については [MNT] を参照されたい。

頂点作用素代数とその表現の例に移ろう。

例. Virasoro 頂点作用素代数 Vir_c $(c \in \mathbb{C}^*)$
$\mathrm{Vir}_c \in \mathfrak{L}_c$-Mod を生成元 $|0\rangle \in \mathrm{Vir}_c$ と次の基本関係式で定義する。

$$L[n]|0\rangle = 0, \quad n \geq -1$$

$\mathfrak{L}_{\leq -2} = \sum_{n\geq 2} \mathbb{C}L[-n]$ とおくと、

$$U(\mathfrak{L}_{\leq -2}) \longrightarrow \mathrm{Vir}_c,\ P \mapsto P|0\rangle$$

はベクトル空間の同型を与える。

$T = L[-2]|0\rangle \in \mathrm{Vir}_c[2]$ とおく。また、$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L[-2]z^{-n-2} \in \mathfrak{F}(\mathrm{Vir}_c)$ とおくと、$(T(z), T(z))$ は互いに局所的であった。局所性の伝播より、

$$Y : \mathrm{Vir}_c \longrightarrow \mathrm{End}^f(\mathrm{Vir}_c)[[z, z^{-1}]]$$

で $Y(|0\rangle : z) = 0$, $Y(T : z) = T(z)$ をみたす頂点作用素代数の構造は唯一つ存在する。$|0\rangle$ の定義方程式より、$T(z)|0\rangle \in T + \mathrm{Vir}_c[[z]]z$ が満たされる。

ところで、$\mathfrak{L}_c$-Mod の既約表現の分類定理より、次が分かる。

1. $c \neq c_{p_+p_-} = 1 - 6\dfrac{(p_+ - p_-)^2}{p_+p_-}$, $\quad p_+, p_- \geq 2.\ (p_+p_-) \neq 1$ のとき、Vir_c は既約 $\mathfrak{L}_c$-module である。

2. $c = c_{p_+p_-} = 1 - 6\dfrac{(p_+ - p_-)^2}{p_+p_-}$, $p_+, p_- \geq 2.\ (p_+p_-) = 1, \Delta_0 = \dfrac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) \geq 3$ とする。すると $S \in \mathrm{Vir}_{c_{p_+p_-}}[\Delta_0]$ で $L[n]|S\rangle = 0$, $n \geq 1$ をみたす元がスカラー倍を除いで唯一つ存在する。

$$\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}} \equiv \mathrm{Vir}_{c_{p_+p_-}}/U_{c_{p_+p_-}}(\mathfrak{L})S$$

とおくと、$\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}}$ は既約 $\mathfrak{L}_c$ 加群で、$|0\rangle, T \in \mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}}$ は零でない。このとき、

$$T : \mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}} \longrightarrow \mathrm{End}^f(\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}})[[z, z^{-1}]]$$

という頂点作用素代数が存在する。

上の $\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}}$ は極小系列をもつ Virasoro 頂点作用素代数と呼ばれる。この極小系列が 1984 年の [BPZ] で扱われた共形場理論であった。

表現を見てみよう。$c \neq 0$

$$\mathrm{Vir}_c\text{-Mod} \longrightarrow \mathfrak{L}_c\text{-Mod}$$

は Abel 圏の同値となることは容易に分かるであろう。では、$\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}}$ の構造はどうであろうか。頂点作用素代数の自然な準同型

$$\mathrm{Vir}_{c_{p_+p_-}} \longrightarrow \mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}} \longrightarrow 0$$

が引き起こすアーベル圏の準同型

$$\mathrm{MinVir}_{c_{p_+p_-}}\text{-Mod} \longrightarrow \mathrm{Vir}_{c_{p_+p_-}}\text{-Mod}$$

は injective で、image は fully faithful な部分アーベル圏である。この部分アーベル圏の構造は次の Feigin-Fuchs による構造定理で分かる。

定理 (Feigin-Fuchs) $\mathrm{MinVir}_{c_{p+p-}}$-Mod は、単純対象

$$L_{h_{r,s}}=L_{h_{p+-r,p--s}},\quad 1\leq r\leq p_+-1,\ 1\leq s\leq p_--1$$

をもつ半単純なアーベル圏である。結果として単純対象の数は $\frac{1}{2}(p_+-1)(p_--1)$ である。

さて、Vir_c-Mod $\longrightarrow U_c(\mathfrak{L})$-Mod はアーベル圏としての同値であることが分かった。$U_c(\mathfrak{L})$-Mod の元と Vir_c-Mod の元を、これで自由に行き来できる。

ここで、$U_c(\mathfrak{L})$-Mod の fully faithful 部分アーベル圏$U_c(\mathfrak{L})$-mod を定義しておくのが便利である:

定義. $U_c(\mathfrak{L})$-Mod $\ni M$ が $U_c(\mathfrak{L})$-mod に属する

$$\Longleftrightarrow\ H(M)\subseteq H_c=\bigcup_{r,s\geq 0}h_{r,s}+Z_{\geq 0}.$$

次にボゾン頂点作用素代数 Π_0 を定義する。

文字$b[n]$), $n\in\mathbb{Z}$ を用意し、その交換関係が $[b[m],b[n]]=m\delta_{m+n,0}\,\mathrm{id}$ で定義される$\mathbb{Z}$-graded algebra $U^f(b)$を考える。

$$b=\sum_n \mathbb{C}b[n],\quad b_\pm=\sum_{n\geq 1}\mathbb{C}b[n],b_0=\mathbb{C}b_0,\quad \bar{b}=b_+\oplus b_-$$

とおく。Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より、

$$U^f(b)=U(b_-)\otimes U(b_+)\otimes U(b_0)$$

である。ここに、$U(b_\pm)=\mathbb{C}[b_\pm]$ は無限変数多項式環であり、$U(b_0)=\mathbb{C}[b[0]]$ も多項式環である。deg $b[n]=-n$ とすれば、$U^f(b)=\sum_{d\in\mathbb{Z}}U^f(b)[d]$ という $\mathbb{Z}$-graded algebra の構造が入る。$U^f(b)=U^f(\bar{b})\otimes U(b_0)$ となる。$U^f(b)=\sum_{d\in\mathbb{Z}}U^f(b)[d]$ も $\mathbb{Z}$-graded algebraである。

各 $d\in\mathbb{Z}$, $N=0,1,2,\dots$ について、

$$I_N[d]=\sum_{n\geq N}U^f(\bar{b})[d-n]\cdot U^f(\bar{b})[n]$$

とおく。$U^f(\bar{b})[d]\supseteq I_0[d]\supseteq I_1[d]\supseteq,\bigcap I_N[d]=\{0\}$ である。

$$U(\bar{b})[d]=\lim_N U^f(\bar{b})[d]/I_N[d]$$

には自然にコンパクト・ハウスドルフ $\mathbb{C}$-linear な位相空間の構造が入る。$U(\bar{b})=\sum_{d\in\mathbb{Z}}U(\bar{b})[d]$ は $\mathbb{Z}$-graded topological $\mathbb{C}$-algebra となる。また、$U(b)=U(b)\otimes U(b_0)$ も topological な$\mathbb{Z}$-graded algebra である。

各 $\beta\in\mathbb{C}$ について、左 $U(b)$ 加群 $F_\beta\ni|\beta\rangle$ を次の基本関係式で定義する：

$$b[n]|\beta\rangle=0(n\geq 1),\quad b[0]|\beta\rangle=\beta|\beta\rangle.$$

このとき $U(b_-) \to F_\beta,\ P \mapsto P|\beta\rangle$ はベクトル空間の同型を与える。F_β に discrete topology を入れるとき $U(b)$ は F_β に連続に作用する。

$U(b)$ 加群 M であって $\mathbb{C}$ 上可算次元であり、M に discrete topology を入れたとき $U(b)$ が連続に作用し、かつ任意の $m \in M$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} U(b_{\geq 0})m < \infty$$

が性質するものを考える。この性質をもつ $U(b)$ 加群のなすアーベル圏を $U(b)$-Mod と表す。アーベル圏 $U(b)$-Mod は半単純であり、その単純対象は $F_\beta,\ \beta \in \mathbb{C}$ である。

$\Pi_0 = F_0$ (as left $U(b)$-Mod) として、$\Pi_0 \ni |0\rangle, T = \frac{1}{2}b[-1]^2|0\rangle$ とおく。このとき、

$$b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b[n]z^{-n-1} \in \mathrm{End}^f(\Pi_0)[[z]]$$

とおくと、$(b(z), b(z))$ は互いに局所的であり、作用素展開 $b(z)b(w) \sim \dfrac{1}{(z-w)^2}$ をみたす

$$T(z) = \lim_{w\to z}\left(b(w)b(z) - \frac{1}{(w-z)^2}\right)$$

とおくと、$T(z) \in F(\Pi_0)$ である。

局所性の伝播により、$S = \{b(z), T(z)\}$ で生成される局所作用素の空間 $\Phi(\Pi_0)$ が定義される。これより、$\Pi_0 = (\Pi_0, |0\rangle, T, Y)$ なる頂点作用素代数が唯一つ存在する。

$$Y : \Pi_0 \longrightarrow \mathrm{End}^f(\Pi_0)[[z, z^{-1}]]$$

$$Y(|0\rangle : z) = \mathrm{id},\ Y(b[-1]|0\rangle) = b(z),\ Y(T : z) = T(z)$$

である。すると

$$\Pi_0\text{-Mod} \longrightarrow U(b)\text{-Mod}$$

はアーベル圏の同値である。このとき中心荷電は 1 である。

今、文字 $\hat{b}$ を用意し、$[b[n], \hat{b}] = \delta_{n,0}\,\mathrm{id}$ をみたすとする。

$$\varphi(z) = \hat{b} + b[0]\log z - \sum_{n\neq 0}\frac{b[n]}{n}z^{-n}, \quad \varphi_\pm(z) = \mp\sum_{n\geq 1}\frac{b[n]}{n}z^{\mp n}$$

とおくと、$\varphi(z) = \hat{b} + b[0]\log z + \varphi_-(z) + \varphi_+(z)$ である。作用素展開

$$\varphi(z)\varphi(w) \sim \log(z-w)$$

が成立する。$\beta \in \mathbb{C}$ について

$$\varphi_\beta(z) = \beta\cdot\varphi(z) = \beta\hat{b} + \beta b[0]\log z + \beta\varphi_-(z) + \beta\varphi_+(z)$$

とおき、

$$V_\beta(z) =: e^{\varphi\beta(z)} := e^{\beta\hat{b}}z^{\beta b[0]}\bar{V}_\beta(z)$$

$$\bar{V}_\beta(z) = e^{\beta\varphi_-(z)}e^{\beta\varphi_+(z)} \in U(\bar{b})[[z, z^{-1}]]$$

とおくと、次の多価正則関数に値をもつ場の作用素が定義される。

$$V_\beta(z) : F_{\beta_1} \longrightarrow F_{\beta_1+\beta}[[z,z^{-1}]]z^{\beta\beta_1}$$

このとき、次が成立する。

$$b(z)V_\beta(w) \sim \frac{1}{z-w} : b(z)V_\beta(w) :$$

$$T(z)V_\beta(w) \sim \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{(z-w)^2}V_\beta(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_\beta(w)$$

$$V_{\beta_1}(z_1)\dots V_{\beta_N}(z_N) = e^{(\sum_{j=1}^N \beta_j)\hat{b}} \prod_{1\le i\ne j\le N}(z_i-z_j)^{\frac{1}{2}\beta_i\beta_j}\prod_{j=1}^N z_j^{\beta_j b[0]} : \bar{V}_j(z_1)\cdots\bar{V}_N(z_N) :$$

ここに、

$$: \bar{V}_j(z_1)\cdots\bar{V}_N(z_N) := e^{\sum_{j=1}^N \beta_j\varphi_-(z_j)}e^{\sum_{j=1}^N \beta_j\varphi_+(z_j)} \in U(\bar{b})[[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_N,z_N^{-1}]]^{S_N}$$

とおいた。$V_\beta(z)$ を、$b[0]$-荷電 β をもつ頂点作用素という。

次に $N\ge 1$ を自然数として、$Y_N = \mathbb{Z}\sqrt{2N}$ とおく。Y_N は $(\sqrt{2N},\sqrt{2N}) = 2N$ により even integer lattice となる。$X_N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\frac{1}{\sqrt{2N}}$ とおき、$V_{Y_N} \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_{n\sqrt{2N}}$ とおけば

$$V_{Y_N} \ni |0\rangle,\ b[-1]|0\rangle,\ T,\ |n\sqrt{2N}\rangle\ (n\in\mathbb{Z}).$$

このとき、$(V_{Y_N},|0\rangle,T))$ は頂点作用素代数の構造を unique にもつ。

$$\begin{aligned} Y : V_{Y_N} &\longrightarrow \mathrm{End}^f(V_{Y_N})[[z,z^{-1}]] \qquad \text{により} \\ |0\rangle &\mapsto \mathrm{id} \\ b[-1]|0\rangle &\mapsto b(z) \\ T &\mapsto T(z) \\ |n\sqrt{2N}\rangle &\mapsto V_{n\sqrt{2N}}(z) \end{aligned}$$

である。また、$X_N/Y_N \ni [\beta]$ について $\mathcal{V}_{[\beta]} \equiv \sum_{\beta\in[\beta]} F_\beta$ とおくと、$\mathcal{V}_{[\beta]}$ は V_{Y_N} 加群の構造をもつ。

命題. V_{Y_N}-Mod の単純対象は $\mathcal{V}_{[\beta]}, [\beta]\in X_A/Y_N$ で与えられ、V_{Y_N}-Mod はアーベル圏として半単純である。

ここに述べた例については、E.Frenkel 達の教科書を参照されたい。

頂点作用素代数の有限性について述べておく。以下、頂点作用素代数は中心荷電 $c_V\ne 0$ と仮定し、さらに頂点作用素代数として有限個の生成元をもつと仮定しておく。

定義 (Zhu の C_2-有限性) V が Zhu の C_2-有限性条件をみたすとは、

$$C_2(V) \equiv \{A[n]B : A\in V(\Delta_A), B\in V,\ n\le -N-1\}$$

とおくとき

$$\dim_{\mathbb{C}} V/C_2(V) < \infty$$

をみたすときを言う。

もう一つ、V の零モード代数と呼ぶ $\mathbb{C}$ 上の結合代数 $A_0(V)$ を定義しておこう。

定義 (零モード代数). $p \in \mathbb{Z}$ について、$F_p(U(V)) = \sum_{d \leq p} U(V)[\Delta]$ とおく。$\mathfrak{I}$ を $U(V)$ の、 $U(V) \cdot F_{-1}(V)$ の (degree wise に closure をとった) degree wise closed left ideal とおく。$I = \mathfrak{I} \cap F_0(U(V))$ とおくと I は $F_0(U(V))$ の closed 両側 ideal である。

$$A_0(V) = F_0(U(V))/I$$

とおいて、$\mathbb{C}$ 上の associative algebra が得られる。これを V の零モード代数と呼ぶ。

C_2-有限性や零モード代数は,、1990 年代初めに I.Frenkel とその弟子 Zhu により定式化された。次の定理が両氏によって得られた基本定理である。V は有限個の元 $\{S_1, \dots, S_N\}$ で生成されるとし、S_i 達は共形次元 Δ_{S_i} をもつとする。

定理. V は C_2-有限性条件をもつとする。このとき次が成立する。

1. $\dim A_0(V) < \infty$ であり, $A_0(V)$ は $[S_1(0)], \dots, [S_N(0)]$ を $\mathbb{C}$-algebra としての生成元にもつ。

2. V-Mod は有限個の既約表現をもつ。ただし、V-Mod はアーベル圏としては完全可約とは限らない。

3. 正の整数 $L \geq 1$ が存在して、任意の $M \in V$-Mod、任意の $h \in H(M)$ について、$M[h] = \{m \in M,\ (L_0 - h)^L m = 0\}$ が成立する。

4. $A_0(V)$-mod を、有限次元代数 $A_0(V)$ の有限次元表現のつくるアーベル圏とする。

$$\begin{aligned} HW : V\text{-Mod} &\longrightarrow A_0(V)\text{-mod} \\ M &\mapsto HW(M). \end{aligned}$$

   なる covariant functor が, $HW(M) = \{m \in M, F_{-1}(U(V))m = 0\}$ として定義される。この HW は両辺の既約表現の間の一対一対応を与える。

4. Virasoro 代数の自由場表示と Screening 作用素

Virasoro 代数の表現論は自由場表示と screening 作用素を使うことにより、その様子が具体的に見えてくる。ここではレベル (κ_+, κ_-) が有理数でない場合をあつかう。(κ_+, κ_-) が有理数の場合は次章であつかう。

最も重要な概念は screening 作用素の積を積分して得られる、Virasoro 代数の Intertwining 作用素である。積分は射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の N 個の点のなす配置空間上の twisted de Rham 理論により行われる。これは screening 作用素の N 個の積は、配置空間上の多価正則関数になるためである。レベル κ_+, κ_- が有理数でない場合は、ここに現れる局所係数をもつホモロジー群、コホモロジー群は簡単な性質をもつ。κ_+, κ_- が有理数のとき、これらは非常に複雑な様相を示す。

まず 0 でない複素数の組 (κ_+, κ_-) で $\kappa_+ \kappa_- = 1$ となるものを固定する。このとき中心荷電は $c_{\kappa_+, \kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ である。さらに (α_+, α_-) を $\alpha_+ \alpha_- = -2$, かつ

$\alpha_+^2/2=\kappa_+,\alpha_-^2=\kappa_-$ となるものを取り固定する。$\alpha_-=-2/\alpha_+$ である。$\alpha_0=\alpha_++\alpha_-$ とおくと、$c_{\kappa_+,\kappa_-}=1-3\alpha_0^2$ である。

このパラメータの組 (κ_+,κ_-) に対し、レベル (κ_+,κ_-) を持つボゾン頂点作用素代数 Π_{κ_+,κ_-} を次で定義する。、中心荷電は $c_{\kappa_+,\kappa_-}=13-6(\kappa_++\kappa_-)$ である。

定義 (頂点作用素代数 $\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}=(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-},|0\rangle,T,Y)$)

(1) $U(b)$ 加群 Π_{κ_+,κ_-} は、ベクトル空間としては $\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}=F_0$ $(F_0\ni|0\rangle)$ である。

(2) Virasoro 元 T は

$$T=\frac{1}{2}b[-1]^2|0\rangle+\frac{\alpha_0}{2}b[-2]|0\rangle\in\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$$

である。

$$T(z)=\frac{1}{2}:b(z)^2:+\frac{\alpha_0}{2}\partial b(z)\in\mathrm{End}^f(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-})[[z,z^{-1}]]$$

とおく。このとき前章の結果により、Π_{κ_+,κ_-} には次を満たすような頂点作用素代数の構造が入る：

$$\begin{aligned}Y:&\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}\longrightarrow\mathrm{End}^f(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-})[[z,z^{-1}]]\\&Y(|0\rangle;z)=id,\ Y(b[-1]|0\rangle,z)=b(z),\ Y(T,z)=T(z)\end{aligned}$$

とするとき

$$T(z)T(w)\sim\frac{\frac{1}{2}c_{\kappa_+,\kappa_-}}{(z-w)^4}+\frac{2}{(z-w)^2}T(w)+\frac{1}{z-w}\partial_wT(w)$$

であり、中心荷電は c_{κ_+,κ_-} である。

注意. • $\mathbb{Z}$- graded 位相環として、$U(b)\simeq U(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-})$ が成立する。また

$$L[0]=\frac{1}{2}b[0]^2-\frac{\alpha_0}{2}b[0]+\sum_{n\geq1}b[-n]b[n]$$

である。

• $\beta\in\mathbb{C}$ について、$U(b)$ 加群 $F_\beta\ni|\beta\rangle$ は Π_{κ_+,κ_-} 加群であり、

$$L[n]|\beta\rangle=0\ (n\geq1),\ L[0]|\beta\rangle=h_\beta|\beta\rangle$$

が成立する。ここに $h_\beta=\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\alpha_0\beta=\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2}\alpha_0)^2-\frac{1}{8}\alpha_0^2$ である。

• $\beta\in\mathbb{C}$ について、$\beta^\vee=\alpha_0-\beta$ とおくと $h_\beta=h_{\beta^\vee}$ が成立する。

命題. Π_{κ_+,κ_-}-Mod は半単純アーベル圏であり、その単純対象たちは $\{F_\beta;\beta\in\mathbb{C}\}$ である。

ところで頂点作用素代数 V について、その普遍展開環 $U(V)$ には、連続な anti-algebra isomorphism $\sigma:U(V)\to U(V)$ で $\sigma^2=id$ をみたすものが次で定められた：

$$\sigma(A[n])=(-1)^\Delta A[-n]\quad(A\in V[\Delta]).$$

これより $\sigma(U(V)[d])=U(V)[-d]$ である。この σ を Π_{κ_+,κ_-} で考えると、

$\sigma : U(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}) \to U(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-})$ は次で定まる。

$$\sigma(b[n]) = -b[-n] + \delta_{n,0}\alpha_0 id, \quad \sigma(L[n]) = L[-n].$$

今 $M \in \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$-Mod について、その contragradient 双対 $M^* \in \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$-Mod を $M^* = \sum_h \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M[h], \mathbb{C})$ とおき、$u \in M, \phi \in M^*, P \in U(\Pi_{\kappa_+,\kappa_-})$ について

$$\langle P\phi, u\rangle = \langle \phi, \sigma(P)u\rangle$$

と定める。このとき次が成立する:

$$\beta \in \mathbb{C} \text{ に対し、} F_\beta^\vee = F_{\beta^\vee} \quad \text{as } \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}\text{-module.}$$

今アーベル群 $X_{\kappa_+,\kappa_-} = \mathbb{Z}\dfrac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z}\dfrac{\alpha_-}{2} \subset \mathbb{C}$ を考え、$(r,s) \in \mathbb{Z}^2$ に対し

$$\beta_{r,s} = \frac{1-r}{2}\alpha_+ + \frac{1-s}{2}\alpha_- \in X_{\kappa_+,\kappa_-}$$

とおく。$\beta_{r,s}^\vee = \beta_{-r,-s}$ である。

$$h_{\beta_{r,s}} = h_{r,s} = \frac{r^2-1}{4}\kappa_+ - \frac{rs-1}{2} + \frac{s^2-1}{4}\kappa_-$$

が成立する。$h_{r,s} = h_{-r,-s}$ である。$H_{\kappa_+,\kappa_-} = \{h_{r,s}; r,s \in \mathbb{Z}\}$ とおく。

注意. (1) $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ のとき

X_{κ_+,κ_-} は階数 2 の自由アーベル群であり、$\{\beta_{r,s}; (r,s) \in \mathbb{Z}^2\}$ の元はすべて相異なる元よりなる。

(2) $\kappa_+, \kappa_- \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ のとき

X_{κ_+,κ_-} は階数 1 の自由アーベル群であり、$\{\beta_{r,s}; (r,s) \in \mathbb{Z}^2\}$ の元の間には関係がある。

定義. Π_{κ_+,κ_-}-Mod の fully faithful 部分アーベル圏 Π_{κ_+,κ_-}-mod を次で導入する：

$$\begin{aligned} &M \in \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}\text{-Mod} \ \text{ が } \ \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}\text{-mod} \ \text{ に属する} \\ \Longleftrightarrow\ & M = \sum_{h \in H(M)} M[h] \quad \text{とおいたとき} \quad H(M) \subset H_{\kappa_+,\kappa_-} + \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

以下、Π_{κ_+,κ_-}-mod で考えよう。

$\beta \in X_{\kappa_+,\kappa_-}$ に対し $V_\beta(z)$ を考える。$\beta_1 \in X_{\kappa_+,\kappa_-}$ とすれば

$$V_\beta(z) : F_{\beta_1} \to F_{\beta+\beta_1}[[z, z^{-1}]]z^{\beta\beta_1}$$

であった。

$$T(z)V_\beta(w) \sim \frac{h_\beta}{(z-w)^2}V_\beta(w) + \frac{1}{z-w}\partial_w V_\beta(w)$$

となり、$V_\beta(z)$ は共形次元 h_β の primary 場である。

$h_{\alpha_\pm}=1$ であるので、$S_\pm(z)=V_{\alpha_\pm}(z)$ とおくと $S_\pm(z)$ は共形次元 1 の primary 場であり、これを screening 作用素と言う。

$$\begin{aligned}T(z)S_\pm(w) \sim& \frac{1}{(z-w)^2}S_\pm(w)+\frac{1}{z-w}S_\pm(w)\\ =& \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{z-w}S_\pm(w)\right)\end{aligned}$$

と、$T(z)S_\pm(w)$ は変数 w について全微分で表される。これが screening 作用素の性質である。

このことより

$$S_\pm=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int S_\pm(z)dz:\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}\to F_{\alpha_\pm}$$

は well-defined な線型作用素で、Virasoro 代数の元と交換する。すなわち Virasoro 代数の intertwining 作用素である。

$$W_{[\kappa_+,\kappa_-]}=\bigcap_{\varepsilon=\pm}\mathrm{Ker}S_\varepsilon\subset\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$$

とおくと $|0\rangle, T\in W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ であり、$W_{[\kappa_+,\kappa_-]}=(W_{[\kappa_+,\kappa_-]},|0\rangle,T,Y)$ は T を Virasoro 元とする Π_{κ_+,κ_-} の部分頂点作用素代数である。

$W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ はレベル (κ_+,κ_-) をもつ $sl_2(\mathbb{C})$ 型の W 代数と呼ばれる。次が成立する。

命題. (1) $\kappa_+,\kappa_-\notin\mathbb{Q}$ のとき

$\mathrm{Vir}_{c_{\kappa_+,\kappa_-}}\longrightarrow W_{[\kappa_+,\kappa_-]};T\mapsto T$ は頂点作用素代数の同型を与え、更に

$$W_{[\kappa_+,\kappa_-]}=\mathrm{Ker}S_+=\mathrm{Ker}S_-$$

が成立する。

(2) $\kappa_+,\kappa_-\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ のとき

$0\to\mathrm{Vir}_{c_{\kappa_+,\kappa_-}}\to W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ は injection であるが同型とはならない。また

$$\mathrm{Ker}S_+\neq\mathrm{Ker}S_-,\quad \mathrm{Ker}S_\pm\neq W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$$

である。

我々が扱いたいのは $\kappa_+=\dfrac{p_-}{p_+},\kappa_-=\dfrac{p_+}{p_-}$, $p_+,p_-\geq 2,(p_+,p_-)=1$ の場合である。

この場合、Π_{κ_+,κ_-} は次で定義される格子頂点作用素代数 V_{p_+,p_-} の部分頂点作用素代数となる。

$\alpha=p_+\alpha_+=-p_-\alpha_-=\sqrt{2p_+p_-}=\sqrt{2p},p=p_+p_-$ とおき

$$X_{p_+,p_-}=\mathbb{Z}\frac{\alpha_+}{2}+\mathbb{Z}\frac{\alpha_-}{2},\quad Y_{p_+,p_-}=\mathbb{Z}\alpha\subset X_{p_+,p_-}$$

とおく。Y_{p_+,p_-} は $(\alpha_+,\alpha_-)=2p$ より階数 1 の even integral lattice であり、$X_{p_+,p_-}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Y_{p_+,p_-},\mathbb{Z})$ である。

$$V_{p_+,p_-}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_{n\alpha}$$

とおく。$\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$ として

$$V_{p_+,p_-} \ni |0\rangle,\ T = \frac{1}{2}b[-1]^2|0\rangle + \frac{1}{2}\alpha_0 b[-2]|0\rangle,\ |n\alpha\rangle\ (n \in \mathbb{Z}),\ b[-1]|0\rangle$$

である。

命題. V_{p_+,p_-} は次で定義される頂点作用素代数の構造を持つ。

$$\begin{aligned} Y : V_{p_+,p_-} &\longrightarrow \mathrm{End}^f(V_{p_+,p_-})[[z,z^{-1}]] \\ &Y(|0\rangle, z) = id, \quad Y(b[-1]|0\rangle, z) = b(z), \\ &Y(T, z) = T(z), \quad Y(|n\alpha\rangle, z) = V_{n\alpha}(z), \\ &T = \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \frac{1}{2}\alpha_0 \partial b(z). \end{aligned}$$

$[\beta] \in X_{p_+,p_-}/Y_{p_+,p_-}$ について、$\mathcal{V}_{[\beta]} = \sum_{\beta \in [\beta]} F_\beta$ とおく。

命題. (1) $\mathcal{V}_{[\beta]}$ は既約 V_{p_+,p_-}-module.

(2) V_{p_+,p_-}-Mod $= V_{p_+,p_-}$-mod が成立し、アーベル圏として半単純,

$$S_\pm = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int S_\pm(z)dz : V_{p_+,p_-} \to \mathcal{V}_{[\alpha_\pm]}$$

は well-defined な Virasoro intertwining 作用素である。

$M_{p_+,p_-} = \mathrm{Ker}S_+ \cap \mathrm{Ker}S_- \subset V_{p_+,p_-}$ とおく。

命題. (1) $M_{p_+,p_-} \ni |0\rangle, T$ であり、$M_{p_+,p_-} = (M_{p_+,p_-}, |0\rangle, T, Y)$ はV_{p_+,p_-} の部分頂点作用素代数である。

(2) $M_{p_+,p_-} \supset W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ である。このことから、M_{p_+,p_-} は拡大 W 代数と呼ばれる。

(3) $\mathrm{Ker}S_+ \neq \mathrm{Ker}S_- \subset \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$.

(4) $0 \to \mathrm{Vir}_{c_{\kappa_+,\kappa_-}} \to \mathrm{Ker}S_\pm$ は全射ではない。

我々の目的はこの頂点作用素代数 M_{p_+,p_-} を調べることである。M_{p_+,p_-} を sl_2 型のレベル (p_+,p_-) の拡大 W 代数とよぶ。今までの Virasoro 代数の表現論の記述により、M_{p_+,p_-} は極めて複雑な構造を持っていることが想像される。

$\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合に頂点作用素代数$\Pi_{\kappa_+,\kappa_-} \supset W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ の構造を調べておく。方法は、screening 作用素の積の積分によって得られる intertwining 作用素の性質を調べることである。

Π_{κ_+,κ_-}-mod はアーベル圏として半単純であり、単純対象は$F_{\beta_{r,s}} = F_{r,s}, (r,s) \in \mathbb{Z}^2$ であり、${F_{r,s}}^* = F_{-r,-s}$ が成立していた。

$r \geq 1, s \in \mathbb{Z}$ とする。

$$\begin{aligned} &S_+(z_1)\cdots S_+(z_r)dz_1\cdots dz_r \ : \ F_{r,s} \longrightarrow F_{-r,s} \\ &= e^{r\alpha_+\hat{b}} \prod_{1\leq i\neq j\leq r} (z_i - z_j)^{\kappa_+} \prod_{j=1}^{r} z_j^{1-r\kappa_+} : \bar{S}_+(z_1)\ldots\bar{S}_+(z_r) : \ dz_1\cdots dz_r, \\ &: \bar{S}_+(z_1)\ldots\bar{S}_+(z_r) : \in U(\bar{b})\hat{\otimes}\mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \cdots .z_r, z_r^{-1}]^{S_r} \end{aligned}$$

であった。

$X_r = \{(z_1, \cdots, z_r) \in (\mathbb{C}^*)^r \ ; \ z_i \neq z_j\}$ とおく。

$$U_r(\kappa_+) = U_r(z_1, \cdots, z_r; \kappa_+) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq r} (z_i - z_j)^{\kappa_+} \prod_{j=1}^{r} z_j^{1 - r\kappa_+}$$

とおくと、$U_r(\kappa_+)$ は X_r 上の多価正則関数であり、$\deg z_j = 1$ としたとき $U_r(\kappa_+)$ の total degree は 0 である。

$$\begin{aligned} \omega_r(\kappa_+) &= d \log U_r(\kappa_+) \\ &= \kappa_+ \sum_{1 \leq i \neq j \leq r} \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + (1 - r)\kappa_+ \sum_{j=1}^{r} \frac{dz_j}{z_j} \end{aligned}$$

とおく。X_r 上の正則関数値 de Rham 複体

$$\Omega^\bullet(X_r) = \sum_{p=0}^{r} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq r} H^0(X_r, O_{X_r}) dz_{j_1} \cdots dz_{j_p}$$

を考える。$\nabla_{\omega_r} = d + \omega_r \wedge$ とおくと、$(\Omega^\bullet(X_r), \nabla_{\omega_r})$ は複体をなし、twisted de Rham cohomology 群 $H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})$ が定義される。$H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})$ には対称群 S_r が作用している。$H^*(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -}$ を S_r の作用に関する反対称部分とする。

後の議論により、$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} = 1$ であり、コホモロジー類 $[\frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_r}{z_r}]$ は $H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} \simeq \mathbb{C}$ の生成元である。またコホモロジー類 $[S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r]$ は $H^r(X_r, \nabla_{\omega_r})^{S_r, -} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{-r,s})$ に属する。

$U_r(z_1, \cdots, z_r; \kappa_+)$ の monodromy 群の定義する X_r 上の局所系を $\mathcal{L}_r(\kappa_+)$ とおき、その双対局所系を $\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)$ とおく。twisted de Rham 理論により

$$H^*(X_r, \nabla_{\omega_r}) \simeq H^*(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+))$$

であり

$$\int \ : \ H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)) \otimes H^r(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

は完全な pairing である。

そこで $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$ を取ると

$$S_+^{[r]}(\Gamma) = \int_\Gamma S_+(z_1) \cdots S_+(z_r) dz_1 \cdots dz_r \ : \ F_{r,s} \to F_{-r,s}$$

という Virasoro intertwining 作用素が定義できる。具体的に $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$ を決定し、$S_+^{[r]}(\Gamma) : F_{r,s} \to F_{-r,s}$ を計算する。これは $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_r]^{S_r}$ なる対称多項式環の直交多項式である、パラメータ κ_+ を持つ Jack 多項式を使って完全に記述される。

次章で $[\Gamma] \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r(\kappa_+))$ を定義する。以下の de Rham 理論については、[青本-喜多], [Var] を参照のこと。

上で述べたことは $\kappa_+, \kappa_- \notin \mathbb{Q}$ の場合であり、次節で述べるように理論は簡単である。しかし我々の目的は $\kappa_+ = \dfrac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \dfrac{p_+}{p_-}, p_+, p_- \geq 2$ で p_+, p_- が互いに素な場合に調べることである。この場合、ホモロジー群 $H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+))$, コホモロジー群

$H^r(X_r,\mathcal{L}_r(\kappa_+))$ の挙動は極めて複雑となる。次章では $\kappa_+=\dfrac{p_-}{p_+}$ を discrete valuation ring $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[\varepsilon]]$ に持ち上げ、さらに $\mathcal{K}=\mathbb{C}((\varepsilon))$ を考えて表現論を $(\mathcal{K},\mathcal{O})$ 上の modular 系の理論と考える。また、ホモロジー、コホモロジー群を Spec $\mathcal{O}$ 上の双対ホモロジー論と考える、いわゆる近接輪体の理論の考え方を援用する。

S_- についても、同様の考え方で行う。

5. 離散付値環上への持ち上げ

以下 $p_+,p_-\geq 2,(p_+,p_-)=1$ を取り固定する。$\kappa_+=\dfrac{p_-}{p_+},\kappa_-=\dfrac{p_+}{p_-}$ とおく。$c_{\kappa_+,\kappa_-}=0$ を避けるため $(p_+,p_-)\neq(3,2),(2,3)$ とする。

$$\alpha_+=\sqrt{\frac{2p_-}{p_+}},\quad \alpha_-=-\sqrt{\frac{2p_+}{p_-}}=-\frac{2}{\alpha_+}$$

とおく。$\alpha_+\alpha_-=-2$ となる。$\alpha_0=\alpha_++\alpha_-$ とおく。$c_{\kappa_+,\kappa_-}=1-3\alpha_0^2$ が成立する。

discrete valuation ring $\mathcal{O}=\mathbb{C}[[\varepsilon]]$ とその商体 $\mathcal{K}=\mathbb{C}((\varepsilon))$ を考える。

$\alpha_+(\varepsilon)=\alpha_+^{(0)}+\alpha_+^{(1)}\varepsilon+\cdots\in\mathcal{O}$ を

$$\alpha_+^{(0)}=\alpha_+,\quad \alpha_+^{(1)}\neq 0$$

となるよう固定し、$\alpha_-(\varepsilon)=-\alpha_+(\varepsilon)^{-1}=\alpha_-^{(0)}+\alpha_-^{(1)}\varepsilon+\cdots$ とおく。$\alpha_+(\varepsilon)\alpha_-(\varepsilon)=-2$ である。$\alpha_0(\varepsilon)=\alpha_+(\varepsilon)+\alpha_-(\varepsilon)$ とおき

$$\kappa_+(\varepsilon)=\frac{1}{2}\alpha_+(\varepsilon)^2,\quad \kappa_-(\varepsilon)=\frac{1}{2}\alpha_-(\varepsilon)^2$$

とおく。$\kappa_+(\varepsilon)\kappa_-(\varepsilon)=1$ である。

$$c_{p_+,p_-}(\varepsilon)=c_{\kappa_+(\varepsilon),\kappa_-(\varepsilon)}=13-6(\kappa_+(\varepsilon)+\kappa_-(\varepsilon))$$

とおく。

$$\begin{aligned}X_{p_+,p_-}(\varepsilon)&=\mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_+(\varepsilon)+\mathbb{Z}\frac{1}{2}\alpha_-(\varepsilon)\subset\mathcal{O}\\ \beta_{r,s}(\epsilon)&=\frac{1-r}{2}\alpha_+(\varepsilon)+\frac{1-s}{2}\alpha_-(\varepsilon)\in X_{p_+,p_-}(\varepsilon)\end{aligned}$$

とおく。$X_{p_+,p_-}(\varepsilon)$ は階数 2 の自由アーベル群である。

$$h_{r,s}(\epsilon)=h_{\beta_{r,s}(\epsilon)}=\frac{r^2-1}{4}\kappa_+(\varepsilon)-\frac{rs-1}{2}+\frac{s^2-1}{4}\kappa_-(\varepsilon)$$

とおく。$h_{r,s}(\varepsilon)=h_{-r,-s}(\varepsilon)$ である。

$$H_{p_+,p_-}(\varepsilon)=\{h_{r,s}(\varepsilon);r,s\in\mathbb{Z}\}$$

とおく。$\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{Z}$- graded $\mathbb{C}$-algebra $U(b)$ を係数拡大して

$$\begin{aligned}{}_{\mathcal{K}}U(b)=U(b)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{K}\supset{}_{\mathcal{O}}U(b)=U(b)\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{O},\\ {}_{\mathcal{K}}U(\bar{b})=U(\bar{b})\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{K}\supset{}_{\mathcal{O}}U(\bar{b})=U(\bar{b})\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{O}\end{aligned}$$

を考えることができる。

$\mathbb{Z}$-graded topological algebra の組 $({}_{\mathcal{K}}U(b), {}_{\mathcal{O}}U(b))$ を考え、各 $M \in {}_{\mathcal{K}}U(b)$-Mod について、 M の ${}_{\mathcal{O}}U(b))$ 不変 lattice ${}_{\mathcal{O}}M$ を考える。すなわち ${}_{\mathcal{O}}U(b)({}_{\mathcal{O}}M) \subset {}_{\mathcal{O}}M$ かつ ${}_{\mathcal{O}}M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K} = {}_{\mathcal{K}}M$ が成立する。考察の対象は $({}_{\mathcal{K}}M, {}_{\mathcal{O}}M)$ である。すなわち、$({}_{\mathcal{K}}U(b), {}_{\mathcal{O}}U(b))$ に関する、表現論における modular 系を考える。この一般論は重要であるが、ここでは取りあえず必要最低限の話をする。この考え方の下で、頂点作用素代数の組 $\left({}_{\mathcal{K}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon), {}_{\mathcal{O}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon)\right)$ が得られる。これを定義しよう:

${}_{\mathcal{K}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon)$ は ${}_{\mathcal{K}}U(b)$-module ${}_{\mathcal{K}}F_0, \ni |0\rangle$, をベクトル空間として持ち

$$T = \left(\frac{1}{2}b[-1]^2 + \frac{1}{2}\alpha_0(\varepsilon)b[-2]\right)|0\rangle \in {}_{\mathcal{K}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon),$$
$$T(z) = \frac{1}{2} : b(z)^2 : + \frac{1}{2}\alpha_0(\varepsilon)\partial b(z) \in \mathrm{End}^f_{\mathcal{K}}\left({}_{\mathcal{K}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon)\right)[[z, z^{-1}]]$$

である。

するとアーベル圏 ${}_{\mathcal{K}}\Pi_{p_+,p_-}(\varepsilon)$-mod が考えられる。これは単純対象として

$${}_{\mathcal{K}}F_{r,s}(\varepsilon) = {}_{\mathcal{K}}F_{\beta_{r,s}}(\varepsilon) \ni |\beta_{r,s}(\varepsilon)\rangle,\ (r,s) \in \mathbb{Z}^2$$

を持つ、半単純アーベル圏となる。

体 $\mathcal{K}$ 上の頂点作用素代数 ${}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)$ はその $\mathcal{O}$ 上の頂点作用素代数 ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon) = \left({}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon), |0\rangle, T, Y\right)$ を持つ。${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)$ は、${}_{\mathcal{O}}U(b)$ 加群として

$${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon) = {}_{\mathcal{O}}U(b)|0\rangle = {}_{\mathcal{O}}F_0$$

である。すると加法圏

$$\left({}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon), {}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)\right)\text{-mod}$$

と、加法圏 ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)$-mod を考えることができる。

$${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)\text{-mod} \ \ \text{は}\ {}_{\mathcal{O}}F_{r,s} = {}_{\mathcal{O}}F_{\beta_{r,s}}$$

を持つが、その他に ${}_{\mathcal{K}}F_{r,s}$ は多くの ${}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)$-不変な $\mathcal{O}$-lattice を持つ。この加法圏 $\left({}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon), {}_{\mathcal{O}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)\right)$-mod をきちんと調べることは重大な問題である。ここでは $\mathbb{C}$ 上の頂点作用素代数 M_{p_+,p_-} に関連するところのみを調べることとし、一般論は将来の課題として先を急ぐ。

考え方は、まず ${}_{\mathcal{K}}\Pi_{\kappa_+,\kappa_-}(\varepsilon)$-mod を考え、この上で screening 作用素 S_+, S_- を考える。このとき各 $r \geq 1$ について X_r 上の $\mathcal{K}$ 値多価正則関数

$${}_{\mathcal{K}}U_r(z_1, \cdots, z_r; \kappa_+(\varepsilon)) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq r}(z_i - z_j)^{\kappa_+(\varepsilon)}\prod_{j=1}^{r} z_j^{1-r\kappa_+(\varepsilon)}$$

と、その monodromy の定義する $\mathcal{K}$ 値局所系 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r(\kappa_+(\varepsilon))$, およびその双対局所系 ${}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r^{\vee}(\kappa_+(\varepsilon))$ が考えられる。

ホモロジー群 $H_r(X_r, {}_{\mathcal{K}}\mathcal{L}_r^{\vee}(\kappa_+(\varepsilon))$ の元 $[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]$ を構成しよう。

$r = 1$ のとき、$X_1 = \mathbb{C}^*$, $\mathcal{L}_r^{\vee}(\varepsilon) = \mathcal{K}$ であるので、以下 $r \geq 2$ とする。

$$Y_{r-1} = \{(y_1, \cdots, y_{r-1}) \in \mathbb{C}^{r-1}; y_i \neq y_j (i \neq j), y_i \neq 0, 1\}$$

とおく。$\mathbb{C}^*$ の作用と可換な正則同型

$$X_r \to \mathbb{C}^* \times Y_{r-1} \ : \ (z_1, \cdots, z_r) \mapsto (z, y_1, \cdots, y_{r-1})$$

を、$z = z_1, y_j = z_{j+1}/z_j$ $(j = 1, \cdots, r-1)$ と定義する。この写像は、$\mathbb{C}^*$ を X_r および $\mathbb{C}^* \times Y_{r-1}$ に、それぞれ diagonal 作用および第1成分への作用させるとき、$\mathbb{C}^*$ 作用と可換である。このとき X_r 上の $\mathcal{K}$ 値多価正則関数 U_r は、$\mathbb{C}^* \times Y_{r-1}$ 上 $z \in \mathbb{C}^*$ によらず、

$$U_r(z_1, \cdots, z_r; \kappa_+(\varepsilon)) = \bar{U}_{r-1}(y_1, \cdots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon))$$

と表される。ここに

$$\bar{U}_{r-1}(y_1, \cdots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon)) = \prod_{1 \le i \ne j \le r-1} (y_i - y_j)^{\kappa_+(\varepsilon)} \prod_{j=1}^{r-1} y_j^{(1-r)\kappa_+(\varepsilon)} (1 - y_j)^{2\kappa_+(\varepsilon)}.$$

$\bar{U}_{r-1}(y_1, \cdots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon))$ の monodromy が定義する、Y_{r-1} 上の $\mathcal{K}$ を fiber とする局所系を $\overline{\mathcal{L}_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))$ とし、$\overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))$ をその双対とする。

今 $H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$ を、局所有限チェインを使った局所係数ホモロジー群とする。次の結果が知られている。

命題. [[青本-喜多] 参照] (1) $p \in \mathbb{Z}$ に対し

$$H_p(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) \xrightarrow{\simeq} H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))).$$

(2)
$$H_p^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) = 0 \quad (p \ne r-1),$$
$$\dim_{\mathcal{K}} H_{r-1}^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) = (r-1)!.$$

(3) $H_{r-1}^{l.f.}(Y_{r-1}, \overline{\mathcal{L}_{r-1}}^\vee(\kappa_+(\varepsilon)))$ の $\mathcal{K}$ 上の basis として

$$[\overline{\Delta_{r-1}}(\sigma), \varphi_\sigma], \quad \sigma \in S_{r-1}$$

がとれる。ここに

$$\overline{\Delta_{r-1}} = \{1 > y_{\sigma(1)} > \cdots > y_{\sigma(r-1)} > 0\} \subset Y_{r-1},$$
$$\varphi_\sigma \ : \ \overline{U_{r-1}}(\overline{\mathcal{L}_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))) \text{ の } \overline{\Delta_{r-1}} \text{ 上の固定した branch.}$$

(1) の具体的な同型は、Y_{r-1} の blow-up を具体的に構成することにより [TK] で行われた。

今、$c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon)) = \displaystyle\int_{[\overline{\Delta_{r-1}}]} \bar{U}_{r-1}(y_1, \cdots, y_{r-1}; \kappa_+(\varepsilon)) \frac{dy_1}{y_1} \cdots \frac{dy_{r-1}}{y_{r-1}}$ とおく。$c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon))$ は下に述べる Selberg の積分公式の特別な場合で、次で与えられる。

$$c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon)) = \frac{1}{(r-1)!} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{\Gamma((j-r)\kappa_+(\varepsilon))\Gamma(1 + (j+1)\kappa_+(\varepsilon))}{\Gamma(1 + \kappa_+(\varepsilon))}.$$

命題. (Selberg の積分公式、[青本-喜多], [Var] 参照) $m \ge 2$ とし、$a, b, c \in \mathbb{C}$ は一般の位置にあるとする。Y_m 上の $\mathbb{C}$ 値多価正則関数

$$U_m(a, b, c) = U_m(y_1, \cdots, y_m; a, b, c) = \prod_{j=1}^{m} y_j^a (1 - y_j)^b \prod_{1 \le i \ne j \le m} (y_i - y_j)^c$$

とおく。このとき

$$S_m(a,b,c)=\int\cdots\int_{\overline{\Delta_m}}U_m(a,b,c)\frac{dy_1}{y_1}\cdots\frac{dy_m}{y_m}$$

とおくとき

$$S(a,b,c)=\frac{1}{m!}\prod_{j=1}^{m}\frac{\Gamma(1+jc)\Gamma(a+(j-1)c)\Gamma(1+b+(j-1)c)}{\Gamma(1+c)\Gamma(1+a+b+(m+j-2)c)}.$$

そこで

$$[\overline{\Gamma_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))]=\frac{1}{c_{r-1}(\kappa_+(\varepsilon))}[\overline{\Delta_{r-1}},\varphi]\in H_{r-1}(Y_{r-1},\overline{\mathcal{L}_{r-1}}^{\vee}(\kappa_+(\varepsilon)))$$

とおけば

$$[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\gamma_1]\otimes[\overline{\Gamma_{r-1}}(\kappa_+(\varepsilon))]\in H_r(X_r,\mathcal{L}_r^{\vee}(\kappa_+(\varepsilon)))$$

となる。ここに、$[\gamma_1]\in H_1(\mathbb{C}^*,\mathbb{C})$ は $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\displaystyle\int_{[\gamma_1]}\frac{dz}{z}=1$ で定義される canonical な生成元である。このとき

$$\int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]}U_r(\kappa_+(\epsilon))\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_r}{z_r}=1$$

が成立する。そして

$$S_+^{[r]}=\int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]}S_+(z_1)\cdots S_+(z_r)dz_1\cdots dz_r\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}({}_{\mathcal{K}}F_{r,s},{}_{\mathcal{K}}F_{-r,s})$$

は Virasoro intertwining operator となる。

同様に、$s\geq 1, r\in\mathbb{Z}$ について、

$$S_-^{[r]}=\int_{[\Gamma_r(\kappa_-(\varepsilon))]}S_-(z_1)\cdots S_-(z_r)dz_1\cdots dz_r\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}({}_{\mathcal{K}}F_{r,s},{}_{\mathcal{K}}F_{r,-s})$$

なる Virasoro intertwining operator が定義される。

これより問題は

$$\langle\quad\rangle_{\kappa_+(\varepsilon)}^r:\ \mathcal{K}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_r,z_r^{-1}]^{S_r}\longrightarrow\mathcal{K},$$
$$\langle f\rangle_{\kappa_+(\varepsilon)}^r=\int_{[\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))]}fU_r(\kappa_+(\varepsilon))\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_r}{z_r}$$

$(f\in\mathcal{K}[z_1,z_1^{-1},\cdots,z_r,z_r^{-1}]^{S_r})$ を計算することに帰着された。

文字を変えて $N\geq 1$ とし、

$$\langle\quad\rangle_{\kappa_+(\varepsilon)}^N:\ \mathcal{K}[x_1,x_1^{-1},\cdots,x_N,x_N^{-1}]^{S_N}\longrightarrow\mathcal{K},$$
$$\langle f\rangle_{\kappa_+(\varepsilon)}^N=\int_{[\Gamma_N(\kappa_+(\varepsilon))]}fU_N(\kappa_+(\varepsilon))\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_N}{x_N}$$

とする。以下の性質は、ホモロジー論・コホモロジー論の性質を使って容易にわかる。

命題. $\mathcal{K}$-linear map $\langle \quad \rangle^N_{\kappa_+(\varepsilon)}:\ \mathcal{K}[x_1, x_1^{-1}, \cdots, x_N, x_N^{-1}]^{S_N} \longrightarrow \mathcal{K}$ は次を満たす。

(1) $\langle 1 \rangle^N_{\kappa_+(\varepsilon)} = 1$

(2) $\langle f \rangle^N_{\kappa_+(\varepsilon)} = 0$ if $\deg f \neq 0$. (ただし $\deg x_j = 1$ とした)

(3) $\langle \bar{f} \rangle^N_{\kappa_+(\varepsilon)} = \langle f \rangle^N_{\kappa_+(\varepsilon)}$. ここに $\bar{f}(x_1, \cdots, x_N) := f(x_1^{-1}, \cdots, x_N^{-1})$.

今 ${}_{\mathcal{K}}\Lambda_N = \mathcal{K}[x_1, \cdots, x_N]^{S_N}$, $\deg x_j = 1$ とおく。上の命題より、

$$(\ , \ )^N_{\kappa_+(\varepsilon)} \ : \ {}_{\mathcal{K}}\Lambda_N \otimes \Lambda_N \to \mathcal{K}$$

なる symmetric bilinear map を

$$(P, Q)^N_{\kappa_+(\epsilon))} = \langle \bar{P} Q \rangle^N_{\kappa_+(\epsilon)}$$

で定義する。このとき

$$(1,1)^N_{\kappa_+(\varepsilon)} = 1, \quad (P, Q)^N_{\kappa_+(\varepsilon)} = 0 \text{ if } \deg P \neq \deg Q$$

が成り立つ。さらに、この $(\ , \ )^N_{\kappa_+(\varepsilon)}$ が Jack 多項式の理論で計算できるのである。

対称多項式の空間 ${}_{\mathcal{K}}\Lambda = \lim_{\leftarrow} {}_{\mathcal{K}}\Lambda_N$ を導入する。$n = 1, 2, \cdots$ について

$$p_n(x) = p_n(x_1, x_2, \cdots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n \in {}_{\mathcal{K}}\Lambda \quad (\deg p_n = n)$$

とおく。このとき

$${}_{\mathcal{K}}\Lambda = \mathcal{K}[p_1, p_2, \cdots]$$

($\mathcal{K}$ 上の $\mathbb{Z}_{\geq 0}$- graded ring として同型) である。全射環準同型

$$\rho_N \ : \ {}_{\mathcal{K}}\Lambda \to {}_{\mathcal{K}}\Lambda_N$$

を、$\rho_N(x_j) = x_j \ (1 \leq j \leq N), \quad \rho_N(x_j) = 0 \ (j \geq N)$ として定義する。また

$${}_{\mathcal{O}}\Lambda = \mathcal{O}[p_1, p_2, \cdots], \qquad {}_{\mathcal{O}}\Lambda_N = \mathcal{O}[x_1, \cdots, x_N]^{S_N}$$

とおく。すると $\rho_N : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to {}_{\mathcal{O}}\Lambda_N$ も全射である。

ここで分割 (partition, ヤング図形) について思い出しておく。分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ に対し、$|\lambda| = \sum_i \lambda_i < \infty$ を λ の degree と呼んだ。$\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots)$ を分割 λ の転置とする。$l_\lambda = \#\{i; \lambda_i > 0\}$ を λ の深さと呼んだ。ヤング図形 λ の content $s = (i, j)$ $(1 \leq i \leq l_\lambda, 1 \leq j \leq \lambda_i)$ について、非負整数を次のようにおいた。

$$a_\lambda(s) = \lambda_i - j, \quad a'_\lambda(s) = j - 1 \text{ (arm length, dual arm length)}$$
$$\ell_\lambda(s) = l'_i - i, \quad l'_\lambda(s) = i - 1 \text{ (leg length, dual leg length)}$$

また $i = 1, 2, \cdots$ について $m_i(\lambda) = \#\{j; \lambda_j = i\}$ とおき、$\lambda = (1^{m_1(\lambda)}, 2^{m_2(\lambda)}, \cdots)$ と書く。分割の全体を $\mathcal{P}$ で表す。

$\mathcal{P}$ における、dominant order とよばれる partial order $\lambda \geq \mu$ が

$$\lambda \geq \mu \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i,\ n = 1, 2, \cdots .$$

で定まる。各 $n = 1, 2, \cdots$ について、$p_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda$, $\deg p_n = n$ であり、$\lambda \in \mathcal{P}$ について

$$p_\lambda(x) = p_{\lambda_1}(x) p_{\lambda_2}(x) \cdots \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda$$

とおけば $\deg\, p_\lambda(x) = |\lambda|$ である。${}_{\mathcal{O}}\Lambda[n] = (\text{degree } n \text{ 部分空間}) \subset {}_{\mathcal{O}}\Lambda$ とおくと、p_λ が basis を与え、

$${}_{\mathcal{O}}\Lambda = \sum_{n \geq 0} {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n], \quad {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n] = \sum_{\lambda, |\lambda| = n} \mathcal{O} p_\lambda$$

となる。$\lambda \in \mathcal{P}$ について、$m_\lambda(x) \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n], n = |\lambda|$ を

$$m_\lambda(x) = \sum_{\sigma} \sum_{i \geq 1} x_{\sigma(i)}^{\lambda_i}$$

とおいた。ここに $\sigma \in S_\infty$ の和は、$\sum_{i \geq 1} x_{\sigma(i)}^{\lambda_i}$ が異なるものの代表元の集まりをわたる。このとき

$${}_{\mathcal{O}}\Lambda[n] = \sum_{|\lambda| = n} \mathcal{O} m_\lambda(x)$$

を考える。射影 $\rho_N : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to \mathcal{O}\Lambda_N$ により

$$\begin{cases} \rho_N(m_\lambda) = m_\lambda^{(N)} & : l_\lambda \leq N \\ \rho_N(m_\lambda) = 0 & : N > l_\lambda \end{cases}$$

であり、${}_{\mathcal{O}}\Lambda_N = \sum_{l_\lambda \leq N} \mathcal{O} m_\lambda^{(N)}$ が成立する。なお、$\rho_N(p_\lambda) = 0 (l_\lambda > N)$ は一般に成立しない。

$\lambda \in \mathcal{P}$ について、$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)! \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と定義する。

$\kappa \in \mathcal{O}^*, \kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)} \varepsilon + \cdots$ を、$\kappa^{(0)} \notin \mathbb{Q}_{\leq 0},\ \kappa^{(1)} \neq 0$ のように一つ取って固定する。

$\mathcal{K}$ 上の対称2次形式 $(\ ,\ )_\kappa : {}_{\mathcal{K}}\Lambda \otimes {}_{\mathcal{K}}\Lambda \to \mathcal{K}$ を

$$(p_\lambda, p_\mu)_\kappa = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \kappa^{l_\lambda}$$

とおく。これは

$$(\ ,\ )_\kappa : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \otimes {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to \mathcal{O}$$

を引き起こし、

$$\begin{cases} {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n_1] \perp {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n_2] & : n_1 \neq n_2, \\ (\ ,\ )_\kappa & : {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n] \otimes {}_{\mathcal{O}}\Lambda[n] \to \mathcal{O} \text{ は complete pairing} \end{cases}$$

である。次の定理は、Stanley に始まる直交多項式の基本定理である。

定理. [Macdonald 参照] 上の記号の下に、各 $\lambda \in \mathcal{P}$ について、$P_\lambda(x;\kappa) \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda$ で次の性質を満たすものが唯一存在する。

(1) $(P_\lambda(x;\kappa), P_\mu(x;\kappa))_\kappa = 0$ if $\lambda \neq \mu$,

(2) $P_\lambda = m_\lambda + \displaystyle\sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda,\mu}(\kappa) m_\mu,\ u_{\lambda,\mu} \in \mathcal{O}.$

この $P_\lambda(x,\kappa)$ をパラメータ κ を持つ Jack 多項式と呼ぶ。定義より

$${}_{\mathcal{O}}\Lambda = \sum_\lambda \mathcal{O} P_\lambda(x;\kappa)$$

であることが分かる。また、$b_\lambda(\kappa) = (p_\lambda(\kappa), p_\lambda(\kappa))_\kappa^{-1} \in \mathcal{O}$ とおくと、

$$b_\lambda(\kappa) = \prod_{s\in\lambda} \frac{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + 1}{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + \kappa} \in \mathcal{O}$$

が成立する。

注意. $\kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)}\varepsilon + \cdots, \kappa^{(0)} \neq \mathbb{Q}_{\leq 0}$ より、$\lim_{\varepsilon\to 0} b_\lambda(\kappa) = b_\lambda(\kappa^{(0)}) \in \mathbb{C}^*$ となることが分かる。$Q_\lambda(\kappa) = b_\lambda(\kappa) P_\lambda(\kappa)$ とおくと、$(P_\lambda(\kappa), Q_\lambda(\kappa))_\kappa = \delta_{\lambda,\mu}$ が成立する。

各 $\beta \in \mathcal{O}^*$ について、$\mathcal{O}$ 上の代数準同型

$$w_\beta : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to {}_{\mathcal{O}}\Lambda \quad \text{を} \quad w_\beta(p_n) = (-1)^{n-1}\beta p_n$$

で定める。また $X \in \mathcal{O}$ について、代数準同型

$$\Sigma_X : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to \mathcal{O} \quad \text{を} \quad \Sigma_X(p_n) = X$$

として定義する。すると次が成立する。

命題. [Macdonald 参照]

(1) $$\prod_{i,j\geq 1}(1 - x_i y_j)^{-1/\kappa} = \exp\left(\frac{1}{\kappa}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)\right)$$

$$= \sum_\lambda P_\lambda(x;\kappa) Q_\lambda(y;\kappa) \ \in\ {}_{\mathcal{O}}\Lambda \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \Lambda.$$

(2) $w_\kappa(P_\lambda(x;\kappa)) = Q_{\lambda'}(x;\kappa^{-1}).$

(3) $$\Sigma_X(Q_\lambda(x;\kappa)) = \prod_{s\in\lambda} \frac{X + \kappa a'_\lambda(s) - l'_{\lambda(s)}}{\kappa a_\lambda(s) + \ell_\lambda(s) + \kappa} \in \mathcal{O},$$

$$\Sigma_{X,x}\left(\prod_{i,j\geq 1}(1 - x_i y_j)^{-1/\kappa}\right) = \prod_{n\geq 1} e^{\frac{X}{\kappa n}p_n(y)} = \prod_{i\geq 1}(1 - y_i)^{-\frac{X}{\kappa}}$$

$$= \sum_\lambda P_\lambda(y,\kappa)\sigma_X(Q_\lambda(x,\kappa)).$$

さらに

命題. $\rho_N : {}_{\mathcal{O}}\Lambda \to {}_{\mathcal{O}}\Lambda_N$ について次が成立する。

(1) $\rho_N(P_\lambda(x;\kappa)) = \begin{cases} P_\lambda^{(N)}(x_1 - x_N;\kappa) & l_\lambda \le N \\ 0 & l_\lambda > N \end{cases}$ であり、${}_{\mathcal{O}}\Lambda_N = \sum_{l_\lambda \le 0} \mathcal{O}P_\lambda^{(N)}(x;\kappa)$.

(2) $\lambda = (m, \cdots, m),\ l_\lambda = N$ について

$$P_\lambda^{(N)}(x;\kappa) = \prod_{i=1}^{N} x_i^N = m_\lambda(x)$$

(3) $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N), l_\lambda \le N$ とし、$m \ge 0$ について $\lambda + m = (\lambda_1 + m, \cdots, \lambda_N + m)$ とおくと

$$P_{\lambda+m}^{(N)}(x;\kappa) = P_\lambda^{(N)}(x;\kappa) \prod_{i=1}^{N} x_i^m \in {}_{\mathcal{O}}\Lambda_N.$$

次が、積分によって定義された内積 $(\ ,\ )_\kappa^N$ と、Jack 多項式を定義する ${}_{\mathcal{O}}\Lambda$ 上の内積 $(\ ,\ )_\kappa$ を比較する重要な性質である。

命題. $N \ge 1$ を固定する。

(1) $l_\lambda, l_\mu \le N$ とすれば

$$(P_\lambda^{(N)}(\kappa), Q_\mu^{(N)}(\kappa))_\kappa^N = \delta_{\lambda,\mu} b_\lambda^{(N)},\ b_\lambda^{(N)} = \prod_{s \in \lambda} \frac{N + \kappa a'_\lambda(s) - l'_\lambda(s)}{N + \kappa(a'_\lambda(s) + 1) - l'_\lambda(s) - 1},$$

これと条件 $\kappa = \kappa^{(0)} + \kappa^{(1)}\varepsilon + \cdots \in \mathcal{O},\ \kappa^{(0)} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}_{\le 0}$ より、

$$b_\lambda^{(N)}(\kappa) \in \mathcal{O}, \quad b_\lambda^{(N)}(\kappa^{(0)}) \in \mathbb{C}^*$$

が成立する。

(2) $m \ge 1$ について、$\lambda = (m, \cdots, m), l_\lambda = N$ とする。このとき $b_\lambda^{(N)}(\kappa) = 1$, すなわち

$$(P_\lambda^{(N)}(\kappa), P_\lambda^{(N)}(\kappa))_\kappa^N = (P_\lambda(\kappa), P_\lambda(\kappa))_\kappa$$

が成立する。

注意. この命題の (2) の性質は著しいものと思う。

記号を N から元の r, s に戻すと、上の命題により、$(,)_\kappa^r : {}_{\mathcal{K}}\Lambda_r \to \mathcal{K}$ は $(,)_\kappa^r : {}_{\mathcal{O}}\Lambda_r \to \mathcal{O}$ を定義する。これより

$$r \ge 1, s \in \mathbb{Z} \text{ のとき、} S_+^{[r]} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}({}_{\mathcal{O}}F_{r,s},\ {}_{\mathcal{O}}F_{-r,s}),$$
$$s \ge 1, r \in \mathbb{Z} \text{ のとき、} S_-^{[r]} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}({}_{\mathcal{O}}F_{r,s},\ {}_{\mathcal{O}}F_{r,-s}),$$

が分かり、$S_+^{[r]}, S_-^{[r]}$ は Virasoro intertwining operators であることが分かる。

命題. (1)(a) $r \ge 1, s \ge 1$ に対し

$$0 \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}F_{r,s} \xrightarrow{S_+^{[r]}} {}_{\mathcal{K}}F_{-r,s} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact},$$

${}_{\mathcal{K}}F_{-r,s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(b) $r \geq 1, s = 0$ に対し

$$ {}_{\mathcal{K}}F_{r,0} \xrightarrow{S_+^{[r]}} {}_{\mathcal{K}}F_{r,0} \quad : \text{既約 } \mathfrak{L}\text{-加群の同型。} $$

(c) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$ 0 \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}F_{r,-s} \xrightarrow{S_+^{[r]}} {}_{\mathcal{K}}F_{-r,-s} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact}, $$

${}_{\mathcal{K}}F_{r,-s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(2)(a) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$ 0 \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}F_{r,s} \xrightarrow{S_-^{[r]}} {}_{\mathcal{K}}F_{r,-s} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact}, $$

${}_{\mathcal{K}}F_{r,-s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

(b) $r = 0, s \geq 1$ に対し

$$ {}_{\mathcal{K}}F_{0,s} \xrightarrow{S_-^{[s]}} {}_{\mathcal{K}}F_{0,-s} \quad : \text{既約 } \mathfrak{L}\text{-加群の同型。} $$

(c) $r \geq 1, s \geq 1$ に対し

$$ 0 \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}F_{-r,s} \xrightarrow{S_-^{[s]}} {}_{\mathcal{K}}F_{-r,-s} \longrightarrow {}_{\mathcal{K}}L_{h_{r,s}(\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad : \text{exact}, $$

${}_{\mathcal{K}}F_{-r,s}$ は既約 $\mathfrak{L}$ 加群。

注意. ${}_{\mathcal{K}}F_{-r,-s} \simeq {}_{\mathcal{K}}F_{r,s}{}^*$ であった。

命題. $r \geq 1, s \geq 1$ とする。次の図式は可換である。

$$ \begin{array}{ccc} {}_{\mathcal{K}}F_{r,s} & \overset{S_+^{[r]}}{\to} & {}_{\mathcal{K}}F_{-r,s} \\ S_+^{[s]} \downarrow & & \downarrow S_-^{[s]} \\ {}_{\mathcal{K}}F_{r,-s} & \overset{S_+^{[r]}}{\to} & {}_{\mathcal{K}}F_{-r,-s} \end{array} $$

これらのことを用い、$\mathcal{O}$ 上の準同型 $S_+^{[r]} : {}_{\mathcal{O}}F_{r,s} \to {}_{\mathcal{O}}F_{-r,s}$ 達の性質を導くことができる。

そこで $\kappa_+ = \dfrac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \dfrac{p_+}{p_-}$ の場合を考える。

$$ H_r(X_r, {}_{O}\mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+(\varepsilon))) \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C}} H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)) $$

なる写像を考え

$$ [\Gamma_r(\kappa_+)] = [\Gamma_r(\kappa_+(\varepsilon))] \otimes_{\mathcal{O}} \mathbb{C} \in H_r(X_r, \mathcal{L}_r^\vee(\kappa_+)) $$

とおく。$[\Gamma_s(\kappa_-)] \in H_s(X_s, \mathcal{L}_s^\vee(\kappa_-))$ も同様に考える。これらは一種の隣接輪体である。$[\Gamma_r(\kappa_+)], [\Gamma_s(\kappa_-)]$ を renormalized (繰り込まれた) cycles と呼ぶ。

$$\int_{[Gamma_r(\kappa_+)]} U_r(\kappa_+)\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_r}{z_r} = 1, \quad \int_{[Gamma_s(\kappa_-)]} U_s(\kappa_-)\frac{dz_1}{z_1}\cdots\frac{dz_s}{z_s} = 1$$

なる規格化条件を満たしていることに注意しておく。

これにより目標であった Virasoro intertwining operators が定まる。

(1) $r \geq 1, s \in \mathbb{Z}$:

$$S_+^{[r]} = \int_{[\Gamma_r(\kappa_+)]} S_+(z_1)\cdots S_+(z_r)dz_1\cdots dz_r \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{-r,s})$$

(2) $s \geq 1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$S_-^{[s]} = \int_{[\Gamma_s(\kappa_-)]} S_-(z_1)\cdots S_-(z_r)dz_1\cdots dz_r \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F_{r,s}, F_{r,-s})$$

階数 1 の自由アーベル群

$$X_{p_+,p_-} = \mathbb{Z}\frac{\alpha_+}{2} + \mathbb{Z}\frac{\alpha_-}{2}$$

と $r, s, n \in \mathbb{Z}$ について、

$$\begin{aligned} &\beta_{r,s,n} = \beta_{r-np_+,s} = \beta_{r,s+np_-} \in X_{p_+,p_-} \\ &\beta r, s = \beta_{r,s,0} \end{aligned}$$

とおくと $\beta_{r-p_+,s,n} = \beta_{r,s+p_-,n} = \beta_{r,s,n+1}$ であり $\{\ \beta_{r,s,n}; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \in \mathbb{Z}\}$ が X_{p_+,p_-} の完全代表系となった。

$\beta \in X_{p_+,p_-}$ に対し $h_\beta = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\alpha_0\beta$ とおく。また $\beta^\vee = \alpha_0 - \beta$ とおく。$h_\beta = h_{\beta^\vee}$ であった。$H_{p_+,p_-} = \{h_\beta; \beta \in X_{p_+,p_-}\}$ とおくと、H_{p_+,p_-} の代表元として

$$\{h_{r,s,n}; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0\}$$

がとれる。ただし $h_{r,s} = h_{r,s,0}$ とすれば$h_{r,s} = h_{p_+-r,p_--s}$ $(1 \leq r \leq p_+-1, 1 \leq s \leq p_--1)$ なる関係が H_{p_+,p_-} の中で成立している。

格子頂点作用素代数 V_{p_+,p_-} とその部分頂点作用素代数 $V_{p_+,p_-} \supset \Pi_{\kappa_+,\kappa_-}$ を思い出そう。格子頂点作用素代数 V_{p_+,p_-} は $2p_+p_-$ 個の既約加群 $\mathcal{V}_{[r,s]}^{\pm}$, $1 \leq r \leq p_-, 1 \leq s \leq p_-, \varepsilon = \pm$ よりなる。ここに

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{[r,s]}^{+} &= \sum_n F_{r,s,2n} \\ \mathcal{V}_{[r,s]}^{-} &= \sum_n F_{r,s,2n+1} \end{aligned}$$

このとき $S_+^{[r]}, S_-^{[s]}$ は次の $\mathcal{V}_{r,s}^{\varepsilon}$ 達の間の、Virasoro 加群と Virasoro 準同型よりなる複体を導く。これは Felder 複体とよばれる。

[1] $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とすると

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}^{\pm}_{[r,s]} \xrightarrow{S^{[r]}_+} \mathcal{V}^{\mp}_{[p_+-r,s]} \xrightarrow{S^{[p_+-r]}_+} \mathcal{V}^{\mp}_{[r,s]} \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}^{\pm}_{[r,s]} \xrightarrow{S^{[s]}_-} \mathcal{V}^{\mp}_{[r,p_--s]} \xrightarrow{S^{[p_--s]}_-} \mathcal{V}^{\pm}_{[r,s]} \longrightarrow \cdots$$

[2] $1 \leq r \leq p_+ - 1, s = p_-$ とすると

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}^{\pm}_{[r,p_-]} \xrightarrow{S^{[r]}_+} \mathcal{V}^{\mp}_{[p_+-r,s]} \xrightarrow{S^{[p_+-r]}_+} \mathcal{V}^{\pm}_{[r,s]} \longrightarrow \cdots$$

[3] $r = p_+, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とすると

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{V}^{\pm}_{[p_+,s]} \xrightarrow{S^{[s]}_-} \mathcal{V}^{\mp}_{[p_+,s]} \xrightarrow{S^{[p_--s]}_-} \mathcal{V}^{\pm}_{[p_+,s]} \longrightarrow \cdots$$

ここで $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$- 加群 $\mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]} \supset \mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}$ $(1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-)$ を以下で定義する。

[1] $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ に対し

$$\mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]} = \mathrm{Ker} S^{[r]}_+ \cap \mathrm{Ker} S^{[s]}_- \subset \mathcal{V}^{\pm}_{[r,s]}$$
$$\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]} = \mathrm{Im} S^{[p_+-r]}_+ \cap \mathrm{Im} S^{[p_--s]}_- \subset \mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]}$$

[2] $1 \leq r \leq p_+ - 1, s = p_-$ に対し

$$\mathcal{K}^{\pm}_{[r,p_-]} = \mathrm{Ker} S^{[r]}_+ \subset \mathcal{V}^{\pm}_{[r,p_-]}$$
$$\mathcal{X}^{\pm}_{[r,p_-]} = \mathrm{Im} S^{[p_+-r]}_+ \subset \mathcal{K}^{\pm}_{[r,p_-]}$$

[3] $r = p_+, 1 \leq s \leq p_-1$ に対し

$$\mathcal{K}^{\pm}_{[p_+,s]} = \mathrm{Ker} S^{[s]}_- \subset \mathcal{V}^{\pm}_{[p_+,s]}$$
$$\mathcal{X}^{\pm}_{[p_+,s]} = \mathrm{Im} S^{[p_--s]}_- \subset \mathcal{K}^{\pm}_{[p_+,s]}$$

[4] $r = p_+, s = p_-$ に対し

$$\mathcal{K}^{\pm}_{[p_+,p_-]} = \mathcal{X}^{\pm}_{[p_+,p_-]} = \mathcal{V}^{\pm}_{[p_+,p_-]}$$

我々の拡大 W 代数 M_{p_+,p_-} は、Virasoro 加群としては

$$M_{p_+,p_-} = \mathcal{X}^{+}_{[1,1]}$$

であることに注意しておく。このとき $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-mod の元として次が成り立つ。

命題. [Felder] (1) $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ とするとき

$$0 \to \mathcal{X}^{+}_{[r,s]} \to \mathcal{K}^{+}_{[r,s]} \to L_{h_{r,s}} \to 0 \ \text{: exact}, \quad \mathcal{X}^{-}_{[r,s]} = \mathcal{K}^{-}_{[r,s]}.$$

(2) 上以外の場合、$\mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]} = \mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}$.

そこで $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-mod の元としての $\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}, 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$ が問題となる。記述のため次の記号を導入する。

(1) $1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$ のとき

$$\Delta_{r,s} = \Delta_{p_+ - r, p_- - s} = h_{r,s} \quad \text{とおく。}$$

(2) $1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0$ のとき。

$$\Delta^+_{r,s,n} = \begin{cases} h_{p_+-r,p_--s,-2n-1} & 1 \leq r \leq p_+ - 1,\ 1 \leq s \leq p_- - 1 \\ h_{p_+-r,p_-,-2n-1} & 1 \leq r \leq p_+ - 1 \\ h_{p_-,p_--s,2n+1} & 1 \leq s \leq p_- - 1 \\ h_{p_+,p_-,-2n} & \end{cases}$$

とおく。また

$$\Delta^-_{r,s,n} = \begin{cases} h_{p_+-r,s,-2n-2} & 1 \leq r \leq p_+ - 1,\ 1 \leq s \leq p_- - 1 \\ h_{p_+-r,p_-,-2n-2} & 1 \leq r \leq p_+ - 1, s = p_- \\ h_{p_+,p_--s,2n+2} & 1 \leq s \leq p_- - 1, r = p_+ \\ h_{p_+,p_-,-2n-1} & r = p_+, s = p_- \end{cases}$$

とおく。

このとき、$\{\Delta_{r,s} = \Delta_{p_+-r,p_--s}\} \cup \{\Delta^{\pm}_{r,s,n}\} = H_{p_+,p_-}$ となる。

定義. $V[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}] = \{u \in \mathcal{X}^{\pm}_{r,s}; L[n]u = 0, n \geq 1\}$ とおく。

定理. 次が成り立つ。

(1) $V[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}] = \sum_{n\geq 0} V_n[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}]$, ただし $V_n[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}] = \{u \in V[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}]; L[0]u = \Delta^{\pm}_{r,s,n}u\}$.

(2) $\dim_{\mathbb{C}} V_n(\mathcal{X}^+_{r,s}) = 2n+1, \quad \dim_{\mathbb{C}} V_n(\mathcal{X}^-_{r,s}) = 2n+2.$

定理. (1) $0 \neq u \in V_n[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}]$ のとき、$\mathcal{U}_{c_{p_+,p_-}}[\mathfrak{L}]u \simeq L_{\Delta^{\pm}_{r,s}}$ in $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-mod.

(2) $\mathcal{X}^{\pm}_{r,s} = \oplus_{n\geq 0} V_n[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}] \otimes_{\mathbb{C}} L_{\Delta^{\pm}_{r,s,n}}$ in $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-mod.

次に $V_n[\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}]$ の元を intertwining operator を使って表示しよう。

命題. 次が成立する。

(1) $n \geq 0$ とすれば、$V_n(\mathcal{X}^+_{r,s}) = \displaystyle\sum_{m=-n}^{n} \mathbb{C}u^+_{n,m}[r,s]$, ここに

$$u^+_{n,m}[r,s] := \begin{cases} S_+^{[(n+m+1)p_+-r]}|\beta_{p_+-r,s,-2n-1}\rangle : 1 \leq r \leq p_+ - 1,\ 1 \leq s \leq p_-, \\ S_+^{[(n+m)p_+]}|\beta_{p_+,s,-2n}\rangle : 1 \leq s \leq p_-. \end{cases}$$

さらに, Const. $\neq 0$ として

$$u^+_{n,m}[r,s] = \text{Const.} \cdot \begin{cases} S_-^{[(n-m+1)p_--s]}|\beta_{r,p_--s,2n+1}\rangle : 1 \leq s \leq p_+,\ 1 \leq r \leq p_- - 1, \\ S_-^{[(n-m)p_-]}|\beta_{r,p_-,2n+1}\rangle : 1 \leq r \leq p_+. \end{cases}$$

が成り立つ。

(2) $n \geq 0$ とすれば、$V_n(\mathcal{X}^-_{r,s}) = \sum_{m=-n}^{n+1} \mathbb{C}u^-_{n,m}[r,s]$, ここに

$$u^-_{n,m}[r,s] = \begin{cases} S_+^{[(n+m+1)p_+-r]}|\beta_{p_+-r,s,-2n-2}\rangle : 1 \leq r \leq p_+-1, 1 \leq s \leq p_-, \\ S_+^{[(n+m)p_+]}|\beta_{p_+,s,-2n-1}\rangle : 1 \leq s \leq p_-. \end{cases}$$

さらに, Const. $\neq 0$ として

$$u^-_{n,m}[r,s] = \text{Const.} \cdot \begin{cases} S_-^{[(n-m+21p_--s]}|\beta_{r,p_--s,2n+2}\rangle : 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_- - 1, \\ S_+^{[(n-m+1)p_-]}|\beta_{r,p_-,2n+1}\rangle : 1 \leq r \leq p_+. \end{cases}$$

が成り立つ。

これで $\mathcal{X}^{\pm}_{r,s}$ の $\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$ 加群としての性質は完全に分かったことになる。

ここで拡大代数 M_{p_+,p_-} と、レベル (κ_+,κ_-) の W 代数 $W_{[\kappa_+,\kappa_-]} \subset M_{p_+,p_-}$ の、$\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-module としての構造を改めて書いておく。

記号. $n \geq 0, -n \leq m \leq n$ について $W_{n,m} = u^+_{n,m}[1,1]$ とおく。$n \geq 0$ について

$$\Delta_n = ((n+1)p_+ - 1)((n+1)p_- - 1)$$

とおく。$\Delta_n = \Delta^+_n[1,1]$ である。

定理. (1) $0 \to X^+_{[1,1]} \to W_{[\kappa_+,\kappa_-]} \to \text{MinVir}_{c_{p_+,p_-}} \to 0$: exact as Virasoro modules.
ここに $X^+_{[1,1]} = \mathcal{X}^+_{[1,1]} \cap W_{[\kappa_+,\kappa_-]} = \sum_{n\geq 0} L^+_{\Delta_n}[1,1] \otimes W_{n,0}$.

(2) $\mathcal{U}(\mathfrak{L})|0\rangle = \text{Vir}_{c_{p_+,p_-}} \subset W_{\kappa_+,\kappa_-}$ as Virasoro modules,

$$0 \to L_{\Delta_n}[1,1] = \mathcal{U}(\mathfrak{L})W_{[0,0]} \to \text{Vir}_{c_{p_+p_-}} \to \text{MinVir}_{c_{p_+,p_-}} \to 0.$$

次章では、M_{p_+,p_-} の頂点作用素代数の構造を述べる。

6. 拡大 W 代数とその表現

互いに素な 2 以上の整数の組 (p_+,p_-)（ただし $(p_+,p_-) \neq (3,2),(2,3)$）に対し $c_{\kappa_+,\kappa_-} = 13 - 6(\kappa_+ + \kappa_-)$ であった。ここに、$\kappa_+ = \frac{p_-}{p_+}, \kappa_- = \frac{p_+}{p_-}$ である。

前章までで、レベル (κ_+,κ_-) をもつ W 代数 $W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ とその頂点作用素代数としての拡大 M_{p_+,p_-} を定義した。この 2 つの頂点作用素代数は中心荷電 c_{κ_+,κ_-} を持った。このことより

$$\text{Vir}_{c_{p_+,p_-}} \hookrightarrow W_{[\kappa_+,\kappa_-]} \hookrightarrow M_{p_+,p_-}$$

となる頂点作用素代数の拡大を持っていた。

$$\begin{aligned} H_{c_{p_+,p_-}} =& \{\Delta_{(r,s)} = \Delta_{(p_+-r,p_--s)}; 1 \leq r \leq p_+-1, 1 \leq s \leq p_--1\} \\ &\sqcup \{\Delta^{\varepsilon}_n[r,s]; 1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-, n \geq 0, \varepsilon = \pm\} \end{aligned}$$

とおくと、$\mathfrak{L}_{c_{p_+,p_-}}$-mod は単純対象 $L_\Delta, \Delta \in H_{c_{p_+,p_-}}$ を持っていた。

我々の目標は、拡大 W 代数 M_{p_+,p_-} の W 代数としての構造、および M_{p_+,p_-} の 単純対象をすべて具体的に構成することである。

このため Frobenius 写像と称する線形写像

$$E, F \in \mathrm{End}^f(\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}),\ 1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-$$

で、次の性質をもつものを構成する。

(i) $[L[n], E] = [L[n], F] = 0$ $(n \in \mathbb{Z})$,

(ii) $A \in M_{p_+,p_-}$ に対し

$[E, Y(A;z)] = Y(EA;z),\ [F, Y(A;z)] = Y(FA;z)$ in $\mathrm{End}^f(\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]})[[z, z^{-1}]]$.

さらに、性質 (i) により

$$E, F \in \mathrm{End}(V(\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]})) \quad (1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-)$$

であるが、この作用を具体的に analyze する。

E, F の構成は、Felder 複体の性質

$$S_+^{[r]} S_+^{[p_+-r]} = 0\ (1 \le r \le p_+ - 1), \quad S_-^{[s]} S_-^{[p_--s]} = 0\ (1 \le r \le p_- - 1)$$

を $\mathbb{C}$ 上より体 $\mathcal{K} = \mathbb{C}((\varepsilon))$ に持ち上げることにより構成される。具体的には論文 [TW] に譲ることにして、結果を書いておこう。

定理. $1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-$ とする。

(1) $E, F \in \mathrm{End}^f(\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]})$ で、性質 (i) を満たすものが具体的に構成でき、次を満たす。

$$[L[n], E] = [L[n], F] = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$A \in M_{p_+,p_-}$ について、$[E, Y(A;z)] = Y(EA;z),\ [F, Y(A;z)] = Y(FA;z)$.

ただし $A \in U_{c_{p_+,p_-}}(\mathfrak{L})|0\rangle \subset M_{p_+,p_-}$ に対し、$EA = FA = 0$ とした。

(2) 次が成り立つ。(すべて、Const$\neq 0$ である。)

$$(+) \begin{cases} Eu^+_{n,m}[r,s] = \mathrm{Const}.u^+_{n,m+1}[r,s], & u^+_{n,n+1}[r,s] = 0, \\ Fu^+_{n,m}[r,s] = \mathrm{Const}.u^+_{n,m-1}[r,s], & u^+_{n,-n-1}[r,s] = 0. \end{cases}$$

$$(-) \begin{cases} Eu^-_{n,m}[r,s] = \mathrm{Const}.u^-_{n,m+1}[r,s], & u^-_{n,n+1}[r,s] = 0, \\ Fu^-_{n,m}[r,s] = \mathrm{Const}.u^-_{n,m-1}[r,s], & u^-_{n,-n-1}[r,s] = 0. \end{cases}$$

次に M_{p_+,p_-} の元 $W_{n,m}, n \ge 0, m = -n, -n+1, \cdots, n$ について、$Y(W_{n,m}(z))$ 達の作用素積展開の様子を知る必要がある。そこで小さい n, m について $Y(W_{n,m}; z)$ の性質を調べ、Frobenius 写像の性質 (ii) を用いて、作用素展開の様子を調べる。

命題. M_{p_+,p_-} の中で次が成立する。

(1) $n \ge 0$ とすると、$a_n, b_n, c_n, d_n \neq 0$ があって

$$\begin{aligned} W_{1,1}[\Delta_n - \Delta_{n+1}]W_{n,n} &= a_n W_{n+1,n+1} \\ W_{1,-1}[\Delta_n - \Delta_{n+1}]W_{n,-n} &= b_n W_{n+1,-n+1} \\ W_{1,1}[\Delta_{n+1} - \Delta_n]W_{n+1,-n-1} &= c_n W_{n,-n} \\ W_{1,-1}[\Delta_{n+1} - \Delta_n]W_{n+1,n+1} &= d_n W_{n,n} \end{aligned}$$

(2) $m > \Delta_1 - \Delta_0$ とすれば

$$W_{1,1}[m]W_{1,-1} = 0, \quad W_{1,-1}[m]W_{1,1} = 0.$$

これは 4 章の性質を使い、具体的に示す。

この命題と Frobenius 写像の性質を使って、次が成り立つことが分かる。

定理. (1) M_{p_+,p_-} は頂点作用素代数として $T(z)$ および $W_{1,a}(z), a = -1, 0, 1$ から頂点作用素代数として生成される。

(2) M_{p_+,p_-} は C_2 有限条件を満たす。これより $A_0(W_{p_+,p_-})$ は $[T[0]], [W_{1,a}[0]], a = -1, 0, 1$ で $\mathbb{C}$ 代数として生成される。

定理. W 代数 $W_{[\kappa_+,\kappa_-]}$ は $T(z)$ および $W_{1,0}(z)$ から生成される。

さらに、零モード代数 $A_0(M_{p_+,p_-}), A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]})$ の構造を調べる。このためには次の命題が基本的である。

まず E, F の性質により、E, F は有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 $A_0(M_{p_+,p_-})$ の derivation を induce することが分かる。また $A_0(M_{p_+,p_-})$ の中で $E[T[0]] = 0, F[T[0]] = 0$ であり、次が成立していた (Const$\neq 0$)。

$$\begin{cases} E[W_{1,a}[0]] = \mathrm{Const.}[W_{1,a+1}[0]], & [W_{1,2}[0]] = 0, \\ F[W_{1,a}[0]] = \mathrm{Const.}[W_{1,a-1}[0]], & [W_{1,-2}[0]] = 0. \end{cases}$$

$A_0(M_{p_+,p_-})$ は $[T[0]], [W_{1,a}[0]], a = -1, 0, 1$ で $\mathbb{C}$ 代数として生成された。零モード代数 $A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]})$ は $[T[0]], [W_{1,0}[0]]$ で生成された。また、$\mathbb{C}$ 代数の写像 $A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]}) \to A_0(M_{p_+,p_-})$ が存在していた。

まず $A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]})$ の中で $[L[0]]$ と $[W_{m,0}[0]], m = 0, 1, 2, \cdots$ の間の関係を導こう。このため次の命題が基本的である。各 $\beta \in \mathbb{C}$ について $F_\beta \ni |\beta\rangle$ は M_{κ_+,κ_-} 加群である。$\mathbb{C}|\beta\rangle$ は $A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]})$ 加群となる:

$$[L[0]]|\beta\rangle = h_\beta|\beta\rangle,\ h_\beta = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{\alpha_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\alpha_0^2.$$

そこで $W_{n,0}[0]|\beta\rangle = w_n(\beta)|\beta\rangle (n = 0, 1, \cdots)$ とおく。簡単のため、$A_0(M_{(\kappa_+,\kappa_-)})$ の元 $[L[0]], [W_{n,0}[0]]$ を $[T], [W_{n,0}]$ と書く。$A_0(M_{p_+,p_-})$ においても $[L[0]], [W_{n,m}[0]]$ を $[T], [W_{n,m}]$ と書く：$|m| \geq n+1$ のとき $[W_{n,m}] = 0$ である。次が成立する。

命題. $n \geq 0$ とする。

(1) $$w_n(\beta) = \mathrm{Const.} \prod_{i=1}^{(n+1)p_+-1} \prod_{j=1}^{(n+1)p_--1} (\beta - \beta_{i,j}), \quad \mathrm{Const} \neq 0$$

(2) ある $g_n(h) \in \mathbb{C}[h]$ が存在し、$\begin{cases} w_n(\beta) = g_n(h_\beta) & (n : 偶数), \\ w_n(\beta)^2 = g_n(\beta) & (n : 奇数). \end{cases}$

ここで、$h_\beta = \frac{1}{2}(\beta - \frac{\alpha_0}{2})^2 - \frac{1}{8}\alpha_0^2$ である。

このことより次が成り立つ。

命題. $A_0(W_{[\kappa_+,\kappa_-]}) = \mathbb{C}[[T],[W_{1,0}]]$ (可換環) であり、$(\kappa_+,\kappa_-) \in (\mathbb{C}^*)^2, \kappa_+\kappa_- = 1$ について次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} [W_{n,0}] &= g_n([T]) \ : n \geq 0, \mathrm{even} \\ [W_{n,0}]^2 &= g_n([T]) \ : n \geq 1, \mathrm{odd} \end{aligned}$$

さらに、E と F が $A_0(M_{p_+,p_-})$ に $\mathbb{C}$ 代数としての derivation を導くことを用いて、次を得る。

定理. $A_0(M_{p_+,p_-})$ について以下が成り立つ。(1) $A_0(M_{p_+,p_-})$ は有限次元 $\mathbb{C}$ 代数であり、$[T],[W_{1,a}], a = -1,0,1$ で生成される。

(2) 次の関係式が存在する。

$$[W_{0,0}] = g_0([T]), \quad [W_{1,0}]^2 = g_1([T]), \quad g_2([T]) = 0.$$

(3) $[W_{1,a}](a = -1,0,1)$ の間に次の関係式が存在する。

	$[W_{1,-1}]$	$[W_{1,0}]$	$[W_{1,1}]$
$[W_{1,-1}]$	0	$-f([T])[W_{1,-1}]$	$-g_1([T]) - f([T])[W_{1,0}]$
$[W_{1,0}]$	$f([T])[W_{1,-1}]$	$g_1([T])$	$-f([T])[w_{1,1}]$
$[W_{1,1}]$	$-g_1([T]) + f([T])[W_{1,0}]$	$f([T])[W_{1,1}]$	0

(4) $[W_{1,a}](a = -1,0,1)$ の間の交換関係は次のようである。

$$[[W_{1,0}],[W_{1,\pm 1}]] = \mp 2f([T])[W_{1,1}], \quad [[W_{1,1}],[W_{1,-1}]] = 2f([T])[W_{1,0}]$$

ここに $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

この章で明らかにしたこと及び Frobenius 写像の性質から、頂点作用素代数の写像

$$M_{p_+,p_-} \to \mathrm{MinVir}_{c_{p_+,p_-}} \to 0$$

により $\mathrm{MinVir}_{c_{p_+,p_-}}$ の単純対象

$$L_{[r,s]} = L_{[p_+-r,p_--s]}, \ 1 \leq r \leq p_+ - 1, 1 \leq s \leq p_- - 1$$

は M_{p_+,p_-}-mod における単純対象 (やはり $L_{[r,s]} = L_{[p_+-r,p_--s]}$ と記す) を定めることが分かるが、更に次が示される。

命題. $1 \leq r \leq p_+, 1 \leq s \leq p_-$ とする。$\mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]}$ は M_{p_+,p_-}-加群の構造をもち、さらに $\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]} \subset \mathcal{K}^{\pm}_{[r,s]}$ は部分 M_{p_+,p_-}-加群である。

$$\mathbb{C}|\Delta_{[r,s]}\rangle = \mathbb{C}|\Delta_{[p_+-r,p_--s]}\rangle \subset L_{\Delta_{r,s}} \quad \text{および} \quad V_0(\mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}) \subset \mathcal{X}^{\pm}_{[r,s]}$$

は $A_0(M_{p_+,p_-})$- 加群になる。

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}|\Delta_{[r,s]}\rangle = \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}|\Delta_{[p_+-r,p_--s]}\rangle = 1, \quad \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}^{+}_{[r,s]}) = 1 \\ \dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}^{-}_{[r,s]}) = 2 \end{cases}$$

である。

これらは $A_0(M_{p_+,p_-})$-mod における単純対象であることが分かる。更に $A_0(W_{p_+,p_-})$ の関係式を用いると、次が分かる。

命題. $A_0(M_{p_+,p_-})$ の単純対象は次の 1) 2) 3) で尽くされる。

$$\begin{cases} 1) \quad \mathbb{C}|\Delta_{[r,s]}\rangle = \mathbb{C}|\Delta_{[p_+-r,p_--s]}\rangle, \quad 1 \le r \le p_+ - 1, 1 \le s \le p_- - 1. \\ 2) \quad V_0(\mathcal{X}^+_{[r,s]}), \quad 1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-. \ (\dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}^+_{[r,s]}) = 1 \text{ である。}) \\ 3) \quad V_0(\mathcal{X}^-_{[r,s]}), \quad 1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-. \ (\dim_{\mathbb{C}} V_0(\mathcal{X}^-_{[r,s]}) = 2 \text{ である。}) \end{cases}$$

これより単純対象の数は、$\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) + 2p_+p_-$ 個である。

最終的に、次の定理を得る。

定理. M_{p_+,p_-} の単純対象は次の 1) 2) で尽くされる。

$$\begin{cases} 1) \quad L_{[r,s]} = L_{[p_+-r,p_--s]}, \quad 1 \le r \le p_+ - 1, 1 \le s \le p_- - 1. \\ 2) \quad \mathcal{X}^{\varepsilon}_{[r,s]}, \quad 1 \le r \le p_+, 1 \le s \le p_-, \varepsilon = \pm. \end{cases}$$

単純対象の数は、$\frac{1}{2}(p_+ - 1)(p_- - 1) + 2p_+p_-$ 個である。

参考文献

[青本-喜多] K. Aomoto and M. Kita, Theory of hypergeometric functions, Springer, 2011

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B*, 241, 333-380 (1984)

[FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical surveys and monographs, Amer. Math. Soc.*,88 (2001)

[FF1] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Verma modules over the Virasoro algebra. *Lect. Notes in Math.,* 1060, 230-245. (1984)

[FF2] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Cohomologies of some nilpotent subalgebras of the Virasoro and Kac-Moody Lie algebras, *J. Geom. Phys.* 5, 209-235 (1988)

[FF3] Boris L. Feigin and Dimitry B. Fuchs, Representation of the Virasoro algebra. *Representations of Lie Groups and Related topics, Adv. Stud. Contemp. Math., Gordon and Breach, New York,* 7 465-554. (1990)

[FGST06] Boris L. Feigin, Azat. M. Gainutdinov, Alexei M. Semikhatov, Ilya Yu. Tipunin, Logarithmic extensions of minimal models: characters and modular transformations. *Nucl. Phys.*B757, 303-343 (2006)

[FGST07] Boris L. Feigin, Azat. M. Gainutdinov, Alexei M. Semikhatov, Ilya Yu. Tipunin, Kazhdan-Lusztig dual quantum group for logarithmic extensions of Virasoro minimal models. *J. Math. Phys.*48, 032303 (2007)

[FZ92] Igor B. Frenkel and Yongchang Zhu, Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras. *Duke Math. J.* 66, 123-168 (1992)

[Mac85] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* Clarendon Press, Oxford 1995.

[MNT] Atsushi Matsuo, Kiyokazu Nagatomo and Akihiro Tsuchiya, Quasi-finite algebras graded by Hamiltonian and vertex operator algebra. *London Math. Soc. Lect. note ser.*372, 282-329 (2010)

[TK] Akihiro Tsuchiya and Yukihiro Kanie, Fock space representations of the Virasoro algebra - Intertwining operators. *Publ. RIMS. Kyoto univ.* 22, 259-327 (1986)

[TW] Akihiro Tsuchiya and Simon Wood, On the extended W-algebra of type sl_2 at positive rational level, arXiv: 1302.6435

[Var] Alexander Varchenko, *Special functions, KZ type equations and representation theory*, Amer. Math. Soc. (2003)