

✿ 日本数学会

2014年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2014年9月

於 広島大学

✿ 日本数学会

2014年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2014年9月

於 広島大学

無 限 可 積 分 系

9月25日(木) 第IX会場

10:00~12:00

	(分)	頁
1 渋川元樹(九大数理)	Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials	(15) 1
2 大久保勇輔(名大多元数理)	AGT 予想で現れる一般化 Jack 対称関数の存在と直交性とその q 変形	(15) 3
3 竹村剛一(中大理工)	Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams	(15) 5
4 星野 步(香川高専) 野海正俊(神戸大理) 白石潤一(東大数理)	Askey-Wilson 多項式の四重級数表示	(15) 7
5 星野 步(香川高専) 野海正俊(神戸大理) 白石潤一(東大数理)	一行型 Koornwinder 多項式の明示的公式と Lassalle の予想の証明	(15) 9
6 齋藤洋介(東北大理)	2重サイン関数から得られる Ding-Iohara-Miki 代数の modular double 的構造	(15) 11

14:15~15:30

7 澁川陽一(北大理)	Hopf algebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps	(15) 13
8 澁川陽一(北大理)	Rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps	(15) 15
9 安東雅訓(稚内北星学園大)*	分割と相異分割の母関数における相似性の理解とその応用	(15) 17
10 篁 三郎(立教大理) 梶原健司(九大IMI)	変形 KdV 階層による平面曲線の運動と戸田階層	(15) 19

15:45~16:45 特別講演

岡田聡一(名大多元数理)	Schur-type Pfaffians and their applications to symmetric function	21
--------------	----------------------------------------------------------------------------	----

9月26日(金) 第IX会場

10:00~12:00

11 森田 健(阪大情報)	A relation between the divergent bilateral basic hypergeometric series ${}_2\psi_2(a, 0; b_1, b_2; q, x)$ and the basic hypergeometric series	(15) 33
12 磯島 伸(法政大理工)	パンルヴェ III 型方程式の特殊関数解の超離散極限	(15) 35
13 竹縄知之(東京海洋大海洋工)	Schlesinger 変換と差分 Painlevé 方程式	(15) 37
14 岩木耕平(京大数理研) 中西知樹(名大多元数理)	完全 WKB 解析と団代数	(15) 39

15	神吉雅崇 (立教大理) 時弘哲治 (東大数理) 間瀬崇史 (東大数理) 間田潤 (日大生産工)	互いに素条件による離散方程式の可積分性判定 …………… (15)	41
16	加藤晃史 (東大数理) 寺嶋郁二 (東工大情報理工)	Quiver mutation loops and partition q -series …………… (15)	43
13:00~14:00 特別講演			
	大山陽介 (阪大情報)	q -パンルヴェ方程式の古典解析 ……………	45

Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials

渋川 元樹 (九州大学)*

概 要

一変数の Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式を, 一般 (Jack) 二項係数を用いて多変数化し, その直交性, 母函数, 差分方程式等の基本的性質を解明する.

定義 1. 多変数 Meixner, Charlier, Krawtchouk 多項式をそれぞれ以下のように定義する.

$$M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(1 - \frac{1}{c}\right)^{|\mathbf{k}|}, \quad (1)$$

$$C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(-\frac{1}{a}\right)^{|\mathbf{k}|}, \quad (2)$$

$$K_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) := \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{d_{\mathbf{k}}} \frac{\binom{n}{r}_{\mathbf{k}}}{(-N)_{\mathbf{k}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \binom{\mathbf{x}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{1}{p}\right)^{|\mathbf{k}|} \quad (\mathbf{m} \subset N = (N, \dots, N)). \quad (3)$$

但し $n = r + \frac{1}{\beta}r(r-1)$, \mathbf{m}, \mathbf{k} は整数の分割, $d_{\mathbf{m}}$ はベータ函数 B を用いて

$$d_{\mathbf{m}} := \prod_{1 \leq p < q \leq r} \frac{m_p - m_q + \frac{1}{\beta}(q-p) B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q-p-1) + 1\right)}{\frac{1}{\beta}(q-p) B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q+1-p)\right)}$$

と表される定数とし, $(\mathbf{s})_{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$ に対して定まる一般階乗ベキ

$$(\mathbf{s})_{\mathbf{k}} := \prod_{j=1}^r \left(s_j - \frac{1}{\beta}(j-1)\right)_{k_j} \quad ((\alpha)_{\mathbf{k}} \text{ は } ((\alpha, \dots, \alpha))_{\mathbf{k}} \text{ とみなす})$$

であり, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_r$ とする. 更に r 変数の Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ を用いて,

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) := \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)}$$

とにおいて, 一般 (Jack) 二項係数 $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}}$ を

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_r) = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\frac{1}{\beta}} \Phi_{\mathbf{k}}^{(\frac{2}{\beta})}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

で定める.

以下 $\beta = \frac{1}{2}, 1, 2$ とする.

本研究は科研費 (課題番号:12J04930) の助成を受けたものである.

キーワード: multivariate orthogonal polynomials, harmonic analysis

* 〒819-0385 福岡県福岡市西区元岡744 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

e-mail: g-shibukawa@math.kyushu-u.ac.jp

定理 2 (母函数). \mathscr{D} を長さ r の整数の分割の集合, $z_1, \dots, z_r < 1$ とすると,

$$\prod_{j=1}^r (1 - z_j)^{-\alpha} \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(\frac{1 - \frac{1}{c} z_1}{1 - z_1}, \dots, \frac{1 - \frac{1}{c} z_r}{1 - z_r} \right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{n}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{n}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} M_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r), \quad (4)$$

$$e^{\sum_{j=1}^r z_j} \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(1 - \frac{1}{a} z_1, \dots, 1 - \frac{1}{a} z_r \right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{n}} \frac{1}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{n}}} C_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r), \quad (5)$$

$$\prod_{j=1}^r (1 + z_j)^N \Phi_{\mathbf{x}}^{(\frac{2}{\beta})} \left(\frac{1 - \frac{1-p}{p} z_1}{1 + z_1}, \dots, \frac{1 - \frac{1-p}{p} z_r}{1 + z_r} \right) = \sum_{\mathbf{n} \subset N} \binom{N}{\mathbf{n}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} K_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) \Phi_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(z_1, \dots, z_r). \quad (6)$$

定理 3 (直交関係式). $\alpha > \frac{n}{r} - 1, 0 < c, p < 1, a > 0$ のとき, 任意の分割 \mathbf{m}, \mathbf{n} について,

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{x}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{x}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}} c^{|\mathbf{x}|} M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) M_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) = \frac{c^{-|\mathbf{m}|}}{(1-c)^{r\alpha}} \frac{1}{d_{\mathbf{m}}} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{(\alpha)_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0, \quad (7)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathscr{D}} d_{\mathbf{x}} \frac{a^{|\mathbf{x}|}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{x}}} C_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) C_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; a) = a^{-|\mathbf{m}|} e^{ra} \frac{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}}{d_{\mathbf{m}}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0, \quad (8)$$

$$\sum_{\mathbf{x} \subset N} \binom{N}{\mathbf{x}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} p^{|\mathbf{x}|} (1-p)^{rN-|\mathbf{x}|} K_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) K_{\mathbf{n}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; p, N) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^{|\mathbf{m}|} \binom{N}{\mathbf{m}} \frac{1}{\frac{1}{\beta}} \delta_{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \geq 0. \quad (9)$$

定理 4 (差分方程式).

$$\tilde{a}_j(\mathbf{x}) := \prod_{k \neq j} \frac{x_j - x_k - \frac{1}{\beta}(j-k-1)}{x_j - x_k - \frac{1}{\beta}(j-k)},$$

とすると, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{m} \in \mathscr{D}$ について,

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{x}} (c-1)^{|\mathbf{m}|} M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) &= \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}+\epsilon_j} \tilde{a}_j(-\mathbf{x} - \epsilon_j) \left(x_j + \alpha - \frac{d}{2}(j-1) \right) c M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x} + \epsilon_j; \alpha, c) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}} (x_j + (x_j + \alpha)c) M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x}; \alpha, c) \\ &\quad + \sum_{j=1}^r d_{\mathbf{x}-\epsilon_j} \tilde{a}_j(\mathbf{x} - \epsilon_j) \left(x_j + \frac{d}{2}(r-j) \right) M_{\mathbf{m}}^{(\frac{2}{\beta})}(\mathbf{x} - \epsilon_j; \alpha, c). \end{aligned} \quad (10)$$

多変数 Charlier, Krawtchouk 多項式についても同様の差分関係式が成り立つ.

参考文献

- [1] G. Shibukawa, *Multivariate Meixner, Charlier and Krawtchouk polynomials*, arXiv:1404.7491.

AGT 予想で現れる一般化 Jack 対称関数の 存在と直交性とその q 変形

大久保勇輔 (名大・多元数理)

2013 年, 共形場理論の相関関数とゲージ理論の分配関数が一致するという AGT 予想に関する証明が, 一般化された Jack 対称関数を用いて与えられた [1]. ただしこの証明にはいくつか未完成的な部分が残っている. 例えば一般化 Jack 対称関数の存在定理は示されておらず, またこの証明の中で必要とされる一般化 Jack 対称関数の直交性は非自明である (他にもある). 本講演では存在定理についてと, q 変形することで直交性を簡単に証明できることについて説明する. 詳細については [2] を参照されたい.

一般化 Jack 対称関数は N 種類の独立な変数 $\{x_n^{(i)} \mid n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, N\}$ を持つ対称関数で, ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_\beta := \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_\beta^{(i)} + \sum_{i>j} \mathcal{H}_\beta^{(i,j)},$$

$$\mathcal{H}_\beta^{(i)} := \frac{1}{2} \sum_{n,m} \left(\beta(n+m) p_n^{(i)} p_m^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_{n+m}^{(i)}} + n m p_{n+m}^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial p_n^{(i)} \partial p_m^{(i)}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(u'_i + \frac{1-\beta}{2} n \right) n p_n^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}},$$

$$\mathcal{H}_\beta^{(i,j)} := (1-\beta) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n^{(j)} \frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}$$

の固有関数として定義される. ここに冪和対称関数 $p_n^{(i)} := \sum_{k \geq 1} (x_k^{(i)})^n$ を用いた. また N 組のパーティション $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$, $\vec{\mu} = (\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(N)})$ に対して, $|\vec{\lambda}| = |\vec{\mu}|$ ($|\vec{\lambda}| := \sum_{i=1}^N |\lambda^{(i)}| := \sum_{i=1}^N \sum_{k \geq 1} \lambda_k^{(i)}$) かつすべての $i \geq 1$ と $1 \leq j \leq N$ に対して

$$|\lambda^{(N)}| + \dots + |\lambda^{(j+1)}| + \sum_{k=1}^i \lambda_k^{(j)} \geq |\mu^{(N)}| + \dots + |\mu^{(j+1)}| + \sum_{k=1}^i \mu_k^{(j)}$$

$$\left(\text{resp. } |\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(j-1)}| + \sum_{k=1}^i \lambda_k^{(j)} \geq |\mu^{(1)}| + \dots + |\mu^{(j-1)}| + \sum_{k=1}^i \mu_k^{(j)} \right)$$

となるとき, $\vec{\lambda} \geq^L \vec{\mu}$ (resp. $\vec{\lambda} \geq^R \vec{\mu}$) と書くことにする. この半順序” \geq^L ”と” \geq^R ”を用いて一般化 Jack 対称関数の存在定理を次のように述べることができる.

Proposition 1. 各パーティションの組 $\vec{\lambda}$ に対して, 対称関数 $J_{\vec{\lambda}}$ (一般化 Jack 対称関数) が唯一存在して以下の 2 条件を満たす:

$$J_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \sum_{\vec{\mu} <^L \vec{\lambda}} d'_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad d'_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \in \mathbb{Q}(\beta, u'_1, \dots, u'_N);$$

$$\mathcal{H}_\beta J_{\vec{\lambda}} = e'_{\vec{\lambda}} J_{\vec{\lambda}}, \quad e'_{\vec{\lambda}} \in \mathbb{Q}(\beta, u'_1, \dots, u'_N).$$

ハミルトニアン \mathcal{H}_β は, 通常の Jack 対称関数に関する内積を自然に N 変数に拡張した内積

$$\langle p_{\vec{\lambda}}, p_{\vec{\mu}} \rangle_\beta = \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\mu}} \prod_{i=1}^N z_{\lambda^{(i)}} \beta^{-\ell(\lambda^{(i)})}, \quad z_{\lambda^{(i)}} := \prod_{k \geq 1} k^{m_k} m_k! \quad (m_k := \#\{n \mid k = \lambda_n^{(i)}\})$$

に関して自己共役でない. ここに $\ell(\lambda) := \#\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$, $p_{\vec{\lambda}} := \prod_{i=1}^N p_{\lambda^{(i)}}^{(i)}$ とした. 半順序

" \geq^R "は、この内積に関する共役演算子 \mathcal{H}_β^* の固有関数 $J_{\vec{\lambda}}^*$ の存在定理を示す。このとき固有値 $e_{\vec{\lambda}}$ が縮退する為に、一般化 Jack 対称関数の直交性： $\vec{\lambda} \neq \vec{\mu} \Rightarrow \langle J_{\vec{\lambda}}^*, J_{\vec{\mu}} \rangle_\beta = 0$ は非自明である。このような問題に対する解決方法の1つとして q 変形することによって（一般化された Macdonald 対称関数を考えて）縮退を取り除く方法がある。ところが他の目的で作られたそのような対称関数がすでに知られている [3]。[2] では別々の目的で独立に作られた [3] と [1] の対称関数が自然に一致していることを発見した。

一般化 Macdonald 対称関数は頂点作用素

$$\eta^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} z^n p_n^{(i)}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} (1-q^n) z^{-n} \frac{\partial}{\partial p_n^{(i)}}\right),$$

$$\varphi_-^{(i)}(z) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) (t/q)^{-\frac{n}{4}} z^n p_n^{(i)}\right)$$

を用いて表される作用素

$$X_0 := \oint \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}z} X(z), \quad X(z) := \sum_{i=1}^N u_i \tilde{\Lambda}_i,$$

$$\tilde{\Lambda}_i := \varphi_-^{(1)}((t/q)^{\frac{1}{4}} z) \varphi_-^{(2)}((t/q)^{\frac{3}{4}} z) \cdots \varphi_-^{(i)}((t/q)^{\frac{2i-3}{4}} z) \eta^{(i)}((t/q)^{\frac{i-1}{2}} z)$$

の固有関数として定義される。

Fact 2 ([3]). 各 $\vec{\lambda}$ に対して、以下の2条件を満たす対称関数 $P_{\vec{\lambda}}$ が一意的に存在する：

$$P_{\vec{\lambda}} = m_{\vec{\lambda}} + \sum_{\vec{\mu} <^L \vec{\lambda}} d_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} m_{\vec{\mu}}, \quad d_{\vec{\lambda}\vec{\mu}} \in \mathbb{Q}(q, t, u_1, \dots, u_N);$$

$$X_0 P_{\vec{\lambda}} = e_{\vec{\lambda}} P_{\vec{\lambda}}, \quad e_{\vec{\lambda}} \in \mathbb{Q}(q, t, u_1, \dots, u_N).$$

この一般化 Macdonald 対称関数 $P_{\vec{\lambda}}$ の β 変形への極限が、[1] の一般化 Jack 対称関数に自然に一致している。

Proposition 3.

$$P_{\vec{\lambda}} \xrightarrow[\substack{h \rightarrow 0, \\ u_i = q^{u_i}, t = q^\beta, q = e^h}]{} J_{\vec{\lambda}}.$$

この一致は双対の関数 $P_{\vec{\lambda}}^*$, $J_{\vec{\lambda}}^*$ に関しても同様に成り立つ。さらに一般化 Macdonald 対称関数の固有値 $e_{\vec{\lambda}}$ は完全に縮退が取り除かれているので、その直交性も綺麗に従う。従って極限をとった一般化 Jack 対称関数の直交性も同時に従う。

特に Proposition 3 は重要であり、 q 変形された AGT 予想 [4] を [3] の一般化 Macdonald 対称関数を用いて、[1] と同じ方法によって説明できるか、という問題をこの一致から考えることができる。これは今後の課題であるが、本講演ではこのことについても触れる。

参考文献

- [1] A. Morozov and A. Smirnov, arXiv:1307.2576v2 [hep-th].
- [2] Y. Ohkubo, arXiv:1404.5401v1 [math-ph].
- [3] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi and S. Yanagida, RIMS kōkyūroku **1765** (2011) 12–32.
- [4] H. Awata and Y. Yamada, JHEP **1001** (2010) 125; A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **855** (2012) no. 1, 128–151.

Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams

竹村 剛一 (中央大学理工学部)

概 要

Multi-indexed Jacobi polynomial に 2 つのマヤ図形を対応させ、multi-indexed Jacobi polynomial の等式を組織的に導出した。とくに、本来は 4 種の seed solution から定義される multi-indexed Jacobi polynomial は、2 種のもので書けることがわかった。

Pöschl-Teller (PT) ポテンシャルをもつハミルトニアン

$$\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x; g, h), \quad U(x; g, h) = \frac{g(g-1)}{\sin^2 x} + \frac{h(h-1)}{\cos^2 x} - (g+h)^2.$$

の固有値 $\mathcal{E}_n(g, h) = 4n(n+g+h)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の固有状態は、ヤコビ多項式 $P_n^{(\alpha, \beta)}(\eta)$ を用いて

$$\phi_n(x; g, h) = (\sin x)^g (\cos x)^h P_n^{(g-1/2, h-1/2)}(\eta(x)), \quad \eta(x) = \cos(2x)$$

と記述される。 g, h が正のときは二乗可積分 ($\int_0^{\pi/2} \phi_n(x; g, h)^2 dx < +\infty$) である。

二乗可積分とは限らない固有関数として、以下の seed polynomial solutions ($v = 0, 1, 2, \dots$) をとる。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_v^{\text{I}}(x; g, h) &= (\sin x)^g (\cos x)^{1-h} P_v^{(g-1/2, 1/2-h)}(\eta(x)), \\ \tilde{\phi}_v^{\text{II}}(x; g, h) &= (\sin x)^{1-g} (\cos x)^h P_v^{(1/2-g, h-1/2)}(\eta(x)), \\ \tilde{\phi}_v^{\text{III}}(x; g, h) &= (\sin x)^{1-g} (\cos x)^{1-h} P_v^{(1/2-g, 1/2-h)}(\eta(x)). \end{aligned}$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_N$ は、それぞれが seed solution か固有状態とする。 $W[\varphi_1, \dots, \varphi_N](x)$ を Wronskian としたとき、変形されたハミルトニアンを次で定める。

$$\mathcal{H}^{(N)} = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x; g, h) - 2 \frac{d^2 \log W[\varphi_1, \dots, \varphi_N](x; g, h)}{dx^2}.$$

Seed solutions や固有状態を基にしてダルブー変換を何度も適用すると、Crum による議論を援用することにより次の命題が示される。

Proposition 1 (Crum 1955, 小竹-佐々木 2011)

ϕ_n を PT ハミルトニアン \mathcal{H} の固有値 $\mathcal{E}_n = 4n(n+g+h)$ の固有関数とすると、

$$\phi_n^{(N)}(x) = \frac{W[\varphi_1, \dots, \varphi_N, \phi_n](x; g, h)}{W[\varphi_1, \dots, \varphi_N](x; g, h)}$$

はハミルトニアン $\mathcal{H}^{(N)}$ の同じ固有値 \mathcal{E}_n の固有関数となる。

Multi-indexed Jacobi polynomial を、関数 $W[\varphi_1, \dots, \varphi_N, \phi_n](x; g, h)$ や $W[\varphi_1, \dots, \varphi_N](x; g, h)$ の変数 $\eta (= \cos 2x)$ に関する多項式部分とする。

そこで、 $\varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi'_1, \dots, \varphi'_{N'}$ を seed solution か固有状態とするとき、 $W[\varphi_1, \dots, \varphi_N](x; g, h)$ の多項式部分と $W[\varphi'_1, \dots, \varphi'_{N'}](x; g', h')$ の多項式部分が一致するような条件を求めることにする。

そのために、 $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ に対して 2 つの仕切り付きのマヤ図形を対応させ、仕切りを動かすことで等式を記述する。

例を用いて説明する。

$\tilde{\phi}_1^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_1^III$ に対応するマヤ図形を次のように定める。

$$(III) \dots \bullet \bullet \bullet \bullet | \circ \circ \circ \circ \dots \quad (\text{eigenstates}), \quad (II) \dots \bullet \bullet \bullet \bullet | \circ \bullet \circ \circ \circ \dots \quad (I), \\ \dots 3210 \ 0123 \dots \quad \dots 43210 \ 0123 \dots$$

第二のマヤ図形の仕切りを左に一つ動かすと

$$\dots \bullet \bullet \bullet \bullet | \circ \circ \circ \circ \dots \quad \dots \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \circ \circ \circ \circ \dots \\ \dots 3210 \ 0123 \dots \quad \dots 3210 \ 01234 \dots$$

となるが、これには $\tilde{\phi}_0^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_1^III$ が対応し、実は次の式が成り立っている。

$$W[\tilde{\phi}_1^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_1^III](x; g, h) \propto W[\tilde{\phi}_0^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_1^III](x; g-1, h+1)(\sin x)^{1-g}(\cos x)^h$$

第二のマヤ図形の仕切りを左に計 3 回動かし、さらに第一のマヤ図形の仕切りを左に 2 回動かし

$$\dots \bullet \bullet | \circ \bullet \circ \circ \circ \circ \dots \quad \dots \bullet \bullet | \circ \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ \dots \\ \dots 10 \ 012345 \dots \quad \dots 10 \ 0123456 \dots$$

となるが、これには $\tilde{\phi}_1^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_4^III$ が対応し、次の式が成り立っている。

$$W[\tilde{\phi}_1^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_4^III](x; g, h) \propto W[\tilde{\phi}_1^I \tilde{\phi}_2^II \tilde{\phi}_4^III](x, g-5, h+1)(\sin x)^{15-5g}(\cos x)^h$$

このように、与えられた Wronskian を、type I の seed solution と固有状態の Wronskian で書くことができた。

ここで述べた例は一般化され、概要に述べたことが成り立つ。なお、本研究は [2] にて発表されており、[1] と関連している。

参考文献

- [1] S. Odake, Equivalences of the Multi-Indexed Orthogonal Polynomials, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 013502, arXiv:1309.2346.
- [2] K. Takemura, Multi-indexed Jacobi polynomials and Maya diagrams, arXiv:1311.3570

Askey-Wilson 多項式の四重級数表示

星野 歩 (香川高専)
野海 正俊 (神戸大理)
白石 潤一 (東大数理)

1. Askey-Wilson 差分作用素の固有関数の四重級数表示

D を Askey-Wilson の差分作用素 [1]

$$D = \frac{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)}{(1-x^2)(1-qx^2)} (T_{q,x}^{+1} - 1) + \frac{(1-a/x)(1-b/x)(1-c/x)(1-d/x)}{(1-1/x^2)(1-q/x^2)} (T_{q,x}^{-1} - 1), \quad (1)$$

とする. ここに, $T_{q,x}^{\pm 1} f(x) = f(q^{\pm 1}x)$. Askey-Wilson 多項式 $p_n(x)$ は (i) 最高次の次数が n である x の対称な Laurent 多項式であって, (ii) D の固有関数であるもの, として定数倍を除いて一意的に特徴付けられる. 次の明示的公式は Askey-Wilson 多項式に関する基礎定理である [1]:

$$p_n(x) = a^{-n} (ab, ac, ad; q)_n {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ax, a/x \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, x \right], \quad (2)$$

$$Dp_n(x) = (q^{-n} + qbcdq^{n-1} - 1 - abcdq^{-1}) p_n(x). \quad (3)$$

ここに, 次のような標準的な記法を用いた [2]: $(a_1, a_2, \dots, a_k; q)_n = \prod_{j=1}^k \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^i a_j)$,

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_{r+1} \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}; q, x \right] = \sum_{m \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_{r+1}; q)_m}{(q, b_1, b_2, \dots, b_r; q)_m} x^m. \quad (4)$$

$s \in \mathbb{C}$ をパラメータとする. それに付随して λ を $s = q^{-\lambda}$ を満たす複素数とする. このとき, $T_{q,x} x^{-\lambda} = s x^{-\lambda}$. x に関する形式的級数 $f(x; s) = f(x; s|a, b, c, d|q)$ を

$$f(x; s) = x^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} c_n x^n, \quad c_0 = 1, \quad (5)$$

$$Df(x; s) = \left(s + \frac{abcd}{qs} - 1 - \frac{abcd}{q} \right) f(x; s), \quad (6)$$

によって一意的に定めることができる.

Definition 1.1. $c_e(k, l; s) = c_e(k, l; s|a, c|q)$, $c_e(k, l; s) = c_e(k, l; s|a, b, c, d|q)$ を次のように定める:

$$c_e(k, l; s) = \frac{(a^2; q^2)_k (q^{4l} s^2; q^2)_k}{(q^2; q^2)_k (q^{4l} q^2 s^2 / a^2; q^2)_k} (q^2 / a^2)^k \quad (7)$$

$$\times \frac{(c^2 / q; q^2)_l (s^2 / a^2; q^2)_l}{(q^2; q^2)_l (q^3 s^2 / a^2 c^2; q^2)_l} \frac{(s; q)_{2l} (q^2 s^2 / a^4; q^2)_{2l}}{(qs / a^2; q)_{2l} (s^2 / a^2; q^2)_{2l}} (q^2 / c^2)^l, \\ c_o(m, n; s) = \frac{(-b/a; q)_m (s; q)_m (qs / cd; q)_m (qs^2 / a^2 c^2; q)_m}{(q; q)_m (q^2 s^2 / abcd; q)_m (qs^2 / a^2 c^2; q^2)_m} (q/b)^m \quad (8) \\ \times \frac{(-d/c; q)_n (q^m s; q)_n (qs / ab; q)_n (-q^m qs / ac; q)_n (q^m qs^2 / a^2 c^2; q)_n}{(q; q)_n (q^m q^2 s^2 / abcd; q)_n (-qs / ac; q)_n (q^{2m} qs^2 / a^2 c^2; q^2)_n} (q/d)^n.$$

我々の主結果は次の通り [3].

Theorem 1.1. $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f(x; s) = x^{-\lambda} \sum_{k, l, m, n \geq 0} c_e(k, l; q^{m+n} s) c_o(m, n; s) x^{2k+2l+m+n}, \quad (9)$$

は (5), (6) を満たす.

s を特殊化することで Askey-Wilson 多項式の四重和公式が得られる.

Theorem 1.2. $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. Askey-Wilson 多項式 $p_\lambda(x)$ は, 因子化した係数を持つ x の単項式の和の形に表示できる

$$p_\lambda(x) = (abcdq^{\lambda-1}; q)_\lambda \sum_{(k, l, m, n) \in \mathcal{P}_\lambda} c_e(k, l; q^{m+n-\lambda}) c_o(m, n; q^{-\lambda}) x^{-\lambda+2k+2l+m+n}. \quad (10)$$

ここに, $\mathcal{P}_\lambda \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^4$ は不等式の組

$$0 \leq m \leq \lambda, \quad 0 \leq n \leq \lambda - m, \quad 0 \leq 2l \leq \lambda - m - n, \quad 0 \leq k \leq \lambda - 2l - m - n, \quad (11)$$

で表される多面体に含まれる格子点全体の成す集合を表す.

2. 証明の方針

Askey-Wilson 多項式の明示公式 (2) から $f(x; s)$ に関する次の表示が容易に導かれる [3].

Theorem 2.1. *We have*

$$f(x; s) = x^{-\lambda} \frac{(ax; q)_\infty}{(qx/a; q)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(qs^2/a^2; q)_n}{(q; q)_n} (ax/s)^n \quad (12)$$

$$\times {}_6\phi_5 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{n+1}s^2/a^2, s, qs/ab, qs/ac, qs/ad \\ q^2s^2/abcd, q^{1/2}s/a, -q^{1/2}s/a, qs/a, -qs/a \end{matrix}; q, q \right].$$

この表示から (7), (8), (9) の表示へ移行するために, q -超幾何級数に関する幾つかの変換ないし和公式が用いられる. その中で特に重要な役割を果たす公式は, Verma's q -extension of the Field and Wimp expansion [2, p.76, (3.7.9)], Andrews' terminating q -analogue of Watson's ${}_3F_2$ sum [2, p.237, (II.17)], Singh's quadratic transformation [2, p.89, (3.10.13)], 等である. Verma の展開公式は, (12) 右辺の級数 ${}_6\phi_5$ をよりパラメータの数の少ない ${}_4\phi_3$ 型等の q -超幾何級数の 2 次式に分解するために用いられる. その結果得られた ${}_4\phi_3$ 型級数に対して Andrews, ないし Singh の公式を適用すると, それに関する部分は q^2 を base とする超幾何級数に変換される. ((7) において $c_e(k, l; s)$ が q^2 を base として与えられていることに注意.)

参考文献

- [1] R. Askey and J.A. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Memoirs Amer. Math. Soc.* **319** (1985).
- [2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
- [3] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey-Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials, arXiv:1406.1628.

一行型 Koornwinder 多項式の明示的公式と Lassalle の 予想の証明

星野 歩 (香川高専)
野海 正俊 (神戸大理)
白石 潤一 (東大数理)

1. 一行型 Koornwinder 多項式の明示的公式

n を正の整数, $x = (x_1, \dots, x_n)$ を変数とする. a, b, c, d, q, t を Askey-Wilson/Koornwinder 多項式のパラメータとする. $P_{(r)}(x|a, b, c, d|q, t)$ を一行型分割 (r) ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) に対する Koornwinder 多項式とする [2]. 簡単のために,

$$g_r(x|a, b, c, d|q, t) = \frac{(t; q)_r}{(q; q)_r} P_{(r)}(x|a, b, c, d|q, t), \quad (1)$$

とおく.

Definition 1.1. *Lassalle* に従い [4], 対称な *Laurent* 多項式 $G_r(x; q, t)$ を次のように定める:

$$\prod_{i=1}^n \frac{(tux_i; q)_\infty (tu/x_i; q)_\infty}{(ux_i; q)_\infty (u/x_i; q)_\infty} = \sum_{r \geq 0} G_r(x; q, t) u^r. \quad (2)$$

BC 型の核関数関係式 [1] を用いれば, m 個の変数 $y = (y_1, \dots, y_m)$ に関する Koornwinder 差分作用素の固有関数 (一般には多項式でなく形式級数として表される) を用いることで, length が m 以下の分割 λ に対する n 変数 ($n \geq m$) の Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x|a, b, c, d; q, t)$ を構成することができる. これを $m = 1$ の場合に適用する. Askey-Wilson の q 差分作用素の固有関数を与える級数に対して, その四重級数による明示的表示を用いることで次の定理が得られる.

Theorem 1.1. 次が成り立つ [3]:

$$\begin{aligned} & g_r(x|a, -a, c, -c|q, t) \quad (3) \\ &= \sum_{\substack{k, l \geq 0 \\ 2k+2l \leq r}} G_{r-2k-2l}(x; q, t) \frac{(qa^2/c^2; q^2)_k (q^{3-r}t^{1-n}/c^2; q^2)_k (q^{2-2r}t^{2-2n}/c^4; q^2)_k}{(q^2; q^2)_k (q^{1-r}t^{1-n}/c^2; q^2)_k (q^{3-2r}t^{2-2n}/a^2c^2; q^2)_k} (t^2/a^2)^k \\ & \quad \times \frac{(c^2/qt; q)_l (q^{-r}t^{-n}/q; q)_{2k+l}}{(q; q)_l (q^{2-r}t^{1-n}/c^2; q)_{2k+l}} \frac{1 - q^{-r+2k+2l}t^{-n}}{1 - q^{-r}t^{-n}} (t^2/c^2)^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_r(x|a, b, c, d|q, t) \quad (4) \\ &= \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \leq r}} g_{r-i-j}(x|a, -a, c, -c|q, t) \frac{(-b/a; q)_i (q^{1-r}t^{1-n}/cd; q)_i}{(q; q)_i (-q^{1-r}t^{1-n}/ac; q)_i} \\ & \quad \times \frac{(q^{1-r}t^{-n}; q)_{i+j} (-q^{1-r}t^{1-n}/ac; q)_{i+j} (r^{1-2r}t^{2-2n}/a^2c^2; q)_{i+j}}{(q^{2-2r}t^{2-2n}/abcd; q)_{i+j} (q^{1/2-r}t^{1-n}/ac; q)_{i+j} (-q^{1/2-r}t^{1-n}/ac; q)_{i+j}} (t/b)^i \\ & \quad \times \frac{(-d/c; q)_j (q^{1-r}t^{1-n}/ab; q)_j}{(q; q)_j (-q^{1-r}t^{1-n}/ac; q)_j} (t/d)^j. \end{aligned}$$

2. Lassalle の公式の証明

Koornwinder 多項式 $P_\lambda(x|a, b, c, d; q, t)$ から B_n, C_n, D_n 型の Macdonald 多項式への退化を次のように与える [5][2]:

$$P_\lambda^{(C_n)}(x|b; q, t) = P_\lambda(x| -b^{1/2}, b^{1/2}, -q^{1/2}b^{1/2}, q^{1/2}b^{1/2}|q, t), \quad (5)$$

$$P_\lambda^{(B_n)}(x|a; q, t) = P_\lambda(x| -1, a, -q^{1/2}, q^{1/2}; q, t), \quad (6)$$

$$P_\lambda^{(D_n)}(x|q, t) = P_\lambda(x| -1, 1, -q^{1/2}, q^{1/2}; q, t). \quad (7)$$

Corollary 2.1. 式 (4) でパラメータを特殊化することにより, B_n, C_n, D_n 型の一行型 Macdonald 多項式に関する Lassalle の予想式が得られる:

$$P_{(r)}^{(C_n)}(x) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{j=0}^{\lfloor r/2 \rfloor} G_{r-2j}(x; q, t) \frac{(b/t; q)_j (t^{-n} q^{-r}; q)_j}{(q; q)_j (t^{-n+1} q^{-r+1}/b; q)_j} \frac{1 - t^{-n} q^{-r+2j}}{1 - t^{-n} q^{-r}} (t^2/qb)^j, \quad (8)$$

$$P_{(r)}^{(B_n)}(x|a; q, t) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{0 \leq i+2j \leq r} G_{r-i-2j}(x; q, t) \times \frac{(a; q)_i (t^{-n+1} q^{-r+1}; q)_i (t^{-n} q^{-r}; q)_{i+j} (t^{-2n+2} q^{-2r}; q)_i (1/t; q)_j}{(q; q)_i (t^{-n+1} q^{-r}; q)_i (t^{-n+1} q^{-r+1}; q)_{i+j} (t^{-2n+2} q^{-2r+1}/a; q)_i (q; q)_j} \times \frac{1 - t^{-n} q^{-r+i+2j}}{1 - t^{-n} q^{-r}} (t/a)^i (t^2/q)^j, \quad (9)$$

$$P_{(r)}^{(D_n)}(x|q, t) = \frac{(q; q)_r}{(t; q)_r} \sum_{0 \leq 2j \leq r} G_{r-2j}(x; q, t) \frac{(t^{-n} q^{-r}; q)_j (1/t; q)_j}{(t^{-n+1} q^{-r+1}; q)_j (q; q)_j} \frac{1 - t^{-n} q^{-r+2j}}{1 - t^{-n} q^{-r}} (t^2/q)^j. \quad (10)$$

従って, Lassalle の Conjectures 1, 3 と 4 [4] が証明された.

参考文献

- [1] Y. Komori, M. Noumi and J. Shiraishi, Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications, *SIGMA* **5** (2009), 054, 40 pages.
- [2] T. Koornwinder, Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC . Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991), 189–204, *Contemp. Math.*, **138**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [3] A. Hoshino, M. Noumi and J. Shiraishi, Some transformation formulas associated with Askey-Wilson polynomials and Lassalle's formulas for Macdonald-Koornwinder polynomials, arXiv:1406.1628.
- [4] M. Lassalle, Some conjecture for Macdonald polynomials of type B, C, D , *Sém. Loth. Combin.* **52** (2004), Art. B52h, 24 pp.
- [5] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Loth. Combin.* **45** (2000), Art. B45a.

2 重サイン関数から得られる Ding-Iohara-Miki 代数の modular double 的構造

齋藤 洋介 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

本講演においては, 2 重サイン関数を用いて定義された核関数から始めることで Ding-Iohara-Miki 代数の modular double と呼べる構造が現れることについて述べる.

パラメータ $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ を条件 $\operatorname{Re}(\omega_1) > 0, \operatorname{Re}(\omega_2) > 0$ を満たすようにとる. $0 < \operatorname{Re}(u) < \operatorname{Re}(\omega_1 + \omega_2)$ を満たす $u \in \mathbb{C}$ に対して, 2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ [1] を次で定義する. (文献 [1] とは違う定義を用いる.)

$$S(\omega_1, \omega_2; u) := \exp \left(\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{ku}}{(1-e^{\omega_1 k})(1-e^{\omega_2 k})} \frac{dk}{k} \right).$$

ここで 2 重サイン関数は次の表示を持つ. 以下では記号 $e(u) := e^{2\pi i u}$ を用いる.

命題. $x \in \mathbb{R}$ に対して $\|x\| := \min\{|x-n| : n \in \mathbb{Z}\}$ とおく. $x \in \mathbb{R}$ が条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|nx\|^{1/n} = 1$ を満たすとき, x は generic であると呼ぶ. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ を $\omega_1/\omega_2, \omega_2/\omega_1$ が generic になるようにとる. このとき 2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ は次の表示を持つ.

$$S(\omega_1, \omega_2; u) = \exp \left(- \sum_{n>0} \frac{e(nu/\omega_2)}{1-e(n\omega_1/\omega_2)} \frac{1}{n} - \sum_{n>0} \frac{e(nu/\omega_1)}{1-e(n\omega_2/\omega_1)} \frac{1}{n} \right) \quad (\operatorname{Im}(u) > 0).$$

この 2 重サイン関数の表示を用いて核関数 $\Pi_{MN}(\omega_1, \omega_2, \sigma)(u, v)$ ($M, N \in \mathbb{Z}_{>0}$) を $\Pi_{MN}(\omega_1, \omega_2, \sigma)(u, v) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} S(\omega_1, \omega_2; u_i + v_j + \sigma) / S(\omega_1, \omega_2; u_i + v_j)$ で定める. この核関数から, 生成元 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ と次の関係式で生成されるボソンを用意することができる.

$$[a_m, a_n] = m \frac{1-e(|m|\omega_1/\omega_2)}{1-e(|m|\sigma/\omega_2)} \delta_{m+n,0}, \quad [b_m, b_n] = m \frac{1-e(|m|\omega_2/\omega_1)}{1-e(|m|\sigma/\omega_1)} \delta_{m+n,0}, \quad [a_m, b_n] = 0.$$

ここで作用素 $\eta(u), \xi(u), \varphi^\pm(u)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned} \eta(u) &::= \exp \left(- \sum_{n \neq 0} (1 - e(n\sigma/\omega_2)) a_n \frac{e(-nu/\omega_2)}{n} \right) :, \\ \xi(u) &::= \exp \left(\sum_{n \neq 0} (1 - e(n\sigma/\omega_2)) e(|n|\gamma/\omega_2) a_n \frac{e(-nu/\omega_2)}{n} \right) : \quad \left(\gamma := \frac{-1}{2}(\omega_1 - \sigma) \right), \\ \varphi^+(u) &::= \eta \left(u + \frac{\gamma}{2} \right) \xi \left(u - \frac{\gamma}{2} \right) :, \quad \varphi^-(u) ::= \eta \left(u - \frac{\gamma}{2} \right) \xi \left(u + \frac{\gamma}{2} \right) :. \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ.

定理. 構造関数 $g(u) \in \mathbb{C}[[e(u/\omega_2)]]$ を次で定める.

$$g(u) := \frac{(1 - e((\omega_1 + u)/\omega_2))(1 - e((- \sigma + u)/\omega_2))(1 - e((- \omega_1 + \sigma + u)/\omega_2))}{(1 - e((- \omega_1 + u)/\omega_2))(1 - e((\sigma + u)/\omega_2))(1 - e((\omega_1 - \sigma + u)/\omega_2))}.$$

$g(u)$ は $g(-u) = g(u)^{-1}$ を満たすことに注意する. このとき作用素 $\eta(u), \xi(u), \varphi^\pm(u)$ は次の関係式を満たす.

$$\begin{aligned} [\varphi^\pm(u), \varphi^\pm(v)] &= 0, \quad \varphi^+(u)\varphi^-(v) = \frac{g(u-v+\gamma)}{g(u-v-\gamma)}\varphi^-(v)\varphi^+(u), \\ \varphi^\pm(u)\eta(v) &= g\left(\pm\frac{1}{2}\gamma+u-v\right)\eta(v)\varphi^\pm(u), \quad \varphi^\pm(u)\xi(v) = g\left(\mp\frac{1}{2}\gamma+u-v\right)^{-1}\xi(v)\varphi^\pm(u), \\ \eta(u)\eta(v) &= g(u-v)\eta(v)\eta(u), \quad \xi(u)\xi(v) = g(u-v)^{-1}\xi(v)\xi(u), \\ [\eta(u), \xi(v)] &= \frac{(1-e(\omega_1/\omega_2))(1-e(-\sigma/\omega_2))}{1-e((\omega_1-\sigma)/\omega_2)} \left\{ \delta_{\omega_2}(\gamma-u+v)\varphi^+\left(\frac{\gamma}{2}+v\right) - \delta_{\omega_2}(-\gamma-u+v)\varphi^-\left(-\frac{\gamma}{2}+v\right) \right\}. \end{aligned}$$

ここで $\delta_{\omega_2}(u) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(nu/\omega_2)$ は周期 ω_2 を持つデルタ関数である.

これより, 作用素 $\eta(u), \xi(u), \varphi^\pm(u)$ が (Ding-Iohara-Miki 代数を $\mathcal{U}(q, t)$ と書くとき) $\mathcal{U}(e(\omega_1/\omega_2), e(\sigma/\omega_2))$ の自由場表示を与えることがわかる. また $|e(\omega_1/\omega_2)|=1$ であることにも注意されたい. これに対して $\tilde{X}(u) := X(u) \Big|_{\substack{\omega_1 \leftrightarrow \omega_2, \\ a_n \rightarrow b_n}}$ ($X = \eta, \xi, \varphi^\pm$) とおくと, 作用素 $\tilde{\eta}(u), \tilde{\xi}(u), \tilde{\varphi}^\pm(u)$ が $\mathcal{U}(e(\omega_2/\omega_1), e(\sigma/\omega_1))$ の自由場表示を与える. ここで $[a_m, b_n] = 0$ ($m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) なので自明に $X(u)\tilde{Y}(v) = \tilde{Y}(v)X(u)$ ($X, Y = \eta, \xi, \varphi^\pm$) である. これは $\mathcal{U}(e(\omega_1/\omega_2), e(\sigma/\omega_2)) \otimes \mathcal{U}(e(\omega_2/\omega_1), e(\sigma/\omega_1))$ (これを Ding-Iohara-Miki 代数の modular double と呼ぶことにする) の自由場表示において, 既に知られている modular double [2] の話に類似した状況が実現されていることを意味する ($\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$ で入れ替わる 2 つの表現の可換性, $\mathcal{U}(q, t)$ の q にあたるパラメータが単位円周上に乗っている).

一方で楕円ガンマ関数はある極限で 2 重サイン関数に退化することが知られている. 楕円 Ruijsenaars 作用素の核関数が楕円ガンマ関数によって書かれており, この核関数から楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 [3] が発見されたことを考えると, Ding-Iohara-Miki 代数の modular double は楕円 Ding-Iohara-Miki 代数が退化したものであると理解できる可能性がある. また講演では Macdonald 作用素

$$H_N(\omega_1, \omega_2, \sigma) := \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{e(\sigma/\omega_2)e(u_i/\omega_2) - e(u_j/\omega_2)}{e(u_i/\omega_2) - e(u_j/\omega_2)} T_{\omega_1, u_i} \quad (T_{\omega_1, u} f(u) := f(u + \omega_1))$$

と $\tilde{H}_N(\omega_1, \omega_2, \sigma) := H_N(\omega_1, \omega_2, \sigma)|_{\omega_1 \leftrightarrow \omega_2}$ の固有関数で $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$ の下での対称性を持つものを Macdonald 多項式を用いて作れることについても触れる予定である.

参考文献

- [1] 黒川 信重. 『現代三角関数論』 (岩波書店, 2013 年)
- [2] A. G. Bytsko, J. Teschner. *R-operator, Co-product and Haar-measure for the Modular Double of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* . (2002) arXiv:math/0208191.
- [3] Yosuke Saito. *Elliptic Ding-Iohara Algebra and the Free Field Realization of the Elliptic Macdonald Operator*. (2013) arXiv:1301.4912.

Hopf algebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps

澁川 陽一 (北大・理・数学)

1. Introduction.

本講演では, dynamical Yang-Baxter map [2] を用いることにより, Hopf algebra の一般化である Hopf algebroid [1, Definition 3.1] が構成できることを紹介する.

2. Tensor category \mathcal{V}_G

H を空でない集合とし, G を集合 H 上の全単射全体のなす群の opposite の部分群とする. 群 G は集合 H に右から作用する. また, M_H を集合 H から体 \mathbb{K} への写像全体のなす \mathbb{K} -代数とする. 群 G は M_H に左から作用する.

$$T_\alpha(f)(\lambda) := f(\lambda\alpha)(= f(\alpha(\lambda))) \quad (\alpha \in G, f \in M_H, \lambda \in H).$$

category \mathcal{V}_G は, 次の object と morphism からなる (Cf. [3]).

objects: object V は, G -graded \mathbb{K} -ベクトル空間 $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$ のこと.

morphisms: morphism $f : V \rightarrow W$ は, 次を満たす写像 $f : H \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ のこと.

$$f(\lambda)V_\alpha \subset \bigoplus_{\beta \in G, \lambda\beta = \alpha} W_\beta \quad (\forall \lambda \in H, \forall \alpha \in G).$$

Proposition 2.1. \mathcal{V}_G は tensor category.

object のテンソル積は通常の (\mathbb{K} -ベクトル空間としての) テンソル積として定めるが, morphism のテンソル積は以下のように少し捻って定義する.

$$(f \otimes g)(\lambda)(u_\beta \otimes w_\gamma) := f(\lambda\gamma)(u_\beta) \otimes g(\lambda)(w_\gamma) \quad (u_\beta \in U_\beta, w_\gamma \in W_\gamma).$$

3. Left bialgebroid A_σ

\mathcal{V}_G の morphism $\sigma : X^\sigma \otimes X^\sigma \rightarrow X^\sigma \otimes X^\sigma$ が $\dim_{\mathbb{K}} X^\sigma < +\infty$ を満たしているとする. $X^\sigma = \bigoplus_{\alpha \in G} (X^\sigma)_\alpha$ の各成分 $(X^\sigma)_\alpha$ の基底の和集合として, X^σ の基底 X を定める. $\dim_{\mathbb{K}} X^\sigma < +\infty$ より, $|X| < +\infty$ である. さらに, 集合 HX を

$$HX := (M_H \otimes_{\mathbb{K}} M_H) \bigsqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \bigsqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$$

とおき, 集合 HX 上の自由 \mathbb{K} -代数を $\mathbb{K}\langle HX \rangle$ と書く.

次の (1)–(5) で生成される $\mathbb{K}\langle HX \rangle$ の両側イデアル I_σ による商 $\mathbb{K}\langle HX \rangle / I_\sigma$ を A_σ とする.

- (1) $\xi + \xi' - (\xi + \xi'), c\xi - (c\xi), \xi\xi' - (\xi\xi') \quad (c \in \mathbb{K}, \xi, \xi' \in M_H \otimes_{\mathbb{K}} M_H).$

ただし, $\xi + \xi'$ における記号 $+$ は代数 $\mathbb{K}\langle HX \rangle$ における和を意味し, $(\xi + \xi') \in HX$ における記号 $+$ は代数 $M_H \otimes_{\mathbb{K}} M_H$ における和を意味する. 上記の他の生成元に関しても同様である.

$$(2) \sum_{c \in X} L_{ac}(L^{-1})_{cb} - \delta_{ab}\emptyset, \sum_{c \in X} (L^{-1})_{ac}L_{cb} - \delta_{ab}\emptyset \quad (a, b \in X).$$

ただし, δ_{ab} はクロネッカーのデルタシンボルである.

$$(3) (T_{\deg(a)}(f) \otimes 1_{M_H})L_{ab} - L_{ab}(f \otimes 1_{M_H}),$$

$$(1_{M_H} \otimes T_{\deg(b)}(f))L_{ab} - L_{ab}(1_{M_H} \otimes f),$$

$$(f \otimes 1_{M_H})(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(T_{\deg(b)}(f) \otimes 1_{M_H}),$$

$$(1_{M_H} \otimes f)(L^{-1})_{ab} - (L^{-1})_{ab}(1_{M_H} \otimes T_{\deg(a)}(f)) \quad (f \in M_H, a, b \in X).$$

ここで, $a \in X$ が $a \in (X^\sigma)_\alpha$ ($\alpha \in G$) を満たすとき, $\deg(a) = \alpha$ と定める. また, 1_{M_H} は M_H の単位元 ($1_{M_H}(\lambda) = 1$ ($\lambda \in H$)) とする.

$$(4) \text{ 各 } a, b, c, d \in X \text{ に対し, } \sum_{x, y \in X} (\sigma_{ac}^{xy} \otimes 1_{M_H})L_{yd}L_{xb} - \sum_{x, y \in X} (1_{M_H} \otimes \sigma_{xy}^{bd})L_{cy}L_{ax}.$$

$$(5) \emptyset - 1_{M_H} \otimes 1_{M_H}.$$

論文 [3] より次が知られている.

Proposition 3.1. \mathbb{K} -代数 A_σ は left bialgebroid である [1, Definition 1.1].

4. Dynamical Yang-Baxter maps

\mathcal{V}_G の morphism $\sigma : X^\sigma \otimes X^\sigma \rightarrow X^\sigma \otimes X^\sigma$ が

$$\sigma(\lambda)(x \otimes y) \in \{z \otimes w \mid z, w \in X\} \quad (\forall \lambda \in H, \forall x, y \in X)$$

を満たすとする. このとき, 各 $\sigma(\lambda)$ は $X \times X$ から $X \times X$ への写像と見なせる. さらに, この morphism σ が次式を満たすとき, (zero weight の) dynamical Yang-Baxter map という [2].

$$(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma})(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma) = (\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma})(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma}).$$

left bialgebroid A_σ が Hopf algebroid となるような dynamical Yang-Baxter map の構成については講演の際に述べる予定である.

参考文献

- [1] Böhm, G.: An alternative notion of Hopf algebroid. Hopf algebras in noncommutative geometry and physics, 31–53, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **239**, Dekker, New York, 2005.
- [2] Shibukawa, Y.: Dynamical Yang-Baxter maps. Int. Math. Res. Not. **2005**, no. 36, 2199–2221; Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1157–1182.
- [3] Shibukawa, Y. and Takeuchi, M.: FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **323** (2010), no. 6, 1698–1728.

Rigid tensor categories associated with dynamical Yang-Baxter maps

澁川 陽一 (北大・理・数学)

1. Introduction.

本講演では, dynamical Yang-Baxter map [1] を用いることにより, rigid tensor category が構成できることを紹介する.

2. Hopf algebroid A_σ

\mathbb{K} を体, H を空でない集合, G を集合 H 上の全単射全体のなす群の opposite の部分群 とする. 群 G は集合 H に右から作用する: $\lambda\alpha := \alpha(\lambda)$ ($\lambda \in H, \alpha \in G$).

tensor category \mathcal{V}_G [2, 3] は, G -graded \mathbb{K} -ベクトル空間 $V = \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$ を object とし, 次を満たす写像 $f : H \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ を morphism とする.

$$f(\lambda)V_\alpha \subset \bigoplus_{\beta \in G, \lambda\beta = \alpha} W_\beta \quad (\forall \lambda \in H, \forall \alpha \in G).$$

\mathcal{V}_G の isomorphism $\sigma : X^\sigma \otimes X^\sigma \rightarrow X^\sigma \otimes X^\sigma$ が $\dim_{\mathbb{K}} X^\sigma < +\infty$, および, $(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma})(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma) = (\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma})(\text{id}_{X^\sigma} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \text{id}_{X^\sigma})$ を満たすとする. (有限)集合 X を直和 $X^\sigma = \bigoplus_{\alpha \in G} (X^\sigma)_\alpha$ と compatible な X^σ の基底, $HX := (M_H \otimes_{\mathbb{K}} M_H) \sqcup \{L_{ab} \mid a, b \in X\} \sqcup \{(L^{-1})_{ab} \mid a, b \in X\}$, さらに, $\langle HX \rangle$ をアルファベット HX に関する word (空語 \emptyset を含む) 全体のなす monoid とする. ただし, M_H は集合 H から体 \mathbb{K} への写像全体のなす \mathbb{K} -代数である. isomorphism σ が良い性質を満たすとき, $A_\sigma := \mathbb{K}\langle HX \rangle / I_\sigma$ は Hopf algebroid となる (A_σ の定義については [2] 参照).

この A_σ は, 次の \mathbb{K} -代数射 $s_{M_H}, t_{M_H} : M_H \rightarrow A_\sigma$ をもつ.

$$s_{M_H}(f) = f \otimes 1_{M_H} + I_\sigma; \quad t_{M_H}(f) = 1_{M_H} \otimes f + I_\sigma \quad (f \in M_H).$$

$a \in X$ が $a \in (X^\sigma)_\alpha$ ($\alpha \in G$) を満たすとき $\deg(a) := \alpha$ とする. 次により monoid homomorphism $\deg_l, \deg_r : \langle HX \rangle \rightarrow G$ が定まる.

$$\begin{cases} \deg_l(\xi) = \deg_r(\xi) = 1_G, & (\xi \in M_H \otimes_{\mathbb{K}} M_H); \\ \deg_l(L_{ab}) = \deg(a), \deg_r(L_{ab}) = \deg(b); \\ \deg_l((L^{-1})_{ab}) = \deg(b)^{-1}, \deg_r((L^{-1})_{ab}) = \deg(a)^{-1}. \end{cases}$$

A_σ の \mathbb{K} -部分空間 $(A_\sigma)_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta \in G$) を次のように定めると, $A_\sigma = \sum_{\alpha, \beta \in G} (A_\sigma)_{\alpha, \beta}$ となる (この和は必ずしも直和とは限らない).

$$\langle HX \rangle_{\alpha, \beta} := \{w \in \langle HX \rangle \mid \deg_l(w) = \alpha, \deg_r(w) = \beta\}; \quad (A_\sigma)_{\alpha, \beta} := \sum_{w \in \langle HX \rangle_{\alpha, \beta}} \mathbb{K}(w + I_\sigma).$$

3. Tensor category $\text{Rep}(A_\sigma)$

集合 H から $V \in \mathcal{V}_G$ への写像全体のなす \mathbb{K} -ベクトル空間を $M_H(V)$ と表す. tensor category $\text{Rep}(A_\sigma)$ を定義するため, まず $\text{End}_{\mathbb{K}}(M_H(V))$ の \mathbb{K} -部分代数 $D_G(V)$ を次のように定める.

$\alpha \in G$ に対し, $\mathbb{K}\alpha = \bigoplus_{\beta \in G} (\mathbb{K}\alpha)_\beta \in \mathcal{V}_G$ を,

$$(\mathbb{K}\alpha)_\beta = \begin{cases} \mathbb{K}\alpha (\cong \mathbb{K}), & \text{if } \alpha = \beta; \\ \{0\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく. 次で定義される \mathbb{K} -線形写像 $\Gamma_{\alpha,\beta}^V : \text{Hom}_{\mathcal{V}_G}(V \otimes \mathbb{K}\beta, \mathbb{K}\alpha \otimes V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(M_H(V))$ ($\alpha, \beta \in G$) は単射である.

$$\alpha \otimes \Gamma_{\alpha,\beta}^V(u)(g)(\lambda) = u(\lambda)(g(\lambda\beta) \otimes \beta) \quad (u \in \text{Hom}_{\mathcal{V}_G}(V \otimes \mathbb{K}\beta, \mathbb{K}\alpha \otimes V), g \in M_H(V), \lambda \in H).$$

$D_G(V)_{\alpha,\beta} := \Gamma_{\alpha,\beta}^V(\text{Hom}_{\mathcal{V}_G}(V \otimes \mathbb{K}\beta, \mathbb{K}\alpha \otimes V))$ とおき, $D_G(V) = \sum_{\alpha,\beta \in G} D_G(V)_{\alpha,\beta}$ とする.

この $D_G(V)$ には次のような \mathbb{K} -代数射 $s_{M_H}^V, t_{M_H}^V : M_H \rightarrow D_G(V)$ が存在する.

$$\begin{aligned} s_{M_H}^V(f)(g)(\lambda) &= \sum_{\alpha \in G} f(\lambda\alpha)g(\lambda)\alpha; \\ t_{M_H}^V(f)(g)(\lambda) &= f(\lambda)g(\lambda) \quad (f \in M_H, g \in M_H(V), \lambda \in H). \end{aligned}$$

ただし, $g(\lambda) = \sum_{\alpha \in G} g(\lambda)\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in G} V_\alpha$ ($g(\lambda)\alpha \in V_\alpha$) である.

category $\text{Rep}(A_\sigma)$ は, 次の object と morphism からなる (Cf. [3]).

objects: object (V, ρ_V) は, $V \in \mathcal{V}_G$ と次を満たす \mathbb{K} -代数射 $\rho_V : A_\sigma \rightarrow D_G(V)$ の組のこと.

$$\rho_V((A_\sigma)_{\alpha,\beta}) \subset D_G(V)_{\alpha,\beta} \quad (\forall \alpha, \beta \in G); \quad \rho_V \circ s_{M_H} = s_{M_H}^V; \quad \rho_V \circ t_{M_H} = t_{M_H}^V.$$

morphisms: morphism $f : (V, \rho_V) \rightarrow (W, \rho_W)$ は, $\rho_W(a) \circ m_f = m_f \circ \rho_V(a)$ ($\forall a \in A_\sigma$) を満たす \mathcal{V}_G の morphism $f : V \rightarrow W$ のこと. ただし, $m_f : M_H(V) \rightarrow M_H(W)$ は, $m_f(g)(\lambda) = f(\lambda)(g(\lambda))$ ($g \in M_H(V), \lambda \in H$) で定義される \mathbb{K} -線形写像である.

Proposition 3.1. $\text{Rep}(A_\sigma)$ は tensor category.

Theorem 3.2. 有限次元 \mathbb{K} -ベクトル空間のみからなる $\text{Rep}(A_\sigma)$ の full subcategory を $\text{Rep}(A_\sigma)_f$ とするとき, 適切な仮定の下で $\text{Rep}(A_\sigma)_f$ は rigid である.

上記定理内における仮定および $\text{Rep}(A_\sigma)$ における left dual, right dual の定義については, 講演内で述べる予定である. また, この仮定を満たす isomorphism σ を dynamical Yang-Baxter map から構成することについても講演で説明する予定である.

参考文献

- [1] Shibukawa, Y.: Dynamical Yang-Baxter maps. Int. Math. Res. Not. **2005**, no. 36, 2199–2221; Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1157–1182.
- [2] Shibukawa, Y.: Hopf algebroids associated with dynamical Yang-Baxter maps. 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会 無限可積分系特別セッション講演アブストラクト (2014).
- [3] Shibukawa, Y. and Takeuchi, M.: FRT construction for dynamical Yang-Baxter maps. J. Algebra **323** (2010), no. 6, 1698–1728.

分割と相異分割の母関数における 相似性の理解とその応用

安東雅訓
(稚内北星学園大学)

分割全体の集合を \mathcal{P} , 相異分割全体の集合を \mathcal{SP} で表す. このときこれらの母関数は次の形で表される.

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_{\infty}}, \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} q^{|\lambda|} = (-q; q)_{\infty}.$$

ここで $(a; b)_k = (1-a)(1-ab)\cdots(1-ab^{k-1})$ である. 特に各相異分割 λ に, その長さ $\ell(\lambda)$ の偶奇による符号を付けたものの母関数を考えれば,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = (q; q)_{\infty}.$$

であり, 分割の母関数の逆数となっている. 次の式は明らかであるが, 分割の組合せ論として改めて考えれば少し不思議な結果ではないだろうか?

$$\frac{1}{(q; q)_{\infty}} \times (1 - (q; q)_{\infty}) = \frac{1}{(q; q)_{\infty}} - 1. \quad (1)$$

すなわち, 分割の母関数と「ほぼ」符号付き相異分割の母関数を掛け合わせたものが, 「ほぼ」分割の母関数になるという式*1 だ. このことの組合せ論的な理解 (これ自体は目新しいものではないが) を与えた上で, 次の式と対応する形に拡張する.

定理 1 (内村桂輔 [2]). 任意の自然数 m, n に対し次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\binom{k+1}{2}}}{1 - q^{k+m}} = \sum_{k=1}^n \frac{q^k}{1 - q^k} \begin{bmatrix} k+m \\ m \end{bmatrix}^{-1}.$$

*1 定数 1 は成分無し of 分割に相当するため, それを引かれていても組合せ論で書いてあれば見落としがちな. この「ほぼ」の部分に騙されて, 定理の間違いを見つけた気になったことが一度や二度ではない.

ここで, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は q -二項係数, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$ である.

まず (1) 式の組合せ論でのイメージの式を書いておく. 簡単のため, 相異分割の方は成分を高々 2 までに制限して考えれば*2,

$$\begin{aligned} & \{ \text{分割} \} \times (\{(1)\} + \{(2)\} - \{(21)\}) \\ &= \{ \text{成分 1 を持つ分割} \} + \{ \text{成分 2 を持つ分割} \} - \{ \text{成分 1, 2 を共にもつ分割} \} \\ &= \{ \text{成分 1 又は 2 を持つ分割} \}. \end{aligned}$$

勝手に制限を付けたために右辺は元の式とは合わないが, 相異分割の許される成分の大きさを増やしていけば, $\{ \text{成分を少なくとも一つ持つ分割} \}$ となる. あくまでもイメージであり, 出てくる記号はきちんと定義されたものではないが, ベン図が出てくるあたりで似たような式を見たことがあるはずだ. これを基にして定理 1 に対応する次の組合せ論の式が得られる.

定理 2 (A.). 任意の自然数 $k, m, n, (m \geq n)$ について, 集合

$$\{ (\lambda, \mu; i) \mid \lambda \in \mathcal{SP}, \mu \in \mathcal{P}, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, |\lambda| + |\mu| + i(m + \ell(\lambda)) = k, \lambda_1 \leq n, \mu_1 \leq m \},$$

を $\mathfrak{T}(k)$ と置くととき次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \#\{ (\lambda, \mu; i) \in \mathfrak{T}(k) \mid \ell(\lambda) : \text{奇数} \} - \#\{ (\lambda, \mu; i) \in \mathfrak{T}(k) \mid \ell(\lambda) : \text{偶数} \} \\ &= \#\{ \lambda \in \mathcal{P}(k) \mid \lambda_1 - \lambda_{\ell(\lambda)} \leq m \}. \end{aligned}$$

定理 1 と見比べれば $(m \geq n)$ の条件が増えており, これを外すことは今後の課題となる. ただ, $(m \geq n)$ の条件付き限定で i を固定しても式が成立するという精密化ができる. また (見えないが) 左辺の λ_1 は条件を外しても固定できると予想している. $m = 0$ の場合は別証明している [1] のでこれを含む形の一般化を作る予定だ.

参考文献

- [1] 安東雅訓: A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function, *Electron. J. Combin.*, **20**(2) #P13, 12 pp. (2014)
- [2] 内村桂輔: A generalization of identities for the divisor generating function. *Util. Math.* **25**, 377 - 379 (1984)

*2 (1) 式には出てこないが, 母関数として見たときに q -二項係数が分割の成分に制限を付ける役割をする.

変形 KdV 階層による平面曲線の運動と戸田階層

寛 三郎 (立教大学理学部), 梶原健司 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

ソリトン方程式が現れる幾何学的対象として、曲線の等周変形がある [GP, I, KMK]。Goldstein と Petrich [GP] は、平面曲線の等周変形のうち、局所的な面積保存則が成立する場合を考察し、変形 KdV 階層との関係を議論した。井ノ口らは平面離散曲線の等周変形を考察し、離散変形 KdV 方程式のソリトン解に対応する離散曲線の明示公式を与えた [IKMO1, IKMO2, KMK]。連続極限を取ることで、変形 KdV 方程式のソリトン解に対応する連続曲線の明示公式が得られる。変形 KdV 階層の最低次の非自明な方程式は変形 KdV 方程式であるから、この結果は Goldstein と Petrich が考察した階層の “2nd flow” を考えていることにあたる (“1st flow” は平行移動)。

本研究の目的は、井ノ口らによる結果を、変形 KdV 階層全体に拡張することである。すなわち、階層の高次方程式による運動も含めた場合に、明示公式を与えることを目的とする [KK]。まずは、平面曲線について、以下で用いる記号をまとめておく。

\mathbb{R}^2 内の平面曲線 $\mathbf{r}(x) = {}^t(X(x), Y(x))$ を考える。ここで x は弧長径数であるものとする、単位接ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ 、単位法ベクトル $\hat{\mathbf{n}}$ は次で与えられる (添字は偏微分を表す)：

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{r}_x, \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}. \quad (1)$$

曲線 \mathbf{r} に対する Frenet 方程式は

$$\hat{\mathbf{t}}_x = \kappa \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}}_x = -\kappa \hat{\mathbf{t}} \quad (2)$$

であり、 κ は曲率を表す。曲線 \mathbf{r} の時間パラメータ $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ での変形を、次の微分方程式で記述する：

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_n} = f^{(n)} \hat{\mathbf{n}} + g^{(n)} \hat{\mathbf{t}}, \quad f^{(n)} = f^{(n)}(x, t), \quad g^{(n)} = g^{(n)}(x, t) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

Goldstein と Petrich [GP] に従って、 $f^{(n)}(x, t)$, $g^{(n)}(x, t)$ を次のように選ぶことにする¹：

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= 0, & g^{(1)} &= 1, & f^{(2)} &= \kappa_x, & g^{(2)} &= \kappa^2/2, \\ g_x^{(n)} &= \kappa f^{(n)}, & f^{(n+1)} &= \left(f_x^{(n)} + \kappa g^{(n)} \right)_x. \end{aligned} \quad (4)$$

以下では、(1), (2), (3) および (4) で定められる微分方程式の階層を、“Goldstein-Petrich 階層” (GP 階層) と呼ぶ。特に t_2 についての時間発展を考えると、曲率 κ が変形 KdV 方程式

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \frac{\partial^3 \kappa}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial x} \quad (5)$$

を満たすことが示される。

以下の便宜のため、写像 $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}; (X, Y) \mapsto X + \sqrt{-1}Y$ によって \mathbb{R}^2 と \mathbb{C} とを同一視する。この ρ を用いて

$$Z = \rho(\mathbf{r}), \quad T = \rho(\hat{\mathbf{t}}), \quad N = \rho(\hat{\mathbf{n}}) = \sqrt{-1}T \quad (6)$$

とおくと、 $|\hat{\mathbf{t}}| = |\hat{\mathbf{n}}| = 1$ であるので、対応する複素変数 T, N は $|T| = |N| = 1$ を満たす。さらに、方程式 (1), (2), (3) は次のように書き換えられる：

$$T = Z_x, \quad T_x = \sqrt{-1} \kappa T, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_n} = \left(g^{(n)} + \sqrt{-1} f^{(n)} \right) T. \quad (7)$$

¹ここでの $f^{(n)}, g^{(n)}$ は、後の便宜のため [GP] とは符号が異なる。

今回の我々の主結果は、GP 階層で記述される平面曲線を、戸田階層 [UT] のtau関数で表す明示公式である。戸田階層のtau関数 $\tau(s; x, y)$ ($s \in \mathbb{Z}$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$) は、次の双線形恒等式で特徴付けられる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \tau(s'; x' - [\lambda^{-1}], y') \tau(s; x + [\lambda^{-1}], y) e^{\xi(x' - x, \lambda)} \lambda^{s' - s} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint \tau(s' + 1; x', y' - [\lambda]) \tau(s - 1; x, y + [\lambda]) e^{\xi(y' - y, \lambda^{-1})} \lambda^{s' - s} d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし $[\lambda] = (\lambda, \lambda^2/2, \lambda^3/3, \dots)$, であり, $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint d\lambda$ は λ^{-1} の係数を取り出すことを意味する(形式的留数)。

以下では実条件 $\overline{\tau(s; x, y)} = \tau(s + 1; x, y)$ を要請する。この条件の下で、次が成り立つ。

定理 1 (τ 関数による表現公式). 変数 x_j, y_j ($j = 1, 2, \dots$) はすべて実であるものとする。戸田階層の実条件を満たす τ 関数に対して、

$$\begin{aligned} x &= 2y_1, \quad t_n = 2y_{2n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ Z &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \log \tau(0; x, y), \quad T = \frac{\tau(1; x, y)^2}{2\tau(0; x, y)^2}, \quad \kappa = \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y_1} \log \frac{\tau(0; x, y)}{\tau(1; x, y)}, \end{aligned} \quad (9)$$

と対応付けると、 Z, T, κ は GP 階層の方程式 (4), (7) を満たす。

(注) τ 関数に実条件 $\overline{\tau(s; x, y)} = \tau(s + 1; x, y)$ を課すことは、アフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C})$ のある実形をとることに対応している。このことについて、詳しくは講演で述べる。

参考文献

- [GP] R.E. Goldstein and D.M. Petrich, The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), 3203–3206.
- [I] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4), 朝倉書店, 2010 年.
- [IKMO1] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves *Kyushu J. Math.* **66** (2012), 303–324.
- [IKMO2] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012), 045206.
- [KK] K. Kajiwara and S. Kakei, Toda lattice hierarchy and Goldstein-Petrich flows for plane curves, to appear in *Comment. Math. Univ. St. Pauli* (arXiv:1310.7080).
- [KMK] 梶原健司 (述), 三谷浩将・笈三郎 (記), 離散曲線のダイナミクスと離散可積分系, 立教大学数理物理学研究センター Lecture Note Volume 1, 2013 年.
- [UT] K. Ueno and K. Takasaki, Toda lattice hierarchy, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, K. Okamoto (ed.), Adv. Stud. Pure Math. vol. **4**, pp. 1–95 (North-Holland, Amsterdam, Kinokuniya, Tokyo, 1984).

Schur-type Pfaffians and Their Applications to Symmetric Function Identities

岡田 聡一 (名古屋大学)*

1. はじめに

Schur 関数などの対称関数に関する関係式は、表現論、組合せ論などにおいて鍵となる役割を果たしている。これらの関係式は、表現論、組合せ論的な解釈を通じて、対応する表現論、組合せ論の主張を示すことで証明できることもあるが、単なる多項式（あるいはべき級数）の関係式とみて行列式、パフィアンを活用することで証明でき、一般化などが見出されることも多い。この講演の主目的は、Schur–Littlewood の公式のある種の拡張が小行列の和公式、Schur 型パフィアの公式を用いてどのように証明されるのかを解説することである。

分割 (partition) とは、非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$) で 0 でない成分が有限個しかないものことである。分割 λ に対して、成分の和 $\sum_{i \geq 1} \lambda_i$, 0 でない成分の個数をそれぞれ $|\lambda|$, $l(\lambda)$ と表し、 λ の大きさ、長さと呼ぶ。また、分割全体のなす集合を \mathcal{P} と表す。

長さ n 以下の分割 λ と n 個の変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に対して、Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ は、

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det (x_i^{\lambda_j + n - j})_{1 \leq i, j \leq n}}{\det (x_i^{n - j})_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (1)$$

によって定義される対称式である。 $(l(\lambda) > n$ のときは $s_\lambda(\mathbf{x}) = 0$ と約束する。) Schur 関数は、数学の多くの分野に現れる基本的な対象である。例えば、表現論では、一般線型群 $\mathbf{GL}_n = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約多項式表現の指標、あるいは、対称群の既約指標の値の母関数として現れ、組合せ論では半標準盤の母関数として現れる。

Schur 関数に関する関係式の中で最も基本的なものが、Cauchy の公式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x_1, \dots, x_n) s_\lambda(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\prod_{i, j=1}^n (1 - x_i y_j)} \quad (2)$$

であり、対称関数の理論の中核をなしている。この Cauchy の公式は、表現論的には $\mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n$ 加群 $\mathbb{C}[M_n]$ の既約分解を考えることによって証明できる一方で、組合せ論的には Robinson–Schensted–Knuth 対応を用いて半標準盤の対と非負整数を成分とする行列の間の全単射を構成することによっても示すことができる。しかし、行列式に関する Binet–Cauchy の公式 (系 2.3) を用いると、Cauchy の公式 (2) は、Cauchy の行列式

$$\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (1 - x_i y_j)} \quad (3)$$

に帰着され、簡単に証明することができる。

次に、Schur–Littlewood の公式

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \quad (4)$$

* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学 多元数理科学研究科
e-mail: okada@math.nagoya-u.ac.jp

を考える. この公式も, \mathbf{GL}_n 加群 $S(V \oplus \wedge^2(V))$ ($V = \mathbb{C}^n$ は \mathbf{GL}_n の自然表現) の既約分解, あるいは, Robinson–Schensted–Knuth 対応を考えることによって証明できるが, 石川–若山の小行列式の和公式 (命題 2.1) を利用すると, Schur のパフィアン ([13, §36] に初めて現れた)

$$\text{Pf} \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \quad (5)$$

に帰着される (例えば, [2] を見よ).

このように, Schur 関数の (重みつき) 和に関する公式は, 行列式に関する一般的な公式 (Binet–Cauchy の公式や石川–若山の小行列式の和公式など) と, 特殊な形の行列式・パフィアンの公式 (Cauchy の行列式や Schur のパフィアンなど) を組み合わせることによって, 導くことができる. ここでは, 分割の長さを制限した和

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}, l(\lambda) \leq l} s_\lambda(x_1, \dots, x_n) \quad (6)$$

(ただし, $l \leq n$ とする) と, その証明に必要な Schur 型のパフィアンの拡張を考える.

2. 小行列式の和公式

この節では, 石川–若山 [4] の小行列式の和公式についてまとめておく. この和公式は, 与えられた行列の小行列式の重みつき和を 1 つのパフィアンで表す公式であり, 表現論, 組合せ論などで欠かせない道具となっている. (論説 [1] やそこに挙げた文献を参照されたい.)

まず, パフィアンの定義を思い出しておく. (パフィアンの基本的性質については, [12] を見よ.) $2m$ 次対称群 \mathfrak{S}_{2m} の部分集合 \mathfrak{F}_{2m} を,

$$\mathfrak{F}_{2m} = \left\{ \pi = (\pi(1), \dots, \pi(2m)) \in \mathfrak{S}_{2m} : \begin{array}{l} \pi(1) < \pi(3) < \dots < \pi(2m-1), \\ \pi(2i-1) < \pi(2i) \quad (i = 1, \dots, m) \end{array} \right\}$$

とにおいて定める. このとき, $2m$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2m}$ ($a_{ji} = -a_{ij}$) に対して,

$$\text{Pf } A = \sum_{\pi \in \mathfrak{F}_{2m}} \text{sgn}(\pi) a_{\pi(1), \pi(2)} a_{\pi(3), \pi(4)} \cdots a_{\pi(2m-1), \pi(2m)} \quad (7)$$

とおき, A のパフィアン (Pfaffian) と呼ぶ. この定義から, $m \times n$ 行列 B に対して,

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} O & B \\ -{}^t B & O \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{m(m-1)/2} \det B & (m = n \text{ のとき}), \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases} \quad (8)$$

となることわかる. よって, 行列式はパフィアンの特別な場合であるとみなすことができる.

次に, 石川–若山の小行列式の和公式を述べるために, 小行列を表す記号を定めておく. 整数 $k < l$ に対して, $[k, l] = \{k, k+1, \dots, l-1, l\}$ とおき, $[1, l]$ を単に $[l]$ と表す. また, 集合 $[k, l]$ の r 元部分集合の全体を $\binom{[k, l]}{r}$ と表し, 部分集合 $I \in \binom{[k, l]}{r}$ と, I の元を小さい順に並べてできる列を同一視することにする. $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ と行添字の列 $I = (i_1, \dots, i_r)$, 列添字の列 $J = (j_1, \dots, j_s)$ が与えられたとき, X から第 i_1 行, \dots , 第 i_r 行, 第 j_1 列, \dots , 第 j_s 列を取り出してできる $r \times s$ 行列を $X(I; J)$ と表す:

$$X(I; J) = (x_{i_p, j_q})_{1 \leq p \leq r, 1 \leq q \leq s}.$$

X が正方行列 (例えば反対称行列) で $I = J$ である場合は, $X(I; I)$ を単に $X(I)$ と表すことにする.

このとき, 石川–若山の小行列式の和公式は, 次のように述べることができる.

命題 2.1. (Ishikawa–Wakayama [4, Theorem 2]) $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r+N}$ を $n \times (r+N)$ 行列, $A = (a_{ij})_{r+1 \leq i, j \leq r+N}$ を N 次反対称行列とする. $n+r$ が偶数であり, $0 \leq n-r \leq N$ であるとき,

$$\sum_{I \in \binom{[r+1, r+N]}{n-r}} \text{Pf } A(I) \cdot \det T([n]; [r] \cup I) = (-1)^{r(r-1)/2} \text{Pf} \begin{pmatrix} KA^tK & H \\ -^tH & O \end{pmatrix}. \quad (9)$$

ここで,

$$H = T([n]; [r]), \quad K = T([n]; [r+1, r+N])$$

である.

この和公式は, 与えられた行列 T の n 次小行列式で, 第 1 行～第 r 行の部分 H を必ず含むようなもの全体の重みつき和を与えている. 特に, $r=0$ の場合を考えると, T の n 次小行列式全体の和が得られる.

系 2.2. $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N}$ を $n \times N$ 行列, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ を N 次反対称行列とする. n が偶数であり, $n \leq N$ であるとき,

$$\sum_{I \in \binom{[N]}{n}} \text{Pf } A(I) \cdot \det T([n]; J) = \text{Pf}(TA^tT). \quad (10)$$

さらに, この系 2.2 を $A = \begin{pmatrix} O & B \\ -^tB & O \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} R & O \\ O & S \end{pmatrix}$ の形の行列に適用すると, (8) を用いることにより, 次の Binet–Cauchy の公式が導かれる. つまり, 石川–若山の小行列式の和公式 (9) は, Binet–Cauchy の公式 (11) のパフィアン版であるともいえる.

系 2.3. (Binet–Cauchy の公式) B を M 次正方行列, R, S を $m \times M$ 行列とする. $m \leq M$ であるとき,

$$\sum_{I, J} \det B(I; J) \det R([m]; I) \det S([m]; J) = \det(RB^tS). \quad (11)$$

ここで, 和は $[M]$ の m 元部分集合 I, J 全体をわたる.

さて, 石川–若山の小行列式の和公式 (9) を, (6) のような分割の長さを制限した Schur 関数の重みつき和に応用することを考える. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とし, (i, j) 成分 ($1 \leq i \leq n, j \geq 0$) が x_i^{j-1} で与えられる行列を T とする:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (12)$$

長さ n 以下の分割 λ に対して, 非負整数からなる n 元集合

$$I_n(\lambda) = \{\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \dots, \lambda_{n-1} + 1, \lambda_n\}$$

を対応させる. このとき, 分割 λ に対応する Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ の定義 (1) は,

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\det T([n]; I(\lambda))}{\det T([n]; I(\emptyset))}$$

(ただし, $\emptyset = (0, \dots, 0)$ である) と書くことができる. ここで,

$$\det T([n]; I(\emptyset)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

であることに注意する.

長さ n 以下の分割 λ と非負整数 $l \leq n$ に対して, $l(\lambda) \leq l$ となるための必要十分条件は, $[0, n-l-1] = \{0, 1, \dots, n-l-1\} \subset I_n(\lambda)$ となることである. よって, 命題 2.1 を (12) の行列 T と $H = T([n]; [0, n-l-1])$ に適用することにより, 次の命題が得られる.

命題 2.4. n を正整数, l を $l \leq n$ となる偶数とし, $A = (a_{ij})_{i, j \geq n-l}$ を反対称行列とする. このとき,

$$\sum_{l(\lambda) \leq l} \text{Pf } A(I_n(\lambda) \setminus [0, n-l-1]) \cdot s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{r(n-r)}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)} \text{Pf } M. \quad (13)$$

ここで, λ は長さ l 以下の分割全体を動き, M は (i, j) 成分 m_{ij} ($i < j$) が次で与えられる $(2n-l)$ 次反対称行列である:

$$m_{ij} = \begin{cases} \sum_{\substack{p, q \geq n-l \\ p+q=i+j}} a_{p,q} x_i^p x_j^q & (1 \leq i < j \leq n \text{ のとき}), \\ x_i^{j-n-1} & (1 \leq i \leq n < j \leq 2n-l \text{ のとき}), \\ 0 & (n < i < j \leq 2n-l \text{ のとき}). \end{cases}$$

命題 2.4 では l が偶数であることを仮定したが, l が奇数であるときも,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-l-1 & * & n-l & n-l+1 & \cdots \\ * & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-l-1} & 0 & x_1^{n-l} & x_1^{n-l+1} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \\ n & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-l-1} & 0 & x_n^{n-l} & x_n^{n-l+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

の形の行列に対して小行列式の和公式 (9) を適用することによって, 同様の公式が得られる.

命題 2.4 を (6) のような具体的な状況に応用するためには,

(a) Schur 関数 s_λ の係数を正しく与えるような反対称行列 A を見出すこと,

(b) (a) で見出した反対称行列 A に対して, パフィアン $\text{Pf } M$ を計算すること

の 2 つが必要である. (6) のような Littlewood 型の公式をこの枠組みで扱う際に (b) で現れるパフィアンは, 次節の Schur 型パフィアンを利用して計算できる.

3. Schur 型のパフィアン

この節では, Schur のパフィアン (5), および, Laksov–Lascoux–Thorup [6], Stembridge [15] によって見出された Schur 型のパフィアン

$$\text{Pf} \left(\frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \quad (14)$$

の一般化を考える. 他の一般化については, [10], [11], [3] を参照されたい.

定義 3.1. n を正整数とする. 変数からなるベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ に対して, n 次反対称行列 $S_n(\mathbf{x})$, $T_n(\mathbf{x})$, $\tilde{S}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ を次のように定義する:

$$S_n(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad T_n(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$\tilde{S}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\frac{(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{x_j - x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \left(\frac{a_j - a_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

また, $V_n^p(\mathbf{x})$ を第 i 行が

$$(1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{p-1})$$

で与えられる $n \times p$ 行列とし, $\tilde{V}_n^{p,q}(\mathbf{x})$ を第 i 行が

$$(1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{p-1}, a_i, a_i x_i, a_i x_i^2, \dots, a_i x_i^{q-1})$$

で与えられる $n \times (p+q)$ 行列とする.

行列 $\tilde{S}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}), \tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ において, $x_i \rightarrow x_i^2, a_i \rightarrow x_i, b_i \rightarrow x_i$ ($1 \leq i \leq n$) と特殊化すると,

$$\tilde{S}_n(\mathbf{x}^2; \mathbf{x}, \mathbf{x}) = S_n(\mathbf{x}), \quad \tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{x}) = T_n(\mathbf{x})$$

(ここで, $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ と表す) となり, Schur 型のパフィアン (5), (14) に現れる反対称行列が得られる. 主結果は, Schur のパフィアン (5) を一般化した次の定理である.

定理 3.2. $n+k+l=2m$ が偶数であり, $n \geq k+l$ であるとき,

$$\begin{aligned} \text{Pf} \begin{pmatrix} \tilde{S}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) & \tilde{V}_n^{k,l}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ -\tilde{V}_n^{k,l}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) & O \end{pmatrix} \\ = \frac{(-1)^{\binom{k-l}{2} + (m-k)l}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)} \det V^{m-l, m-k}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \det V^{m, m-k-l}(\mathbf{x}; \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (15)$$

この定理の特別な場合は, Sundquist [16, Remark 6.3] ($k=l=0$ の場合, ただし証明は書かれていない), 岡田 [10, Theorem 4.7] ($k=0$ の場合) によって与えられている. [10] では, $k=0$ の場合と小行列式の和公式を用いて, 長方形の Young 図形に対応する Schur 関数の積の分解公式を導いている.

系 3.3. (Sundquist [16, Remark 6.3]) $n=2m$ が偶数であるとき,

$$\text{Pf} \tilde{S}_n(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)} \det V^{m,m}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \det V^{m,m}(\mathbf{x}; \mathbf{b}). \quad (16)$$

この系において $x_i \rightarrow x_i^2, a_i \rightarrow x_i, b_i \rightarrow x_i$ ($1 \leq i \leq n$) と特殊化すると, $\det V^{m,m}(\mathbf{x}^2; \mathbf{x}) = (-1)^{\binom{m-1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ なので, Schur のパフィアン (5) が復元できる.

定理 3.2 の証明の概略. 示すべき等式 (15) の両辺はともに各 a_i については高々 1 次式だから, 部分集合 $I \subset [n]$ に対応する単項式 $a^I = \prod_{i \in I} a_i$ の係数を比較すればよい.

まず, (15) の左辺のパフィアンにおける a^I の係数を $L(I)$ とすると, パフィアンの定義 (7) から, $L(I)$ は (i, j) 成分 ($i < j$) が次で与えられる反対称行列のパフィアンに等しい:

$$\begin{cases} 0 & (i \in I, j \in I \text{ のとき}), \\ -\frac{b_j - b_i}{x_j - x_i} & (i \in I, j \notin I \text{ のとき}), \\ 0 & (i \in I, n+1 \leq i \leq n+k \text{ のとき}), \\ x_i^{j-n-k-1} & (i \in I, n+k+1 \leq i \leq n+k+l \text{ のとき}), \\ \frac{b_j - b_i}{x_j - x_i} & (i \notin I, j \in I \text{ のとき}), \\ 0 & (i \notin I, j \notin I \text{ のとき}), \\ x_i^{j-n-1} & (i \notin I, n+1 \leq j \leq n+k \text{ のとき}), \\ 0 & (i \notin I, n+k+1 \leq j \leq n+k+l \text{ のとき}), \\ 0 & (n+k+1 \leq i < j \leq n+k+l \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで、行・列の置換を行い、さらに (8) を用いると、 $\#I+k \neq \#[n] \setminus I+l$ のとき $L(I) = 0$ であり、 $\#I+k = \#[n] \setminus I+l$ 、つまり、 $\#I = m-k$ のとき、

$$L(I) = (-1)^{i(I, I^c) + ml + \binom{m}{2}} \det \begin{pmatrix} \tilde{C}_{m-l, m-k}(\mathbf{x}_{I^c}, \mathbf{x}_I; \mathbf{b}_{I^c}, \mathbf{b}_I) & V_{m-l}^k(\mathbf{x}_{I^c}) \\ -{}^tV_{m-k}^l(\mathbf{x}_I) & O \end{pmatrix}$$

となることがわかる。ここで、 $I^c = [n] \setminus I$ 、 $\mathbf{x}_I = (x_i)_{i \in I}$ 、 $\mathbf{x}_{I^c} = (x_i)_{i \in I^c}$ 、 $\mathbf{b}_I = (b_i)_{i \in I}$ 、 $\mathbf{b}_{I^c} = (b_i)_{i \in I^c}$ であり、

$$i(I, I^c) = \{(i, j) \in I \times I^c : i < j\}$$

である。また、 $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$ 、 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$ 、 $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_p)$ 、 $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_q)$ に対して、

$$\tilde{C}_{p,q}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \left(\frac{c_i - d_j}{z_i - w_j} \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$$

とおいた。一方、(15) の右辺に現れる $\det V^{m-l, m-k}(\mathbf{x}; \mathbf{a})$ における a^I の係数は、第 i 行が

$$\begin{cases} (0, 0, 0, \dots, 0, 1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{m-k-1}) & (i \in I \text{ のとき}), \\ (1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{m-l-1}, 0, 0, 0, \dots, 0) & (i \notin I \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる n 次正方形の行列式に等しく、この行列式は、 $\#I \neq m-k$ のとき 0 であり、 $\#I = m-k$ のとき $(-1)^{i(I, I^c)} \prod_{i,j \in I, i < j} (x_j - x_i) \prod_{i,j \in I^c, i < j} (x_j - x_i)$ である。従って、(15) の両辺における a^I の係数が一致することを示すためには、次の命題の Cauchy 型行列式の公式 (17) が証明できればよい。□

命題 3.4. $p+k = q+l$ であり、 $p-l = k-q \geq 0$ であるとき、

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{C}_{p,q}(\mathbf{z}, \mathbf{w}; \mathbf{c}, \mathbf{d}) & V_p^l(\mathbf{z}) \\ -{}^tV_q^k(\mathbf{w}) & O \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{q + \binom{q-k}{2}}}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (z_i - w_j)} \det V_{p+q}^{q+l, p-l}(\mathbf{z} \cup \mathbf{w}; \mathbf{c} \cup \mathbf{d}). \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{z} \cup \mathbf{w} = (z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_q)$ 、 $\mathbf{c} \cup \mathbf{d} = (c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_q)$ である。

証明の概略。この命題も両辺における $c^J d^J$ の係数を比較するというアイデアで証明でき、

$$\det \begin{pmatrix} C_{r,s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) & V_r^{r-s}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = (-1)^{\binom{s}{2}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq r} (u_j - u_i) \prod_{1 \leq i < j \leq s} (v_j - v_i)}{\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s (u_i - v_j)} \quad (18)$$

に帰着される。ただし、 $r \geq s$ 、 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$ 、 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_s)$ であり、

$$C_{r,s}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\frac{1}{u_i - v_j} \right)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$$

である。なお、等式 (18) は例えば r に関する帰納法で示される。 $(r = s$ の場合が Cauchy の行列式 (3) である。) □

さて、定理 3.2 において、 $x_i \rightarrow x_i + x_i^{-1}$ 、 $a_i \rightarrow x_i$ ($1 \leq i \leq n$) と特殊化する。特に、 $l = k$ 、あるいは、 $l = k-1$ の場合は

$$\det V^{m-l, m-k}(\mathbf{x} + \mathbf{x}^{-1}; \mathbf{x}) = \begin{cases} (-1)^{\binom{n/2}{2}} \prod_{i=1}^n x_i^{-n/2+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) & (l = k \text{ のとき}) \\ (-1)^{\binom{(n+1)/2}{2}} \prod_{i=1}^n x_i^{-(n+1)/2+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) & (l = k-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるので、次の定理が得られる。

定理 3.5. $n + r = 2m$ が偶数であり, $n \geq r$ であるとき,

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} \tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{b}) & V_n^r(\mathbf{x}) \\ -{}^t V_n^r(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\binom{m}{2} + \binom{r}{2}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \det \tilde{U}^{m, m-r}(\mathbf{x}; \mathbf{b}). \quad (19)$$

ここで, $\tilde{U}^{m, m-r}(\mathbf{x}; \mathbf{b})$ は (i, j) 成分が次で与えられる n 次正方行列である:

$$\begin{cases} x_i^{m-1} & (j = 1 \text{ のとき}), \\ x_i^{m+j-2} + x_i^{m-j} & (2 \leq j \leq m \text{ のとき}), \\ b_i x_i^{m-1} & (j = m+1 \text{ のとき}), \\ b_i (x_i^{j-2} + x_i^{2m-j}) & (m+2 \leq j \leq n \text{ のとき}). \end{cases}$$

この定理の $r = 0$ の場合 (つまり, $\text{Pf} \tilde{T}_n(\mathbf{x}; \mathbf{b})$) が Sundquist の公式 [16, Theorem 2.1] であり, さらに $b_i \rightarrow x_i$ ($1 \leq i \leq n$) と特殊化することによってこの節の最初に挙げた Schur 型のパフィアン (14) が得られる.

定理 3.5 のパフィアンに行・列の基本変形を施すと, 次節で必要となる次のパフィアンも計算できる.

系 3.6. $n + r = 2m$ が偶数であり, $n \geq r$ であるとする. $0 \leq h \leq r$ であるとき,

$$\tilde{T}_n^h(\mathbf{x}; \mathbf{b}) = \left(x_i^h x_j^h \frac{b_j - b_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

とおくと,

$$\text{Pf} \begin{pmatrix} \tilde{T}_n^h(\mathbf{x}; \mathbf{b}) & V_n^r(\mathbf{x}) \\ -{}^t V_n^r(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\binom{m}{2} + \binom{r}{2}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - x_i x_j)} \det \tilde{U}^{m, m-r}(\mathbf{x}; \mathbf{b}). \quad (20)$$

つまり, $0 \leq h \leq r$ である限り, (20) の左辺のパフィアンは h にはよらない.

4. Schur–Littlewood の公式の一般化

この節では, 第 2 節で解説した小行列式の和公式 (命題 2.1, 命題 2.4) と, 第 3 節で与えた Schur 型パフィアンの公式 (20) を利用して, 分割の長さを制限した Schur 関数の和 (6) に関する制限付き Schur–Littlewood の公式 (定理 4.1) を導く. 同様の方針で, 分割の長さの制限に加えて, Young 図形の行の長さがすべて偶数, あるいは, 列の長さがすべて偶数であるという制限を課した Schur 関数の和に関する Littlewood 型の公式を導くことができ, さらにその変種も扱うことができる.

公式を述べるために, 分割の Frobenius 記法を思い出しておく. 分割 λ に対して, その Young 図形の主対角線の長さを $p(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \geq i\}$ とし,

$$\alpha_i = \lambda_i - i, \quad \beta_i = {}^t \lambda_i - i \quad (1 \leq i \leq p(\lambda))$$

(ここで, ${}^t \lambda$ は λ の共役分割である) とおくと, $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p(\lambda)} | \beta_1, \dots, \beta_{p(\lambda)})$ と表す (Frobenius 記法). 整数 r に対して, Frobenius 記法で

$$\lambda = (\beta_1 + r, \beta_2 + r, \dots, \beta_p + r | \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r),$$

の形に表される分割全体のなす集合を Γ_r とおく.

定理 4.1. (King [5]) n を正整数とし, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする. $l \leq n$ であるとき,

$$\sum_{l(\lambda) \leq l} s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1-x_i x_j)} \cdot \frac{\det \left(x_i^{j-1} - (-1)^l \chi_{j \leq n-l} x_i^{2n-l-j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}}{\det \left(x_i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1-x_i x_j)} \sum_{\mu \in \Gamma_{-l}} (-1)^{(|\mu| - (l-1)p(\mu))/2} s_\mu(\mathbf{x}) \quad (22)$$

ここで, 右辺の和の λ は長さ l 以下の分割全体を動き,

$$\chi_{j \leq n-l} = \begin{cases} 1 & (j \leq n-l \text{ のとき}), \\ 0 & (j > n-l \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

この定理の (22) は Lievens–Stoilova–Van der Jeugt [7] の与えた予想式である. 定理 4.1 において, $l = n$ とすると元の Schur–Littlewood の公式 (4) が得られ, $l = 0$ とすると別の Littlewood の公式

$$\sum_{\lambda \in \Gamma_0} (-1)^{(|\lambda| + p(\lambda))/2} s_\lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1-x_i x_j) \quad (23)$$

が得られる. つまり, 定理 4.1 は Schur–Littlewood の公式 (4) と Littlewood の公式 (23) をつなぐものである.

ここで, King [5] による定理 4.1 の証明について触れておく. (23) を用いて (22) の分母を書き直すと,

$$\sum_{l(\lambda) \leq l} s_\lambda = \frac{\sum_{\mu \in \Gamma_{-l}} (-1)^{(|\mu| - (l-1)p(\mu))/2} s_\mu}{\sum_{\nu \in \Gamma_0} (-1)^{|\nu| + p(\nu))/2} s_\nu \quad (24)$$

と無限変数の対称関数環 Λ における関係式に書き直すことができる. この段階で, $\omega(s_\lambda) = s_\lambda$ となる Λ の対合 ω を施すと,

$$\sum_{\lambda_1 \leq l} s_\lambda = \frac{\sum_{\mu \in \Gamma_l} (-1)^{(|\mu| - (l-1)p(\mu))/2} s_\mu}{\sum_{\nu \in \Gamma_0} (-1)^{|\nu| + p(\nu))/2} s_\nu. \quad (25)$$

ここで, 和は $\lambda_1 \leq l$ をみたま分割全体にわたる. もう一度有限変数に戻ると, (25) は

$$\sum_{\lambda_1 \leq l} s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1-x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1-x_i x_j)} \cdot \frac{\det \left(x_i^{j-1} - x_i^{2n+l-j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}}{\det \left(x_i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (26)$$

と書き直すことができるが, これは Macdonald [8, I.5 Example 16] によって既に証明されていた関係式である. (この関係式は, 直交群 \mathbf{O}_{2n+1} の長方形のヤング図形に対応する既約表現を部分群 \mathbf{GL}_n に制限したときの分規則を与えるものとみなすこともでき, [10] では小行列式の和公式と Schur 型のパフィアンを用いたより簡明な証明が与えられている.) King [5] は, この道筋を逆にたどることによって, (21) を導いている.

ここでは, 小行列式の和公式と Schur 型のパフィアン (20) を用いて, 定理 4.1 により直接的な証明を与える. まず, 次の補題はパフィアンの展開公式と帰納法を用いることにより簡単に示すことができる.

補題 4.2. A を上三角部分の成分がすべて 1 である反対称行列とすると, 行・列添字の部分集合 I (ただし, $\#I$ は偶数とする) に対して,

$$\text{Pf } A(I) = 1.$$

定理 4.1 の証明の概略. 簡単のため, l が偶数である場合を考え, $r = n - l$ とおく. (l が奇数である場合も同様である.)

まず, 命題 2.4 を補題 4.2 の反対称行列 A に対して適用する. このとき, 直接計算により, (13) の右辺のパファンの成分は,

$$\sum_{p, q \geq r} a_{p, q} x_i^p x_j^q = x_i^r x_j^r \frac{x_j - x_i}{(1 - x_i)(1 - x_j)(1 - x_i x_j)}$$

となる. ここで,

$$\frac{x_j - x_i}{(1 - x_i)(1 - x_j)} = \frac{x_j}{1 - x_j} - \frac{x_i}{1 - x_i}$$

であることに注意すれば, 命題 2.4 により,

$$\sum_{l(\lambda) \leq l} s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\binom{r}{2}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)} \text{Pf} \begin{pmatrix} \tilde{T}_n^r(\mathbf{x}; \mathbf{x}/(1 - \mathbf{x})) & V_n^r(\mathbf{x}) \\ -V_n^r(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix}$$

(ただし, $\mathbf{x}/(1 - \mathbf{x}) = (x_1/(1 - x_1), \dots, x_n/(1 - x_n))$ である) と Schur 型のパフィアンを用いて表すことができる.

次に, Schur 型のパフィアンの公式 (20) を $b_i \rightarrow x_i/(1 - x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) と特殊化して用いると,

$$\sum_{l(\lambda) \leq l} s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)} \det \tilde{U}^{m, m-k} \left(\mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{1 - \mathbf{x}} \right)$$

(ここで, $m = (n + r)/2$ とおいた) と行列式で表すことができる. 後は, $\tilde{U}^{m, m-r}$ に基本変形を施すと,

$$\det \tilde{U}^{m, m-r} \left(\mathbf{x}; \frac{\mathbf{x}}{1 - \mathbf{x}} \right) = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)} \det \left(x_i^{j-1} - (-1)^l \chi_{j \leq n-l} x_i^{2n-l-j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

となることがわかるので, l が偶数の場合の証明が完成する. \square

5. Schur の P 関数への応用

最後に, 定理 3.2 の Schur 型パフィアンの公式 (15) の, Schur の P 関数への応用を与える.

Schur の P 関数 (あるいは Q 関数) は, 対称群の射影表現の理論において Schur 関数の役割を果たす対称関数であり, Hall-Littlewood 関数の $t = -1$ の場合として得られる. ($t = 0$ の場合が Schur 関数である.) Schur 関数が行列式の比で表されたように, Schur の P 関数はパフィアンの比で表すことができる. その公式 (を書き直したもの) を述べるために, 記号を用意する. n を正整数とし, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする. 整数列 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ に対して,

$$V_n^\alpha(\mathbf{x}) = (x_i^{\alpha_j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l}$$

とおき,

$$N_n^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} S_n(\mathbf{x}) & V_n^\alpha(\mathbf{x}) \\ -V_n^\alpha(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix} \quad (27)$$

と定義する. このとき,

命題 5.1. (Nimmo [9, (A12)]) λ を長さ l のストリクトな分割 (つまり, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l > 0$) とすると, 対応する Schur の P 関数 $P_\lambda(\mathbf{x})$ は次の形で表される:

$$P_\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} (-1)^{\binom{l}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} \cdot \text{Pf } N_n^{(\lambda_l, \dots, \lambda_2, \lambda_1)}(\mathbf{x}) & (n+l \text{ が偶数のとき}), \\ (-1)^{\binom{l+1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j + x_i}{x_j - x_i} \cdot \text{Pf } N_n^{(0, \lambda_l, \dots, \lambda_2, \lambda_1)}(\mathbf{x}) & (n+l \text{ が奇数のとき}). \end{cases} \quad (28)$$

非負整数 k に対して, $\rho_k, (1^k)$ をそれぞれ

$$\rho_k = (k, k-1, \dots, 2, 1), \quad (1^k) = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$$

で与えられる分割とする. このとき, Schur の P 関数のパフィアン表示 (28) と Schur 型パフィアンの公式 (15) を用いると, 次の定理に代数的な別証明を与えることができる.

定理 5.2. (Stanley, Worley [17, Section 7.3]) 非負整数 k, l に対して,

$$P_{\rho_k}(\mathbf{x}) = s_{\rho_k}(\mathbf{x}), \quad (29)$$

$$P_{\rho_k + \rho_l}(\mathbf{x}) = s_{\rho_k}(\mathbf{x}) s_{\rho_l}(\mathbf{x}), \quad (30)$$

$$P_{\rho_k + (1^l)}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}). \quad (31)$$

ここで, (31) において, $0 \leq l \leq k+1$ であり, λ は $\rho_k \subset \lambda \subset \rho_{k+1}$, $|\lambda| - |\rho_k| = l$ をみたす分割全体を動く.

この定理の (29) は Stanley による結果であり, [8, III.8 Example 3 (b)] に証明がある. また, (30) は Stanley [14] が提示した予想である. Worley [17] はこれらの公式に, シフトド半標準盤を用いた組合せ論的証明を与えている. 一方, 定理 3.2 の Schur 型パフィアンの公式 (15) において,

$$x_i \rightarrow x_i^2, \quad a_i \rightarrow \frac{x_i}{1 + tx_i}, \quad b_i \rightarrow x_i^e \quad (1 \leq i \leq n)$$

(ここで, $e = \pm 1$ である) と特殊化したものを用いると, (28) の表示と比較することにより, 定理 5.2 の (29), (30), (31) がすぐに従う.

参考文献

- [1] 石川 雅雄, 岡田 聡一, 行列式・パフィアンに関する等式とその表現論, 組合せ論への応用, 数学 **62** (2010), 85–114.
- [2] M. Ishikawa, S. Okada and M. Wakayama, Applications of minor-summation formula, I: Littlewood’s formulas, J. Algebra **183** (1996), 193–216.
- [3] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng, Generalizations of Cauchy’s determinant and Schur’s Pfaffian, Adv. in Appl. Math. **36** (2006), 251–287.
- [4] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.
- [5] R. C. King, From Palev’s study of Wigner quantum systems to new results on sums of Schur functions, in “Lie Theory and Its Applications in Physics”, Springer Proc. Math. & Stat. **36**, Springer, 2013, pp. 61–75.
- [6] D. Laksov, A. Lascoux and A. Thorup, On Giambelli’s theorem on complete correlations, Acta Math. **162** (1989), 143–199.
- [7] S. Lievens, N. I. Stoilova, and J. Van der Jeugt, The paraboson Fock space and unitary irreducible representations of the Lie superalgebra $\mathfrak{osp}(1|2n)$, Comm. Math. Phys. **281** (2008), 805–826.
- [8] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.

- [9] J. J. C. Nimmo, Hall–Littlewood symmetric functions and the BKP equation, *J. Physics A* **23** (1990), 751–760.
- [10] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, *J. Algebra* **205** (1998), 337–367.
- [11] S. Okada, Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups, *J. Algebraic Combin.* **23** (2006), 43–69.
- [12] 岡田 聡一, Pfaffian identities and their applications, 2012 年度表現論シンポジウム講演集, 2012, pp. 69–91.
- [13] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. reine angew. Math.* **139** (1911), 155–250.
- [14] R. Stanley, Problem 4, in “Combinatorics and Algebra”, *Contemp. Math.* **34**, Amer. Math. Soc., 1984, pp.304–305.
- [15] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions, *Adv. Math.* **83** (1990), 96–131.
- [16] T. Sundquist, Two variable Pfaffian identities and symmetric functions, *J. Algebraic Combin.* **5** (1996), 135–148.
- [17] D. R. Worley, A Theory of Shifted Young Tableaux, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1984.

A relation between the divergent bilateral basic hypergeometric series ${}_2\psi_2(a, 0; b_1, b_2; q, x)$ and the basic hypergeometric series

Takeshi MORITA (Osaka University)*

1. The divergent bilateral basic hypergeometric series

We show the *connection* formula for a *divergent* basic hypergeometric function

$${}_2\psi_2(a_1, 0; b_1, b_2; q, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1; q)_n}{(b_1, b_2; q)_n} x^n \quad (1)$$

with the using of q -Borel-Laplace transformations. Here, $(a; q)_n := (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})$ is the q -shifted factorial (see [2] for more details), provided that $n \in \mathbb{Z}$. The function (1) satisfies the second order linear q -difference equation

$$\left(\frac{b_1 b_2}{q^2}\right) u(q^2 x) - \left(\frac{b_1}{q} + \frac{b_2}{q} - a_1 x\right) u(qx) + (1-x)u(x) = 0 \quad (2)$$

We give the new formula for the divergent series (1) from the viewpoint of the connection problems on linear q -difference equations.

2. Connection problems on q -difference equations

Connection problems on linear q -difference equations between solutions around the origin and around infinity were studied by G. D. Birkhoff [1] by the using of the multi-valued functions. On second order q -difference case, connection formulae between solutions around the origin and infinity are given by the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}.$$

Here, the pair $(u_1(x), u_2(x))$ is a fundamental system of solutions of second order linear q -difference equation around the origin and $(v_1(x), v_2(x))$ is a fundamental system of solutions around the infinity. In our setting, we remark that the connection coefficients $C_{jk}(x)$ ($1 \leq j, k \leq 2$) are given by q -elliptic functions, namely, $C_{jk}(qx) = C_{jk}(x)$ and unique valued. G. N. Watson gave the first example of the connection formula for Heine's basic hypergeometric series[6]. But other cases, including irregular singular cases has not known for a long time. The irregularity of q -difference equations are studied by the using of the Newton polygons by J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang [5]. They define the q -Borel-Laplace transformations to study the q -Stokes phenomenon. Zhang gives the connection formulae for some q -special functions and a divergent series. The author also give the connection formulae for the q -confluent type basic hypergeometric function, the Hahn-Exton q -Bessel function and the divergent basic hypergeometric series which is related to Ramanujan's entire function [3, 4] by the using of the q -Borel-Laplace transformations. We apply the q -Borel-Laplace transformations to obtain the new relation for the divergent series (1).

This work was supported by KAKENHI (25-1840).

2000 Mathematics Subject Classification: 33D15, 34M40, 39A13.

Keywords: q -Borel-Laplace transformation, bilateral basic hypergeometric function.

* e-mail: t-morita@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

3. The q -Borel-Laplace transformations

We review the q -Borel transformation and the q -Laplace transformation. We assume that the function $f(x)$ is a formal power series such that $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$, $a_0 := 1$.

Definition 1. 1. The q -Borel transformation of f is

$$(\mathcal{B}_q^+ f)(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \xi^n = \varphi(\xi).$$

2. The q -Laplace transformation is

$$(\mathcal{L}_q^+ \varphi)(x) := \frac{1}{1-q} \int_0^{\lambda \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_q\left(\frac{\xi}{x}\right)} \frac{d_q \xi}{\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(\lambda q^n)}{\theta\left(\frac{\lambda q^n}{x}\right)}.$$

Here, $\theta_q(x)$ is the theta function of Jacobi and we remark that the q -Borel transformation is the formal inverse of the q -Laplace transformation. These transformations are powerful tools for studying the properties of the divergent series.

4. Main theorem

The equation (2) also has solutions around infinity:

$$v_1(x; a_1; b_1, b_2) = \frac{\theta_q(b_1 x)}{\theta_q(x)} \sum_{n \geq 0} \frac{(q a_1 / b_1; q)_n}{(q b_2 / b_1; q)_n} x^n,$$

$$v_2(x; a_1; b_1, b_2) = \frac{\theta_q(b_2 x)}{\theta_q(x)} \sum_{n \geq 0} \frac{(q a_1 / b_2; q)_n}{(q b_1 / b_2; q)_n} x^n.$$

We give the following theorem with the using of the q -Borel-Laplace transformations.

Theorem. For any $x \in \mathbb{C}^* \setminus [-\lambda; q]$, we have

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_{q,\lambda}^+ \circ \mathcal{B}_q^+ {}_2\psi_2(a_1, 0; b_1, b_2; q, x))(x) \\ &= \frac{(q, b_1/a_1, q/b_1, q/b_2; q)_\infty}{(q/a_1, b_1, q/b_1, b_1/b_2; q)_\infty} \frac{\theta_q\left(\frac{a_1}{b_2} \lambda / q\right)}{\theta_q(q a_1 \lambda / b_1 b_2)} \frac{\theta_q(b_1 x / \lambda)}{\theta_q(q x / \lambda)} \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(b_1 x)} v_1(x) \\ &= \frac{(q, b_2/a_1, q/b_2, q/b_1; q)_\infty}{(q/a_1, b_2, q/b_2, b_2/b_1; q)_\infty} \frac{\theta_q\left(\frac{a_1}{b_1} \lambda / q\right)}{\theta_q(q a_1 \lambda / b_1 b_2)} \frac{\theta_q(b_2 x / \lambda)}{\theta_q(q x / \lambda)} \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(b_2 x)} v_2(x) \end{aligned}$$

provided that $[\lambda; q] := \{\lambda q^k | k \in \mathbb{Z}\}$ for any fixed $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$.

References

- [1] G. D. Birkhoff, Proc. Am. Acad. Arts and Sciences, **49** (1914), 521 – 568.
- [2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge, 2004.
- [3] T. Morita, A connection formula of the Hahn-Exton q -Bessel Function, SIGMA, **7** (2011), 115, 11pp.
- [4] T. Morita, A connection formula of the q -confluent hypergeometric function, SIGMA, **9** (2013), 050, 13pp.
- [5] J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, Local analytic classification of q -difference equations, arXiv:0903.0853.
- [6] G. N. Watson, The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1910), 281–299.

パンルヴェIII型方程式の特殊関数解の超離散極限

磯島 伸 (法政大学理工学部)*

超離散化は、与えられた差分方程式を近似する区線形方程式を構成する極限操作である。得られた区線形方程式は、初期値等を適当に制限することで、セルオートマトンの時間発展則と見なすことができる。この手続きによって、差分方程式から系統的にセルオートマトンを構成することができ、可積分方程式を中心に様々な適用例が報告されてきた。しかし、解の正値性を要請されること、減算を扱えないことの2つが制約となっている。

これを拡張した符号付き超離散化という手法が提案されている [1]。その手続きは、差分方程式の従属変数 x_n に対して符号変数 $\xi_n = x_n/|x_n|$ および振幅変数 X_n を $|x_n| = e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}$ により導入し、 x_n を

$$x_n = \xi_n |x_n| = \{s(\xi_n) - s(-\xi_n)\} e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}, \quad s(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = 1) \\ 0 & (\xi = -1) \end{cases} \quad (1)$$

で置き換え、移項により減算を消去したのちに、方程式の両辺に $\varepsilon \log$ を施してから極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を取るというものである。恒等式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left(s(\xi) e^{\frac{X}{\varepsilon}} + e^{\frac{Y}{\varepsilon}} \right) = \max(S(\xi) + X, Y), \quad S(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi = 1) \\ -\infty & (\xi = -1) \end{cases} \quad (2)$$

により、 $\{S(\xi_n)\}$ と $\{X_n\}$ の満たす区線形方程式が得られる。この手法は先程の2つの制約を克服しており、また、 $\xi_n \equiv 1$ のとき通常の超離散化の手続きに帰着する。例えば、差分ベッセル方程式

$$J_\nu(q^{n+1}) - (q^\nu + q^{-\nu}) J_\nu(q^n) + \{1 + (1-q)^2 q^{2n-2}\} J_\nu(q^{n-1}) = 0 \quad (3)$$

に対し、パラメータ ε を $q = e^{\frac{Q}{\varepsilon}}$ ($Q < 0$) により導入して、従属変数の置き換え

$$J_\nu(q^n) = \{s(\beta_n^\nu) - s(-\beta_n^\nu)\} e^{\frac{B_n^\nu}{\varepsilon}} \quad (4)$$

を行う。適当な移項の後に極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を取ると、符号付き超離散ベッセル方程式

$$\begin{aligned} & \max[S(\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu, S(-\beta_n^\nu) + B_n^\nu - \nu Q, S(\beta_{n-1}^\nu) + B_{n-1}^\nu, S(\beta_{n-1}^\nu) + B_{n-1}^\nu + (2n-2)Q] \\ & = \max[S(-\beta_{n+1}^\nu) + B_{n+1}^\nu, S(\beta_n^\nu) + B_n^\nu - \nu Q, S(-\beta_{n-1}^\nu) + B_{n-1}^\nu, S(-\beta_{n-1}^\nu) + B_{n-1}^\nu + (2n-2)Q] \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。その特殊解として、差分ベッセル関数

$$J_\nu(q^n) = (1-q)^\nu q^{n\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-q)^{2j}}{(q^2; q^2)_j (q^2; q^2)_{j+\nu}} q^{2nj} \quad (6)$$

$$(a; q)_k = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{k-1}), \quad (a; q)_0 = 1 \quad (7)$$

本研究は科研費(課題番号:26790082)の助成を受けたものである。

* 〒184-8584 東京都小金井市梶野町3-7-2 法政大学 理工学部 経営システム工学科
e-mail: iso.jima@hosei.ac.jp

の超離散極限を取ることで、超離散ベッセル関数

$$(\beta_n^\nu, B_n^\nu) = \begin{cases} (1, n\nu Q) & (n \geq 1) \\ (1, n(n+\nu-1)Q) & (0 \geq n \geq -\nu) \\ \left((-1)^{\frac{n+\nu}{2}}, \frac{n(n-2)-\nu^2}{2} Q \right) & (n \leq -\nu-1, n+\nu: \text{偶数}) \\ \left((-1)^{\frac{n+\nu+1}{2}}, \frac{n(n-2)-\nu^2+3}{2} Q \right) & (n \leq -\nu-1, n+\nu: \text{奇数}) \end{cases} \quad (8)$$

が構成されている [2].

差分パウルヴェIII型方程式 [3]

$$w_{n+1}w_{n-1} = \frac{\alpha w_n^2 + \beta \lambda^n w_n + \gamma \lambda^{2n}}{w_n^2 + \delta w_n + \alpha} \quad (9)$$

はパラメータが $\alpha = -q^{4N}$, $\beta = (q^{\nu+N} - q^{-\nu-N-2})q^{8N}(1-q)^2$, $\gamma = q^{2(6N-1)}(1-q)^4$, $\delta = (q^{\nu-N} - q^{-\nu+N})q^{2N}$, $\lambda = q^2$ を満たすとき、以下の特殊解の系列を持つことが知られている。(3)の解を成分とする行列式

$$\tau_N^\nu(n) = |J_\nu(q^{n+2i+j-3})|_{1 \leq i, j \leq N} \quad (10)$$

で定まる関数 $\tau_N^\nu(n)$ に対し、変数変換

$$w_n^N = \frac{\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n)}{\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)} - q^{\nu+N} \quad (11)$$

で構成される関数は、パラメータが上記のときの(9)を満たす。解 $J_\nu(q^n)$ として(6)を与えた場合の(10)の超離散類似を極限操作により構成する [2]. $n \geq 1$ のとき、

$$\tau_N^\nu(n) \sim (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \left\{ \prod_{k=1}^N q^{(n+3k-3)(2N-2k+\nu)} \right\} \quad (q \rightarrow 0) \quad (12)$$

を得る。 $q = e^{\frac{Q}{\varepsilon}}$ と置いて $\tau_N^\nu(n)$ を超離散化すると、符号変数 $y_N^\nu(n) = \tau_N^\nu(n)/|\tau_N^\nu(n)|$, 振幅変数 $Y_N^\nu(n) = \varepsilon \log |\tau_N^\nu(n)|$ はそれぞれ

$$y_N^\nu(n) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}, \quad Y_N^\nu(n) = \sum_{k=1}^N (n+3k-3)(2N-2k+\nu)Q \quad (13)$$

となることが(12)からわかる。 $n < 0$ のときも類似の極限を得られるが、さらに場合分けが必要となる。

参考文献

- [1] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata and J. Satsuma, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 315206.
- [2] S. Isojima, in preparation.
- [3] K. Kajiwara, Y. Ohta and J. Satsuma, J. Math. Phys. **36** (1995) 4162–4174.

Schlesinger 変換と差分 Painlevé 方程式

竹縄 知之 (東京海洋大学海洋工学部)*

1. Fuchs 型常微分方程式の Schlesinger 変換

以下の Fuchs 型常微分方程式を Schlesinger 標準形という.

$$\frac{d\mathbf{Y}(z)}{dz} = \mathbf{A}(z)\mathbf{Y}(z), \quad \mathbf{A}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{A}_i}{z - z_i} \quad (1)$$

ここで $z_i \in \mathbb{C}$ は互いに異なり, \mathbf{A}_i と $\mathbf{Y}(z)$ はともに $m \times m$ 行列である. 無限遠点 $z = \infty$ での右辺の留数行列は

$$\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A}_0 := -\mathbf{A}_1 - \cdots - \mathbf{A}_n$$

で与えられる.

以下, Schlesinger 標準形を $g \in GL(m, \mathbb{C})$ による同時相似変換 $\mathbf{A}_i \mapsto g\mathbf{A}_i g^{-1}$ ($i = 0, \dots, n$) を法として考える. また簡単のため, 特に断らなければ \mathbf{A}_i の固有値 θ_i^j は generic (生成的) であるとする.

Proposition 1.1 (Schlesinger 1912). 成分が z の有理関数である $m \times m$ 行列 $\mathbf{R}(z)$ がただ一つ存在し, $\bar{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{R}(z)\mathbf{Y}(z)$ は

$$\frac{d\bar{\mathbf{Y}}(z)}{dz} = \bar{\mathbf{A}}(z)\bar{\mathbf{Y}}(z), \quad \bar{\mathbf{A}}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\mathbf{A}}_i}{z - z_i}, \quad \bar{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A}_\infty$$

を満たす. ただし, $\bar{\mathbf{A}}_i$ の固有値 $\bar{\theta}_i^j$ は θ_i^j と $\bar{\theta}_1^1 = \theta_1^1 - 1$ および $\bar{\theta}_2^2 = \theta_2^2 + 1$ を除いて等しいとする.

このとき, 変換 $\mathbf{A}(z) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}(z)$ はモノドロミー保存変形と可換であり, $\mathbf{R}(z)$ は階数 1 の行列 \mathbf{R}_1 を用いて $\mathbf{R}(z) = 1 + \frac{\mathbf{R}_1}{z - z_1}$ と書ける.

この命題により定まる変換 $\mathbf{A}(z) \rightarrow \bar{\mathbf{A}}(z)$ を基本 Schlesinger 変換といい, それと固有ベクトルの入れ替えとの合成を Schlesinger 変換という. 基本 Schlesinger 変換は

$$\frac{d\mathbf{R}(z)}{dz} = \bar{\mathbf{A}}(z)\mathbf{R}(z) - \mathbf{R}(z)\mathbf{A}(z), \quad (2)$$

という微差分 Lax 方程式を満たす. また $\mathbf{R}(z)$ はより具体的に

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{I} + \frac{z_1 - z_2}{z - z_1} \frac{\mathbf{b}_{2,1} \bar{\mathbf{c}}_2^\dagger}{\bar{\mathbf{c}}_2^\dagger \mathbf{b}_{2,1}}, \quad (3)$$

と書ける. ただし, \dagger は転置を表し, $\mathbf{b}_{i,j}$ と \mathbf{c}_i^j はそれぞれ固有値 θ_i^j に対する \mathbf{A}_i および \mathbf{A}_i^\dagger の固有値 θ_i^j に対する固有ベクトルを表す.

本研究は科研費 (課題番号:70361805) の助成を受けたものである. A. Dzhamay, 坂井秀隆との共同研究 [DST07] に基づく.

* 〒135-8533 東京都江東区越中島 2-1-6 東京海洋大学海洋工学部
e-mail: takenawa@kaiyodai.ac.jp
web: <http://www2.kaiyodai.ac.jp/~takenawa/>

Theorem 1.2. 基本 *Schlesinger* 変換は

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{R}(z_i) \mathbf{A}_i \mathbf{R}^{-1}(z_i), \quad i \neq 1, 2, \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1 - [\mathbf{A}_1, \mathbf{P}] - \mathbf{P} + \sum_{i \neq 1} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_i - z_1} \right) \mathbf{P} \mathbf{A}_i \mathbf{Q}, \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A}_2 + [\mathbf{A}_2, \mathbf{P}] + \mathbf{P} + \sum_{i \neq 2} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_i - z_2} \right) \mathbf{Q} \mathbf{A}_i \mathbf{P}. \quad (6)$$

と陽的に書ける。ただし、 $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{b}_{2,1} \bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger}}{\bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger} \mathbf{b}_{2,1}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ とする。

Theorem 1.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ = & (\theta_2^1 - \theta_1^1 + 1) \log(\bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger} \mathbf{b}_{2,1}) + \theta_1^1 \log(\bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger} \mathbf{b}_{1,1}) + (\theta_1^1 - 1) \log(\bar{\mathbf{c}}_1^{\dagger} \mathbf{b}_{2,1}) \\ & + \sum_{j \neq 1} \theta_1^j \log(\bar{\mathbf{c}}_1^{\dagger} \mathbf{R}_1 \mathbf{b}_{1,j}) + \sum_{j \neq 1} \theta_2^j \log(\bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger} \mathbf{Q} \mathbf{b}_{2,j}) + \sum_{i \neq 1, 2} \sum_j \theta_i^j \log(\bar{\mathbf{c}}_i^{\dagger} \mathbf{R}(z_i) \mathbf{b}_{i,j}). \end{aligned}$$

とする。また、 $(\bar{\mathbf{C}}_1)' = [\bar{\mathbf{c}}_1^{\dagger}, \dots, \bar{\mathbf{c}}_1^{\dagger}]$, $\mathbf{B}'_1 = [\mathbf{b}_{1,2}, \dots, \mathbf{b}_{1n}]$ と書くとき、 $(\bar{\mathbf{C}}_1)' \mathbf{b}_{2,1} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{c}}_2^{\dagger} \mathbf{B}'_1 = \mathbf{0}$ かつ $(\bar{\mathbf{C}}_1)' \mathbf{B}'_1$ および $\bar{\mathbf{C}}_i^{\dagger} \mathbf{R}(z_i) \mathbf{B}_i$ ($i \neq 1$) は正則な対角行列であるとする。このとき基本 *Schlesinger* 変換は

$$\bar{\mathbf{b}}_{i,j} = \frac{\partial \mathcal{H}^+}{\partial \bar{\mathbf{c}}_i^{\dagger}} \quad \text{および} \quad \mathbf{c}_i^{j\dagger} = \frac{\partial \mathcal{H}^+}{\partial \mathbf{b}_{i,j}}$$

という離散 *Hamilton* 形式で与えられる。

2. 差分 Painlevé 方程式

差分 Painlevé 方程式とは、加法的な一般 Halphen 曲面の族に付随する離散 Painlevé 方程式であり、9つのタイプがある [Sak01, Sak07]。このうち対称性の小さい6つは(連続) Painlevé 方程式(番号でいうと II, III, III($D_7^{(1)}$), IV, V, VI) の Bäcklund 変換として得られるので、Fuchs 型方程式との関係も明らかである。例えば $D_4^{(1)}$ 型曲面に付随する差分方程式、すなわち第 V 差分 Painlevé 方程式は、 $m = 2$, $n = 3$ の generic な Fuchs 型常微分方程式の基本 *Schlesinger* 変換として得られる。本研究では残る3つ、すなわち $A_0^{(1)**}$, $A_1^{(1)*}$, $A_2^{(1)*}$ のうち $A_1^{(1)*}$, $A_2^{(1)*}$ について、*Schlesinger* 変換として導出した。対応する Fuchs 型方程式の決定には、Katz-Kostov-Oshima [Osh13] による分類を用いた。

参考文献

- [DST07] Discrete Schlesinger Transformations, their Hamiltonian Formulation, and Difference Painleve Equations, *Preprint* arxiv:1302.2972 (2013)
- [Osh13] Toshio Oshima, *Classification of Fuchsian systems and their connection problem*, Exact WKB Analysis and Microlocal Analysis, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B37, (2013), pp. 163–192.
- [Sak01] Hidetaka Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), no.1, 165–229.
- [Sak07] Hidetaka Sakai, Problem: discrete Painlevé equations and their Lax forms, Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, (2007), pp.195–208.

完全WKB解析と団代数

岩木 耕平 (京大数理研)*1

中西 知樹 (名大多元数理)*2

1. 背景

完全WKB解析の記号法等は基本的に[2]に基づく. 次のSchrödinger方程式(大きなパラメータ $\eta = 1/\hbar > 0$ を含む2階線形微分方程式)を考える:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \eta^2 Q(z, \eta) \right) \psi(z, \eta) = 0$$

ここでポテンシャルは $Q(z, \eta) = Q_0(z) + \eta^{-1}Q_1(z) + \dots$ は η^{-1} に関する多項式で, 係数 $Q_n(z)$ は(ある仮定を満たす)有理関数とする. **完全WKB解析**では, “WKB解” と呼ばれるSchrödinger方程式の(η^{-1} に関する)形式級数解をBorel総和して得られる解を考察の対象とする. 解の性質は($Q_0(z)$ から定まる)“変わり点”および“Stokes曲線”がなす“Stokesグラフ”により規定される. ここでStokes曲線は2次微分 $Q_0(z)dz^{\otimes 2}$ の“水平軌道”に他ならない. 特に, “Stokes segment”(変わり点同士を結ぶStokes曲線, つまり $Q_0(z)dz^{\otimes 2}$ の鞍点軌道)が無い状況ではWKB解はBorel総和可能となり, そのモノドローミヤ接続公式は“**Voros係数**”と呼ばれる形式級数

$$V_\gamma(\eta) = \oint_\gamma S_{\text{odd}}(z, \eta) dz, \quad W_\beta(\eta) = \int_\beta \left(S_{\text{odd}}(z, \eta) - \eta \sqrt{Q_0(z)} \right) dz \quad (1)$$

のBorel和により記述できる([2, §3]). ここで $S_{\text{odd}}(z, \eta) = \eta \sqrt{Q_0(z)} + \dots$ は, おおよそWKB解の対数微分として定まる形式級数であり, γ や β は $\sqrt{Q_0(z)}$ を一価に定めるRiemann面の閉じたサイクル, および $Q_0(z)$ の極から極への路である.

一方, **団代数(クラスター代数)**はFomin-Zelevinski [3]により導入された. これは初期変数から“変異”と呼ばれる双有理変換を繰り返して得られる“クラスター変数”により(初期変数の有理関数体の中で)生成される. このクラスター変換は, 団代数の型を指定する籠(有向グラフ)の情報を元に組み合わせ的に定義される. 団代数は表現論, 可積分系, 双曲幾何をはじめ様々な分野と関わる. 我々の主結果は, 完全WKB解析の中に団代数の構造を見出したことである. 特に, 上述のVoros係数はクラスター変数(の対数)の役割を担う. もう少し具体的な主張を以下に説明する.

2. 主結果

Stokesグラフは η の偏角(や方程式が依存する係数)に依存する. η の偏角を変化させる(“ S^1 -作用”)と, 上述のStokes segmentが生じることがあり, さらにStokes segmentが生じる前後ではStokesグラフの位相的性質が不連続に変化する(Stokesグラフの“変

本研究は科研費(課題番号:13J02831)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 13F60, 34M60

キーワード: Exact WKB analysis, cluster algebra, Voros coefficient

*1 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: iwaki@kurims.kyoto-u.ac.jp

*2 〒464-8602 愛知県名古屋市長千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

e-mail: nakanisi@math.nagoya-u.ac.jp

異). Stokes segmentが無いとき, Stokes グラフは “saddle-free” であると言う. 変わり点が全て単純である時, (Stokes 曲線は単純変わり点から 3 本生じるので) saddle-free な Stokes グラフはある曲面の三角形分割を定める. さらに Stokes グラフの変異は, 対応する三角分割に “フリップ” (三角形分割の中の 4 辺形の対角線を別の対角線に取り替える操作) を引き起こす (これらは [4] のアイデアである). 実はあるクラスの団代数は曲面の三角形分割に付随して現れ, フリップは団代数の変異を引き起こすことが知られている. こうして完全 WKB 解析と団代数が Stokes グラフを通じて結びつく.

2つの Stokes グラフ G と G' が S^1 -作用で結ばれており, 対応する三角形分割がフリップで結ばれていると仮定する. Stokes グラフ G (resp., G') の “horizontal strip” (4 辺形の Stokes 領域) を D_1, \dots, D_n (resp., D'_1, \dots, D'_n) とし, それから定まる “単純路” および “単純サイクル” を β_i, γ_i (resp., β'_i, γ'_i) とする ($i = 1, \dots, n$). さらに,

$$\begin{aligned} x_i &= \mathcal{S}_G[e^{W_{\beta_i}}], & y_i &= e^{\eta \oint_{\gamma_i} \sqrt{Q_0(z)} dz}, & \hat{y}_i &= \mathcal{S}_G[e^{V_{\gamma_i}}], \\ x'_i &= \mathcal{S}_{G'}[e^{W_{\beta'_i}}], & y'_i &= e^{\eta \oint_{\gamma'_i} \sqrt{Q_0(z)} dz}, & \hat{y}'_i &= \mathcal{S}_{G'}[e^{V_{\gamma'_i}}] \end{aligned}$$

と定める. ここで W_{β_i} や V_{γ_i} etc. は (1) で定義された Voros 係数であり, \mathcal{S}_G と $\mathcal{S}_{G'}$ はそれぞれ G と G' の方向における Borel 総和作用素である. S^1 -作用に伴って Stokes segment が生じた際にはこれらの Voros 係数の Borel 総和可能性は一般に損なわれ, さらに Stokes グラフの変異に応じてある種の Stokes 現象が起こる (例えば [1]). これは x_i と x'_i が η の解析関数として異なることを意味するが, 我々は [5] において, その Stokes 現象を記述する公式がクラスター変数の変異に他ならないことを示した:

Theorem 1 ([5]).

$$\begin{aligned} x'_i &= \begin{cases} x_k^{-1} \left(\prod_{j=1}^n x_j^{[-\varepsilon b_{jk}]_+} \right) (1 + \hat{y}_k^\varepsilon) & i = k, \\ x_i & i \neq k. \end{cases} \\ y'_i &= \begin{cases} y_k^{-1} & i = k, \\ y_i y_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+} & i \neq k. \end{cases} & \hat{y}'_i &= \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & i = k, \\ \hat{y}_i \hat{y}_k^{[\varepsilon b_{ki}]_+} (1 + \hat{y}_k^\varepsilon)^{-b_{ki}} & i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで k は Stokes グラフの変異により潰れる horizontal strip のラベルであり, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ は S^1 -作用の方向を指定している.

正確には, 我々の変換は ε を “トロピカル符号” に選んだ場合の (y_i を係数とする) 係数付きクラスター変数の変異と一致し, そうでない場合は変異の拡張になっている.

参考文献

- [1] E.Delabaere, H.Dillinger and F.Pharm, Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Annales de l'institut Fourier*, **43** (1993), 163-199.
- [2] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
- [3] S.Fomin and A.Zelevinski, *Cluster algebras I, Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 497-529 (electronic); arXiv:math/0104151 [math.RT].
- [4] D. Gaiotto, G. W. Moore, and A. Neitzke, *Wall-crossing, Hitchin systems, and the WKB approximation*, *Adv. in Math.* **234** (2013), 239-403; arXiv:0907.3987 [hep-th].
- [5] K.Iwaki and T.Nakanishi, *Exact WKB analysis and cluster algebras*, arXiv:1401.7094 [math.CA], submitted.

互いに素条件による離散方程式の可積分性判定

Co-primeness condition as an integrability criterion for discrete equations

神吉 雅崇 (立教大理)*¹
 時弘 哲治 (東大数理)
 間瀬 崇史 (東大数理)
 間田 潤 (日大生産工)

概 要

本講演では、離散可積分系および非可積分系に関する次の3つの性質を研究する：(1) ローラン現象、(2) 既約性、(3) 互いに素 (co-primeness)。前半では一変数の離散方程式、特に Somos-4 数列に関する QRT 写像および、類似の形式の非可積分系を取り扱い、可積分な方程式のみにおいて、上記の(2)(3)の性質が成り立つことを証明する。後半では本手法を偏差分方程式へ応用する。特に離散 KdV 方程式と離散戸田方程式について、隣接する有限項を除けば、すべての項が互いに素であることを厳密に証明できたので紹介する。これは(3) co-primeness の成立を意味しており、可積分性判定基準の一つである「特異点閉じ込めテスト (singularity confinement test)」の代数的な再定式化となっている。

1. 導入

本研究は、離散方程式系の可積分性について、より効率的かつ厳密な判定基準を構成することを目標とする。離散方程式が可積分であるかどうかは、様々な有効な基準があるものの、統一的な定義はないと言える。この状況を踏まえ、十分多くのクラスの離散方程式に対する有効な可積分性判定基準として、「特異点閉じ込めテスト」[1]、「代数的エントロピー」などが考案されてきた。しかし、代数的エントロピーの意味では可積分だが、特異点が閉じ込められない写像 (Hietarinta-Viallet 方程式など) や、その逆である写像 (線形化可能系) が存在する。本研究は離散方程式の各項の代数的な性質に着目することで、離散系の可積分性の新たな定式化を試みる。広田・三輪方程式に代表される離散可積分系は双線形形式で「ローラン現象」(各項が初期変数のローラン多項式である性質) をもち、可積分性と密接に関わっている[2]。しかし離散可積分系の非線形形式の一般項はローラン多項式でないことが多い。そこで我々は各項が一般の有理関数であるときにも扱える基準として、既約性と co-primeness の2つを研究しその結果を紹介する。

2. 主結果

次の漸化式から定義される数列 $\{y_n\}$ を Somos-4 数列と呼ぶ：

$$y_{n+2}y_{n-2} = y_{n+1}y_{n-1} + y_n^2.$$

本研究は科研費 26・242 の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 34M55

キーワード: Integrability, co-prime, Laurent property

*¹ 〒171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1 立教大学理学部

e-mail: kanki@rikkyo.ac.jp

Somos-4 は変換 $x_n = \frac{y_{n+3}y_{n+1}}{y_{n+2}^2}$ により QRT 写像の一種である $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1}x_n^2}$ に変換できる。

定理 1 ([4]) Somos-4 の一般項 y_n は初期変数 $y_1 = a, y_2 = b, y_3 = c, y_4 = d$ の既約なローラン多項式

$$y_n \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, d^{\pm 1}]$$

であり、相異なる 2 項 $y_n, y_m (n \neq m)$ はローラン多項式として互いに素である。

Somos-4 の各項がローラン多項式になることは Fomin と Zelevinsky により クラスタ代数理論を用いてすでに示されているが、既約性に関しては未解決であった。定理 1 より、上記 QRT 写像の一般項 x_n は、隣接する 2 項 $x_{n\pm 1}$ 以外とは (初期値の単項式以外の) 共通因子を持たないことが示される。ここではこういった性質を広い意味での co-primeness と呼んでいる。

定理 2 ([3, 4]) 離散 KdV 方程式 (非線形形式)

$$\frac{1}{w_{n+1}^{t+1}} - \frac{1}{w_n^t} + \frac{\delta}{1+\delta}(w_n^{t+1} - w_{n+1}^t) = 0, \quad (\delta \neq 0, -1, -1/2)$$

の一般項 w_n^t, w_m^s は条件「 $|n-m| \geq 2$ または $|t-s| \geq 2$ 」のもとで、(初期値 $\{w_n^0, w_0^t | n, t \geq 0\}$ の単項式以外の) 共通因子を持たない。

証明の方針は、離散 KdV 方程式の双線形形式についてローラン現象が成立し、項の既約性も成り立つことをまず証明し、結果を非線形形式に適用する。[3] では制限された初期値集合の上で定理 2 が成り立つことを示した。[4] ではより一般の初期値を扱っており、双線形形式と非線形形式の初期値同士の対応が単項式ではないため、対応により既約性が保存しないという困難があるが、式の対称性を用いることで解決を行うことができた。定理 2 は離散 KdV 方程式の co-primeness を定式化しており、かつ、2セル以上離れると零点や極の情報が伝達しないという「特異点閉じ込め」の概念を代数的に表現している。補足として、定理 2 の基礎体の標数が正でも主張は正しいので、有限体上の系にも適用できる。

3. 今後の展望

今後は他の可積分および非可積分系の既約性と co-primeness について研究を行う予定である。より厳密な可積分性判定基準の構成のため、Hietarinta-Viallet 方程式や線形化可能系の可積分性について深く考察する必要がある。既存のその他の可積分性判定基準 (超離散系に対する特異点閉じ込めテスト、 p 進数体上の系に対する almost good reduction test、Diophantine integrability test など) との関連についても明らかにしたい。

参考文献

- [1] B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou, *Phys. Rev. Lett.* **67**, (1991), 1825–1828.
- [2] T. Mase, 数理解析研究所講究録別冊 **B41**, (2013), 43–64.
- [3] M. Kanki, J. Mada, T. Tokihiro, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 065201, 12pages, (2014).
- [4] M. Kanki, J. Mada, T. Mase, T. Tokihiro, *preprint*, arXiv:1405.2229.

Quiver mutation loops and partition q -series

加藤 晃史 (東京大学 大学院数理科学研究科)*1

寺嶋 郁二 (東京工業大学 大学院情報理工学研究科)*2

1. Introduction

籐 (quiver) とその変異 (mutation) は, クラスター代数とともに, 可積分系・低次元トポロジー・表現論・代数幾何学などさまざまな分野に共通して現れる構造として注目を集めている. 特に, 籐の変異列 (mutation sequence) から系統的にゲージ理論を構成する方法が提唱され, その不変量を数学的に厳密に解析する手段の開発が必要となった. 本講演では, 籐変異列に付随する数学的構造として分配 q 級数 (partition q -series) という量を導入し, それらが持ついくつかの興味深い性質について報告する.

2. Mutation loop γ とその分配級数 $Z(\gamma)$

以下, 籐 $Q = (Q_0, Q_1)$ は loop と 2-cycle を持たない有向グラフとし, 頂点の集合 Q_0 を $\{1, 2, \dots, n\}$ と同一視する. 頂点 k に対し, k での変異と呼ばれる新しい籐 $\mu_k(Q)$ が定義され, $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$ が成り立つ. 籐 Q とその頂点の列 $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_T)$ が与えられると, $Q(0) = Q, Q(t) = \mu_{m_t}(Q(t-1))$ により籐変異列 (quiver mutation sequence)

$$Q(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} Q(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow Q(t-1) \xrightarrow{\mu_{m_t}} Q(t) \longrightarrow \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} Q(T)$$

が得られる. 特に, $Q(T)$ の頂点番号を置換 $\varphi \in S_n$ で付け替えたものが $Q(0)$ と同型るとき, $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \varphi)$ を mutation loop, φ を境界条件と呼ぶ. これらはいわゆる exchange quiver 上の path や loop に当たる.

mutation loop $\gamma = (Q; \mathbf{m}, \varphi)$ に対し, その分配級数 $Z(\gamma)$ を以下のように定義する.

- (1) Q の各頂点 v に, 初期 s 変数 s_v を割り当てる.
- (2) 頂点 v で変異を行うたびに, 頂点 v に新しい s 変数を割り当てる. これらを s_v, s'_v, s''_v, \dots のように表して区別する.
- (3) m_t での変異に対し, k 変数 k_t を割り当てる.
- (4) 頂点が「境界条件」で同一視されるなら, 対応する s 変数も同一視する.
- (5) s 変数, k 変数は, 各変異時に $k_t = s_v + s'_v - \sum_{a \rightarrow v \in Q_1} s_a$ を満たす.
- (6) $v = m_t$ での変異 $\mu_{m_t}: Q(t-1) \rightarrow Q(t)$ の重みを次式で定義する.

$$W(m_t) := \frac{q^{\frac{1}{2}(s_v + s'_v - \sum_{a \rightarrow v} s_a)(s_v + s'_v - \sum_{v \rightarrow b} s_b)}}{(q)_{k_t}}, \quad (q)_k = \prod_{i=1}^k (1 - q^i)$$

- (7) (すべての s 変数が k 変数を用いて表される場合に) 積の状態和として分配級数を次式で定義する.

$$Z(\gamma) = \sum_{k_1, \dots, k_T=0}^{\infty} \prod_{t=1}^T W(m_t)$$

本研究は科研費 (課題番号 23654079 および 25400083) の助成を受けたものである.

*1 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: akishi@ms.u-tokyo.ac.jp

*2 〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 大学院情報理工学研究科

e-mail: tera@is.titech.ac.jp

3. 主な結果

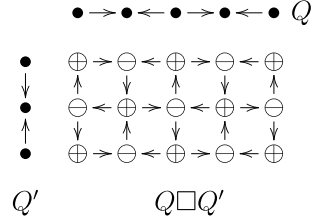
定理 1 $Z(\gamma)$ は γ のペンタゴン変形に対して不変である。すなわち $x \rightarrow y$ を $\mu_{\gamma_1}(Q)$ の矢とすると、2つの mutation loop

$$\gamma = (Q; \gamma_1, \mu_x, \mu_y, \gamma_2), \quad \gamma' = (Q; \gamma_1, \mu_y, \mu_x, \mu_y, (xy), \gamma_2)$$

に対し、 $Z(\gamma) = Z(\gamma')$ が成立する。

Q が Dynkin 図形に向きを入れた簾のとき、 C_Q で対応する Cartan 行列を表す。

定理 2 Q, Q' を simply-laced Dynkin 図形の alternating quiver とし、 $Q \square Q'$ を右図のように定義される簾とする。 $Q \square Q'$ に対し、「まずすべての \oplus で変異させ、次にすべての \ominus で変異させる」という mutation loop を γ とする。このとき、分配級数は



$$Z(\gamma) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} \frac{q^{\frac{1}{2} \mathbf{k}^T (C_Q \otimes C_{Q'}^{-1}) \mathbf{k}}}{(q)_{\mathbf{k}}}.$$

という表示を持つ。ただし $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対し、 $(q)_{\mathbf{k}} = (q)_{k_1} \cdots (q)_{k_n}$.

特に Q が X 型の Dynkin 図形、 Q' が A_{r-1} 型のとき、この $Z(\gamma)$ は level r の untwisted affine Lie algebra $X^{(1)}$ に付随する parafermion CFT の指標公式に (q の有理数べきの補正を除いて) 一致する。特に、共形場理論の一般論から、 $Z(\gamma)$ は適当な合同部分群の保型関数になる。

もし時間が許せば、分配級数と量子ダイログの積 (combinatorial Donaldson-Thomas invariant) との関係についても触れたい。

参考文献

- [1] B. Feigin and A. Stoyanovsky. Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold. *arXiv preprint hep-th/9308079*, 1993.
- [2] G. Georgiev. Combinatorial constructions of modules for infinite-dimensional Lie algebras, I. Principal subspace. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 112(3):247–286, 1996.
- [3] G. Hatayama, A. N. Kirillov, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Character formulae of \widehat{sl}_n -modules and inhomogeneous paths. *Nuclear Physics B*, 536(3):575 – 616, 1998.
- [4] A. Kato and Y. Terashima. Quiver mutation loops and partition q -series. *arXiv preprint arXiv:1403.6569*, 2014. To appear in *Communications in Mathematical Physics*.
- [5] B. Keller. The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams. *Ann. of Math. (2)*, 177(1):111–170, 2013.
- [6] A. Kuniba, T. Nakanishi, and J. Suzuki. Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe ansatz. *Modern Physics Letters A*, 8(18):1649–1659, 1993.
- [7] Y. Terashima and M. Yamazaki. 3d $N = 2$ theories from cluster algebras. *arXiv preprint arXiv:1301.5902*, 2013.

q -パンルヴェ方程式の古典解析

大山 陽介 (大阪大学・情報科学研究科)*

1. はじめに

q -差分 Painlevé 方程式の研究が始まって [2], [18] 四半世紀ほどになる. 特異点閉じ込めの手法によって, 差分 Painlevé 方程式が数多く発見された初期の研究に始まり, 2000 年頃に坂井によって初期値空間の理論が確立するとともに整理されて, 様々な研究が数多く積み重ねられてきた.

しかしながら, 「 q -Painlevé 方程式の解析学」という方向の研究は余り進んでいないように思われる. すなわち, q -Painlevé 方程式の解そのものの性質の研究である. 超幾何関数で表示できる特殊解や有理関数解, さらにその行列式表示などの研究はあるものの, 一般の超越関数解の研究や, 漸近展開などの研究はほとんど手付かずのままである. 問題意識としては正道であるが, 関数方程式の解そのものを研究しようとするものの困難は, 三体問題の非可積分性が証明されて以来, 20 世紀の数学者が嫌と言うほど味わったものである. 非線型 q -差分方程式に関しては, 「解」とは何か, 不確定特異点とは何か, 漸近展開とは何か, その総和法はどうなのか, という点を考え始めると, いまだに基礎理論すら十分ではないというのが「 q -Painlevé 方程式の解析学」の現状である.

残念ながら, そうした問題に十分に答えられるほど話者の知見が及んでいない. また, こうした解析的問題は q -差分に限らず, 古典的な Painlevé 微分方程式の場合でも完成されているとは言いがたい. しかしながら, 現時点でわかっている q -Painlevé 方程式の解析的研究を現時点で概観して, 今後の発展を期待したいという意味を込めて, 古典解析学の視点から見た q -Painlevé 方程式について解説するのが本講演の目的である. ここで用いる手法は, Painlevé 微分方程式の古典的な研究が最後に行われた 1920 年頃からさほど進んでいない. P. Boutroux が q -Painlevé 方程式を知っていたら, こういうところから研究を始めたのではないか, という意味で「古典解析」である.

具体的には, 坂井理論に基づく q -Painlevé 方程式の復習 (この理論は Boutroux も知らなかった) から始めて, q -差分方程式の一般論を解説し, その後, 線型と非線型の接続問題を扱う. この流れは, 古典的な Painlevé 微分方程式の研究と方向性において何一つ変わるものはない. ただ, 欠けるものとしては

- (1) 線型 q -差分方程式の接続問題, 特に q -Stokes 現象の研究
- (2) 非線型 q -差分方程式の局所問題および漸近解析

が, 基礎理論の部分から不足している. 前者については, 近年かなり進んできており, 本稿でも多少解説する. 結局は, q -超幾何系の接続問題が解けないことには, q -Painlevé 方程式の古典解析も進めないのである.

なお, 最終節は J.-P. Ramis, J. Sauloy (Toulouse) との共同研究に基づく.

本研究は科研費 (課題番号:25400113) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 33E17, 33D15, 34M40

キーワード: q -Painlevé 方程式, 接続問題

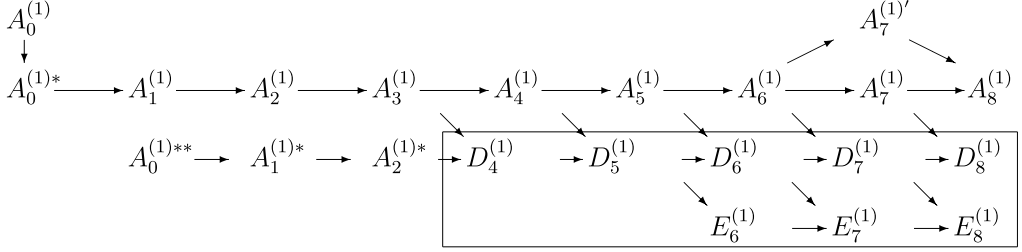
* 〒5600043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学 大学院情報科学研究科

e-mail: ohyama@ist.osaka-u.ac.jp

web: <http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ohyama/index.html>

2. The Painlevé 図式と q -Painlevé 方程式

90年代に特異点閉じ込めの手法を中心に大きく進んだ差分 Painlevé 方程式の歴史は混沌としていたが, 坂井の初期値空間理論 [19] によって大きく整理され, 楕円・ q -差分・微分の全ての Painlevé 方程式が一つの枠に統一的に理解されるようになった.



この図式は, 全ての2次元の Painlevé 方程式を表すものであり, 四角で囲んだところが古典的な Painlevé 微分方程式であり, 左上の $A_0^{(1)}$ が楕円 Painlevé 方程式, その次の行の $A_0^{(1)*}$ から $A_8^{(1)}$ までと, $A_7^{(1)'}$ が q -Painlevé 方程式を, 左下の $A_1^{(1)**}$, $A_2^{(1)**}$, $A_3^{(1)**}$ の3つが加法的な差分 Painlevé 方程式を表す. 表記してあるアフィン・ルート系は, 対応する Painlevé 方程式の初期値空間 (2次元開有理代数曲面) において, 無限遠にあたる因子 (反標準因子になる) の交叉形式を表しており, すべて $E_8^{(1)}$ の部分格子になっている. この坂井の理論によって, 微分・差分・楕円の Painlevé 方程式が全て同じ枠で理解できるようになり, Painlevé 方程式の研究は, 全てを平行して理解することが望ましい.

しかしながら, 解析的に解を扱おうとすると, 微分・差分・楕円の各のタイプで手法が異なり, 差分・楕円の場合は「解の意味」すらも明確ではない. そこで, 以下では, 主に Painlevé J型方程式の q -類似にあたる $A_n^{(1)}$ ($n = 3, \dots, 7$) を扱っていくことにする. この場合, $q \rightarrow 1$ の極限をうまくとると, Painlevé 方程式に収束するため, 微分の場合の類似がわかりやすいのである.

q -Painlevé 方程式の例を挙げる. 以下, 従属変数として $y = y(t), z = z(t)$ をとり, $\bar{f} = f(qt), \underline{f} = f(t/q)$ と略記する. a_j, b_k などは複素パラメタである.

$$q\text{-}P_{\text{VI}}: \frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = \frac{(\bar{z} - b_1t)(\bar{z} - b_2t)}{(\bar{z} - b_3)(\bar{z} - b_4)}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3b_4} = \frac{(y - a_1t)(y - a_2t)}{(y - a_3)(y - a_4)}, \quad \left(\frac{b_1b_2}{b_3b_4} = q \frac{a_1a_2}{a_3a_4} \right).$$

$$q\text{-}P_{\text{V}}: \frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = -\frac{(\bar{z} - b_1t)(\bar{z} - b_2t)}{\bar{z} - b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{(y - a_1t)(y - a_2t)}{a_4(y - a_3)}, \quad \left(\frac{b_1b_2}{b_3} = q \frac{a_1a_2}{a_3a_4} \right).$$

$$q\text{-}P_{\text{III}}: \frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = -\frac{\bar{z}(\bar{z} - b_2t)}{\bar{z} - b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{y(y - a_1t)}{a_4(y - a_3)}.$$

$$q\text{-}P_{\text{IV}}: \frac{y\bar{y}}{a_3a_4} = \frac{b_2t(\bar{z} - b_1t)}{\bar{z} - b_3}, \quad \frac{z\bar{z}}{b_3} = -\frac{(y - a_1t)(y - a_2t)}{a_4y}, \quad \left(\frac{b_1b_2}{b_3} = q \frac{a_1a_2}{a_4} \right).$$

$$q\text{-}P_{\text{II}}: (f\bar{f} - 1)(\underline{f}f - 1)(f + t) = at^2f$$

$$q\text{-}P_1(A_7): \bar{f}\underline{f}f^2 = t(1 - f)$$

$$q\text{-}P_1(A_7'): f\bar{f} = \frac{g(1 - a_1g)}{a_1(g - 1)}, g\bar{g} = \bar{f}^2.$$

注意. $q\text{-}P_{\text{IV}}$ と $q\text{-}P_{\text{III}}$ は, 同じ初期値空間 $A_5^{(1)}$ の上に存在し, 異なる方向の時間発展を取ったものである. こうしたことは, 古典的な特殊函数論でも見られた現象で, ベツ

セル函数 $J_\nu(z)$ と放物柱函数 $D_\nu(z)$ はともに, 合流超幾何函数の別の切り口になっていた:

$${}_1F_1(\nu + 1/2, 2\nu + 1; 2iz) = \Gamma(1 + \nu) e^{iz} (z/2)^{-\nu} J_\nu(z),$$

$$U(-\nu/2, -1/2; z^2/2) = 2^{-\nu/2} e^{z^2/4} D_\nu(z).$$

また, q - P_{III} は, 当初は別の形 [18]

$$\frac{\bar{w}w}{a_3a_4} = \frac{(w - a_1s)(w - sa_2)}{(w - a_1)(w - a_4)}$$

で知られていたが, これは q - P_{VI} において,

$$t = s^2, \quad q = p^2, \quad b_i = pa_i \quad (i = 1, 2), \quad b_i = a_i \quad (i = 3, 4), \quad y(t) = \bar{w}(s), \quad z(t) = w(s).$$

とおくことで得られる, 対称化された方程式である. この種の asymmetric な特殊化は他の q -Painlevé 方程式でも考えられている. $q \rightarrow 1$ の極限でどの型の Painlevé 微分方程式に退化するかということよりも, 初期値空間が何か, というほうが基本的である.

3. q -差分線型方程式

以下, $0 < |q| < 1$ とする. この節では q -差分線型方程式について簡単に復習する. 最初に記号として

0) q -累乗積:

$$(a_1, \dots, a_r; q)_n = \prod_{i=1}^n (a_i; q)_n, \quad (a; q)_n = (1 - a)(1 - qa) \cdots (1 - q^{n-1}a).$$

1) q -超幾何級数:

$${}_r\varphi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} [(-1)^n q^{n(n-1)/2}]^{1+s-r} z^n.$$

2) テータ函数:

$$\theta_q(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(n-1)/2} x^n = (q, -x, -q/x; q)_\infty.$$

このテータ函数は標準と異なる定義で, 零点の位置は $-q^{\mathbb{Z}}$ であり, $x\theta_q(xq) = \theta_q(x)$ をみたす.

3.1. 1階の q -差分線型方程式

微分方程式の本なら, 微分方程式について概説した後, 変数分離型など求積法として1階線型方程式を説明するところである. 同様に, 1階斉次 q -差分線型方程式

$$y(qx) = R(x)y(x)$$

を考える. ここで, $R(x)$ は有理函数とする.

補題 1. (1) もし $y_1(qx) = R_1(x)y_1(x), y_2(qx) = R_2(x)y_2(x)$, なら $y(x) = y_1(x)y_2(x)$ は $y(qx) = R_1(x)R_2(x)y(x)$ の解.

(2) もし $y_1(x)$ and $y_2(x)$ がともに $y(qx) = R_1(x)R_2(x)y(x)$ の解なら $u(x) = y_1(x)/y_2(x)$ は q -constant である. すなわち, $u(qx) = u(x)$. さらに $y_1(x)$ と $y_2(x)$ が $x = 0$ の周りで同じモノドロミを持つ, すなわち, $u(xe^{2\pi i}) = u(x)$ を満たすなら $u(x)$ は $\mathbb{C}^x/q^{\mathbb{Z}}$ 上の楕円函数になる.

q -差分方程式の大域問題を考えるにあたり, 以下では \mathbb{C}^x 上の一価函数を考察することにする. すなわち, 未知函数 $y(x)$ に関して, q -差分方程式のみを考えるのではなく, $y(xe^{2\pi i}) = y(x)$ という条件をも課す. この条件を課しても, 解は有限次元にならず, 「積分定数」にあたるどころが楕円函数になるので, 極の位置を指定して初めて解が定まる. この点が微分方程式と大きく異なる点である.

$R(x)$ を有理函数とするなら, 次の3タイプに帰着する:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y(qx) &= cy(x) & y &= \frac{\theta(x)}{\theta(cx)} \\ \text{(b)} \quad y(qx) &= xy(x) & y &= \frac{1}{\theta(x)} \\ \text{(c)} \quad y(qx) &= (1-ax)y(x) & y &= \frac{1}{(ax; q)_{\infty}} \end{aligned}$$

この (a) の函数はよく表われるので, $e_c(x) = \theta(x)/\theta(cx)$ と表す. (a) の解は, 古典的には冪函数 $u = x^{\gamma}$ ($c = q^{\gamma}$) を用いることが普通だが, 多価になるので我々は排除する. $e_{\lambda c}(x)/e_{\lambda}(x)$ ($\lambda \in \mathbb{C}^x$) も解になり, 適宜, 極の位置はずらして使うことになる.

3.2. 1階の q -差分線型方程式の接続問題

最後のタイプ (c)

$$y(qx) = (1-ax)y(x)$$

について, 原点から無限遠への接続問題を考える. 原点と無限遠近傍の局所解をそれぞれ $y_0(x), y_{\infty}$ とすると, いずれも直接解くことができ,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1/(ax; q)_{\infty} = {}_1\phi_0(0; -; q, ax), \\ y_{\infty}(x) &= \frac{(q/ax; q)_{\infty}}{\theta(-ax)} = e_{-a}(x) \frac{1}{\theta(x)} {}_1\phi_0(0; -; q, q/ax). \end{aligned}$$

したがって, この場合の接続問題は容易に解け

$$y_{\infty}(x) = y_0(x) \frac{1}{(q; q)_{\infty}}.$$

となる.

一般の多項式係数の q -差分線型方程式

$$y(qx) = c \prod_{j=1}^n (x - a_j) y(x) \tag{1}$$

に関して, 接続問題を考えよう. 原点と無限遠近傍の局所解は

$$y_0(x) = \frac{e_a(x)}{(x/a_1, x/a_2, \dots, x/a_n; q)_{\infty}},$$

$$y_\infty(x) = (qa_1/x, qa_2/x, \dots, qa_n/x; q)_\infty \theta(x)^{-n} e_c(x),$$

(ここで $d = c \cdot \prod_{j=1}^n (-a_j)$) . また, $j = 1, 2, \dots, n$ として

$y_0(x)$ は $x = a_j, a_j q^{-1}, a_j q^{-2}, \dots$ と $x = -q^{\mathbb{Z}}/d$ に極を持つ.

$y_\infty(x)$ は $x = a_j q, a_j q^2, a_j q^3, \dots$ に零点を持つ.

接続係数は次で与えられる :

定理 2. (1) の接続係数は以下の通りである :

$$y_\infty(x) = y_0(x) \frac{e_c(x)}{(q; q)_\infty^n e_d(x) \prod_{j=1}^n e_{-1/a_j}(x)}$$

3.3. q -特殊函数の統一的扱い

直交多項式の統一的扱いに関しては, Askey-Wilson scheme が知られている. また, 2階微分方程式で統制される古典的な特殊函数に関しては, 特異点の合流操作やラプラスアンの変数分離による統一的扱いが知られている (楕円体座標により, Mathieu 函数や, Spheroidal Wave 函数なども含む) . ただ, q -差分系には, 合流操作や変数分離はなじまないで, Tricomi による Laplace 型の分類の q -類似を行う [20].

Tricomi は, いわゆる **Laplace 型の 2階線型方程式**

$$(a_0 + b_0 x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (a_1 + b_1 x) \frac{dy}{dx} + (a_2 + b_2 x) y = 0$$

を変数変換 $x \rightarrow px + q$, $y \rightarrow g(x)y$ によって分類して, Kummer, Bessel, Weber, Airy の各方程式が現れることを示した. Tricomi にしたがって, Laplace 型の 2階 q -差分線型方程式

$$(a_1 + b_1 x)u(xq^2) + (a_2 + b_2 x)u(xq) + (a_3 + b_3 x)u(x) = 0 \quad (2)$$

を以下の変換 (Hahn による) で分類する. なお, (2) の解空間をリーマン・スキームのように

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & cx \\ b_1 & b_2 & b_3 & \end{bmatrix}$$

と表すことにするが, これは一般的な表示ではない. このスキームで, ある行が全て 0 になる場合は定数係数の方程式に帰着する. また, ある列が全て 0 になる場合は 1階方程式に帰着するので, あらかじめ除外する.

(A) $x \rightarrow cx$:

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & cx \\ b_1 & b_2 & b_3 & \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & x \\ cb_1 & cb_2 & cb_3 & \end{bmatrix}$$

(B) $u \rightarrow e_c(x)u$

$$x^\gamma \Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & x \\ b_1 & b_2 & b_3 & \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} c^2 a_1 & ca_2 & a_3; & x \\ c^2 b_1 & cb_2 & b_3 & \end{bmatrix}$$

(C) $x \rightarrow 1/x$

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; & \frac{1}{x} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1; & x \\ q^2 a_3 & q^2 a_2 & a_1 & \end{bmatrix}$$

(D) $u \rightarrow (ax; q)_\infty / (bx; q)_\infty u$ ($s = \text{lg}(a_3/a_1)$)

$$\Phi \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3; \\ b_1 & b_2 & b_3; \end{bmatrix} x = x^s \frac{(-b_3x/a_3; q)_\infty}{(-b_1x/a_1q; q)_\infty} \Phi \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ qb_3 & b_2 & q^{-1}b_1 \end{bmatrix} x$$

以上の変換で, Laplace 型の 2 階 q -差分線型方程式は, 除外する場合は別にして次のように分類される [17] :

定理 3. 変換 (A)(B)(C)(D) によって, (2) は次のように分類される. ただ, スキーム Φ において, ある行またはある列がすべて 0 になる場合は除く. 以下で, $p = \sqrt{q}$ とおく :

1) $a_1a_3b_1b_3 \neq 0$ の場合は, Heine の 超幾何級数 ${}_2\varphi_1(a, b; c; q; x)$:

$$(c - abqx)u(xq^2) - [c + q - (a + b)qx]u(qx) + q(1 - x)u(x) = 0.$$

2) $b_3 = 0, a_1a_3b_1b_2 \neq 0$ の場合は, q -合流超幾何級数 ${}_1\varphi_1(a; c; q; x)$:

$$(c - aqx)u(xq^2) - (c + q - qx)u(qx) + qu(x) = 0.$$

3-1) $b_1 = b_2 = 0, a_3 \cdot a_2a_1b_3 \neq 0$ の場合は, Jackson の Bessel functions $J_\nu^{(1)}(x; q)$:

$$u(xp^2) - (p^\nu + p^{-\nu})u(xp) + (1 + x^2/4)u(x) = 0.$$

3-2) $b_1 = b_3 = 0, a_2 \cdot a_3a_1b_2 \neq 0$ の場合は, Hahn-Exton's Bessel functions $J_\nu^{(3)}(x; q)$:

$$u(xp^2) + [-(p^\nu + p^{-\nu}) + p^{2-\nu}x^2]u(xp) + u(x) = 0.$$

3-3) $b_3 = a_1 = 0, a_2b_2 \cdot a_3b_1 \neq 0$ の場合は, q -Hermite-Weber 函数 ${}_1\varphi_1(a; 0; q; x)$

$$axu(xq^2) + (1 - x)u(xq) - u(x) = 0.$$

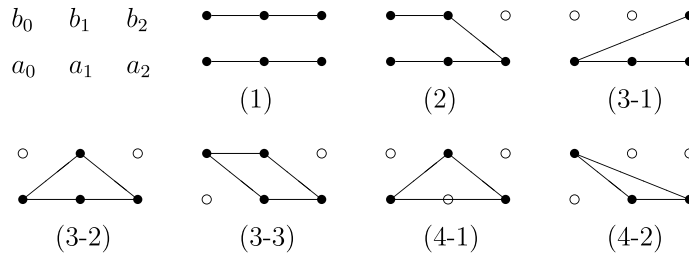
4-1) $b_1 = a_2 = b_3 = 0$ の場合は, q -Airy 函数 ${}_1\varphi_1(0; -q; q; -x)$:

$$u(xq^2) + xu(xq) - u(x) = 0.$$

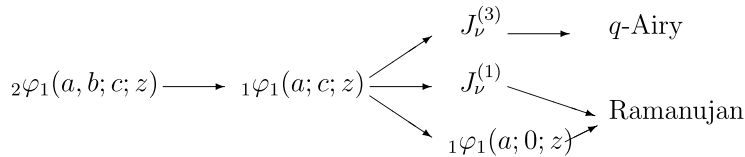
4-2) $a_1 = b_2 = b_3 = 0$ の場合は, Ramanujan 函数 ${}_0\varphi_1(-; 0; q; -tq)$:

$$qxu(xq^2) - u(xq) + u(x) = 0.$$

この分類は, ニュートン図式を書くとわかりやすい. 黒丸は 0 でない係数を表し, 原点と無限遠のニュートン図式を次ページに同時に書く :



さらに、退化図式は以下のようなになる。Bessel 函数と Airy 函数が 2 種類に分かれる：



2 種類に分かれる理由の一つは、(3-1), (4-2) のように傾きが $1/2$ になる場合があるためである (Poincaré rank でいうと $1/2$ に相当する)。このときは、微分方程式と同様に被覆変換を取ることになる。 q 差分線型方程式

$$a(x)u(xq^2) + b(x)u(xq) + c(x)u(x) = 0,$$

に対して、 $x = t^2$, $v(t) = u(x)$, $p = \sqrt{q}$ とおくと

$$a(t^2)v(tp^2) + b(t^2)v(tp) + c(t^2)v(t) = 0.$$

となる。

(3-1) は被覆変換を考えることで、通常の第 3 種 q -Bessel 函数に帰着する。 q -Bessel 函数には、次の 3 種が知られている：

$$\begin{aligned} (3.1) : J_\nu^{(1)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q; -\frac{x^2}{4}\right), \\ J_\nu^{(2)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\varphi_1\left(-; q^{\nu+1}; q; -\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right), \\ (3.2) : J_\nu^{(3)}(x; q) &= \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} x^\nu {}_1\varphi_1\left(0; q^{\nu+1}; q; qx^2\right). \end{aligned}$$

が[§], Hahn の変換 (D) で第 1 種, 第 2 種 q -Bessel 函数は移り合う：

$$J_\nu^{(2)}(x; q) = \left(-\frac{x^2}{4}; q\right)_\infty \cdot J_\nu^{(1)}(x; q).$$

このため、我々の分類では第 2 種 q -Bessel 函数は第 1 種に帰着するが[§], 第 3 種は別のものになる。

q -Airy 函数については、従来は q -Painlevé II 型方程式の特殊解として発見された Hamamoto, Kajiwara and Witte [3] によるもの (4-1) と, Ismail [4] によって Ramanujan 函数を q -Airy 函数と解釈する方法 (4-2) と、二つ知られていた。

(4-1) $u(xq^2) + xu(xq) - u(x) = 0$ の解は

$$u = A_1 \varphi_1(0; -q; q; -x) + B e^{\pi i \frac{\log x}{\log q}} {}_1\varphi_1(0; -q; q; x),$$

$$\text{Ai}_q(x) := {}_1\varphi_1(0; -q; q; -x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{(q^2; q^2)_k} x^k.$$

であり, (4-2) $qxu(xq^2) - u(xq) + u(x) = 0$ の解は

$$u = A_0 \varphi_1(-; 0; q; -tq) + B \theta_q(x) {}_2\varphi_0(0, 0; -; q; -t/q)$$

であった. 後者の最初の解は Ramanujan 函数と呼ばれる:

$$A_q(x) := {}_0\varphi_1(-; 0; q; -tq) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q; q)_k} (-z)^k.$$

この二つは接続公式で結びつく [13]:

$$A_{q^2} \left(-\frac{q^3}{x^2} \right) = -\frac{1}{(q, -1; q)_{\infty}} \left\{ \theta \left(\frac{x}{q} \right) \text{Ai}_q(-x) + \theta \left(-\frac{x}{q} \right) \text{Ai}_q(x) \right\}.$$

3.4. q -Painlevé 方程式の超幾何函数解

Painlevé 微分方程式の特殊解として超幾何函数解が知られていたが, q -Painlevé 方程式についても同様の研究は規約性の証明以外は完成している [9].

q -Painlevé 方程式の退化図式

$${}_{q-P_{VI}} \rightarrow {}_{q-P_V} \rightarrow \frac{{}_{q-P_{IV}}}{{}_{q-P_{III}}} \rightarrow {}_{q-P_{II}} \rightarrow {}_{q-P_I}$$

に対して, 超幾何函数解は ${}_{q-P_I}$ 以外には存在せず, それ以外には q -Painlevé 方程式の退化図式と平行して

$${}_2\varphi_1 \rightarrow {}_1\varphi_1 \rightarrow \frac{{}_1\varphi_1(a; 0; q; z)}{{}_1\varphi_1(0; b; q; z)} \rightarrow {}_1\varphi_1(0; -q; q; z) \rightarrow \text{none}$$

$$(1) \rightarrow (2) \rightarrow \begin{matrix} (3.3) \\ (3.2) \end{matrix} \rightarrow (4.1) \rightarrow \text{none}$$

という超幾何型の解が存在する [9]. この [9] になくて, 我々の退化図式にあるものが (3.1) と (4.2) であるが, (4.2) は先ほど述べたように被覆変換で (4.1) に帰着する. また (3.1) は ${}_{q-P_{III}}(A_3)$ の特殊解になることが知られている [10]. q -Painlevé 方程式の特殊解の視点からも, Laplace 型の分類によって, 既存の q -特殊函数を過不足なく一つの枠に入れることができたことになる [16].

4. Painlevé VI 型方程式のモノドロミ構造

しばらく, 微分方程式に戻る. Painlevé VI 型方程式 P_{VI}

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) y'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left[\alpha + \beta \frac{t}{y^2} + \gamma \frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{t(t-1)}{(y-t)^2} \right]$$

は 階数が2の線型微分方程式のモノドロミ保存変形として表される：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial x} &= \left(\frac{A_0(t)}{x} + \frac{A_t(t)}{x-t} + \frac{A_1(t)}{x-1} \right) Y \equiv A(x,t)Y, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= -\frac{A_t(t)}{x-t} Y.\end{aligned}\tag{3}$$

ここでは、あまり深入りはせずに $A_j \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ として

$$A_0(t) + A_t(t) + A_1(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_\infty & \\ & -\theta_\infty \end{pmatrix},$$

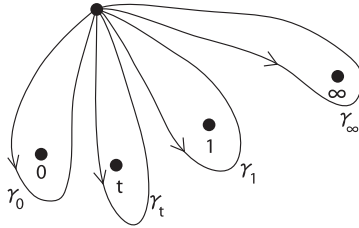
$$A_j \text{の固有値} : \pm \frac{1}{2} \theta_j.$$

とする. ここで, $A(x, r)$ の (1, 2) 成分を $A_{12} = k(x - y(t))$ とおくと. $y(t)$ は P_{VI} を満たす. パラメタは

$$\alpha = \frac{1}{2}(\theta_\infty - 1)^2, \beta = -\frac{1}{2}(\theta_0 - 1)^2, \gamma = \frac{1}{2}(\theta_1 - 1)^2, \delta = \frac{1}{2}(1 - \theta_t^2).$$

なお, 無限遠で対角化しているが, この標準型が良いわけでは無い. さらに, この標準型をとっても, 対角行列の adjoint 作用を許す (ゲージ変換) ので, 方程式の係数に含まれるパラメタの数は, 特性指数4個+アクセサリ・パラメタ (Painlevé 方程式の階数) 2個+ゲージ変換1個の計7個である.

線型方程式 (3) の解 $Y(x, t)$ の下図の道 γ_j にそったモノドロミ行列を M_j とする



とき, M_0, M_t, M_1, M_∞ は次を満たす：

$$M_\infty M_1 M_t M_0 = 1.$$

このモノドロミ行列 $\{M_0, M_t, M_1, M_\infty\}$ よりも本質的なのは $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の adjoint 作用で割った, モノドロミ表現である. モノドロミ表現が持つパラメタの数を数える. 独立な行列 M_0, M_t, M_1 が3個あり, adjoint 作用で割るので6個である. この6次元空間と, 方程式全体を, このゲージ変換で割った6次元空間との対応が, Riemann-Hilbert 対応である.

モノドロミ表現全体の良い座標としては, adjoint 作用で不変な

$$p_\nu := \text{tr } M_\nu = 2 \cos 2\theta_\nu, \quad p_{\mu\nu} := \text{tr } M_\mu M_\nu.$$

を取れば良い. この座標の間には **Fricke-Klein** の関係式

$$\begin{aligned}p_{01}p_{1t}p_{t0} + p_{01}^2 + p_{1t}^2 + p_{t0}^2 - a_{01}p_{01} - a_{1t}p_{1t} - a_{t0}p_{t0} + a_\infty &= 0, \\ a_{ij} &= p_i p_j + p_k p_l \quad (\{i, j, k, l\} = \{0, t, 1, \infty\}), \\ a_\infty &= p_0^2 + p_1^2 + p_t^2 + p_\infty^2 + p_0 p_1 p_t p_\infty - 4.\end{aligned}$$

が存在する [8]. p_ν が特性指数に対応し, $p_{\mu\nu}$ がアクセサリ・パラメタに対応するので, 特性指数を固定すると, 開有理曲面を定める (無限遠因子は除く).

この関係式を再発見した神保 [6] は P_{VI} の漸近解析を調べ, 接続問題を解いた. さらに岩崎によって Poincaré 写像の力学系的研究などに応用された [5]. それでは, q - P_{VI} の場合はどうなるか, というのが次の問題であり, 次節以降は q -差分系に戻る.

5. Riemann-Hilbert-Birkhoff 対応

Riemann-Hilbert 対応の q -差分版は, G. D. Birkhoff [1] が最初に扱い, Sauloy によって確定型の場合に確立された. ここでは, Birkhoff 的に扱う.

サイズ r の多項式係数の q -差分方程式

$$Y(qx) = A(x)Y(x), \quad (4)$$

$$A(x) = A_0 + xA_1 + \cdots + x^N A_N$$

において, A_0 の固有値を ρ_1, \dots, ρ_r , A_N の固有値を $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ とする.

Definition 4. ρ_1, \dots, ρ_r が全て 0 でないとき, (4) は, $x = 0$ で確定特異点を持つといひ, $\kappa_1, \dots, \kappa_r$ が全て 0 でないとき, (4) は, $x = \infty$ で確定特異点を持つといひ. また, $\rho_j/\rho_k \notin q^{\mathbb{Z}}$, $\kappa_j/\kappa_k \notin q^{\mathbb{Z}}$ ($j \neq k$) が成り立つときに非共鳴的といひ.

以下では, 非共鳴条件でのみ考え, $A_N = \text{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ とする. この標準化のもとで, $A(x)$ は対角行列による adjoint 作用を許す. また, 断らない限りは $x = 0, \infty$ の両方で確定特異点を持つと仮定する.

5.1. q -差分線型方程式の接続問題

$x = 0$ の周りの局所解を $Y_0(x)$ とすると

$$Y_0(x) = L(x) \begin{bmatrix} e_{\rho_1}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_{\rho_r}(x) \end{bmatrix},$$

$x = \infty$ の周りの局所解を $Y_\infty(x)$ とすると

$$Y_\infty(x) = \theta(x)^{-N} R(x) \begin{bmatrix} e_{\kappa_1}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_{\kappa_r}(x) \end{bmatrix}.$$

ここで,

$$L(x) = \sum_{j=0}^{\infty} L_j x^j, \quad R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j x^{-j}.$$

このとき, 初項は条件

$$L_0 \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_r) = A_0 L_0, \quad R_0 A_N = A_N R_0$$

を満たすため, $L(x), R(x)$ とともに右からの対角行列の作用の自由度を持つことにする. また, $Y_0(x), Y_\infty(x)$ とともに一価函数である.

Definition 5. (4)の接続行列 $P(x)$ を

$$Y_\infty(x) = Y_0(x)P(x).$$

で定める.

Remark. 接続行列 $P(x)$ の成分は, $\mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z}$ 上の楕円函数になる.

接続行列の性質を調べていこう.

$$P(x) = \theta(x)^{-N} \begin{bmatrix} e_{\rho_1}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_{\rho_r}(x) \end{bmatrix}^{-1} L(x)^{-1} R(x) \begin{bmatrix} e_{\kappa_1}(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e_{\kappa_r}(x) \end{bmatrix}.$$

であるが, まず, 接続行列 $P(x)$ の成分は, $\mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z}$ 上の楕円函数

$$P(xq) = P(x), \quad P(xe^{2\pi i}) = P(x)$$

であることに注意する. また $L(x)^{-1}$, $R(x)$ はともに \mathbb{C}^\times で正則であるため, $[p_{ij}(x)] = L(x)^{-1}R(x)$ とすると, $p_{ij}(x)$ は $\mathbb{C}^\times/q^\mathbb{Z}$ 上次数 N のテータ函数になる. $p_{ij}(x)$ の擬周期性

$$p_{ij}(xe^{2\pi i}) = p_{ij}(x), \quad p_{ij}(xq) = x^N \frac{\kappa_j}{\rho_i} p_{ij}(x).$$

より, 次を得る:

補題 6. $p_{ij}(x)$ はテータ函数の積で表示される

$$p_{ij}(x) = p_{ij}^\circ \prod_{k=1}^N \theta(x/c_{ij}^{(k)}),$$

ここで $c_{ij}^{(k)}$ は次を満たす.

$$\prod_{k=1}^N c_{ij}^{(k)} \frac{\kappa_j}{\rho_i} = 1.$$

Birkhoff は

$$\{p_{ij}^\circ; c_{ij}^{(k)}, \rho_j, \kappa_j\}.$$

を, 接続のパラメタと考えた. 見かけ上, 変数の数は上の補題の関係式で減って $r^2 + (N-1)r^2 + 2r$ である. さらに, $L(x), R(x)$ がもつ, 右からの対角行列の作用の自由度を減じて,

定理 7. (Birkhoff [1]) 接続行列 $P(x)$ の本質的なパラメタの数は

$$[r^2 + (N-1)r^2 + 2r] - (2r-1) = Nr^2 + 1.$$

他方で, 方程式 $A(x)$ のパラメタの数は

$$Nr^2 + r$$

であるが, $A(x)$ も対角行列の adjoint 作用を許すので, このゲージ変換でわって方程式 $A(x)$ の本質的なパラメタの数は

$$[Nr^2 + r] - (r - 1) = Nr^2 + 1$$

となり, 接続行列 $P(x)$ の本質的なパラメタの数と一致する. G. D. Birkhoff 自身は, 単に方程式と接続行列の自由度が一致することで, 「 q -差分方程式に対する, Riemann の問題が解けた」と素朴に考えていたように見受けられる.

Remark. 方程式と接続行列の自由度はいずれも $(Nr - 2)(r - 1)$ なので,

1) $r = 1$ の時, すなわち 1 階の時, 接続係数は 3.2 節で与えたように代数的に求まる.

2) $r = 2, N = 1$ ならば, q -超幾何級数 ${}_2\varphi_1(a, b; c; x)$ であり, 接続問題は Watson が解いた [21].

単独の方が書きやすいので, 単独で書く:

$$(c - abqx)u(xq^2) - [c + q - (a + b)qx]u(qx) + q(1 - x)u(x) = 0.$$

Local solutions around $x = 0$:

$$u_1 = {}_2\varphi_1(a, b; c; x), \quad u_2 = e_{q/c}(x) {}_2\varphi_1(qa/c, qb/c; q^2/c; x).$$

Local solutions around $x = \infty$:

$$v_1 = \frac{1}{e_a(-x)} {}_2\varphi_1(a, aq/c; aq/b; cq/abx), \quad v_2 = (a \leftrightarrow b).$$

Theorem (Watson, 1911) Connection formula for ${}_2\varphi_1$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(b, c/a; q)_\infty}{(c, b/a; q)_\infty} v_1 + \frac{(a, c/b; q)_\infty}{(c, a/b; q)_\infty} v_2, \\ u_2 &= \frac{(qb/c, q/a; q)_\infty}{(q^2/c, b/a; q)_\infty} \frac{e_a(-x)e_{q/c}(x)}{e_{qa/c}(-x)} v_1 + \frac{(qa/c, q/b; q)_\infty}{(q^2/c, a/b; q)_\infty} \frac{e_b(-x)e_{q/c}(x)}{e_{qb/c}(-x)} v_2. \end{aligned}$$

不確定特異点の場合は未完成であるが, 5.3 節であらためて述べる.

5.2. 方程式の隠れた特性指数

接続行列 $P(x)$ は一般に多くの自由度を持つが, 行列式 $\det P(x)$ は局所条件から代数的に決定できる.

以下, 我々は次の仮定を置く:

$A(x)$ の行列式

$$\det A(x) = \kappa_1 \cdots \kappa_r \prod_{k=1}^{Nr} (x - a_k)$$

に対して, a_j は相異なり, なおかつ, $\rho_j q^{\mathbb{Z}}, \kappa_j q^{\mathbb{Z}}$ とも一致しない.

この時, $\det A(x)$ の零点 a_j は特性指数と同様の役割を持つ. Fuchs の関係式の q -類似として

$$\kappa_1 \cdots \kappa_r \prod_{k=1}^{Nr} (-a_k) = \rho_1 \cdots \rho_r$$

が成り立つ.

そこで, 原点と無限遠での特性指数, $\det A(x)$ の零点を合わせた

$$\rho_1, \dots, \rho_r; \kappa_1, \dots, \kappa_r; a_1, \dots, a_{Nr}$$

全体を「拡張された特性指数」と考える. 特性指数の本質的な個数は, Fuchs の関係式の q -類似を引いて, $2r + Nr - 1$ である.

以下では, $\{\rho_j, \kappa_j, a_k\}$ を定数と考え, 方程式と接続行列の自由度は $(Nr - 2)(r - 1)$ と考える. これが本質的なアクセサリ・パラメタの個数であり, 常に偶数であることに注意されたい.

さて, $\det Y_0$ も $\det Y_\infty$ も, $\det A(x)$ を係数に持つ 1 階の q -差分方程式

$$u(xq) = \kappa_1 \cdots \kappa_r \prod_{k=1}^{Nr} (x - a_k) u(x)$$

を満たす. $R_0 = I_r$, $\det L_0 = 1$ と正規化しておく

$$\det Y_0 = \det L(x) \prod_{k=1}^r e_{\rho_k}(x),$$

$$\det Y_\infty = \det R(x) \theta(x)^{-Nr} \prod_{k=1}^r e_{\kappa_k}(x).$$

であり, $\det Y$ の接続係数は 1 階方程式の結果から

$$\det Y_\infty = \det Y_0 \cdot \theta(x)^{-Nr} \frac{\prod_{k=1}^r e_{\kappa_k}(x)}{\prod_{k=1}^r e_{\rho_k}(x) \prod_{k=1}^{Nr} e_{-1/a_k}(x)}$$

となる.

5.3. 不確定特異点と q -合流超幾何級数

特性指数 ρ_j, κ_i のいずれかが 0 になった場合, 不確定特異点になることがある. この場合, q -Stokes 現象が生じ, ${}_r\varphi_r$ などの場合は Stokes 係数が C. Zhang や Morita によって決定されつつある.

q -合流超幾何方程式

$$(1 - abqx)u(q^2x) - \{1 - (a + b)qx\}u(qx) - qxu(x) = 0.$$

を考えると $x = 0$ の周りでの局所解は

$$u_1(x) = {}_2\varphi_0(a, b; -, q; x), \quad u_2(x) = \frac{(abx; q)_\infty}{\theta(-qx)} {}_2\varphi_1\left(\frac{q}{a}, \frac{q}{b}; 0; q, abx\right)$$

となり, $x = \infty$ での局所解

$$v_1(\lambda, x) = \frac{\theta(qax/\lambda)}{\theta(qx/\lambda)} {}_2\varphi_1\left(a, 0; \frac{aq}{b}; q, \frac{q}{abx}\right), \quad v_2(\lambda, x) = (a \leftrightarrow b)$$

となる. この場合, $x = 0$ が不確定特異点であり, u_1 は発散するが, u_2 は収束する. Kummer の合流超幾何の場合は, 一般に全ての解が発散したが, q -差分の場合は普通に収束級数が表れる.

u_1 を Laplace 変換を用いて意味づけすることになるが, 形式解に漸近する収束解 $\tilde{u}_1(\lambda, x)$ は $x \in \mathbb{C}^\times \setminus (-\lambda)q^{\mathbb{Z}}$ で正則になる. Stokes 領域は, 微分の時のような角領域ではなく, q -螺旋 $\lambda \cdot q^{\mathbb{Z}}$ を除いた稠密な開集合になる点も, 微分方程式の時と大きく異なる点である.

定理 8. (Zhang [22], Morita [12]) q -合流超幾何方程式の接続公式は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\lambda, x) &= \frac{(b; q)_\infty}{(b/a; q)_\infty} \frac{\theta(a\lambda)}{\theta(\lambda)} v_1(\lambda, x) + \frac{(a; q)_\infty}{(a/b; q)_\infty} \frac{\theta(b\lambda)}{\theta(\lambda)} v_2(\lambda, x), \\ u_2(x) &= \frac{(q/a; q)_\infty}{(b/a; q)_\infty} v_1(-1, x) + \frac{(q/b; q)_\infty}{(a/b; q)_\infty} v_2(-1, x). \end{aligned}$$

Remark. 定理の上の式は, q -Laplace-Borel 総和法で正当化されるが, 右辺は $\mathbb{C}^\times \setminus (-\lambda)q^{\mathbb{Z}}$ で正則かつ一価な函数で, この領域で発散級数 $u_1(x)$ を漸近級数に持つ, というのである.

6. q -Painlevé VI 型方程式

確定型に話を戻して, $N = 2, r = 2$ を考える. この方程式の接続係数不変な変形を考えることで, q -Painlevé VI 型方程式 q -P_{VI} を得る (神保・坂井 [7]).

$$Y(qx) = [A_0 + xA_1 + A_2x^2]Y(x).$$

A_0 の固有値 ρ_1 and ρ_2 ([7] では, $\rho_j = \theta_j t$) とし,

$$A_2 = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}.$$

とおく. 接続行列は

$$P(x) = \theta(x)^{-2} \begin{bmatrix} e_{\rho_1}(x) & 0 \\ 0 & e_{\rho_2}(x) \end{bmatrix}^{-1} Q(x) \begin{bmatrix} e_{\kappa_1}(x) & 0 \\ 0 & e_{\kappa_2}(x) \end{bmatrix}$$

となるが, テータ函数を持ちいて

$$Q(x) = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^\circ \theta(x/c_{11}^{(1)}) \theta(x/c_{11}^{(2)}) & p_{12}^\circ \theta(x/c_{12}^{(1)}) \theta(x/c_{12}^{(2)}) \\ p_{21}^\circ \theta(x/c_{21}^{(1)}) \theta(x/c_{21}^{(2)}) & p_{22}^\circ \theta(x/c_{22}^{(1)}) \theta(x/c_{22}^{(2)}) \end{bmatrix},$$

と表される. ここで

$$c_{ij}^{(1)} c_{ij}^{(2)} \frac{\kappa_j}{\rho_i} = 1.$$

Therefore the parameters $c_{ij}^{(2)}$ are determined by $c_{ij}^{(1)}$.

左右からの異なる対角行列による作用による不変な変数を取り出す必要がある。

$$q_{11}(x)q_{22}(x)/q_{12}(x)q_{21}(x)$$

は、このような作用で不変であり、 $\det P(x)$ は代数的に決定できることから、 $\det P(a_j) = 0$ となる。 a_j が $\rho_j q^{\mathbb{Z}}, \kappa_j q^{\mathbb{Z}}$ と異なることから $\det Q(a_j) = 0$ となり、結局

$$\frac{q_{11}(x)q_{22}(x)}{q_{12}(x)q_{21}(x)} = \begin{cases} 1 & x = a_1, a_2, a_3, a_4 \\ 0 & x = c_{11}^{(1)}, c_{11}^{(2)}, c_{22}^{(1)}, c_{22}^{(2)} \\ \infty & x = c_{12}^{(1)}, c_{12}^{(2)}, c_{21}^{(1)}, c_{21}^{(2)} \end{cases}.$$

定理 9. 次のパラメタ

$$s_{ij} := \frac{q_{11}(a_i)q_{22}(a_i)}{q_{12}(a_j)q_{21}(a_j)}$$

は接続問題における不変量である。また、cocycle 条件 $s_{ij} = 1/s_{ji}$, $s_{12}s_{23}s_{31} = 1$ が成り立つ。

7. 今後の課題

当然ながら、 q - P_{VI} 以外の q -Painlevé 方程式に対しても同様の問題を考える必要がある。Lax 対は村田 [14] が与えている。また、モノドロミ構造を定めるのは最初の一步であり、 q -Painlevé 方程式の漸近解析と非線型 q -Stokes 現象まで進めるのが目標である。たとえば、 q -Briot-Bouquet 型になる、 q - P_V , q - P_{III} の場合に微分の場合の類似ができている。 P_{VI} の場合の神保の接続公式の q -類似は眞野 [11] が得た。Boutroux 解の類似は、N. Joshi らが研究を始めたところである。 q - P_I などの漸近解析を行うためには、まだ q -線型方程式の大域問題を解くことから始めないといけない。

q が 1 のべき根の場合にも少し研究がある。また、 q -Painlevé 方程式の還元不能性については、 q - P_I , q - P_{II} の場合に西岡 [15] の研究がある。

q - P_{VI} より上位に位置する場合の解析は、まだ考えられていない。楕円 Painlevé 方程式では「モノドロミ」の意味すら明らかではない。課題はまだたくさん残っている。

参考文献

- [1] Birkhoff, G. D., The generalized Riemann problem for linear differential and the allied problems for linear difference and difference equations, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.* **49** (1914), 521–568.
- [2] Grammaticos, B., Ramani, A. and Papageorgiou, V., Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1825–1828.
- [3] Hamamoto, T., Kajiwara K. and Witte, N. S.; Hypergeometric solutions to the q -Painlevé equation of type $(A_1 + A'_1)^{(1)}$, *Int. Math. Res. Not.* 2006 (2006) Article ID 84619.
- [4] Ismail, M. E. H., Asymptotics of q -Orthogonal Polynomials and a q -Airy Function, *Int. Math. Res. Not.* (2005), No. **18** 1063–1088.
- [5] Iwasaki, K., An area-preserving action of the modular group on cubic surfaces and the Painlevé VI equation. *Comm. Math. Phys.* **242** (2003), 185–219.
- [6] Jimbo, M., Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), 1137–1161.

- [7] Jimbo, M. and Sakai, H., A q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.
- [8] Klein, F. and Fricke, R., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*, Erster Band (1897) Teubner. p.366.
- [9] Kajiwara, K., Masuda, T., Noumi, M., Ohta, Y., and Yamada, Y., Hypergeometric solutions to the q -Painlevé equations, *Int. Math. Res. Not.* (2004), no. 47, 2497–2521.
- [10] Kajiwara, K., Ohta, Y. and Satsuma, J.; Casorati Determinant Solutions for the Discrete Painlevé III Equation, *J. Math. Phys.* **36**(1995), 4162.
- [11] Mano, T., Asymptotic behaviour around a boundary point of the q -Painlevé VI equation and its connection problem, *Nonlinearity* **23** (2010) 1585–1608.
- [12] Morita, T., A connection formula for the q -confluent hypergeometric function, *SIGMA* **9** (2013), 050, 13 pages.
- [13] Morita, T., The Stokes phenomenon for the q -difference equation satisfied by the Ramanujan entire function, *Ramanujan J.* **42** (2014), 329–346
- [14] Murata, M., Lax forms of the q -Painlevé equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 115201.
- [15] Nishioka, S., Aequationes Mathematicae Transcendence of solutions of q -Painlevé equation of type $A_7^{(1)}$, *Aequat. Math.* **79** (2010), 1–12.
- [16] Ohshima, Y., Particular solutions of q -Painlevé equations and q -hypergeometric equations, Proceeding of International Conference "Painlevé Equations and Related Topics", (Ed. by Bruno, A. D. / Batkhin, A. B.), de Gruyter, 247–252 (2012).
- [17] Ohshima, Y., A unified approach to q -special functions of the Laplace type, [arXiv:1103.5232](https://arxiv.org/abs/1103.5232)
- [18] Ramani, A., Grammaticos, B. and Hietarinta, J., Discrete versions of the Painlevé equations, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1829–1832.
- [19] Sakai, H., Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.
- [20] Tricomi F. G., *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Cremonese (1954).
- [21] Watson, G. N., The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **21** (1910), 281–299.
- [22] Zhang, C., Une sommation discrete pour des equations aux q -differences lineaires et a coefficients analytiques: theorie generale et exemples. *Differential equations and the Stokes phenomenon*, 309–329, World Sci. Publ., 2002.