

✿ 日本数学会

2014年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2014年3月

於 学習院大学

✿ 日本数学会

2014年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2014年3月

於 学習院大学

無限可積分系

3月17日(月) 第VIII会場

10:00~11:30		(分)	頁
1	D. K. Matsumoto (早大基幹理工)	Idempotent Yang-Baxter Maps	(10) 1
2	伊藤哲也 (京大数理研)	Generic quantum braid representations and Garside theory	(15) 3
3	松本拓也 (Utrecht Univ.) A. Molev (Univ. of Sydney)	中心拡大された $sl(2 2)$ リースーパー代数に基づくヤンギアン代数 のドリンフェルト実現	(15) 5
4	山根宏之 (富山大理工)* S. Azam (Univ. of Isfahan) M. Yousofzadeh (Univ. of Isfahan)	Irreducible representations of generalized quantized algebras	(15) 7
5	竹山美宏 (筑波大数理物質)	A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra	(15) 9
14:15~15:00			
6	林達也 (青学大理工)	非対称な可換微分作用素対	(15) 11
7	高崎金久 (京大人間環境)	位相的弦理論における一般化された Ablowitz-Ladik 階層	(20) 13
15:15~16:15 特別講演			
	T. E. Milanov (東大IPMU)	Hirota bilinear equations in singularity theory	15

3月18日(火) 第VIII会場

10:00~11:30			
8	茂木康平 (岡山光量子科学研) 堺和光 (東大総合文化)	可解格子模型と Grothendieck 多項式	(15) 25
9	渋川元樹 (九大数理)	Multivariate circular Jacobi polynomials	(20) 27
10	森田健 (阪大情報)	A connection formula of a divergent basic hypergeometric function ${}_3\varphi_0(a_1, a_2, a_3; -; q, x)$	(15) 29
11	国場敦夫 (東大総合文化) 尾角正人 (阪市大理)	4面体方程式と q -振動子表現の量子 R 行列	(15) 31
12	柴山允瑠 (阪大基礎工)	特異点のブローアップによるハミルトン系の可積分性の判定	(15) 33
14:15~15:15 特別講演			
	鈴木貴雄 (近畿大理工)	高階パウルヴェエ方程式とリジッド方程式, 超幾何関数	35

Idempotent Yang-Baxter Maps

Diogo Kendy Matsumoto(早稲田大学基幹理工学部) *

概要

Yang-Baxter 写像は Drinfel'd により提唱された Yang-Baxter 方程式の集合論的解であり, 可積分系の様々なところで重要な役割を果たしている. 本講演では分配束を特殊なクラスとして含む代数構造を用いてベキ等な Yang-Baxter 写像が得られることを述べる.

1 Yang-Baxter 写像

Definition 1.1 X を空でない集合とする. 写像 $S : X \times X \rightarrow X \times X$ が

$$S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2$$

を満たすとき, S は Yang-Baxter 写像 (YB 写像) という. S_i は $X \times X \times X$ 上の写像で,

$$S_1 = S \times \text{id}_X, \quad S_2 = \text{id}_X \times S,$$

と定める.

Definition 1.2 YB 写像 S が $S^2 = S$ を満たすとき, ベキ等であるという.

2 ベキ等な Yang-Baxter 写像の構成

空でない集合 R 上の二つの演算 $\oplus, * : R \times R \rightarrow R$ が下記の条件を満たすとする.

1. $(R, \oplus), (R, *)$ は半群,
2. $(R, \oplus, *)$ は $*$ に関して分配的

$$(a \oplus b) * c = a * c \oplus b * c, \tag{1}$$

$$a * (b \oplus c) = a * b \oplus a * c. \tag{2}$$

Remark 2.1 加法に対応する演算 \oplus が可換なとき, $(R, \oplus, *)$ は半環と呼ばれる.

*本研究は科研費 (課題番号: 12J02888) の助成を受けたものである. e-mail:diogo-swm@aoni.waseda.jp

Theorem 2.1 $(R, \oplus, *)$ 上の写像 $S : R \times R \rightarrow R \times R$,

$$S(a, b) := (a \oplus b, a * b)$$

が $S^2 = S$ を満たすとき, S はベキ等な YB 写像となる.

Example 2.1 (M, \cdot, e) をモノイドとし, (L, \vee) を半束 (可換なベキ等半群) とする. このとき, $M \times L$ 上の積を

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a \cdot c, b \vee d), \quad (3)$$

$$(a, b) * (c, d) := (e, b \vee d), \quad (4)$$

と定めると, $(M \times L, \oplus, *)$ は半環となり, 写像 $S : (M \times L) \times (M \times L) \rightarrow M \times L$

$$S((a, b), (c, d)) = ((a, b) \oplus (c, d), (a, b) * (c, d)) = ((a \cdot c, b \vee d), (e, b \vee d))$$

は $S^2 = S$ を満たしベキ等な YB 写像となる.

この代数構造の重要な例として分配束がある.

Definition 2.1 空でない集合 L 上の演算 $\wedge : L \times L \rightarrow L, \vee : L \times L \rightarrow L$ が下記の条件を満たすとき (L, \wedge, \vee) を分配束であるという.

1. $(L, \vee), (L, \wedge)$ はベキ等な可換半群,
2. $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a,$
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$

Proposition 2.1 (L, \wedge, \vee) を束とする. このとき, 写像 $S : L \times L \rightarrow L \times L$

$$S(a, b) = (a \vee b, a \wedge b)$$

はベキ等な YB 写像となる.

Example 2.2 全順序集合 L が与えられたとき, $a, b \in L$ に対して

$$a \wedge b = \min(a, b), a \vee b = \max(a, b)$$

とすれば (L, \wedge, \vee) は分配束となる. このとき得られる YB 写像 S は L の 2 元を大きいものから順番に並べた元の組に移す写像となる.

参考文献

- [1] Bukhshtaber, V. M.: Yang-Baxter mappings. Uspekhi Mat. Nauk **53** (1998), no. 6(324), 241–242; translation in Russian Math. Surveys **53** (1998), no. 6, 1343–1345.
- [2] Drinfel'd, V. G.: On some unsolved problems in quantum group theory. Quantum groups (Leningrad, 1990), 1–8, Lecture Notes in Math., 1510, Springer, Berlin, 1992.
- [3] Shibukawa, Y.: Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1157–1182.

Generic quantum braid representations and Garside theory

伊藤 哲也 (京都大学数理解析研究所)*

1. Introduction

複素半単純 Lie 環 \mathfrak{g} から得られる量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の Universal R -matrix \mathcal{R} を用いることで任意の $U_q(\mathfrak{g})$ -module V から n 次 Braid 群 B_n の線形表現

$$\rho_V : B_n \rightarrow \mathrm{GL}(V^{\otimes n})$$

が得られる。量子表現と呼ばれるこれらの Braid 群の表現は、結び目や 3 次元多様体の量子不変量の構成において最も基本的な要素のひとつであり、低次元トポロジーでの重要な研究対象である。また純粋に代数的な問題として、Braid 群の量子表現に関してその単射性 (Kernel の決定) やその像を調べることは重要である。ここでは、Braid 群の (Generic な) 量子表現が Braid 群の組み合わせ群論的な代数構造である (Dual) Garside 構造と密接に関連していることについて報告する。

2. Dual Garside normal form

$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を B_n の標準的な生成元とし、 $1 \leq i < j \leq n$ について

$$a_{i,j} = (\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1})^{-1} \sigma_i (\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-2} \sigma_{j-1})$$

と定める。 $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ で生成される B_n の submonoid を B_n^{+*} と書き、*Dual positive monoid* と呼ぶ。Braid 群 B_n 上の半順序 \preceq を $\alpha \preceq \beta \iff \beta \alpha^{-1} \in B_n^{+*}$ により定義する。すると、 \preceq は lattice ordering となり、任意の二つの braid α, β に対してその Greatest common divisor $\alpha \wedge \beta$ 及び Least common multiple $\alpha \vee \beta$ が一意に定まる。Braid $\delta = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ を dual Garside element と呼び、不等式 $1 \preceq x \preceq \delta$ をみたす braid x を dual simple element と呼ぶ。すると、 \preceq を用いることで、任意の braid β は dual simple element の積として、*Dual Garside normal form* と呼ばれる標準形

$$N_{\mathrm{dual}}(\beta) = x_r \cdots x_1 \delta^p \quad (p \in \mathbb{Z}, \text{各 } x_i \text{ は単位元でない Dual simple element})$$

の形に書き表される。Dual Garside normal form は、二つの性質

$$\begin{cases} x_{i+1} x_i \wedge \delta = x_i, & (i = 1, \dots, r-1) \\ \delta^p \preceq x \preceq \delta^{p+1} \end{cases}$$

により特徴付けられ、効率的に計算できる [BKL]。 β の supremum, infimum を $\sup(\beta) = r + p$, $\inf(\beta) = p$ と定義する。

キーワード : Quantum representation, Garside theory

* 〒 606-8502 京都府京都市左京区追分町 京都大学数理解析研究所

e-mail: tetitoh@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tetitoh/>

3. Generic quantum representation

以下、Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に限って Generic Verma module の構成を述べる。(詳細は [I, JK] 参照)。量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は $E, F, K^{\pm 1}$ で生成され次の関係式で定義される。

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F.$$

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の weight $s = q^\lambda \in \mathbb{C}^*$ の Verma Module は無限個の元 v_0 (highest weight vector), v_1, v_2, \dots で張られる (注: 一般には $\{v_i\}$ が基底をなすとは限らない) \mathbb{C} 上のベクトル空間で、 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用は

$$\begin{cases} Kv_j &= sq^{-2j}v_j \\ Ev_j &= v_{j-1} \\ Fv_j &= \frac{q^j - q^{-j}}{q - q^{-1}}(sq^{-j} - s^{-1}q^j)v_{j+1}. \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。すべての (generic な) weight に対しての Verma module をまとめて取り扱うため、 s, q を共に形式的に変数として見ることにする。 v_0, v_1, \dots を基底とする free- $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ -module V に (1) により $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -module の構造を定め、Generic Verma module と呼ぶ。 s, q が generic な値 (1 のべき根などではない場合) であれば変数に値を代入することで元の Verma module が復元される。 $V^{\otimes n}$ を K について weight 分解を取ることを考え、各 $m > 0$ に対して $V_m = \{v \in V^{\otimes n} \mid Kv = s^{-n}q^{-2m}v\}$ とする。これは B_n の作用で不変であり、 B_n の有限次元の線形表現

$$\rho_m : B_n \rightarrow \mathrm{GL}(V_m)$$

が得られる。これを *Generic quantum \mathfrak{sl}_2 representation* と呼ぶ。

4. Main theorem

Theorem 1. $m > 1$ について ρ_m を適当な (Poincaré-Birkhoff-Witt 型の) 基底をとり、行列表示する。 $\beta \in B_n$ について \mathbf{M}, \mathbf{m} を (Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, s^{\pm 1}]$ を係数とする) 行列 $\rho_m(\beta)$ の変数 s についての次数の最大値及び最小値とする。すると $\mathbf{M} = \sup(\beta), \mathbf{m} = \inf(\beta)$ が成り立つ。特に、 ρ_m は単射である。

この定理は Universal R-matrix がこれまでに知られていたよりもさらに良い構造を持つことを示唆している。この定理は始め [I] において、 ρ_m が Braid 群のある空間の局所係数ホモロジーへの作用として得られる表現と同一視できることを利用し、[IW] での Lawrence-Krammer-Bigelow 表現と同様の幾何的な議論により証明された。Universal R-matrix の作用の性質を直接調べることにより、幾何的な構成を経由せずに、代数的な議論で (\mathfrak{sl}_2 に限らない場合でも) 直接証明できることが分かった。

参考文献

- [BKL] J. Birman, K.-H. Ko and S.-J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. Math. 139 (2) (1998), 322-353.
- [I] T. Ito, *Reading the dual Garside length of braids from homological and quantum representations*, arXiv:1205.5245
- [IW] T. Ito and B. Wiest, *Lawrence-Krammer-Bigelow representation and dual Garside length of braids*, arXiv:1201.0957v1
- [JK] C. Jackson and T. Kerler, *The Lawrence-Krammer-Bigelow representations of the braid groups via $U_q(\mathfrak{sl}_2)$* , Adv. Math, **228**, (2011), 1689-1717.

中心拡大された $\mathfrak{sl}(2|2)$ リースーパー代数に基づく ヤンギアン代数のドリinfeldt 実現

松本拓也 (ユトレヒト大学)*¹
Alexander Molev (シドニー大学)*²

概 要

超弦理論や可積分模型の文脈で重要な役割を果たす、中心拡大されたリースーパー代数 $\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ に基づくヤンギアン代数のドリinfeldt 実現を構成した。また、 $\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ 代数の有限次元既約表現を分類した。

リースーパー代数 $\mathfrak{sl}(2|2)$ は、2次元の中心拡大を許す点において他のリースーパーリー代数と比べ特殊な存在であることが知られている [1]。この中心拡大された代数を $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ と書くことにする。

動機 この代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ とそれに付随するヤンギアン代数 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ は、物理的に二つの重要な文脈で現れることが知られている。一つ目は、超弦理論におけるゲージ理論/重力対応 (AdS/CFT 対応) の可積分構造に現れる対称性 [2] であり、二つ目は、1次元ハバード模型の Shastry の R 行列 [4] の対称性である。前者のゲージ理論/重力対応とは、ある超対称ゲージ理論と超重力理論との対応関係であり、両理論は共通する極大的対称性として 4次元超共形代数 $\mathfrak{sl}(2, 2|4)$ を持っている。ここである「真空」を保つ対称性のみを取り出すと、残りの対称性は $\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathfrak{sl}(2|2)$ なる。特に中心拡大された $\mathfrak{sl}(2|2)$ に基づくスピン鎖模型を考えることで、両理論の任意の結合定数におけるエネルギー固有値が、代数の表現論から求められることが知られている [2]。さらにその R 行列はリースーパー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の対称性のみから定数倍を除いて決定される。その後、対称性 $\tilde{\mathfrak{g}}$ はヤンギアン対称性 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ に拡大することも示された [3]。より大きな表現の R 行列は、このヤンギアン対称性 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ を課すことにより求められる。超弦理論の研究から見出されたこのスピン鎖模型は、実は後者の 1次元ハバード模型と等価であり、超弦理論の研究を通じて、1次元ハバード模型の Shastry の R 行列 [4] がリースーパー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 、およびそのヤンギアン $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の対称性を持っていることが認識されたことは興味深い [2]。

よって、このような物理的に重要な (無限次元) 代数の表現を、数学的にきちんと調べておくことは重要であると考えられる。

ヤンギアン代数 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ のドリinfeldt 実現 本研究では、ヤンギアン代数 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の有限次元既約表現を分類するために、まずその目的に適するドリinfeldt の第2実現 [5] をすでに知られていた $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ のドリinfeldt の第1実現からを構成した [6]。リースーパー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の Dynkin 図としては O-X-O を採用した。第2実現ではヤンギアン代数 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ はドリinfeldt 生成子 $x_{i,r}^{\pm}, h_{i,r}, P_r^{\pm}$ ($i = 1, 2, 3, r \in \mathbb{Z}_+$) によって生成される。 $x_{2,r}^{\pm}$ が odd 生成子であり、それ以外は even 生成子である。 P_r^{\pm} は無限個の中心元であり、次の

本研究の主要部分は、登壇者がポスドク研究員としてシドニー大学に滞在した時に行われたものである。
キーワード : Lie superalgebra, Yangian, Kac module, Michelsson-Zhelobenko algebra

*¹Institute for Theoretical Physics, Leuvenlaan 4, 3584 CE Utrecht, tel. +31 (0)30 253 5928/fax 5937
e-mail: t.matsumoto@uu.nl

*²School of Mathematics and Statistics, Carlslaw Building (F07), University of Sydney NSW 2006
e-mail: alexander.molev@sydney.edu.au

ようにセール関係式の拡大として現れる。

$$[[x_{1,r}^\pm, x_{2,0}^\pm], [x_{3,s}^\pm, x_{2,0}^\pm]] = P_{r+s}^\pm \quad (1)$$

$\mathcal{Y}(\mathfrak{sl}(2|2))$ では、 $P_{r+s}^\pm = 0$ である。具体的な構成方法としては、ヤングアン代数 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ をレベル 0 と 1 の生成子 $x_{i,0}^\pm, h_{i,0}, P_0^\pm, x_{i,1}^\pm, h_{i,1}, P_1^\pm$ のみによって定義する Levendorskii の方法 [7] を用い、そこからレベルに関する帰納法によってドリinfeld の第 2 実現を構成した。また、Levendorskii の定式化において余積の構造を顕わに定義することによって、ドリinfeld の第 2 実現にも余積の構造が入ることを示した。またこの余積を用いることによって、 $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の PBW 定理を証明した [6]。この方法はスーパーではない一般のヤングアン $\mathcal{Y}(\mathfrak{g})$ の PBW 定理の証明 [8] に基づいたものである。

リースーパー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の有限次元既約表現 次に、ヤングアン $\mathcal{Y}(\tilde{\mathfrak{g}})$ の有限次元既約表現を分類することが目的であるが、リースーパー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 自身の有限次元既約表現が完全に分類されていなかったため、まず $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現論を調べた。 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現論の困難は、中心拡大によって一般の表現 $\rho: \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{End}(V)$ が最高ウェイト表現になっていない点である。この点を解決するため、 $SL(2, \mathbb{C})$ でパラメトライズされる $\tilde{\mathfrak{g}}$ の自己同型 $\tau: \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ を用いて、表現を $\rho \circ \tau$ とうまく捻ることによって最高ウェイト表現に帰着させることが出来ることに注目した。この性質を用いると $\tilde{\mathfrak{g}}$ の有限次元既約表現は、even 部分代数 $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ の有限次元既約表現からの誘導表現 (Kac 加群) の既約商 (irreducible quotient) として定義される。特に Kac 加群は、 $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ 部分代数の有限次元既約表現をラベルする $m, n \in \mathbb{Z}_+$ 及び $\mathfrak{sl}(2|2)$ の中心 $C \in \mathbb{C}$ と拡大された 2 つの中心 $P^\pm \in \mathbb{C}$ によって $K(m, n, C, P^+, P^-)$ とラベルされる。先ほどの $SL(2, \mathbb{C})$ 自己同型 τ は 3 つの中心 (C, P^+, P^-) に対し adjoint で作用し、結局その随伴軌道の代表元としては i) $(0, 0, 0)$, ii) $(C, 0, 0)$, iii) $(0, P^+, 0)$ の 3 通りしかないと分かる。場合 i) と ii) は、 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現はそれぞれ $\mathfrak{psl}(2|2)$ と $\mathfrak{sl}(2|2)$ のそれと同じでありすでに知られていた。そこで我々は場合 iii) の時に $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現を調べた [6]。その結果、 $m \neq n$ または $m = n = 0$ ならば Kac 加群は既約 (Typical) であり次元は $16(m+1)(n+1)$ であること、また $m = n > 0$ ならば Kac 加群は可約 (Atypical) であり、その simple quotient の次元は $8(n+1)(n+2)$ であることが分かった。既約性の判定には、 $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ 部分代数に関する Mickelsson-Zhelobenko 代数 [9] の技術を用いて、最高ウェイト加群が不変部分空間を形成する特異ベクトルを持たないことを顕わに計算することによって示した。

参考文献

- [1] K. Iohara and Y. Koga, Comment. Math. Helv. **76** (2001), no.1, 110-154.
- [2] N. Beisert, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008) 945 [hep-th/0511082]. • N. Beisert, J. Stat. Mech. **0701** (2007) P01017 [nlin/0610017 [nlin.SI]].
- [3] N. Beisert, PoS SOLVAY (2006) 002 [arXiv:0704.0400 [nlin.SI]].
- [4] B. S. Shastry, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 2453.
- [5] V. G. Drinfeld, Soviet Math. Dokl. **36** (1988), no.2, 212-216.
- [6] T. Matsumoto and A. I. Molev, in preparation
- [7] S. Z. Levendorskii, J. Geom. Phys. **12** (1993), 1-11.
- [8] S. Z. Levendorskii, Lett. Math. Phys. **27** (1993), 37-42.
- [9] J. Mickelsson, Rep. Math. Phys. **4** (1973), 307-318. • D. P. Zhelobenko, Soviet. Math. Dokl. **28** (1983), 696-700. • D. P. Zhelobenko, Soviet. Math. Dokl. **28** (1983), 777-781.

Irreducible representations of generalized quantized algebras

Saeid Azam Department of Mathematics, University of Isfahan
 Hiroyuki Yamane Department of Mathematics, University of Toyama
 Malihe Yousofzadeh, Department of Mathematics, University of Isfahan

Let \mathbb{K} be a characteristic zero field. Let $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$, and $\mathbb{K}_\infty^\times := \{q \in \mathbb{K}^\times \mid \forall r \in \mathbb{N}, q^r \neq 1\}$. Let $N \in \mathbb{N}$. Let $I := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq N\}$. Let $\mathbb{Z}\Pi$ be a free $|I|$ -rank \mathbb{Z} module with a basis $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$. A map $\chi : \mathbb{Z}\Pi \times \mathbb{Z}\Pi \rightarrow \mathbb{K}^\times$ is called a *bi-homomorphism* if $\chi(\alpha, \beta + \gamma) = \chi(\alpha, \beta)\chi(\alpha, \gamma)$ and $\chi(\alpha + \beta, \gamma) = \chi(\alpha, \gamma)\chi(\beta, \gamma)$.

Let \mathcal{X}_N be the set of all the bi-homomorphisms

Let $U(\chi)$ be the \mathbb{K} -algebra defined in the same manner as in the Lusztig's book for any $\chi \in \mathcal{X}_N$, where $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ is regarded as the set of simple roots of the Kharchenko's positive root system $R^+(\chi)$ associated with χ . The Cartan part $U^0(\chi)$ of $U(\chi)$ has the \mathbb{K} -basis $\{K_\alpha L_\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\Pi\}$ such that $K_0 L_0 = 1$, $K_\alpha L_\beta \cdot K_{\alpha'} L_{\beta'} = K_{\alpha+\alpha'} L_{\beta+\beta'}$. We call $U(\chi)$ the *generalized quantum group*. We say that χ (or $U(\chi)$) is of *finite-type* if $R^+(\chi)$ is finite and irreducible. We say that χ (or $U(\chi)$) is of *infinite-dimensional-finite-type* (IFD-type, for short) if χ is of finite-type and $\dim U^+(\chi) = \infty$.

Let $\mathcal{X}_N^{\text{IFD}}$ be the set of all the $\chi \in \mathcal{X}_N$ of IFD-type. For $\chi \in \mathcal{X}_N^{\text{IFD}}$, let $\text{Ch}(U^0(\chi))$ be the set of all the \mathbb{K} -algebra homomorphisms $\Lambda : U^0(\chi) \rightarrow \mathbb{K}^\times$. For $\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi))$, let $\mathcal{L}_\chi(\Lambda)$ be the $\mathbb{Z}\Pi$ -graded irreducible $U(\chi)$ -module having a nonzero element v_Λ with $E_i v_\Lambda = 0$ and $K_\alpha L_\beta v_\Lambda = \Lambda(K_\alpha L_\beta) v_\Lambda$. For $i \in I$, let $\mathbb{S}_i(\chi) := \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \exists r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \Lambda(K_{\alpha_i} L_{-\alpha_i}) = \chi(\alpha_i, \alpha_i)^r\}$.

We have decided the set $\text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) := \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \dim \mathcal{L}_\chi(\Lambda) < \infty\}$ for $\chi \in \mathcal{X}_N^{\text{IFD}}$.

For example, we have the following. Let $q_{ij} := \chi(\alpha_i, \alpha_j)$.

- *Simple Lie algebra cases.* If there exist $q \in \mathbb{K}_\infty^\times$, a finite-type Cartan matrix $[a_{ij}]_{i,j \in I}$ and $d_i \in \mathbb{N}$ ($i \in \mathbb{N}$) with $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ such that $q_{ii} = q^{d_i}$, $q_{ij} q_{ji} = q^{d_i a_{ji}}$, then $\text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) = \bigcap_{i \in I} \mathbb{S}_i(\chi)$.

- *A(m-1, N-1)-type simple Lie superalgebra cases.* If there exist $q \in \mathbb{K}_\infty^\times$ and $m \in I$ such that $q_{ii} = q$, $q_{i+1} q_{i+1} = q^{-1}$ ($1 \leq i \leq m-1$), $q_{mm} = -1$, $q_{jj} = q^{-1}$, $q_{j-1} q_{j-1} = q$ ($m+1 \leq j \leq N$) and $q_{ij} q_{ji} = 1$ ($|i-j| \geq 2$), then $\text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) = \bigcap_{i \in I \setminus \{m\}} \mathbb{S}_i(\chi)$.

- *B(m, N-m)-type simple Lie superalgebra cases.* If $N \geq 2$ and there exist $q \in \mathbb{K}_\infty^\times$ and $m \in I \setminus \{N\}$ such that $q_{ii} = q^{-2}$, $q_{i+1} q_{i+1} = q^2$ ($1 \leq i \leq N-m-1$),

$q_{N-mN-m} = -1$, $q_{jj} = q^2$, $q_{j-1j}q_{jj-1} = q^{-2}$ ($N-m+1 \leq j \leq N-1$), $q_{NN} = q$, $q_{N-1N}q_{NN-1} = q^{-2}$ and $q_{ij}q_{ji} = 1$ ($|i-j| \geq 2$), then

$$\begin{aligned} & \text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) \\ &= (\cap_{i \in I \setminus \{N-m\}} \mathbb{S}_i(\chi)) \\ & \cap ((\cup_{x=0}^{m-1} \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \prod_{k=N-m}^{N-m+x} \Lambda(K_{\alpha_k} L_{-\alpha_k}) = q^{-2x}, \\ & \quad \Lambda(K_{\alpha_j} L_{-\alpha_j}) = 1 (N-m+x+1 \leq j \leq N)\}) \\ & \cup (\cup_{y=2m}^{\infty} \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \prod_{k=N-m}^N \Lambda(K_{\alpha_k} L_{-\alpha_k}) = (-q)^{-y}\})). \end{aligned}$$

• *C(N)-type simple Lie superalgebra cases.* If $N \geq 3$ and there exist $q \in \mathbb{K}_{\infty}^{\times}$ such that $q_{11} = -1$, $q_{ii} = q$, $q_{ii-1}q_{i-1i} = q^{-1}$ ($2 \leq i \leq N-1$), $q_{NN} = q^2$, $q_{N-1N}q_{NN-1} = q^{-2}$ and $q_{ij}q_{ji} = 1$ ($|i-j| \geq 2$), then $\text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) = \cap_{i \in I \setminus \{1\}} \mathbb{S}_i(\chi)$.

• *D(m, N-m)-type simple Lie superalgebra cases.* If $N \geq 3$ and there exist $q \in \mathbb{K}_{\infty}^{\times}$ and $m \in I \setminus \{N-1, N\}$ such that $q_{ii} = q^{-1}$, $q_{ii+1}q_{i+1i} = q$ ($1 \leq i \leq N-m-1$), $q_{N-mN-m} = -1$, $q_{jj} = q$, $q_{j-1j}q_{jj-1} = q^{-1}$ ($N-m+1 \leq j \leq N-1$), $q_{NN} = q$, $q_{N-2N}q_{NN-2} = q^{-1}$, $q_{N-1N}q_{NN-1} = 1$ and $q_{ij}q_{ji} = 1$ ($|i-j| \geq 2$, $\{i, j\} \neq \{N-2, N\}$), then

$$\begin{aligned} & \text{Ch}^{\text{fin-irr}}(U^0(\chi)) \\ &= (\cap_{i \in I \setminus \{N-m\}} \mathbb{S}_i(\chi)) \\ & \cap ((\cup_{x=0}^{m-2} \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \prod_{k=N-m}^{N-m+x} \Lambda(K_{\alpha_k} L_{-\alpha_k}) = q^{-x}, \\ & \quad \Lambda(K_{\alpha_j} L_{-\alpha_j}) = 1 (N-m+x+1 \leq j \leq N)\}) \\ & \cup (\{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \prod_{k=N-m}^{N-1} \Lambda(K_{\alpha_k} L_{-\alpha_k}) = q^{-m+1}, \\ & \quad \Lambda(K_{\alpha_{N-1}} L_{-\alpha_{N-1}}) = \Lambda(K_{\alpha_N} L_{-\alpha_N})\}) \\ & \cup (\cup_{y=2m}^{\infty} \{\Lambda \in \text{Ch}(U^0(\chi)) \mid \\ & \quad (\prod_{k=N-m}^{N-2} \Lambda(K_{\alpha_k} L_{-\alpha_k})) (\prod_{r=N-1}^N \Lambda(K_{\alpha_r} L_{-\alpha_r})) = q^{-2y}\})). \end{aligned}$$

References

- [1] Saeid Azam, Hiroyuki Yamane, Malihe Yousofzadeh, Classification of Finite Dimensional Irreducible Representations of Generalized Quantum Groups via Weyl Groupoids, preprint, arXiv:1105.0160

A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra

竹山 美宏 (筑波大数学)*

デルタ関数型の斥力相互作用をもつ一次元のボゾン系(一次元デルタ・ボーズガス)は, 古くから知られる量子可積分系である. 周期境界条件の下でそのハミルトニアンは次で与えられる.

$$-\Delta + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq k \\ m \in \mathbb{Z}}} \delta(x_i - x_j + m)$$

ポテンシャル項のデルタ関数は, $A_{k-1}^{(1)}$ 型のアフィンワイル群の鏡映面にその台を持つ. このハミルトニアンを, 一般のアフィンワイル群の鏡映面にデルタ関数の台がある場合に拡張することは自然である. この場合の固有値問題について, その代数的構造は退化二重アフィンヘッケ代数で記述できることが³, Emsiz, Opdam, Stokman の研究により知られている [1].

本研究では, 一次元デルタ・ボーズガスの離散化を考える. この問題についてはマクドナルド球関数との関連から van Diejen らによって既に研究されているが³, 本研究では異なる観点から離散化を考える.

Kardar-Parisi-Zhang 方程式 (KPZ 方程式) は一次元の界面成長を記述する確率偏微分方程式である. KPZ 方程式の解の Cole-Hopf 変換の同時モーメントを考えると, その時間発展は一次元デルタ・ボーズガスのハミルトニアンで書ける. KPZ 方程式の可積分な離散化として, O'Connell と Yor が構成した semi-discrete directed polymer のモデルがある. このモデルにおいては, 時間変数が連続的で, 空間変数が離散的である. そして, 分配関数の同時モーメントの時間発展は, 次の差分作用素で記述できる [2].

$$\sum_{i=1}^k \nabla_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \delta_{i=j} \tag{1}$$

ただし $(\nabla_i f)(x_1, \dots, x_k) := f(\dots, x_i - 1, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)$, $(\delta_{i=j} f)(x_1, \dots, x_k) := \delta_{x_i, x_j} f(x_1, \dots, x_k)$ である.

本研究では, (1) にパラメータを入れて拡張した差分作用素に周期境界条件を課したものを考え, その固有関数を与える propagation operator を構成した. 以下でその結果を述べる (詳細は [3] を参照).

正の整数 k (粒子数) と L (システムサイズ) を固定する. $V = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}v_i$ の格子 $X = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}v_i$ 上の関数への作用素 H を以下で定義する. V^* において $A_{k-1}^{(1)}$ 型の単純ルートを $a_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ ($1 \leq i < k$), $a_0 = -\epsilon_1 + \epsilon_k + L\delta$ で実現する (ただし

本研究は科研費(若手(B) 課題番号:23740119)の助成を受けたものである。

* e-mail: takeyama@math.tsukuba.ac.jp

web: <http://researchmap.jp/takeyama/>

$\epsilon_i(v_j) = \delta_{i,j}, \delta(v) = 1(\forall v \in V)$. そして, X 上の関数 d_i^\pm ($1 \leq i \leq k$) を

$$\begin{aligned} d_i^+(x) &:= \#\{1 \leq p < k \mid \sum_{j=i}^{i+p-1} a_j(x) \in LZ_{\leq 0}\}, \\ d_i^-(x) &:= \#\{1 \leq p < k \mid \sum_{j=i-p}^{i-1} a_j(x) \in LZ_{\leq 0}\} \end{aligned}$$

で定める (添字 j は mod k で読む). さらにシフト作用素 $(t_{v_i} f)(x) := f(x - v_i)$ ($1 \leq i \leq k$) を考えて, X 上の関数全体のなす集合 $F(X)$ に働く差分作用素 H を

$$H := \sum_{i=1}^k \beta d_i^+ (t_{v_i} - \alpha d_i^-)$$

と定義する. ただし $\alpha \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^\times$ はパラメータである. H の作用は周期 L をもつ X 上の周期対称関数の空間で閉じる. また, $\alpha = \beta = 1$ とすれば, O'Connell-Yor モデルの差分作用素 (に周期境界条件を課したもの) を復元する.

$A_{k-1}^{(1)}$ 型のアフィンワイル群 $W = \langle s_0, \dots, s_{k-1} \rangle$ は X に作用する. $f \in F(X)$ に対し, $(\pi f)(x) := f(s_{k-1} \cdots s_1(x - Lv_1))$ と定める. このとき, 積分作用素の離散類似 $Q_i: F(X) \rightarrow F(X)$ ($1 \leq i < k$) であって

$$\begin{aligned} (Q_i - 1)(Q_i + \beta) &= 1 \quad (1 \leq i < k), \quad Q_i Q_{i+1} Q_i = Q_{i+1} Q_i Q_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k-2), \\ Q_i Q_j &= Q_j Q_i \quad (|i - j| > 1), \quad Q_i \pi^{-1} = \pi^{-1} Q_{i-1} \quad (1 < i < k), \quad Q_1 \pi^{-2} = \pi^{-2} Q_{k-1} \end{aligned}$$

を満たすものが構成できる. $\{Q_1, \dots, Q_{k-1}, \pi^{-1}\}$ は, GL_k 型のアフィンヘッケ代数の表現を与える.

$W \ni w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ (最短表示) に対して, $Q_w = Q_{i_1} \cdots Q_{i_r}$ と定める (ただし $Q_0 := \pi^{-1} Q_1 \pi$). $x \in X$ に対し, $w x \in \overline{C}_+ := \{x \in X \mid a_i(x) \geq 0 \ (0 \leq i < k)\}$ となる最短元 $w \in W$ を w_x と書く. このとき, propagation operator $G: F(X) \rightarrow F(X)$ を $G(f)(x) := (Q_{w_x} f)(w_x x)$ で定義する.

定理 $h \in F(X)$ が $\sum_{i=1}^k t_{v_i} h = \lambda h$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を満たすならば, $HG(h) = \lambda G(h)$ である. つまり, 写像 G は “half-Laplacian” $\sum_{i=1}^k t_{v_i}$ の固有関数を, 同じ固有値をもつ H の固有関数に移す.

さらに, 写像 G を使って, 周期的で対称な固有関数をベーテ仮設法 (coordinate Bethe ansatz) で構成できる. 結果として Hall-Littlewood 多項式の 1 パラメータ変形が現れる.

参考文献

- [1] Emsiz, E., Opdam, E. M. and Stokman, J. V., Periodic integrable systems with delta-potentials, *Comm. Math. Phys.* **264** (2006), no. 1, 191–225.
- [2] Borodin, A., Corwin, I., and Sasamoto, T., From duality to determinants for q-TASEP and ASEP, [arXiv:1207.5035](https://arxiv.org/abs/1207.5035).
- [3] Takeyama, Y., A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra, [arXiv:1209.2758](https://arxiv.org/abs/1209.2758)

非対称な可換微分作用素対

林 達也 (青山学院大学大学院理工学研究科)*

概 要

完全可積分な量子力学模型として Calogero-Moser-Sutherland(CMS) 模型が有名である. その Hamiltonian を L とすると, CMS 模型のもつ Weyl 群対称性をうまく崩しても L と可換な微分作用素が存在することが知られている. 本講演では, K.Taniguchi による先行研究 [2] に基づいて, B_2 型の CMS 模型の新しい変形を構成する.

1. Calogero-Moser-Sutherland 模型

\mathbf{R}^n 上の微分作用素

$$L_0 := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + R(x)$$

が完全可積分であるとは, n 個の独立な微分作用素 $P_1 = L_0, P_2, \dots, P_n$ が存在して, 互いに可換になることをいう. 完全可積分な量子力学模型として有名なものに Calogero-Moser-Sutherland(CMS) 模型がある. (Σ, W) をルート系とその Weyl 群のペアとする. n 体の CMS 模型として以下のようなものがある.

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha (m_\alpha + 1) |\alpha|^2 u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle),$$

$u_\alpha(t) = t^{-2}$ (rational case), $\sinh^{-2} t, \sin^{-2} t$ (trigonometric case), $\wp(t)$ (elliptic case) であり, $\wp(t)$ は Weierstrass の \wp 関数である. 定数 m_α を結合定数という.

2. 研究目的

CMS 模型の一般化として次の Schrödinger 作用素を考える. H を \mathbf{R}^n の互いに平行ではないベクトルの有限集合とし,

$$L = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{\alpha \in H} u_\alpha(\langle \alpha, x \rangle),$$

$$u_\alpha(t) = \frac{m_\alpha (m_\alpha + 1) |\alpha|^2}{t^2} + (t \text{ の Maclaurin 級数}), \quad m_\alpha \neq 0, -1$$

とする.

CMS 模型の場合, H はルート系の正系 Σ^+ であるが, H がルート系の正系でなくても, 即ちルート系のもつ対称性を変形したものであっても, L が完全可積分となりうるということが知られている.

まず, 本研究との比較のために, 既に知られている結果を紹介しておく.

一般の B_n 型で m_α のいくつかかが 1 の場合は Veselov-Feigin-Chalykh の研究により,

* 〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1 青山学院大学大学院理工学研究科
e-mail: c5611009@aoyama.jp

B_2 型で m_α のいくつかは2の場合は Taniguchi の研究により, そのルート系を変形したものであっても, L が完全可積分となることが証明されている.

本研究では, B_2 型で m_α のいくつかは3の場合に, L と可換になる微分作用素 P を実際に構成し, そのような P の存在を確かめることで, L が完全可積分であることを証明することが目的である.

3. 主結果

L と可換で, 最高階が定数係数であるような微分作用素 P が存在するための必要条件が研究されており [2], それらの条件を満たすものとして, B_2 型の CMS 模型の新しい変形を構成することができた.

B_2 型ルート系の変形として, $H = \{e_1, e_2, \pm ae_1 + e_2\} (a \neq 0)$ というものを考える. $m_{\pm ae_1 + e_2} = 1$ の場合には, Veselov らにより, $m_{\pm ae_1 + e_2} = 2$ の場合には Taniguchi により, L と可換な微分作用素 P の存在が示されていたが, $m_{\pm ae_1 + e_2} = 3$ の場合にも L と可換な P が存在することがわかった. ただし, このとき P として最も階数の低い作用素は8階である. P の主シンボル (最高階のシンボル) については次のようなものが得られた.

定理 3.1 *Schrödinger* 作用素 L を

$$L = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + u_1(2ax_1) + u_2(2x_2) + u_+(ax_1 + x_2) + u_-(-ax_1 + x_2)$$

と定義する. $m_{\pm ae_1 + e_2} = 3$ のとき, L と可換な8階の微分作用素 P が存在し, その主シンボルは

$$(3a^5 - 29a^3 + 80a)\xi_1^8 + (196a - 28a^3)\xi_1^6\xi_2^2 + (98a + 98a^{-1})\xi_1^4\xi_2^4 \\ + (196a^{-1} - 28a^{-3})\xi_1^2\xi_2^6 + (3a^{-5} - 29a^{-3} + 80a^{-1})\xi_2^8$$

である.

この主シンボルの下で, Mathematica を使って実際に L と可換な微分作用素 P を構成したので, その結果について本講演で解説する.

参考文献

- [1] Taniguchi, K.: On the symmetry of commuting differential operators with singularities along hyperplanes, Int. Math. Res. Notices 2004, no. 36, 1845-1867.
- [2] Taniguchi, K.: Deformation of two body quantum Calogero-Moser-Sutherland models. ver 1.0 July 26, 2006. arXiv:math-ph/0607053

位相的弦理論における一般化された Ablowitz-Ladik 階層

高崎金久 (京都大学人間環境学研究所)

昨年3月のセッションにおいて、溶解結晶模型の変種が Ablowitz-Ladik 階層と関係していることを報告した。この模型の分配関数はコニフォルド (resolved conifold) と呼ばれる非コンパクト3次元 Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論の振幅母関数とみなすこともできる。今回は、後者の観点からの一般化として、コニフォルドを一般化した局所トリーク Calabi-Yau 多様体 (一般化コニフォルド) の上の位相的弦理論を考察し、その振幅母関数と一般化された Ablowitz-Ladik 階層との関係を明らかにする。

一般化されたコニフォルドのウェブ図形は $2N - 1$ 本のジグザグにつながった内線に $2N + 2$ 本の外線を添えた形をしている ($N = 1$ の場合が本来のコニフォルドに相当する)。以下で考えるのは、このウェブ図形の左右両端の水平な外線のそれぞれに一般の分割 λ, μ を、また他の外線にゼロ分割 \emptyset を置いた開弦理論の振幅である。この振幅を位相的頂点の方法によって求めて複素フェルミ場 $\psi(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \psi_n z^{-n-1}$, $\psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \psi_n^* z^{-n}$ の言葉に翻訳すれば、フォック空間上の次の作用素 g の行列要素 $\langle \lambda | g | \mu \rangle$ になる¹:

$$\begin{aligned} g &= q^{W_0/2} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q_1^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) \\ &\quad \times Q_2^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q_3^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) \\ &\quad \times \cdots \\ &\quad \times Q_{2N-2}^{L_0} \Gamma_-(q^{-\rho}) \Gamma_+(q^{-\rho}) Q_{2N-1}^{L_0} \Gamma'_-(q^{-\rho}) \Gamma'_+(q^{-\rho}) q^{-W_0/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで q は弦理論のパラメータ ($0 < |q| < 1$)、 Q_1, \dots, Q_{2N-1} は一般化コニフォルドのケーラーパラメータである。 L_0, W_0 は

$$L_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n : \psi_{-n} \psi_n^* :, \quad W_0 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n^2 : \psi_{-n} \psi_n^* :$$

というフェルミオン2次形式である。さらに $J_k = \sum_{n \in \mathbf{Z}} : \psi_{-n} \psi_{n+k}^* :$ を用いて頂点作用素

$$\Gamma_{\pm}(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} J_{\pm k} \right), \quad \Gamma'_{\pm}(z) = \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k} J_{\pm k} \right)$$

を構成する。 $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$ は多変数頂点作用素 $\Gamma_{\pm}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{i \geq 1} \Gamma_{\pm}(x_i)$, $\Gamma'_{\pm}(x_1, x_2, \dots) = \prod_{i \geq 1} \Gamma'_{\pm}(x_i)$ を

$$q^{-\rho} = (q^{1/2}, q^{3/2}, \dots, q^{i-1/2}, \dots)$$

に特殊化したものである。

$\langle \lambda | g | \mu \rangle$ をチャージ s へ拡張したもの $\langle \lambda, s | g | \mu, s \rangle$ を2個のシューア関数で母関数化すれば、2系列の時間変数 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{\mathbf{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots)$ をもつ戸田階層の τ 関数

$$\tau(s, \mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) = \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k} \right) | s \rangle \quad (2)$$

¹正確に言えば、これは位相的頂点の方法で得られる振幅を少し修正したものである。

が得られる。こうして定まる戸田階層の特殊解が我々の考察対象である。

Lax 形式においてこの解を調べるために、フェルミオン 2 次形式と $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 行列の対応 $:\psi_{-n}\psi_m^* \leftrightarrow E_{nm}$ を利用する。この対応によって L_0, W_0, J_k を行列表示すれば

$$L_0 = \Delta, \quad W_0 = \Delta^2, \quad J_k = \Lambda^k$$

となる。 Λ, Δ は 1 次元格子 \mathbf{Z} 上の作用素 $e^{\partial/\partial s}$, s に相当する行列

$$\Lambda = \sum_{n \in \mathbf{Z}} E_{n, n+1}, \quad \Delta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n E_{nn}$$

である。 $\Gamma_{\pm}(q^{-\rho})$ と $\Gamma'_{\pm}(q^{-\rho})$ の行列表示は行列値の量子ダイログ函数

$$\Gamma_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{i-1/2} \Lambda^{\pm 1})^{-1}, \quad \Gamma'_{\pm}(q^{-\rho}) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^{i-1/2} \Lambda^{\pm 1})$$

になる。これらに基づいて以下のことが示せる：

(i) g の行列表示は

$$g = W^{-1} \bar{W} \quad (3)$$

というように因子分解できる。ここで W, \bar{W} は

$$W = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^N \Gamma_{-}(Q^{(2i-1)} q^{-\rho})^{-1} \Gamma'_{-}(Q^{(2i)} q^{-\rho})^{-1} \cdot q^{-\Delta^2/2}, \quad (4)$$

$$\bar{W} = q^{\Delta^2/2} \cdot \prod_{i=1}^N \Gamma_{+}(Q^{(2i-1)-1} q^{-\rho}) \Gamma'_{+}(Q^{(2i)-1} q^{-\rho}) \cdot (Q_1 \cdots Q_{2N-1})^{\Delta} q^{-\Delta^2/2}$$

($Q^{(i)} = Q_1 Q_2 \cdots Q_{i-1}$) という行列である。

(ii) W は対角成分が 1 の下三角行列, \bar{W} は対角成分が非零の上三角行列であり, (3) は戸田階層の初期値問題の解法に用いられる因子分解

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k\right) g \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k}\right) = W(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})^{-1} \bar{W}(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}) \quad (5)$$

を $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$ で考えたものとみなせる。

(iii) 行列表示されたラックス作用素の $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$ における初期値 $L = W \Lambda W^{-1}$, $\bar{L}^{-1} = \bar{W} \Lambda^{-1} \bar{W}^{-1}$ は

$$L = B \Lambda^{1-N} C^{-1}, \quad \bar{L}^{-1} = D C \Lambda^{N-1} B^{-1}, \quad (6)$$

$$B = \Lambda^N + b_1 \Lambda^{N-1} + \cdots + b_N, \quad C = 1 + c_1 \Lambda^{-1} + \cdots + c_N \Lambda^{-N}$$

($b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N$ は対角行列, D は定数) という特殊な形をしている。

(6) は Brini らが戸田階層の Ablowitz-Ladik 階層への簡約条件として見出したもの² の一般化になっている。すなわち, この特殊な形は時間発展で保たれて, 戸田階層の簡約系 (Ablowitz-Ladik 階層の一般化) を定める。こうして, (1) は一般化された Ablowitz-Ladik 階層の特殊解を定める, という結論が得られる。

²A. Brini, G. Carlet and P. Rossi, Integrable hierarchies and the mirror model of local $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, *Physica D* **241** (2012), 2156–2167. arXiv:1105.4508 [math.AG].

Hirota quadratic equations in singularity theory

Todor Milanov (Kavli IPMU)*

March 17, 2014

Abstract

Motivated by Gromov–Witten theory Dubrovin and Zhang have introduced a new class of bi-Hamiltonian infinite dimensional integrable systems. The hierarchies have also the notion of tau-functions and the problem addressed in these notes is whether the tau-functions can be described by Hirota quadratic equations.

1. Introduction

The problem of counting curves in algebraic manifolds is one of the classical subjects in algebraic geometry. Motivated by string theory, E. Witten proposed a quantum field theory (QFT) model known as the *topological string model*, which allows us to identify the amplitudes of the QFT with a certain *virtual* count of curves satisfying various incidence constraints. Furthermore, in [16] Witten described the mathematical counterpart of the topological string model, which is now known as Gromov–Witten (GW) theory. Witten’s proposal was quite challenging in a sense that it is very difficult to make his definitions rigorous. Nevertheless, the foundational issues of GW theory are resolved both algebraically and analytically, so now it is important to find applications and to understand the place of this new theory in Mathematics. This would not only improve and simplify many of the constructions in GW theory, but it should lead to exciting new developments in other areas of mathematics, such as integrable systems and representations of infinite-dimensional Lie algebras.

1.1. Witten’s conjecture

In [16] Witten made a striking conjecture, proved first by Kontsevich [11], relating the KdV hierarchy and the intersection numbers

$$\langle \psi_1^{k_1}, \dots, \psi_n^{k_n} \rangle_{g,n} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{k_1} \dots \psi_n^{k_n}, \quad (1)$$

where $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ is the Delign–Mumford moduli spaces of genus- g stable curves equipped with n marked points and ψ_i is the 1-st Chern class of the tautological line bundle whose fibers are given by the co-tangent lines at the i -th marked point. Namely, let us introduce formal variables \hbar and $\mathbf{t} = \{t_k\}_{k=0}^\infty$ and form the generating function

$$\mathcal{D}_{\text{pt}}(\mathbf{t}, \hbar) = \exp \left(\sum_{g,n=0}^{\infty} \frac{\hbar^{g-1}}{n!} \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} t_{k_1} \dots t_{k_n} \langle \psi_1^{k_1}, \dots, \psi_n^{k_n} \rangle_{g,n} \right). \quad (2)$$

This work was supported by Grant-In-Aid for young scientist B and the World Premiere International Research Center Initiative (WPI Initiative), Mext, Japan.

2000 Mathematics Subject Classification: 17B69, 32S30.

Keywords: Frobenius structures, vertex operators, period integrals.

*e-mail: todor.milanov@ipmu.jp

web: <http://member.ipmu.jp/todor.milanov/>

Witten conjectured that the change of variables $t_k \mapsto t_{2k+1}(2k+1)!!$ ($k = 0, 1, \dots$) transforms \mathcal{D}_{pt} into a tau-function of the KdV hierarchy.

The GW invariants of a smooth projective variety X are the following intersection numbers (taking values in the Novikov ring $\mathbb{C}[[Q]]$ of X)

$$\langle \phi_{i_1} \psi_1^{k_1}, \dots, \phi_{i_n} \psi_n^{k_n} \rangle_{g,n} = \sum_{d \in \text{Eff}(X)} Q^d \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,d)]^{\text{virt}}} \text{ev}^*(\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_n}) \psi_1^{k_1} \dots \psi_n^{k_n},$$

where $\text{Eff}(X) \subset H_2(X; \mathbb{Z})$ is the cone of effective curve classes, $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)$ is the moduli space of stable maps to X from a genus- g nodal Riemann surface equipped with n marked points whose homology class is d , $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ is a basis in $H^*(X; \mathbb{C})$, and

$$\text{ev} : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d) \rightarrow X^n,$$

is the evaluation map. The moduli space $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)$ is known to be a Delign–Mumford stack equipped with a homology class $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)]^{\text{virt}}$, known as the *virtual fundamental cycle*, that allows us to define intersection theory as if the moduli space were a compact complex orbifold (see [12] and the references there in for more details). We introduce formal variables \hbar and $\mathbf{t} = \{t_k^i\}_{k=0,1,\dots}^{i=1,\dots,N}$ and similarly to (2) we define a generating function $\mathcal{D}_X(\hbar, \mathbf{t})$ called the *total descendant potential* of X ([7]). It is rather a remarkable discovery that if X has a semi-simple quantum cohomology (this includes all homogeneous spaces G/P), then the total descendant potential \mathcal{D}_X is a tau-function of an integrable hierarchy (see [2, 5]).

1.2. The notion of a Frobenius manifold

The key to proving the above statement is a higher-genus reconstruction discovered by Givental, which is based on the theory of Frobenius manifolds [4]. Let us denote by $F(t)$ the function obtained from the genus-0 part (i.e., the \hbar^{-1} term) of $\log \mathcal{D}_X$ by the substitution $t_k^i = 0$ for $k > 0$ and $t_0^i = t_i$. Here $t = (t_1, \dots, t_N)$ is the linear coordinate system on $H := H^*(X; \mathbb{C})$ corresponding to the basis $\{\phi_i\}_{i=1}^N$. Let us assume that $F(t)$ is convergent for all $t \in B$, where $B \subset H$ is a small neighborhood of $0 \in H$. If the radius of convergence is 0, then we take for B a formal neighborhood of 0. The Poincaré pairing $(\ , \)$ induces a non-degenerate bi-linear pairing on the tangent bundle $TB = B \times H$. Furthermore, TB is equipped with a commutative multiplication \bullet , known as the *quantum cup product*, defined by

$$(\phi_i \bullet_t \phi_j, \phi_k) = \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}(t).$$

Assuming that the basis $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ is homogeneous we also have *Euler* vector field

$$E = \sum_{i=1}^N (1 - \deg(\phi_i)/2) t_i \partial_{t_i} + c_1(TX),$$

that can be used to introduce a grading in the space of tensors on B . In particular, we have

$$E(F) = (3 - D)F, \quad \text{Lie}_E(\ , \) = (2 - D)(\ , \), \quad D := \dim_{\mathbb{C}}(X). \quad (3)$$

Let us introduce the family of connections on TB

$$\nabla_{\partial/\partial t_i} = \partial/\partial t_i - z^{-1} \phi_i \bullet, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4)$$

where $\phi_i \bullet_t : T_t B \cong H \rightarrow H \cong T_t B$ is the linear operator of quantum multiplication by ϕ_i , and the operator series $S_t(z) = 1 + S_1(t)z^{-1} + \dots$, where $S_k(t) : H \rightarrow H$ is a linear map, defined by

$$(S_t(z)\phi_i, \phi_j) = (\phi_i, \phi_j) + \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \langle \phi_i \psi^k, \phi_j, t, \dots, t \rangle_{0,l+2} z^{-k-1}. \quad (5)$$

Proposition 1 *The connection (4) is flat and $S_t(z)$ is a fundamental solution of ∇ satisfying the following differential equation*

$$(z\partial_z + E)S_t(z) = [\theta, S_t(z)] + z^{-1}S_t(z)\rho,$$

where $\rho : H \rightarrow H$ is the classical cup product multiplication by $c_1(TX)$ and

$$\theta : H \rightarrow H, \quad \theta(\phi_i) = \frac{1}{2}(D - \deg(\phi_i))\phi_i$$

is the Hodge grading operator.

An immediate corollary of Proposition 1 is that the quantum multiplication is associative and that we can extend ∇ to a flat connection on the H -trivial bundle over $B \times \mathbb{C}^*$ by

$$\nabla_{\partial/\partial z} := \partial/\partial z - z^{-1}\theta + z^{-2}E \bullet. \quad (6)$$

The connection defined by (4) and (6) is known as the *Dubrovin connection*. Note that the definition of the Dubrovin's connection depends only on the potential F , the Euler vector field E , and the bi-linear pairing $(\ , \)$.

Definition 2 *The data $(F, E, (\ , \))$, s.t., the homogeneity condition (3) holds and the corresponding Dubrovin's connection is flat is called a conformal Frobenius structure on B of conformal dimension D .*

According to Proposition 1, the operator series $S_t(z)$ is a gauge transformation, s.t.,

$$S_t(z)^{-1}\nabla S_t(z) = d - z^{-1}\theta + z^{-2}\rho.$$

In the abstract settings of Frobenius manifolds we define $S_t(z)$ to be a gauge transformation that transforms the Dubrovin's connection in the above form. There is some ambiguity in this choice, which however is irrelevant for our purposes.

1.3. The higher genus reconstruction

Let us assume that $t_0 \in B$ is a semi-simple point. This means that there are local coordinates (u_1, \dots, u_N) near t_0 , s.t.,

$$(\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j) = \delta_{i,j}/\Delta_i, \quad \partial/\partial u_i \bullet \partial/\partial u_j = \delta_{i,j}\partial/\partial u_j,$$

where Δ_i are some non-vanishing functions defined in a neighborhood of t_0 . Such coordinates are called *canonical* and Frobenius manifolds that have at least one semi-simple point are called *semi-simple*.

The canonical coordinates provide a trivialization of the tangent bundle in a neighborhood of t_0

$$\Psi_t : \mathbb{C}^N \rightarrow H \cong T_t B, \quad e_i \mapsto \sqrt{\Delta_i} \partial / \partial u_i,$$

where $\{e_i\}_{i=1}^N$ is the standard basis of \mathbb{C}^N . In this trivialization the pairing and the Frobenius multiplication assume the form

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j}, \quad e_i \bullet e_j = \delta_{i,j} \Delta_j e_j.$$

Proposition 3 *The Dubrovin's connection has a formal asymptotical solution (near $z = 0$) of the following form*

$$\Psi_t R_t(z) e^{U_t/z}, \quad R_t(z) = 1 + R_1(t)z + \dots,$$

where $R_k(t) \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$ and U_t is a diagonal matrix with diagonal entries $u_1(t), \dots, u_N(t)$.

Following Givental [7], let \mathcal{H} be the space of formal Laurent series $H((z^{-1}))$. We put a symplectic structure on \mathcal{H} by

$$\Omega(f_1(z), f_2(z)) = \text{res}_{z=0}(f_1(-z), f_2(z)) dz.$$

Note that $\mathcal{H}_+ := H[[z]]$ is a Lagrangian subspace and since the symplectic pairing gives an isomorphism $\mathcal{H}_+^* \cong \mathcal{H}_- := H[[z^{-1}]]z^{-1}$ we get $\mathcal{H} \cong T^*\mathcal{H}_+$. Let us fix a Darboux coordinate system on \mathcal{H}

$$q_k^i(f) := \Omega(\phi^i(-z)^{-k-1}, f(z)), \quad p_{k,i}(f) := \Omega(f(z), \phi_i z^k),$$

where $\{\phi^i\}_{i=1}^N$ is a basis of H dual to $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ with respect to the Poincaré pairing. Note that an element $A(z)$ of the loop algebra $\text{End}(H)((z^{-1}))$ is an infinitesimal symplectic transformation if and only if $A(z) + {}^T A(-z) = 0$. Moreover, the corresponding vector field $X_A(f) = Af$ is Hamiltonian

$$\iota_{X_A} \Omega = dh_A, \quad h_A(f) := \frac{1}{2} \Omega(Af, f).$$

The canonical quantization is by definition the projective representation of the Poisson algebra of quadratic Hamiltonians on the Fock space $\mathbb{C}_\hbar[\mathcal{H}_+]$, where $\mathbb{C}_\hbar = \mathbb{C}((\hbar))$, defined by

$$(p_{k',i'} q_{k'',i''})^\wedge = \hbar \frac{\partial^2}{\partial q_{k'}^{i'} \partial q_{k''}^{i''}}, \quad (p_{k',i'} q_{k'',i''})^\wedge = q_{k''}^{i''} \frac{\partial}{\partial q_{k'}^{i'}}, \quad (q_{k',i'} q_{k'',i''})^\wedge = q_{k'}^{i'} q_{k''}^{i''} / \hbar.$$

In our settings, we complete the Fock space by allowing functions defined in the formal neighborhood of $-1z \in \mathcal{H}_+$, i.e., we work with the space of formal power series

$$\mathbb{C}_\hbar[[q_0, q_1 + \mathbf{1}, q_2, \dots]]. \quad (7)$$

Using that $S_t(z)$ and $R_t(z)$ satisfy differential equations in t and z , it is not hard to prove that both series satisfy the symplectic condition, so one can view them as symplectic transformations of \mathcal{H} . Moreover, both symplectic transformations have the form $e^{A(z)}$, so we can quantize them by $(e^{A(z)})^\wedge := e^{\hbar A}$. The higher-genus reconstruction can be stated as follows:

$$\mathcal{D}_X(\hbar, \mathbf{q}) = e^{F^{(1)}(t)} \widehat{S}_t^{-1} \widehat{\Psi}_t \widehat{R}_t e^{\widehat{U}_t/z} \prod_{i=1}^N \mathcal{D}_{\text{pt}}(\hbar \Delta_i, i \mathbf{q}), \quad (8)$$

where the total descendant potential is identified with an element of the Fock space (7) via the so called *dilaton shift* (we put $\phi_1 := \mathbf{1}$)

$$t_k^i = q_k^i \quad \text{if } (k, i) \neq (1, 1), \quad t_1^1 = q_1^1 + 1,$$

$F^{(1)}(t)$ is the genus-1 primary potential defined similarly to the potential $F(t)$ of the Frobenius structure from the genus-1 part of $\log \mathcal{D}_X$, the quantization $\widehat{\Psi}_t$ is simply the change of variables $\{q_k^i\} \mapsto \{t_k^i\}$ defined by

$${}^i \mathbf{q} = (e_i, \Psi^{-1} \mathbf{q} \sqrt{\Delta_i}) = (\partial/\partial u_i, \mathbf{q}).$$

Formula (8) was discovered by Givental [6] in the case when X is equipped with a torus action with isolated fixed points. Givental introduced the quantization formalism [8] and conjectured that formula (8) holds for manifolds with generically semi-simple quantum cohomology. Givental's conjecture was proved recently by Teleman [15].

There is a certain subtlety in formula (8) that comes from the fact that the composition of the operators $S_t(z)$ and $R_t(z)$ is not well defined. The problem is offset thanks to the notion of *tameness*. Let us define

$$\mathcal{A}_t^X(\hbar, \mathbf{q}) := \widehat{\Psi}_t \widehat{R}_t e^{\widehat{U}_t/z} \prod_{i=1}^N \mathcal{D}_{\text{pt}}(\hbar \Delta_i, {}^i \mathbf{q}). \quad (9)$$

Givental's formula (8) is equivalent to saying that \mathcal{A}_t^X is the *total ancestor potential* of X . We refer to [8] for the precise definition. In these notes we take formula (9) as a definition of the total ancestor potential of a semi-simple Frobenius manifold. It can be checked that \mathcal{A}_t^X is an element of the Fock space (7) of the form

$$\exp \left(\sum_{g=0}^{\infty} \mathcal{F}_t^{(g)}(\mathbf{t}) \hbar^{g-1} \right), \quad (10)$$

satisfying the following $(3g - 3 + r)$ -jet constraints

$$\text{if } k_1 + \dots + k_r > 3g - 3 + r \quad \text{then} \quad \left. \frac{\partial^r \mathcal{F}^{(g)}}{\partial t_{k_1}^{i_1} \dots \partial t_{k_r}^{i_r}} \right|_{\mathbf{t}=0} = 0. \quad (11)$$

Elements of the Fock space of the form (10) satisfying the constraints (11) are called tame. It can be checked that the action of the operator \widehat{R}_t on the space of tame functions is well defined.

2. Singularity theory

Singularity theory is also known as the B-side of mirror symmetry. It provides an alternative description of the Frobenius structures arising in GW theory. In general, one has to develop a deformation theory of global holomorphic functions. However, in this note we will consider only the local case, i.e., deformations of germs of holomorphic functions. Conjecturally, the local cases provide a mirror for some quantum cohomology only if a certain Calabi–Yau condition is satisfied (see [3]).

For some background on singularity theory we refer to [1]. Let $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ be the germ of a holomorphic function with an isolated critical point at 0 (with critical value 0). The local algebra

$$H := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}/(\partial_{x_0}f, \dots, \partial_{x_n}f)$$

is a finite dimensional vector space whose dimension N is called the *Milnor number*. Here $x = (x_0, \dots, x_n)$ are some coordinates of the germ $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Let us choose holomorphic functions $\phi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N$) that represent a basis of H . We define the so called mini-versal deformation of f by

$$F(x, t) = f(x) + \sum_{i=1}^N \phi_i(x)t_i.$$

Here $t = (t_1, \dots, t_N) \in B$, where $B = B^N(0, \delta)$ is a ball in \mathbb{C}^N with center at $t = 0$ and radius δ . Let $X \subset \mathbb{C}^{n+1} \times B$ be an open subdomain such that the graph of $F(x, t)$ is the hypersurface

$$\{(x, t, \lambda) \in B^{n+1}(0, \rho) \times B^N(0, \delta) \times B^1(0, \eta) \mid \lambda = F(x, t)\},$$

where $\rho > 0$ and $\eta > 0$ are sufficiently small real numbers. Let us denote by $C \subset X$ the critical locus of F relative to B , i.e.,

$$C = \{\partial_{x_0}F = \dots = \partial_{x_n}F = 0\} \subset X.$$

We can choose the numbers ρ, δ , and η such that the projection $\text{pr} : C \subset X \rightarrow B$ is a finite branched covering of degree N . We can also arrange that the so called *Milnor fibers*

$$X_{t,\lambda} = \{x \in B^{n+1}(0, \rho) \mid F(x, t) = \lambda\}$$

satisfy the following transversality conditions:

- (i) $X_{t,\lambda}$ is transversal to the boundary of the ball $B^{n+1}(0, \rho)$ for all $(t, \lambda) \in B \times B^1$.
- (ii) $X_{0,0}$ is transversal to the boundary of the ball $B^{n+1}(0, r)$ for all $0 < r \leq \rho$.

Finally, we have the following important result

Proposition 4 *If the numbers ρ, δ, η are sufficiently small, then the Kodaira–Spencer map*

$$\mathcal{T}_B \rightarrow \text{pr}_* \mathcal{O}_C, \quad \partial/\partial t_i \mapsto \partial F/\partial t_i \bmod (\partial_{x_0}F, \dots, \partial_{x_n}F)$$

is an isomorphism.

2.1. Primitive forms and Frobenius structures

The non-singular Milnor fibers $X_{t,\lambda}$ form a smooth fibration with base $(B \times B^1)'$, which by definition is the complement to the *discriminant* consisting of (t, λ) , s.t., $X_{t,\lambda}$ is singular. The corresponding homology and co-homology groups $H_n(X_{t,\lambda}; \mathbb{C})$ and $H^n(X_{t,\lambda}; \mathbb{C})$ are fibers of vector bundles equipped with a flat Gauss–Manin connection. We may assume that there are numbers $0 < \eta'' < \eta' < \eta$, s.t., the discriminant is contained in the domain $|\lambda| < \eta''$. We fix $(0, \eta') \in (B \times B^1)'$ as a reference point. Put

$$\mathfrak{h} = H_n(X_{0,\eta'}; \mathbb{C}), \quad Q = H_n(X_{0,\eta'}; \mathbb{Z}),$$

and denote by $a \circ b$ the intersection of $a, b \in Q$. Let us assume that $n = 2l$ is even, so that the form $(a|b) = (-1)^l a \circ b$ is symmetric. Finally, let $\mathcal{R} \subset Q$ be the set of vanishing cycles, i.e., cycles α that vanish when transported along some path ending at a generic point on the discriminant and such that $(\alpha|\alpha) = 2$. The Gauss–Manin connection gives rise to a monodromy representation

$$\rho : \pi_1((B \times B^1)', (0, \eta')) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{h}).$$

According to the Picard–Lefschetz theory, if C is a simple loop corresponding to a path along which the cycle $\alpha \in \mathcal{R}$ vanishes, then $\rho(C)$ is given by the reflection

$$x \mapsto x - (\alpha|x)\alpha, \quad x \in \mathfrak{h}.$$

In particular, the monodromy group $W = \mathrm{Im}(\rho)$ is a reflection group generated by the above reflections. For more details we refer to [1].

Given a holomorphic volume form $\omega = g(x, t)dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega_{X/B}^{n+1}(X)$ we define the *residue pairing*

$$(\psi_1(x, t), \psi_2(x, t)) := \mathrm{res}_{C/B} \frac{\psi_1(x, t)\psi_2(x, t)}{\partial_{x_0} F \cdots \partial_{x_n} F} g(x, t)^2 dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Using the Kodaira–Spencer isomorphism (cf. Proposition 4) the residue pairing induces a non-degenerate bi-linear form on \mathcal{T}_B while the multiplication on $\mathrm{pr}_* \mathcal{O}$ induces a multiplication \bullet on \mathcal{T}_B . Moreover, the class of F in $\mathrm{pr}_* \mathcal{O}$ determines a vector field $E \in \mathcal{T}_B$. According to K. Saito’s theory of primitive forms [13], there exists a choice of ω , s.t., the multiplication \bullet , the residue pairing $(\ , \)$, and the Euler vector field form a Frobenius structure (see [10, 14]). By definition, the primitive form ω determines an isomorphism of \mathcal{T}_B^* and the vanishing homology bundle (outside of the discriminant), which allows us to identify the Laplace transform of the Dubrovin’s connection with the Gauss–Manin connection. More precisely, put

$$I_\alpha^{(n)}(t, \lambda) := -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^l \partial_\lambda^{l+n} d \int_{\alpha_{t,\lambda}} d^{-1}\omega \in T_t^* B, \quad (12)$$

where $\alpha_{t,\lambda}$ denotes the parallel transport of $\alpha \in \mathfrak{h}$ along a path avoiding the discriminant connecting the reference point with (t, λ) , i.e., $I_\alpha^{(n)}$ is a multi-valued section of \mathcal{T}_B^* , $d^{-1}\omega$ is any n -form η defined in a neighborhood of $X_{t,\lambda}$, s.t., $\omega = d\eta$. The above definition is compatible with the operation stabilization, i.e., adding $y_1^2 + y_2^2$ to f increases l by 1, while the integral changes by an extra factor of $(2\pi)^{-1}$. Therefore, we may increase l as much as we wish, so that the above definition makes sense for all $n \in \mathbb{Z}$. If ω is primitive, then (12) satisfy the following differential equations

$$\nabla_{\partial/\partial t_i}^{\mathrm{L.C.}} I_\alpha^{(n)} = -\phi_i \bullet I_\alpha^{(n+1)}, \quad (13)$$

$$\partial_\lambda I_\alpha^{(n)} = (\lambda - E \bullet)^{-1} \left(\theta - n - 1/2 \right) I_\alpha^{(n)}, \quad (14)$$

$\nabla^{\mathrm{L.C.}}$ is the Levi–Civita connection of the residue pairing, we identified $\mathcal{T}_B^* \cong \mathcal{T}_B$ via the residue pairing, and

$$\theta : \mathcal{T}_B \rightarrow \mathcal{T}_B, \quad \xi \mapsto \nabla_\xi^{\mathrm{L.C.}} E - \frac{1}{2}(2 - D)\xi,$$

is the so called *Hodge grading* operator, where D is the conformal dimension of the Frobenius structure determined uniquely by the property of θ being skew-symmetric with respect to the residue pairing. From now on we fix the following identifications:

$$T^*B \cong TB \cong B \times T_0B \cong B \times H,$$

where the first isomorphism is given by the residue pairing, the second one by the flat Levi-Civita connection, and the last one is the Kodaira–Spencer isomorphism. Also, we fix a flat coordinate system $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, put $\partial_i = \partial/\partial\tau_i$ ($1 \leq i \leq N$), and assume that $\partial_1 = \mathbf{1}$ is the unit of the local algebra H .

2.2. Vertex operators

We extend the quantization formalism as follows. Given $\mathbf{f}(z) \in \mathcal{H}$ we can define a linear function on \mathcal{H} via $\Omega(\mathbf{f}(z), \cdot)$. The canonical quantization gives an operator $\widehat{\mathbf{f}}$ acting on the Fock space, e.g.,

$$(\phi_i z^k)^\wedge = -\hbar^{1/2} \frac{\partial}{\partial q_k^i}, \quad (\phi^i (-z)^{-k-1})^\wedge = \hbar^{-1/2} q_k^i.$$

We will use vertex operators of the form $\Gamma = e^{\widehat{\mathbf{f}}^-} e^{\widehat{\mathbf{f}}^+}$, where \mathbf{f}_\pm means the projection of \mathbf{f} on \mathcal{H}_\pm along \mathcal{H}_\mp . The action of Γ on the Fock space does not make sense in general. However, the action on *tame* vectors is well defined.

Since the operator \widehat{R}_t preserves the space of tame functions, it makes sense to conjugate a vertex operator by \widehat{R}_t . The answer is given by the following elegant formula due to Givental [8]. Let $V_t(\partial, \partial)$ be the quadratic differential operator

$$V_t(\partial, \partial) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^N (\phi^i, V_{kl}(t) \phi^j) \frac{\partial^2}{\partial q_k^i \partial q_l^j}$$

whose coefficients $V_{kl}(t)$ are given by

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} V_{kl}(t) z^k w^l = \frac{1 - R_t(z)({}^T R_t(w))}{z + w}$$

and ${}^T R_t(w)$ denotes the transpose of $R_t(w)$ with respect to the residue pairing.

Proposition 5 *The following formula holds*

$$e^{\widehat{\mathbf{f}}^-} e^{\widehat{\mathbf{f}}^+} \widehat{R}_t = e^{\frac{1}{2} V_t \Omega(\mathbf{f}_-, \cdot)} \widehat{R}_t e^{(R_t^{-1} \mathbf{f})_-} e^{(R_t^{-1} \mathbf{f})_+},$$

where $\Omega(\mathbf{f}_-, \cdot)$ is identified with a linear function on \mathcal{H}_+ .

The vertex operators that we would like to use will be denoted by $\Gamma^\alpha(t, \lambda)$. They correspond via the above mechanism to the vectors

$$\mathbf{f}_\alpha(t, \lambda; z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_\alpha^{(n)}(t, \lambda) (-z)^n.$$

Let us assume that (t, λ) is near a generic point (t_0, u_0) on the discriminant where the cycle α vanishes. We can introduce the phase factor $B_{\alpha, \alpha}(t, \lambda, \mu)$ by the following identity

$$\Gamma^\alpha(t, \lambda) \Gamma^\alpha(t, \mu) = B_{\alpha, \alpha}(t, \lambda, \mu) : \Gamma^\alpha(t, \lambda) \Gamma^\alpha(t, \mu) : ,$$

where the normal ordering $:\ : \text{means that all differentiation operations should be applied before the multiplication ones. Let us denote by } u_i(t) \text{ the critical value of } F, \text{ s.t., the local equation of the discriminant near } (t_0, u_0) \text{ is given by } \lambda = u_i(t). \text{ We assume that } \lambda \text{ and } \mu \text{ satisfy the inequalities:}$

$$|\lambda - \mu| < \min(|\lambda - u_i(t)|, |\mu - u_i(t)|).$$

Note that the local domain $D_i \subset B \times B^1 \times B^1$ around the point (t_0, u_0, u_0) cut out by the above inequalities has the homotopy type of a punctured disk. It is not hard to prove that the phase factor is a multivalued analytic function on D_i with a zero of order 2 along the diagonal $\lambda = \mu$. In particular, we can define

$$b_\alpha(t, \lambda) := \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)^{-2} B_{\alpha, \alpha}(t, \mu, \lambda).$$

Let $\text{rad}(\ |) \subset \mathfrak{h}$ be the radical of the intersection form. Pick cycles $\{a_i\}_{i=1}^{N'}$ and $\{a^i\}_{i=1}^{N'}$ that represent dual bases of the quotient space $\mathfrak{h}/\text{rad}(\ |)$ with respect to the intersection form $(\ |)$, i.e., $(a_i|a^j) = \delta_{i,j}$. Let us introduce also the Heisenberg fields

$$\phi_a(t, \lambda) = (\partial_\lambda \mathbf{f}_a(t, \lambda; z))^\wedge,$$

denote by V the Fock space (7), and let

$$\phi_a^{V \otimes V}(t, \lambda) = \phi_a(t, \lambda) \otimes 1 - 1 \otimes \phi_a(t, \lambda).$$

We are interested in tame functions $\tau \in V$ satisfying the following HQEs:

$$\sum_{i=1}^N \text{res}_{\lambda=u_i} \frac{d\lambda}{\lambda} b_{\alpha_i}(t, \lambda) \left(\Gamma^{\alpha_i}(t, \lambda) \otimes \Gamma^{-\alpha_i}(t, \lambda) + \Gamma^{-\alpha_i}(t, \lambda) \otimes \Gamma^{\alpha_i}(t, \lambda) \right) \tau \otimes \tau = \quad (15)$$

$$- \text{res}_{\lambda=\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{1}{4} + {}^T \theta \theta \right) + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{N'} : \phi_{a_i}^{V \otimes V}(t, \lambda) \phi_{a^i}^{V \otimes V}(t, \lambda) : \right) \tau \otimes \tau. \quad (16)$$

The main motivation to introduce these equations is the following theorem

Theorem 6 *The total ancestor potential of the Frobenius structure corresponding to the primitive form ω is a solution to the HQEs (15)–(16).*

It is natural to expect that the total descendant potential also satisfies HQEs. One might assume naively that we can simply conjugate the vertex operators in (15) by \widehat{S}_t . The problem however is that such a conjugation makes sense only in the formal neighborhood of $\lambda = \infty$, while all residues are taken at the finite points only. Therefore, in order to obtain HQEs for the total descendant potential one has to replace the residue sum (15) by a residue at $\lambda = \infty$. This is the main issue: is there a global residue theorem and if not, then is there a way to offset the difficulty? Our next result is precisely in this direction.

Let us assume that $t_0 \in B$ is a point such that $F(x, t_0)$ has only simple singularities, i.e., critical points of *ADE* type. We may assume that the critical values corresponding to different critical points are different. Let us denote by $u_j(t_0)$, $1 \leq j \leq N''$, the critical values of $F(x, t_0)$. Each critical point ξ_j determines a subroot system $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{R}$ of *ADE*-type that corresponds to vanishing cycles vanishing over ξ_j . Let us choose $t \in B$ sufficiently close to t_0 , s.t., $F(x, t)$ is a Morse function and the critical point $\xi_j(t_0)$ is deformed into several critical points of type A_1 , whose critical values are pairwise distinct and surrounded by a contour C_j . We assume that the interiors of C_j are disks that are pairwise distinct.

Theorem 7 Let $\tau = \mathcal{A}_t$, then the residue sum (15) coincides with

$$\sum_{j=1}^{N''} \oint_{C_j} \frac{d\lambda}{\lambda} \left(\sum_{\alpha \in R_j} b_\alpha(t, \lambda) \Gamma^\alpha(t, \lambda) \otimes \Gamma^{-\alpha}(t, \lambda) \right) \mathcal{A}_t \otimes \mathcal{A}_t.$$

In particular, when the singularity f is simple, from Theorem 6 and Theorem 7 we get the main result of [9].

References

- [1] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. II. Monodromy and asymptotics of integrals*. Monographs in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988.
- [2] A. Buryak, H. Posthuma, S. Shadrin. *A polynomial bracket for the Dubrovin-Zhang hierarchies*. J. Differential Geom. 92, no. 1 (2012): 153–185.
- [3] A. Chiodo and Y. Ruan. *A global mirror symmetry framework for the Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) vol. 61, no. 7 (2011): 2803–2864.
- [4] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*. In: “Integrable systems and quantum groups” (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math., 1620, Springer, Berlin, 1996.
- [5] B. Dubrovin, Y. Zhang. *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants*. a new 2005 version of arXiv:math/0108160v1, 295 pp.
- [6] A. Givental, *Semisimple Frobenius structures at higher genus*. Internat. Math. Res. Notices, no. 23 (2001): 1265–1286.
- [7] A. Givental, *Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians*. Mosc. Math. J. 1 (2001): 551–568.
- [8] A. Givental, *A_{n-1} singularities and n KdV Hierarchies*. Mosc. Math. J. 3 (2003): 475–505.
- [9] A. Givental, T. Milanov. *Simple singularities and integrable hierarchies*. In: “The breadth of symplectic and Poisson geometry”. 173–201. Progr. Math., 232, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
- [10] C. Hertling. *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*. Cambridge Tracts in Math., 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [11] M. Kontsevich. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*. Comm. Math. Phys. 147 (1992): 1–23.
- [12] Y. Manin. *Frobenius manifolds, Quantum cohomology, and Moduli spaces*. American Mathematical Society, Colloquium Publ., Vol. 47(1999).
- [13] K. Saito. *On Periods of Primitive Integrals, I*. Preprint RIMS (1982).
- [14] K. Saito, A. Takahashi. *From primitive forms to Frobenius manifolds*. In: “From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry”. 31–48, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008
- [15] C. Teleman. *The structure of 2D semi-simple field theories*. Invent. Math. 188, no. 3 (2012): 525–588.
- [16] E. Witten. *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space*. In: “Surveys in differential geometry,” 243–310, Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.

可解格子模型と Grothendieck 多項式

茂木康平 (岡山光量子研) ・ 堺和光 (東大教養)

1次元量子可積分系や、それと等価な2次元可解格子模型で、1次元多体確率過程である完全非対称単純排他過程 (TASEP) や完全ゼロレンジプロセス (TAZRP) を特殊な場合として含む模型の代数構造について解析し、幾何学に由来する対称多項式である Grothendieck 多項式との関係を見出した。また、この対応に基づき、Grothendieck 多項式に関する公式を導出した [1,3]。

量子可積分系で基本となるのは L 演算子である。補助空間 W_a と量子空間 V_j のテンソル積 $W_a \otimes V_j$ に作用する次の L 演算子について考える。

$$L_{aj}(u) = us_a s_j + \sigma_a^- \sigma_j^+ + \sigma_a^+ \sigma_j^- + (\alpha u - u^{-1}) n_a s_j + \alpha u n_a n_j.$$

ここで、 W_a と V_j はともに複素2次元ベクトル空間であり、基底 $|0\rangle$ (空孔) と $|1\rangle$ (粒子) によって張られるとする。 σ^\pm, σ^z はスピン-1/2 Pauli 行列であり、 $s = (1 + \sigma^z)/2$ と $n = (1 - \sigma^z)/2$ はそれぞれ $|0\rangle$ と $|1\rangle$ への射影演算子である。下付き添え字 a と j はそれぞれ、補助空間 W_a と量子空間 V_j に作用していることを意味する。

L 演算子の積であるモノドロミー行列

$$T_a(u) = \prod_{i=1}^M L_{aj}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}_a,$$

のトレースである転送行列 $\tau(u) = \text{Tr}_{W_a} T_a(u)$ より、次のハミルトニアンを得る。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ (\sqrt{\alpha} u)^{-M} \tau(u) \right\} \Bigg|_{u=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} = \sum_{j=1}^M \left\{ \alpha \sigma_j^+ \sigma_{j+1}^- + \frac{1}{4} (\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z - 1) \right\}.$$

このハミルトニアンは $\alpha = 0$ で Ising 模型、 $\alpha = \infty$ で自由フェルミオン模型に対応し、 $\alpha = 1$ では排除体積相互作用の下、各粒子がランダムウォークに従う1次元完全非対称単純排他過程 (TASEP) のマルコフ行列である。

真空 $|\Omega\rangle := |0^M\rangle := |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M$ (双対真空 $\langle\Omega| := \langle 0^M| := {}_1\langle 0| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 0|$) に B 演算子 (C 演算子) を作用させて得られる次の状態ベクトルについて考える。

$$|\psi(\{v\}_N)\rangle = \prod_{j=1}^N B(v_j) |\Omega\rangle, \quad \langle\psi(\{u\}_N)| = \langle\Omega| \prod_{j=1}^N C(u_j).$$

更に粒子の配位 $(x_1 < \cdots < x_N)$ を表現する配位ベクトル $|x_1 \cdots x_N\rangle$ とその双対 $\langle x_1 \cdots x_N|$ を導入する。

状態ベクトルと配位ベクトルの内積である波動関数 $\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{v\}_N) \rangle$ とその双対 $\langle \psi(\{u\}_N) | x_1 \cdots x_N \rangle$ が Grothendieck 多項式と等価であることを見出した [1]。即ち、次の等式が成り立つことを示した。

$$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{v\}_N) \rangle = \alpha^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N v_j^{M-1} G_\lambda(\mathbf{z}; \beta),$$

$$\langle \psi(\{u\}_N) | x_1 \cdots x_N \rangle = \alpha^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^{M-1} y_j^{-M+N} (1 + \beta y_j^{-1})^{N-1} \bar{G}_\lambda(\mathbf{y}; \beta).$$

ここで、 $G_\lambda(\mathbf{z}; \beta)$ はグラスマン多様体の Grothendieck 多項式であり、次の行列式表示を持つ [2]。

$$G_\lambda(\mathbf{z}; \beta) = \frac{\det_N(z_j^{\lambda_k + N - k} (1 + \beta z_j)^{k-1})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)},$$

$$\bar{G}_\lambda(\mathbf{z}; \beta) = \frac{\det_N(z_j^{\lambda_k + N - k} (1 + \beta z_j^{-1})^{1-k})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)}.$$

$\bar{G}_\lambda(\mathbf{z}; \beta)$ は実質的に λ の Poincaré 双対 $\lambda^\vee = (M-N)^N - \lambda$ に関する Grothendieck 多項式である。粒子の配位とヤング図は $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1$ という関係で与えられ、

$$z_j = \alpha - v_j^{-2}, \quad y_j^{-1} = \alpha - u_j^{-2}, \quad \beta = -1/\alpha,$$

というパラメータの変数変換を行った。

上述の量子可積分系の波動関数と Grothendieck 多項式の等価性に基づき、Grothendieck 多項式に関する公式を可解格子模型の技法によって導出、証明することができる。例えば、Grothendieck 多項式の Cauchy 公式や和公式、直交性などは、状態ベクトルの内積であるスカラー積の行列式表示や、配位ベクトルの直交性から従う [1]。更に、ボソンの模型からも Grothendieck 多項式が出現することがわかった [3]。

参考文献

- [1]. K. Motegi and K. Sakai,
Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials
Journal of Physics A **46** (2013) 355201.
- [2]. T. Ikeda and H. Naruse,
 K -theoretic analogues of factorial Schur P - and Q -functions
Advances in Mathematics **243** (2013) 22.
- [3]. K. Motegi and K. Sakai, in preparation.

Multivariate circular Jacobi polynomials

渋川 元樹 (九州大学)*

概 要

球多項式を 2-parameter 変形した直交多項式系を構成する. これは Jack 多項式とは別の球多項式の拡張であり, circular Jacobi 多項式の変数化にあたる.

定義 1. MCJ 多項式 $\phi_{\mathbf{m}}^{(\beta)}(e^{i\theta}; \alpha, \nu)$ を次で定義する.

$$\phi_{\mathbf{m}}^{(\beta)}(e^{i\theta}; \alpha, \nu) := d_{\mathbf{m}} \frac{(\alpha)_{\mathbf{m}}}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\beta} \frac{\left(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}) + i\nu\right)_{\mathbf{k}}}{(\alpha)_{\mathbf{k}}} \cdot \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1 - e^{i\theta_1}, \dots, 1 - e^{i\theta_r})}{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)}. \quad (1)$$

但し $n = r + \frac{1}{\beta}r(r-1)$, \mathbf{m}, \mathbf{k} は整数の分割, $d_{\mathbf{m}}$ はベータ函数 B を用いて

$$d_{\mathbf{m}} := \prod_{1 \leq p < q \leq r} \frac{m_p - m_q + \frac{1}{\beta}(q-p)}{\frac{1}{\beta}(q-p)} \frac{B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q-p-1) + 1\right)}{B\left(m_p - m_q, \frac{1}{\beta}(q+1-p)\right)}$$

と表される定数とし, $(\mathbf{s})_{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$ に対して定まる一般階乗ベキ

$$(\mathbf{s})_{\mathbf{k}} := \prod_{j=1}^r \left(s_j - \frac{1}{\beta}(j-1) \right)_{k_j} \quad ((\alpha)_{\mathbf{k}} \text{ は } ((\alpha, \dots, \alpha))_{\mathbf{k}} \text{ とみなす})$$

であり, $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_r$ とする. 更に $P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}$ を r 変数の Jack 多項式, $\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}$ は

$$\frac{P_{\mathbf{m}}^{(\beta)}(1 + \lambda_1, \dots, 1 + \lambda_r)}{P_{\mathbf{m}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)} = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\beta} \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)}{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)}$$

で定まる一般 (Jack) 二項係数としよう.

定理 2. $\alpha > \frac{n}{r} - 1$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\beta = \frac{1}{2}, 1, 2$ のとき, 任意の分割 \mathbf{m}, \mathbf{n} について,

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{c}_0}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \phi_{\mathbf{m}}^{(\beta)}(e^{i\theta}; \alpha, \nu) \overline{\phi_{\mathbf{n}}^{(\beta)}(e^{i\theta}; \alpha, \nu)} \\ & \cdot \prod_{j=1}^r (1 - e^{i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) + i\nu} (1 - e^{-i\theta_j})^{\frac{1}{2}(\alpha - \frac{n}{r}) - i\nu} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^{\frac{2}{\beta}} d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ & = d_{\mathbf{m}} \frac{\Gamma_{\Omega}(\alpha + \mathbf{m})}{\left(\frac{n}{r}\right)_{\mathbf{m}}} \frac{1}{|\Gamma_{\Omega}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \frac{n}{r}) + i\nu\right)|^2} \delta_{\mathbf{m}\mathbf{n}}. \end{aligned} \quad (2)$$

本研究は科研費 (課題番号:12J04930) の助成を受けたものである.

キーワード: multivariate orthogonal polynomials, harmonic analysis, circular Jacobi ensemble

* 〒 819-0385 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 大学院数理学府

e-mail: g-shibukawa@math.kyushu-u.ac.jp

ここで

$$\tilde{c}_0 := (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}j + 1\right)}$$

であり,

$$\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s}) = (2\pi)^{\frac{n-r}{2}} \prod_{j=1}^r \Gamma\left(s_j - \frac{1}{\beta}(j-1)\right).$$

注意 3. (i) この直交多項式系の weight 関数は P. Bourgade et. al [1] により導入された circular Jacobi ensemble となっている.

(ii) $\alpha = \frac{n}{r}, \nu = 0$ の時, MCJ 多項式は

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{m}}^{(\beta)}\left(e^{i\theta}; \frac{n}{r}, 0\right) &= d_{\mathbf{m}} \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{m}} (-1)^{|\mathbf{k}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}_{\beta} \frac{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1 - e^{i\theta_1}, \dots, 1 - e^{i\theta_r})}{P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(1, \dots, 1)} \\ &= d_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{k}}^{(\beta)}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}) \end{aligned}$$

となって Jack 多項式に退化し, (2) も Jack 多項式の特例化 ($\beta = \frac{1}{2}, 1, 2$) である球多項式の直交性

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_0}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \phi_{\mathbf{m}}^{(\beta)}\left(e^{i\theta}; \frac{n}{r}, 0\right) \overline{\phi_{\mathbf{n}}^{(\beta)}\left(e^{i\theta}; \frac{n}{r}, 0\right)} \prod_{1 \leq k < l \leq r} |e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}|^{\frac{2}{\beta}} d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ = d_{\mathbf{m}} \frac{1}{\Gamma_{\Omega}\left(\frac{n}{r}\right)} \delta_{\mathbf{m}\mathbf{n}} \end{aligned}$$

となる.

(iii) 1 変数の時, (1) は circular Jacobi 多項式 (の ν による 1-parameter 変形)

$$\begin{aligned} \phi_m(e^{i\theta}; \alpha, \nu) &:= \frac{(\alpha)_m}{m!} {}_2F_1\left(-m, \frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\nu; \alpha; 1 - e^{i\theta}\right) \\ &= \frac{(\alpha)_m}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\left(\frac{1}{2}(\alpha + 1) + i\nu\right)_k}{(\alpha)_k} (1 - e^{i\theta})^k, \end{aligned}$$

(2) はその直交関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(e^{i\theta}; \alpha, \nu) \overline{\phi_n(e^{i\theta}; \alpha, \nu)} (1 - e^{i\theta})^{\frac{1}{2}(\alpha-1)+i\nu} (1 - e^{-i\theta})^{\frac{1}{2}(\alpha-1)-i\nu} d\theta \\ = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m!} \frac{1}{\left|\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} + i\nu\right)\right|^2} \delta_{mn} \quad (\text{For } \alpha > 0, \nu \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

にそれぞれ退化する. 更に $\phi_m(e^{i\theta}; 1, 0) = e^{im\theta}$ であり, その直交関係式はよく知られた

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_m(e^{i\theta}; 1, 0) \overline{\phi_n(e^{i\theta}; 1, 0)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \delta_{mn}$$

となる.

参考文献

- [1] P. Bourgade, A. Nikeghbali and A. Rouault, Circular Jacobi ensembles and deformed Verblunsky coefficients, IMRN. **23** (2009), 4357-4394.

A connection formula of a divergent basic hypergeometric function ${}_3\varphi_0(a_1, a_2, a_3; -; q, x)$

Takeshi MORITA (Osaka University)*

1. Aim and main methods

We show a connection formula for a divergent basic hypergeometric function

$${}_3\varphi_0(a_1, a_2, a_3; -; q, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(a_1; q)_n (a_2; q)_n (a_3; q)_n}{(q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{-2} x^n \quad (1)$$

with the using of the “*extended*” q -Borel-Laplace transformations. Here, $(a; q)_n := (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})$ is the q -shifted factorial (see [2] for more details). The function (1) satisfies the third order linear q -difference equation

$$\begin{aligned} & \left(a_1 a_2 a_3 x - \frac{1}{q^2} \right) u(q^3 x) - \left\{ (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) x \frac{1}{q^2} \right\} u(q^2) \\ & + (a_1 + a_2 + a_3) x u(qx) - x u(x) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

We give the new connection formula for the divergent series (1) from the viewpoint of connection problems on linear q -difference equations. The q -Borel-Laplace transformations of the level 2 play an important role in the connection problems.

2. Connection problems on q -difference equations

Connection problems on linear q -difference equations between solutions around the origin and infinity were studied by G. D. Birkhoff [1]. On second order q -difference case, connection formulae between solutions around the origin and infinity are given by the following matrix form:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}.$$

Here, $(u_1(x), u_2(x))$ is a fundamental system of solutions of second order linear q -difference equation around the origin and $(v_1(x), v_2(x))$ is a fundamental system of solutions around the infinity. We remark that the connection coefficients $C_{jk}(x) (1 \leq j, k \leq 2)$ are given by q -elliptic functions (i.e., $C_{jk}(qx) = C_{jk}(x)$ and unique valued). Watson gave the first example of the connection formula for Heine’s basic hypergeometric series [6]. But other cases, namely, irregular singular cases has not known for a long time. The irregularity of q -difference equations are studied using the Newton polygons by J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang [5]. They introduce the q -Borel-Laplace transformations to study the q -Stokes phenomenon. Zhang gives connection formulae for some q -special functions and a divergent series. The author also give connection formulae for the q -confluent type basic hypergeometric function, the Hahn-Exton q -Bessel function and the divergent basic hypergeometric series which is related to the Ramanujan entire function [3, 4] by the using of the q -Borel-Laplace resummation methods. We introduce the *extended* q -Borel-Laplace transformations to study the connection problem for the series (1).

This work was supported by KAKENHI (25-1840).

2000 Mathematics Subject Classification: 33D15, 34M40, 39A13.

Keywords: q -Borel-Laplace transformation, bilateral basic hypergeometric function.

* e-mail: t-morita@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

3. The q -Borel-Laplace transformations of the level 2

We define the q -Borel transformation and the q -Laplace transformation of the level 2. We assume that the function $f(x)$ is a formal power series such that $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$, $a_0 := 1$.

Definition 1. 1. The q -Borel transformation of the level 2 is

$$\left(\mathcal{B}_{q^2}^+ f\right)(\xi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^{n(n-1)} \xi^n = \varphi(\xi).$$

2. The q -Laplace transformation of the level 2 is

$$\left(\mathcal{L}_{q^2}^+ \varphi\right)(x) := \frac{1}{1 - q^2} \int_0^{\lambda \infty} \frac{\varphi(\xi)}{\theta_{q^2}\left(\frac{\xi}{x}\right)} \frac{d_{q^2} \xi}{\xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(\lambda q^{2n})}{\theta\left(\frac{\lambda q^{2n}}{x}\right)}.$$

Here, $\theta_{q^2}(x)$ is the theta function of Jacobi with the base q^2 and we remark that the q^2 -Borel transformation is the formal inverse of the q^2 -Laplace transformation. These transformations are powerful tools for the divergent series.

4. Local solutions around the infinity and Main theorem

The equation (2) also has solutions around infinity:

$$\begin{aligned} v_1(x; a_1, a_2, a_3) &= \frac{\theta_q(a_1 x)}{\theta_q(x)} \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1; q)_n (q/a_1 a_2 a_3 x)^n}{(q a_1/a_2, a_1/a_3; q)_n (q; q)_n}, \\ v_2(x) &= v_1(x; a_2, a_1, a_3), \\ v_3(x) &= v_1(x; a_3, a_2, a_1). \end{aligned}$$

We give the following theorem with the using of the q -Borel-Laplace transformations.

Theorem. For any $x \in \mathbb{C}^* \setminus [-\lambda; q]$, we have

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{L}_{q^2, \lambda}^+ \circ \mathcal{B}_{q^2, 3}^+ \varphi_1(a_1, a_2, a_3; -; q, x)\right)(x) \\ &= \frac{(a_2, a_3; q)_\infty}{(a_2/a_1, a_3/a_1; q)_\infty} \frac{\theta_q(-a_1 \lambda/q)}{\theta_q(-\lambda/q)} \frac{\theta_{q^2}(\lambda/a_1^2 x)}{\theta_{q^2}(\lambda/x)} \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(a_1 x)} v_1(x) \\ &+ \frac{(a_1, a_3; q)_\infty}{(a_1/a_2, a_3/a_2; q)_\infty} \frac{\theta_q(-a_2 \lambda/q)}{\theta_q(-\lambda/q)} \frac{\theta_{q^2}(\lambda/a_2^2 x)}{\theta_{q^2}(\lambda/x)} \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(a_2 x)} v_2(x) \\ &+ \frac{(a_2, a_1; q)_\infty}{(a_2/a_3, a_1/a_3; q)_\infty} \frac{\theta_q(-a_3 \lambda/q)}{\theta_q(-\lambda/q)} \frac{\theta_{q^2}(\lambda/a_3^2 x)}{\theta_{q^2}(\lambda/x)} \frac{\theta_q(x)}{\theta_q(a_3 x)} v_3(x), \end{aligned}$$

provided that $[\lambda; q] := \{\lambda q^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ for any fixed $\lambda \notin q^{\mathbb{Z}}$.

References

- [1] G. D. Birkhoff, Proc. Am. Acad. Arts and Sciences, **49** (1914), 521 – 568.
- [2] G. Gasper and M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge, 2004.
- [3] T. Morita, A connection formula of the Hahn-Exton q -Bessel Function, SIGMA, **7** (2011), 115, 11pp.
- [4] T. Morita, A connection formula of the q -confluent hypergeometric function, SIGMA, **9** (2013), 050, 13pp.
- [5] J.-P. Ramis, J. Sauloy and C. Zhang, Local analytic classification of q -difference equations, arXiv:0903.0853.
- [6] G. N. Watson, The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1910), 281–299.

4 面体方程式と q -振動子表現の量子 R 行列

国場敦夫 (東大総合文化) 尾角正人 (阪市大理)

1 4 面体方程式と Yang-Baxter 方程式

F をベクトル空間とし, $\mathcal{R} \in \text{End}(F^{\otimes 3})$ についての関係式

$$\mathcal{R}_{1,2,4}\mathcal{R}_{1,3,5}\mathcal{R}_{2,3,6}\mathcal{R}_{4,5,6} = \mathcal{R}_{4,5,6}\mathcal{R}_{2,3,6}\mathcal{R}_{1,3,5}\mathcal{R}_{1,2,4} \in \text{End}(F^{\otimes 6})$$

を 4 面体方程式 [5] という. 添字は非自明に作用する $F^{\otimes 6}$ の成分を表す. 本稿では q を generic として $F = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}(q^{1/2})|m\rangle$ ととり, 量子座標環 [3] や量子幾何 [1] の考察から得られた以下の \mathcal{R} を扱う.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(|i\rangle \otimes |j\rangle \otimes |k\rangle) &= \sum_{a,b,c \geq 0} \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} |a\rangle \otimes |b\rangle \otimes |c\rangle, \\ \mathcal{R}_{i,j,k}^{a,b,c} &= \delta_{i+j}^a \delta_{j+k}^b \delta_{i+k}^c \sum_{\lambda+\mu=b} (-1)^\lambda q^{t(c-j)+(k+1)\lambda+\mu(\mu-k)} \frac{(q^2)_{c+\mu}}{(q^2)_c} \binom{i}{\mu}_{q^2} \binom{j}{\lambda}_{q^2}. \end{aligned}$$

ここで $(q)_m = \prod_{j=1}^m (1 - q^j)$, $\binom{m}{j}_q = (q)_m / ((q)_j (q)_{m-j})$.

4 面体方程式の第 4, 5, 6 成分を適宜消去することにより Yang-Baxter 方程式 $\mathcal{R}_{1,2}\mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{2,3} = \mathcal{R}_{2,3}\mathcal{R}_{1,3}\mathcal{R}_{1,2}$ に帰着させる操作を 2 次元簡約という. 上の \mathcal{R} は自然数 n ごとにトレース [1], あるいは特別な行列要素をとる操作 [4] による 2 次元簡約を許す. 後者の結果は以下で与えられる. ($\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ に対し $|\mathbf{a}\rangle = |a_1\rangle \otimes \dots \otimes |a_n\rangle \in F^{\otimes n}$ とおく.)

命題 1. $s, t = 1, 2$ に対し $S^{s,t}(z) \in \text{End}(F^{\otimes n} \otimes F^{\otimes n})$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned} S^{s,t}(z)(|\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle) &= \sum_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} S^{s,t}(z)_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} |\mathbf{a}\rangle \otimes |\mathbf{b}\rangle, \\ S^{s,t}(z)_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}^{\mathbf{a}, \mathbf{b}} &= \sum_{c_0, \dots, c_n \geq 0} \frac{z^{c_0} (q^2)_{sc_0}}{(q^{s^2})_{c_0} (q^{t^2})_{c_n}} \mathcal{R}_{i_1, j_1, c_1}^{a_1, b_1, sc_0} \mathcal{R}_{i_2, j_2, c_2}^{a_2, b_2, c_1} \dots \mathcal{R}_{i_{n-1}, j_{n-1}, c_{n-1}}^{a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-2}} \mathcal{R}_{i_n, j_n, tc_n}^{a_n, b_n, c_{n-1}}. \end{aligned}$$

$S(z) = S^{s,t}(z)$ は Yang-Baxter 方程式 $S_{1,2}(x)S_{1,3}(xy)S_{2,3}(y) = S_{2,3}(y)S_{1,3}(xy)S_{1,2}(x)$ を満たす. ここで $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$ はいずれも $F^{\otimes n}$ のコピーを表す.

$\mathcal{R}_{1,2,3}$ を空間 3 方向に n 回合成し, それが引き起こす遷移 $\chi_t(1) \rightarrow \chi_s(z)$ の行列要素をとったものが $S^{s,t}(z)$ である. ここで $\chi_s(z) = \sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{(q^{s^2})_m} |sm\rangle \in F$. $\chi_s(z)$ は $\mathcal{R}(\chi_s(x) \otimes \chi_s(xy) \otimes \chi_s(y)) = \chi_s(x) \otimes \chi_s(xy) \otimes \chi_s(y)$ を満たし, これにより 2 次元簡約が機能する. χ_1, χ_2 を境界ベクトルと呼ぶ.

本稿の目的は, 2 次元簡約により生成された Yang-Baxter 方程式の解 $S^{s,t}(z)$ を量子群の枠組みの中で特徴づけることである. なお $S^{2,1}(z)$ は $S^{1,2}(z)$ に帰着されるので以下ではそれ以外を考察の対象とする. またトレースによる 2 次元簡約については [1] を参照のこと.

2 q -振動子表現と量子 R 行列

$U_q = \langle e_j, f_j, k_j^{\pm 1} \rangle_{0 \leq j \leq n}$ を Drinfeld-Jimbo 量子アフィン代数 $U_q(D_{n+1}^{(2)}), U_q(A_{2n}^{(2)}), U_q(C_n^{(1)})$ とする. $V_x = F^{\otimes n}[x, x^{-1}]$, ($x \in \mathbb{C}^\times$) とおき, $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$ という記号を用いる.

命題 2. 以下の作用により V_x は $U_q(D_{n+1}^{(2)})$ の既約表現となる.

$$\begin{aligned} e_0|\mathbf{m}\rangle &= x|\mathbf{m} + \mathbf{e}_1\rangle, & f_0|\mathbf{m}\rangle &= i\kappa[m_1]x^{-1}|\mathbf{m} - \mathbf{e}_1\rangle, & k_0|\mathbf{m}\rangle &= -iq^{m_1 + \frac{1}{2}}|\mathbf{m}\rangle, \\ e_j|\mathbf{m}\rangle &= [m_j]|\mathbf{m} - \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_{j+1}\rangle, & f_j|\mathbf{m}\rangle &= [m_{j+1}]|\mathbf{m} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}\rangle, & k_j|\mathbf{m}\rangle &= q^{-m_j + m_{j+1}}|\mathbf{m}\rangle \quad (1 \leq j < n), \\ e_n|\mathbf{m}\rangle &= i\kappa[m_n]|\mathbf{m} - \mathbf{e}_n\rangle, & f_n|\mathbf{m}\rangle &= |\mathbf{m} + \mathbf{e}_n\rangle, & k_n|\mathbf{m}\rangle &= iq^{-m_n - \frac{1}{2}}|\mathbf{m}\rangle. \end{aligned}$$

ただし $[m] = (q^m - q^{-m})/(q - q^{-1})$, $\kappa = (q + 1)/(q - 1)$.

これを q -振動子表現と呼ぶ. ここではスペース上割愛するが, $U_q(A_{2n}^{(2)})$, $U_q(C_n^{(1)})$ についても同様の新しい既約表現を得た. 類似の先行結果としては $U_q(A_n^{(1)})$ と $U_q(C_n)$ の q -振動子表現 [2] が知られている. 本稿で考察する $U_q(D_{n+1}^{(2)})$, $U_q(A_{2n}^{(2)})$, $U_q(C_n^{(1)})$ のうち, $U_q(B_n)$ を部分代数に持つ $U_q(D_{n+1}^{(2)})$, $U_q(A_{2n}^{(2)})$ の場合は, 因子 κ のために q -振動子表現は $q \rightarrow 1$ において特異である.

テンソル積 $V_x \otimes V_y$ は generic な $z = x/y$ については既約であり, q -振動子表現に付随する量子 R 行列 $R(z) \in \text{End}(V_x \otimes V_y)$ が規格化を除いて $[PR(z), \Delta(g)] = 0$ ($\forall g \in U_q$) により特徴づけられる. ここで Δ は U_q の余積, $P(u \otimes v) = v \otimes u$ である. $R(z)$ は Yang-Baxter 方程式を満たし, $V_x \otimes V_y$ に含まれる無限個の既約成分にスペクトル分解される. ($U_q(C_n^{(1)})$ の場合は V_x 自体が 2 個の既約成分からなり, 量子 R 行列はより細かい成分ごとに特徴づけられる [4].)

3 結果

$F^{\otimes n}$ に働く作用素 K を $K|\mathbf{m}\rangle = (-iq^{\frac{1}{2}})^{m_1 + \dots + m_n}|\mathbf{m}\rangle$ により定める. 量子 R 行列のゲージ変換 $\tilde{R}(z) = (K^{-1} \otimes 1)R(z)(1 \otimes K)$ を導入する. $\tilde{R}(z)$ も Yang-Baxter 方程式を満たす. $U_q(\mathfrak{g})$ の q -振動子表現に付随する $\tilde{R}(z)$ を $\tilde{R}_{\mathfrak{g}}(z)$ と書く. また $\tilde{R}_{\mathfrak{g}}(z)$ は適宜規格化されているものとする.

定理 3. ([4]) 以下の等式が成り立つ.

$$S^{1,1}(z) = \tilde{R}_{D_{n+1}^{(2)}}(z), \quad S^{1,2}(z) = \tilde{R}_{A_{2n}^{(2)}}(z), \quad S^{2,2}(z) = \tilde{R}_{C_n^{(1)}}(z).$$

注意 4. 定理において, 境界ベクトル χ_1, χ_2 と \mathfrak{g} の Dynkin 図の端の形状が以下の様に対応している.

$$\chi_1(z) \begin{array}{c} 0 \\ \circ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} n \\ \rightarrow \circ \end{array} \chi_1(1) \quad \chi_2(z) \begin{array}{c} 0 \\ \circ \rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} n \\ \leftarrow \circ \end{array} \chi_2(1)$$

参考文献

- [1] V. V. Bazhanov and S. M. Sergeev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, J. Phys. A: Math. Theor. **39** 3295–3310 (2006).
- [2] T. Hayashi, *Q-analogues of Clifford and Weyl algebras–spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **127** 129–144 (1990).
- [3] M. M. Kapranov and V. A. Voevodsky, *2-Categories and Zamolodchikov tetrahedron equations*, Proc. Symposia in Pure Math. **56** 177–259 (1994).
- [4] A. Kuniba and M. Okado, *Tetrahedron equation and quantum R matrices for q-oscillator representations of $U_q(A_{2n}^{(2)})$, $U_q(C_n^{(1)})$ and $U_q(D_{n+1}^{(2)})$* , arXiv:1311.4258.
- [5] A. B. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, Soviet Phys. JETP **79** 641–664 (1980).

特異点のブローアップによるハミルトン系の可積分性の判定

柴山 允瑠 (大阪大学)*

\mathcal{D} を \mathbb{R}^{2k} の開集合とし, $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする.

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (1)$$

の形で表される微分方程式を Hamilton の正準方程式, あるいは Hamilton 力学系といひ, 関数 H を Hamiltonian という. このとき, n を自由度という.

自由度 n の Hamilton 力学系において, n 個の第一積分 F_1, \dots, F_n が存在し, dF_1, \dots, dF_n が稠密な開集合上で一次独立で, 互いに Poisson 可換 ($\{F_i, F_j\} = 0 (i, j = 1, \dots, n)$) であるとき, この Hamilton 力学系は可積分であるという. Liouville-Arnold の定理 ([1] などを参照) により, 可積分な Hamilton 力学系について, 第一積分の値を固定することで定まる部分集合がコンパクトならその近傍では n 次元トーラスを葉とする葉層構造をもち, 各解は 1 つのトーラス上で準周期運動をすることが保証される. よって, 解の振る舞いはよく分かる. 一方, 非可積分な Hamilton 力学系の振る舞いは一般に複雑で, 多くの場合カオスが起きているだろうと予想される. 従って, Hamilton 力学系が可積分かどうかを判定するのは非常に重要な問題であり, 古くから研究されてきた. Bruns, Poincaré は 3 体問題について, 非可積分性を示した. Kovalevski は剛体の運動方程式について可積分となる新たなパラメータを発見した. その方法は, 特異点を持つ解の解析接続性に着目するもので, その研究の流れは, Ziglin, 吉田春夫らにより継続された. さらに, Morales-Ruiz, Ramis [3] は微分 Galois 理論の応用により Ziglin 解析を拡張し, 強い結果が得られている.

本講演では以上のもとは異なる方法により非可積分性を証明する. 次数 $\beta (\in \mathbb{Z})$ の斉次ポテンシャルをもつ 2 自由度系のハミルトニアンを考える:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 + U(\mathbf{q}) \quad ((\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})) \\ U(\lambda \mathbf{q}) &= \lambda^\beta U(\mathbf{q}) \quad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \lambda > 0). \end{aligned} \quad (2)$$

$V(\theta) = U(\cos \theta, \sin \theta)$ とおく.

定理 1 (Shibayama [4]). 次の 1~7 を仮定する:

1. V は解析的である;
2. $\beta \neq -2, 0$;
3. V は 3 つの臨界点を持つ: $\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta_l) = 0 (l = -1, 0, 1)$ かつ $\theta_{-1} < \theta_0 < \theta_1$;

本研究は住友財団基礎科学研究助成 (助成番号:111153) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 37J30

キーワード: ハミルトン力学系, 可積分性

* 〒560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 大阪大学 大学院基礎工学研究科 数理教室

e-mail: shibayama@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

web: <http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~shibayama/>

4. $[\theta_{-1}, \theta_1]$ 上で $V(\theta) < 0$;
5. $(\theta_{-1}, \theta_0) \cup (\theta_0, \theta_1)$ 上で $\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta) \neq 0$;
6. $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_{\pm 1}) < 0$;
7. $-\frac{1}{8}(\beta + 2)^2 V(\theta_0) < \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_0)$.

このとき, (2) は H に独立で解析的な第一積分を持たない.

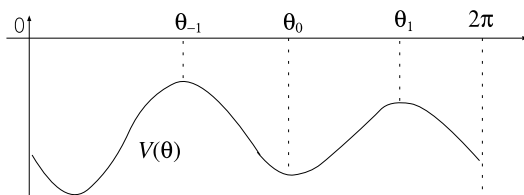


図 1: 関数 $V(\theta)$ の概形

注意 1. $\beta = -2$ の場合は, 定理から除外されていた. この場合,

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^2 - 2\|\mathbf{q}\|^2 H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

が第一積分になっており, 常に可積分である.

注意 2. $[\theta_{-1}, \theta_1]$ 上で $V(\theta) > 0$ の場合は, そのままでは定理の仮定を満たさない. しかし, 時間 t を $\sqrt{-1}t$ に置き換えると, V が $-V$ に置き換わった方程式になる.

証明では, 特異点 $\|\mathbf{q}\| = 0$ あるいは ∞ に着目する. McGehee [2] が 3 体問題の衝突特異点をブローアップした手法を応用すると特異点に対応する多様体が現れる. そのうえの安定多様体と不安定多様体の振る舞いをもとに, 非可積分性を証明する. 仮定 7 はその多様体上に安定 (あるいは不安定) フォーカスが存在することに対応する.

参考文献

- [1] V. I. アーノルド, 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.
- [2] R. McGehee, Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem *Invent. Math.*, **27** (1974), 191-227.
- [3] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhaeuser Basel, 1999.
- [4] M. Shibayama, Non-integrability criterion for homogeneous Hamiltonian systems via blowing-up technique of singularities, preprint. (available at <http://arxiv.org/abs/1307.4509>)

高階パンルヴェ方程式とリジッド方程式, 超幾何関数

鈴木 貴雄 (近畿大学理工学部)*

概 要

パンルヴェVI型方程式 (以下 P_{VI} と記す) の高階化の研究は, フックス型方程式のモノドロミー保存変形の観点から最近盛んに行われている. 本講演では, この高階パンルヴェ方程式¹のリジッド方程式²及び超幾何関数による特殊解について考察する. これにより, トマエの ${}_{n+1}F_n$, アベルの F_1, F_2, F_3, F_4 , シンプソンの even-odd 族といった様々な超幾何関数が特殊解として現れ, 更には F_2, F_3 の高階化となるような2変数超幾何関数も新たに得られる.

1. はじめに: 背景と動機

コストフ及び大島の先行研究 [14, 15, 16] によって, 既約なフックス型線形微分方程式はアクセサリパラメータの数を固定すれば, カッツの2種類の変換操作 [11] によって高々有限個のものに帰着する事が明らかになった. また一方で, フックス型方程式のモノドロミー保存変形として得られる非線形微分方程式はカッツの2種類の変換操作の下で不変である事が, 原岡らの先行研究 [6] によって示された. これにより, モノドロミー保存変形の観点による高階パンルヴェ方程式の分類が可能となった.

アクセサリパラメータを2つ持つフックス型方程式は, 以下の4種類のスペクトル型³の方程式のいずれかに帰着する [14].

4 singularities	11, 11, 11, 11
3 singularities	111, 111, 111 22, 1111, 1111 33, 222, 111111

スペクトル型 11, 11, 11, 11 のフックス型方程式からは P_{VI} が導かれる [2]. 他の3つについては変形パラメータを持たないため, 微分方程式ではなく差分パンルヴェ方程式 (E_6, E_7, E_8 型) が得られる. また, アクセサリパラメータを4つ持つフックス型方程式で変形パラメータを持つものは, 以下の4種類のいずれかに帰着する⁴ [15, 16].

5 singularities	11, 11, 11, 11, 11
4 singularities	21, 21, 111, 111 31, 22, 22, 1111 22, 22, 22, 211

坂井らはこの分類を元に, 更にフックス型方程式の合流操作を考察する事によって, 4階パンルヴェ方程式⁵の分類を行った [13, 17].

2010 Mathematics Subject Classification: 34M56, 33C67, 17B80

キーワード: パンルヴェ方程式, モノドロミー保存変形, 超幾何関数

* 〒 577-8502 東大阪市小若江 3-4-1 近畿大学理工学部

e-mail: suzuki@math.kindai.ac.jp

¹本講演では, フックス型方程式のモノドロミー保存変形として得られる非線形微分方程式を総称してこのように呼ぶ.

²本講演では1変数のリジッド方程式のみを考える. 因みに, 多変数のリジッド方程式の定義は原岡によって最近与えられた.

³各特異点における特性指数 (または留数行列の固有値) の重複度データの事.

⁴表に挙げたものに加えて, 特異点を3つ持つフックス型方程式が全部で9つ存在する.

⁵坂井は "4次元パンルヴェ方程式" と表記しているが, 本講演では "n階" の表記で統一する.

講演者は大島及び坂井の先行研究を元に、アクセサリパラメータを6つ持つフックス型方程式を系統的に調べる事で、全部で12個ある6階パンルヴェ方程式のリストを提出した [22]. 対応するスペクトル型は以下の通りである⁶.

6 singularities	11, 11, 11, 11, 11, 11		
5 singularities	21, 21, 21, 21, 111	31, 31, 22, 22, 22	
4 singularities	21, 111, 111, 111	22, 22, 211, 211	22, 22, 22, 1111
	31, 22, 211, 1111	31, 31, 1111, 1111	33, 33, 33, 321
	42, 33, 33, 222	51, 33, 222, 222	51, 33, 33, 111111

その他の高階パンルヴェ方程式については、現在までに以下のスペクトル型に対応するものが調べられている⁷.

$2mn$ acc. par.	$m + 3$ sing.	$(n, 1), \dots, (n, 1), (1, \dots, 1), (1, \dots, 1)$
$2n$ acc. par.	4 sing.	$(2n - 1, 1), (n, n), (n, n), (1, \dots, 1)$ $(n, n), (n, n), (n, n), (n, n - 1, 1)$

一番上のフックス型方程式からはシュレジンガー・津田系 $\mathcal{H}_{n+1,m}$ [24] が得られる. これはガルニエによる古典的な結果 [4] を $n = 1$ の場合として含む. 二番目のものからは笹野系 [18] が得られる. この方程式は当初, P_{VI} の $D_4^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性と岡本初期値空間を拡張する事で導出されたが, その後論文 [3] によってモノドロミー保存変形としての意味付けが明らかにされた. また一番下のものからは行列型パンルヴェ系 [17, 12] が得られる.

P_{VI} (またはガルニエ系) のガウス超幾何関数 ${}_2F_1$ (またはロリチュエラ超幾何関数 F_D) による特殊解は古くから知られていたが, 最近になってその高階化, すなわち高階パンルヴェ方程式の超幾何関数解の研究に大きな進展があった. 現在までに得られた4階及び6階パンルヴェ方程式の超幾何関数解のリストを以下に提示する.

Painlevé system	Rigid system	HGF	Ref.
$\mathcal{H}^{11,11,11,11,11,11}$ ($= \mathcal{H}^{21,21,21,21,21}$)	21, 21, 21, 21	$P_3(F_1)$	[4, 7]
$\mathcal{H}^{21,21,111,111}$	21, 111, 111	${}_3F_2$	[21, 25]
$\mathcal{H}^{11,11,11,11,11,11}$ ($= \mathcal{H}^{31,31,31,31,31}$)	31, 31, 31, 31, 31	$P_4(F_D)$	[4, 7]
$\mathcal{H}^{21,21,21,21,111}$ ($= \mathcal{H}^{31,31,31,22,211}$)	31, 31, 22, 211	$I_4, \Pi_2^*(F_2, F_3)$	[22]
$\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$	31, 22, 22, 22	$P_{4,4}(F_4)$	[22]
$\mathcal{H}^{21,111,111,111}$ ($= \mathcal{H}^{31,211,211,211}$)	211, 211, 211	Π_2	[22]
$\mathcal{H}^{31,22,211,1111}$	22, 211, 1111	EO_4	[22]
$\mathcal{H}^{31,31,1111,1111}$	31, 1111, 1111	${}_4F_3$	[21, 25]

ここで, \mathcal{H}^μ はスペクトル型 μ に対応する高階パンルヴェ方程式を表す. また, ${}_{n+1}F_n$ はトマエの一般超幾何関数を, P_n はジョルダン・ポッホハマー族を, F_1, F_2, F_3, F_4 はアペルの2変数超幾何関数をそれぞれ表す. その他の記号については, $I_4, P_{4,4}$ は大島によるリジッド方程式のリスト [16] を, Π_2, Π_2^* は横山のリスト [26] を, EO_4 はシンプソン

⁶ちなみに, 特異点を3つ持つフックス型方程式は全部で24個存在する.

⁷現在までに得られた高階パンルヴェ方程式は, 全てアクセサリパラメータと同数の正準変数による多項式ハミルトン系として記述される.

のリスト [19] をそれぞれ参照の事. なお, 多変数の場合に上のリストの意味する処は次の通りである. 2変数ガルニエ系 $\mathcal{H}^{11,11,11,11,11}$ を例に挙げると, その特殊解として F_1 の満たす2変数線形パッフ系⁸が現れるが, それぞれの変数についての切り口は共に P_3 となっており, そのリジッド方程式としてのスペクトル型は $21, 21, 21, 21$ である.

上記の超幾何関数解のリストから直ちに分かるように, $2n$ 階パルヴェ方程式で対応するスペクトル型に $(n, 1)$ を含むものは, その特異点を取り除いて得られるリジッド方程式を特殊解として持つ事が予想される. これは確定特異点が4つの場合には常に成り立つが, 確定特異点が5つ以上の場合には必ずしも成り立たない (付録 A 参照). 従って, 高階パルヴェ方程式とその特殊解としてのリジッド方程式及び超幾何関数に対する統一的な理解を目指すためにも, 多変数の場合についてより詳しく調べる必要がある. その第一歩として, まず比較的取り扱いのし易いシュレジンガー・津田系 $\mathcal{H}_{n+1,2}$ の特殊解について調べるとというのが, 本講演の主目的である.

前述したように, $\mathcal{H}_{n+1,2}$ はスペクトル型 $(n, 1), (n, 1), (n, 1), (1, \dots, 1), (1, \dots, 1)$ のフックス型方程式に由来するが, これはカツツの2種類の変換操作によって次の2種類のものに変換される [15, 16].

$$\begin{aligned} & (2n, 1), (2n, 1), (n+1, n), (n+1, 1, \dots, 1), (n+1, 1, \dots, 1) \\ & (2n, 1), (2n, 1), (2n, 1), (2, \dots, 2, 1), (2, \dots, 2, 1) \end{aligned}$$

従って, $\mathcal{H}_{n+1,2}$ の特殊解として次の2種類のリジッド方程式が現れるというのはごく自然な予想であろう.

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &: (2n, 1), (n+1, n), (n+1, 1, \dots, 1), (n+1, 1, \dots, 1), \\ J_{2n+1} &: (2n, 1), (2n, 1), (2, \dots, 2, 1), (2, \dots, 2, 1). \end{aligned}$$

このうち, リジッド方程式 I_{2n+1} については論文 [25] において既に超幾何関数解が与えられている⁹. 本講演では, リジッド方程式 J_{2n+1} によって与えられる特殊解を導出し¹⁰, それによって得られるアペル超幾何関数 F_2, F_3 の高階化となるような2変数超幾何関数を提出する.

2. アペル超幾何関数 F_2, F_3 とその高階化

2.1. リジッド方程式 J_{2n+2}, I_{2n+2}

アペル超幾何関数 F_2, F_3 の高階化を, 次の線形微分方程式系によって定義する:

$$\begin{aligned} & [t_1(\delta_1 + \delta_2 + a)(\delta_1 + b_1) \dots (\delta_1 + b_n) - \delta_1(\delta_1 + c_1 - 1) \dots (\delta_1 + c_n - 1)]z = 0, \\ & [t_2(\delta_1 + \delta_2 + a)(\delta_2 + b') - \delta_2(\delta_2 + c' - 1)]z = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

ただし, $\delta_1 = t_1 \partial / \partial t_1$, $\delta_2 = (t_2 - 1) \partial / \partial t_2$ とする. 方程式系 (2.1) は $(2n+2)$ 次正方行列による線形パッフ系に書き換えられる. その具体的な形は次節で与えるが, t_1 (または t_2) のみを変数として見た時には, リジッド方程式 J_{2n+2} (または I_{2n+2}) と等価になっている.

⁸ 具体的な形については, 例えば [5] を参照の事

⁹ 津田は一般の $\mathcal{H}_{n+1,m}$ について解を与えており, ここで現れる超幾何関数は $m=1$ (または $n=1$) の場合に ${}_{n+1}F_n$ (または F_D) を含むものとなっている. なお $m=1$ の場合には, 同じ結果が講演者によっても独立に得られている [21].

¹⁰ ちなみに, $n=2$ の場合が昨秋の数学会にて報告した内容である [23].

方程式系 (2.1) は、次のように級数表示される解 $z = F_2^{(n)}$ を持つ¹¹：

$$F_2^{(n)} \left[\begin{matrix} b_1, \dots, b_n, b', a \\ c_1, \dots, c_n, c' \end{matrix} ; t_1, t_2 \right] = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(b_1)_i \dots (b_n)_i (b')_j (a)_{i+j}}{(c_1)_i \dots (c_n)_i (c')_j (1)_i (1)_j} t_1^i (1-t_2)^j.$$

この級数は F_2 の場合と同様に、 $|t_1| + |1-t_2| < 1$ において収束する。また、この解は次のように積分表示される¹²：

$$F_2^{(n)} = t_1^{1-c_1} (1-t_2)^{1-c'} \left[\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(c_k)}{\Gamma(b_k)\Gamma(c_k-b_k)} \right] \frac{\Gamma(c')}{\Gamma(b')\Gamma(c'-b')} \int_{\Delta} U(t) du_1 \dots du_{n+1},$$

ただし、被積分関数は

$$U(t) = (t_1 - u_1)^{c_1-b_1-1} \left[\prod_{k=1}^{n-1} u_k^{b_k-c_{k+1}} (u_k - u_{k+1})^{c_{k+1}-b_{k+1}-1} \right] \\ \times u_n^{b_n-1} (1-u_{n+1})^{b'-1} (t_2 - u_{n+1})^{c'-b'-1} (u_n - u_{n+1})^{-a},$$

積分領域は

$$\Delta = \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid 0 < u_n < \dots < u_1 < t_1, 1 < u_{n+1} < t_2\},$$

によって、それぞれ与えられる。

2.2. $F_2^{(n)}$ の退化とリジッド方程式 J_{2n+1}, I_{2n+1}

方程式系 (2.1) の下で、退化条件 $a = 0$ を課す。この時、 $\tilde{z} = t_1^{c_1-1} (1-t_2)^{c'-1} z$ は次の線形微分方程式系を満たす：

$$\begin{aligned} [t_1(\delta_1 + \delta_2 + \tilde{c}_1 + \tilde{c}' - 2)(\delta_1 + \tilde{b}_1) \dots (\delta_1 + \tilde{b}_n) - \delta_1(\delta_1 + \tilde{c}_1 - 1) \dots (\delta_1 + \tilde{c}_n - 1)] \tilde{z} &= 0, \\ [t_2(\delta_1 + \delta_2 + \tilde{c}_1 + \tilde{c}' - 2)(\delta_2 + \tilde{b}') - \delta_2(\delta_2 + \tilde{c}' - 1)] \tilde{z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

ただし

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k &= b_k - c_1 + 1 \quad (k = 1, \dots, n), \quad \tilde{b}' = b' - c' + 1, \\ \tilde{c}_1 &= 2 - c_1, \quad \tilde{c}_k = c_k - c_1 + 1 \quad (k = 2, \dots, n), \quad \tilde{c}' = 2 - c'. \end{aligned}$$

方程式系 (2.2) は $(2n+1)$ 次正方行列による線形パツフ系に書き換えられ、 t_1 (または t_2) のみを変数として見た時には、リジッド方程式 J_{2n+1} (または I_{2n+1}) と等価になっている。

ここで、方程式系 (2.2) の解として

$$\tilde{z} = (1-t_2)^{1-\tilde{c}'} F_2^{(n)} \left[\begin{matrix} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, \tilde{b}' - \tilde{c}' + 1, \tilde{c}_1 - 1 \\ \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n, 2 - \tilde{c}' \end{matrix} ; t_1, t_2 \right],$$

¹¹ これは Kampé de Fériet 函数 [1] の特別な場合になっている。

¹² J_{2n+2} の解の級数表示及び積分表示は [16] において既に与えられているが、ここで与えたものはより F_2 との関係が見易いものとなっている。

を選び, これについて $(\delta_1 + \tilde{c}_1 - 1)\tilde{z}$ の積分表示を考えると

$$(1-t_2)^{1-\tilde{c}'} F_2^{(n)} \left[\begin{matrix} \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n, \tilde{b}' - \tilde{c}' + 1, \tilde{c}_1 - 1 \\ \tilde{c}_1 - 1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n, 2 - \tilde{c}' \end{matrix}; t_1, t_2 \right]$$

$$= t_1^{1-\tilde{c}_2} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\tilde{c}_k)}{\Gamma(\tilde{b}_k)\Gamma(\tilde{c}_k - \tilde{b}_k)} \right] \frac{\Gamma(2 - \tilde{c}')}{\Gamma(\tilde{b}' - \tilde{c}' + 1)\Gamma(1 - \tilde{b}')} \int_{\Delta} U(t) du_1 \dots du_n,$$

が得られる. ここで, 被積分関数は

$$U(t) = (t_1 - u_1)^{\tilde{c}_2 - \tilde{b}_2 - 1} \left[\prod_{k=2}^{n-1} u_{k-1}^{\tilde{b}_k - \tilde{c}_k + 1} (u_{k-1} - u_k)^{\tilde{c}_k + 1 - \tilde{b}_{k+1} - 1} \right]$$

$$\times u_{n-1}^{\tilde{b}_n - 1} (1 - u_n)^{\tilde{b}' - \tilde{c}'} (t_2 - u_n)^{-\tilde{b}'} (u_{n-1} - u_n)^{-\tilde{b}_1} u_n^{\tilde{b}_1 - \tilde{c}_1 + 1},$$

積分領域は

$$\Delta = \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid 0 < u_{n-1} < \dots < u_1 < t_1, 1 < u_n < t_2\},$$

によって, それぞれ与えられる.

最後に, J_{2n+1}, I_{2n+1} から J_{2n}, I_{2n} への退化について簡単に述べる. 方程式系 (2.2) は, 未知関数を $z = (\delta_1 + \tilde{c}_1 - 1)\tilde{z}$ と取り, 特殊化の条件 $\tilde{b}_1 - \tilde{c}_1 + 1 = 0$ を課す事で, $n \rightarrow n-1$ と階数の下がった (2.1) に帰着する. この時, 解の級数表示及び積分表示の退化も自然に従う.

3. シュレジンガー・津田系 $\mathcal{H}_{n+1,2}$ の超幾何函数解

3.1. $\mathcal{H}_{n+1,2}$ のリジッド方程式 J_{2n+1}, I_{2n+1} による特殊解

シュレジンガー・津田系 $\mathcal{H}_{n+1,2}$ は, 2変数 $4n$ 階ハミルトン系

$$\frac{\partial q_j}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial p_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial q'_j}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p'_j}, \quad \frac{\partial p'_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q'_j} \quad (i = 1, 2; j = 1, \dots, n),$$

として記述される¹³. ここで, ハミルトニアン $H_1 = \frac{H_1^{(t)}}{t_1 - t_2} + \frac{H_1^{(1)}}{t_1 - 1} + \frac{H_1^{(0)}}{t_1}$ は

$$H_1^{(t)} = \left[\sum_{i=1}^n q_i (p_i - p'_i) + \theta_1 \right] \left[\sum_{i=1}^n q'_i (p'_i - p_i) + \theta_2 \right],$$

$$H_1^{(1)} = \left[\sum_{i=1}^n \{(q_i - 1)p_i + q'_i p'_i - \kappa_i - \rho_i\} - \theta_3 \right] \left[\sum_{i=1}^n q_i \{(q_i - 1)p_i + q'_i p'_i - \kappa_i - \rho_i\} - \theta_1 \right],$$

$$H_1^{(0)} = \left[\sum_{i=1}^n q_i p_i + \theta_1 \right] \left[\sum_{i=1}^n (q_i + q'_i - 1)p_i + \kappa_0 \right] - \sum_{i=1}^n \kappa_i q_i p_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n q_i p_j \{(q_i - q_j)p_i + (q'_i - q'_j)p'_i - \kappa_i - \rho_i\},$$

で与えられ, また $H_2 = H_1|_{t_1 \leftrightarrow t_2, p_i \leftrightarrow p'_i, q_i \leftrightarrow q'_i, \theta_1 \leftrightarrow \theta_2}$ である.

¹³ これは津田による表記とは変数及びパラメータの取り方が少しだけ異なる.

この $\mathcal{H}_{n+1,2}$ の下で, 特殊化の条件

$$q_i p_i - \kappa_i - \rho_i = 0, \quad p'_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \theta_1 + \sum_{j=1}^n (\kappa_j + \rho_j) = 0, \quad (3.1)$$

を課す¹⁴. その上で, 従属変数 w_0 を線形パツフ系

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \log w_0 &= \frac{-\sum_{j=1}^n q'_j p_j + \theta_2}{t_1 - t_2} + \frac{\sum_{j=1}^n p_j + \theta_3}{t_1 - 1} + \frac{\sum_{j=1}^n q'_j p_j - \sum_{j=1}^n p_j + \kappa_0 + \rho_1}{t_1}, \\ \frac{\partial}{\partial t_2} \log w_0 &= \frac{-\sum_{j=1}^n q'_j p_j + \theta_2}{t_2 - t_1}, \end{aligned}$$

によって定義し

$$w_i = p_i w_0, \quad w'_i = -q'_i p_i w_0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

とする.

定理 3.1. ベクトル値関数 $\mathbf{w} = {}^t[w_0, w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n]$ は線形パツフ系

$$\begin{aligned} d\mathbf{w} &= \{A_1^{(1)} d \log(t_1 - 1) + A_0^{(1)} d \log t_1 + A_t d \log(t_1 - t_2) \\ &\quad + A_1^{(2)} d \log(t_2 - 1) + A_0^{(2)} d \log t_2\} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

を満たす. ここで, d は t_1, t_2 についての外微分とし, 留数行列は

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \theta_3 E_{0,0} + \sum_{j=1}^n E_{0,j} + \sum_{i=1}^n \{(\kappa_i + \rho_i) \theta_3 E_{i,0} + \sum_{j=1}^n (\kappa_i + \rho_i) E_{i,j}\}, \\ A_0^{(1)} &= (\kappa_0 + \rho_1) E_{0,0} - \sum_{j=1}^n E_{0,j} - \sum_{j=1}^n E_{0,n+j} + \sum_{i=1}^n \{(\rho_1 - \rho_i) E_{i,i} - \sum_{j=i+1}^n (\kappa_i + \rho_i) E_{i,j}\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{(\rho_1 - \rho_i) E_{n+i,n+i} - \sum_{j=i+1}^n (\kappa_i + \rho_i) E_{n+i,n+j}\}, \\ A_t &= \theta_2 E_{0,1} + \sum_{j=1}^n E_{0,n+j} + \sum_{i=1}^n \{(\kappa_i + \rho_i) \theta_2 E_{n+i,0} + \sum_{j=1}^n (\kappa_i + \rho_i) E_{n+i,n+j}\}, \\ A_1^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \{\theta_2 E_{i,i} - \theta_3 E_{i,n+i}\} + \sum_{i=1}^n \{-\theta_2 E_{n+i,i} + \theta_3 E_{n+i,n+i}\}, \\ A_0^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \{-\theta_2 (\kappa_i + \rho_i) E_{n+i,0} + \theta_2 E_{n+i,i} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{i-1} (\kappa_i + \rho_i) E_{n+i,n+j} + (\theta_2 + \kappa_0 - \kappa_i) E_{n+i,n+i}\}, \end{aligned}$$

と与える. ただし, $E_{i,j}$ は (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は全て 0 となるような $(2n+1)$ 次正方形行列とする¹⁵.

¹⁴ ちなみに論文 [25] における特殊化は $p_i = p'_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$), $\theta_3 + \sum_{j=1}^n (\kappa_j + \rho_j) = 0$ である.

¹⁵ ここでは行と列の番号を共に 0 から始まるように取っている.

線形パツフ系 (3.2) のリーマン図式は

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} t_1 = 1 & t_1 = 0 & t_1 = \infty & t_1 = t_2 & t_2 = 1 & t_2 = 0 & t_2 = \infty \\ [0]_{2n} & [0]_2 & [-\kappa_1 - \rho_1]_2 & [0]_{2n} & [0]_{n+1} & [0]_{n+1} & [-\theta_2]_{n+1} \\ \theta'_2 & [\rho_1 - \rho_2]_2 & \vdots & \theta'_3 & [\theta_2 + \theta_3]_n & \kappa'_1 & \rho'_1 \\ & \vdots & [-\kappa_n - \rho_1]_2 & & & \vdots & \vdots \\ & [\rho_1 - \rho_n]_2 & \rho'_1 & & & \kappa'_n & \rho'_n \\ & \kappa_0 + \rho_1 & & & & & \end{array} \right\},$$

ただし

$$\begin{aligned} \theta'_2 &= \theta_2 + \sum_{j=1}^n (\kappa_j + \rho_j), & \theta'_3 &= \theta_3 + \sum_{j=1}^n (\kappa_j + \rho_j), \\ \kappa'_i &= \theta_2 + \kappa_0 - \kappa_i, & \rho'_i &= -\theta_2 - \theta_3 - \kappa_0 - \rho_i \quad (i = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

によって与えられる. ここで, 記号 $[a]_k$ は固有値 a の重複度が k である事を表す. これにより, (3.2) の変数 t_1 (または t_2) についての切り口がリジッド方程式 J_{2n+1} (または I_{2n+1}) となっている事が分かる.

線形パツフ系 (3.2) の解は, 高階アペル超幾何函数 $F_2^{(n)}$ の退化したものによって与えられる.

補題 3.2. 方程式系 (2.2) の解 z によって, 従属変数 $w_0, w_1, w_i, w'_1, w'_i$ ($i = 2, \dots, n$) を

$$\begin{aligned} w_0 &= -\left[\prod_{j=1}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j)\right](\delta_2 + \tilde{c}' - 1)z, \\ w_1 &= -\tilde{b}_1(\tilde{b}' - \tilde{c}' + 1)\left[\prod_{j=2}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j)\right](\delta_1 + \tilde{c}_1 - 1)z, \\ w_i &= -(\tilde{b}_i - \tilde{c}_i + 1)(\tilde{b}' - \tilde{c}' + 1)\left[\prod_{j=i+1}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{i-1} (\delta_1 + \tilde{c}_j - 1)\right]\delta_1 z, \quad (3.3) \\ w'_1 &= \tilde{b}_1\left[\prod_{j=2}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j)\right](\delta_1 + \tilde{c}_1 - 1)(\delta_2 + \tilde{b}')z, \\ w'_i &= (\tilde{b}_i - \tilde{c}_i + 1)\left[\prod_{j=i+1}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{i-1} (\delta_1 + \tilde{c}_j - 1)\right]\delta_1(\delta_2 + \tilde{b}')z, \end{aligned}$$

と定める¹⁶. この時, $\mathbf{w} = {}^t[w_0, w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n]$ は線形パツフ系 (3.2) でパラメータを

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i &= -\kappa_i - \rho_1 \quad (i = 1, \dots, n), & \tilde{b}' &= -\theta_2, \\ \tilde{c}_1 &= -\kappa_0 - \rho_1 + 1, & \tilde{c}_i &= -\rho_1 + \rho_i + 1 \quad (i = 2, \dots, n), & \tilde{c}' &= 1 - \theta_2 - \theta_3, \end{aligned}$$

とおいたものを満たす.

¹⁶ この式の意味は捻れド・ラーム理論によって説明出来ると思われるが, 出来れば高階パルヴェエ方程式の観点からも意味付けしたい.

3.2. $\mathcal{H}_{n+1,2}$ の退化とそのリジッド方程式 J_{2n}, I_{2n} による特殊解

$\mathcal{H}_{n+1,2}$ の下で退化条件

$$\kappa_0 - \kappa_1 = 0, \quad q_1 + q_1' - 1 = 0, \quad (3.4)$$

を課すと、スペクトル型 $(n, 1), (n, 1), (n, 1), (2, 1, \dots, 1), (1, \dots, 1)$ のフックス型方程式に由来する 2 変数 $(4n - 2)$ 階パウルヴェ方程式に帰着する¹⁷. この時、特殊解の退化も以下の図のように両立して起きる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{n+1,2} & \xrightarrow{(3.4)} & \text{deg. of } \mathcal{H}_{n+1,2} \\ (3.1) \downarrow & & \downarrow (3.6) \\ \text{Pfaff system (3.2)} & \xrightarrow{(3.5)} & \text{deg. of Pfaff system (3.2)} \\ (3.3) \uparrow & & \uparrow (3.7) \\ \text{HG system (2.2)} & \xrightarrow{\text{Sec. 2}} & \text{HG system (2.1)} \end{array}$$

ここで、線形パッフ系 (3.2) の退化条件は

$$\kappa_0 - \kappa_1 = 0, \quad w_0 - w_1 - w_1' = 0. \quad (3.5)$$

によって、退化した $\mathcal{H}_{n+1,2}$ における特殊解の条件は

$$\begin{aligned} \theta_1 + \sum_{j=1}^n (\kappa_j + \rho_j) = 0, \quad q_1(p_1 - p_1') - \kappa_1 - \rho_1 = 0, \\ q_i p_i - \kappa_i - \rho_i = 0, \quad p_i' = 0 \quad (i = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.6)$$

によってそれぞれ与えられる. また、退化後の線形パッフ系の解は

$$z = F_2^{(n-1)} \left[\begin{array}{c} \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n, \tilde{b}', \tilde{c}_1 + \tilde{c}' - 2 \\ \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n, \tilde{c}' \end{array} ; t_1, t_2 \right],$$

を用いて

$$\begin{aligned} w_0 &= - \left[\prod_{j=2}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j) \right] (\delta_2 + \tilde{c}' - 1) z, \\ w_1 &= - (\tilde{c}_1 - 1) (\tilde{b}' - \tilde{c}' + 1) \left[\prod_{j=2}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j) \right] z, \\ w_i &= - (\tilde{b}_i - \tilde{c}_i + 1) (\tilde{b}' - \tilde{c}' + 1) \left[\prod_{j=i+1}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j) \right] \left[\prod_{j=2}^{i-1} (\delta_1 + \tilde{c}_j - 1) \right] \delta_1 z, \\ w_i' &= (\tilde{b}_i - \tilde{c}_i + 1) \left[\prod_{j=i+1}^n (\delta_1 + \tilde{b}_j) \right] \left[\prod_{j=2}^{i-1} (\delta_1 + \tilde{c}_j - 1) \right] \delta_1 (\delta_2 + \tilde{b}') z \quad (i = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.7)$$

と与えられる. 退化した後の高階パウルヴェ方程式及び線形パッフ系の具体的な形については、ここでは省略する.

¹⁷ $n = 2$ の場合が論文 [22] における結果と一致する.

4. 高階パルヴェ方程式 $\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ とアペル超幾何関数 F_4

この節では、2変数6階パルヴェ方程式 $\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ がアペル超幾何関数 F_4 によって記述される特殊解を持つ事を示す¹⁸。なお、この方程式の導出については付録 B を参照の事。

$\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ はハミルトン系

$$t_i(t_i - 1) \frac{\partial q_j}{\partial t_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j}, \quad t_i(t_i - 1) \frac{\partial p_j}{\partial t_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_j}, \quad (i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; j = 1, 2, 3),$$

として与えられる [22]。ここで、ハミルトニアンは次のように与えられる：

$$\begin{aligned} H_i = & H_i^{Gar} - (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{t_1}{t_1 - t_2} q_2 \{ (t_i - 1)p_i - (t_2 - 1)p_{i+1} \} \\ & + \delta_{i,2} (\alpha_1 - \alpha_2) t_2 (q_2 - 1) p_2 - (t_i + 1) q_3^2 p_3^2 + \{ \alpha_1 + \alpha_3 - 1 + (\alpha_1 + \alpha_4) t_i \} q_3 p_3 \\ & + q_i q_3 p_3 (2q_1 p_1 + 2q_2 p_2 + q_3 p_3 + 2\alpha_0 + \alpha_5 + 1) + t_i q_{i+1} p_3 (q_3 p_3 - \alpha_1 + \alpha_2) \\ & - 2(t_i + 1) q_i q_3 p_i p_3 - q_3 p_{i+1} (2q_i p_i + q_{i+1} p_{i+1} + 2q_3 p_3 + 2\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_5 + 1) \\ & + 2t_i q_3 p_i p_3 + \frac{1}{t_i - t_{i+1}} q_3 \{ t_i(t_i - 1)p_i^2 - 2t_i(t_{i+1} - 1)p_1 p_2 + (t_i - 1)t_{i+1} p_{i+1}^2 \}, \end{aligned}$$

ただし、 H_i^{Gar} は2変数ガルニエ系のハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_i^{Gar} = & q_i(q_i - 1)(q_i - t_i)p_i^2 - (\alpha_{i+1} + \alpha_3 - 1)q_i(q_i - 1)p_i - \alpha_4 q_i(q_i - t_i) \\ & - \alpha_i(q_i - 1)(q_i - t_i)p_i + \alpha_0(\alpha_0 + \alpha_5 + 1)q_i \\ & + q_1 q_2 p_{i+1} (2q_i p_i + q_{i+1} p_{i+1} + 2\alpha_0 + \alpha_5 + 1) \\ & - \frac{1}{t_i - t_{i+1}} q_1 q_2 \{ t_i(t_i - 1)p_i^2 - 2t_i(t_{i+1} - 1)p_1 p_2 + (t_i - 1)t_{i+1} p_{i+1}^2 \} \\ & + \alpha_i \frac{t_i}{t_i - t_{i+1}} q_{i+1} \{ (t_i - 1)p_i - (t_{i+1} - 1)p_{i+1} \} - \alpha_{i+1} \frac{(t_i - 1)t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} q_i(p_i - p_{i+1}), \end{aligned}$$

であり、パラメータは $2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 0$ を満たすとする。

この $\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ の下で、特殊化の条件

$$q_1 = q_2 = q_3 = \alpha_1 = 0,$$

を課す。その上で、従属変数 w_0 を線形パツフ系

$$t_i(t_i - 1) \frac{\partial}{\partial t_i} \log w_0 = t_i p_i - (\alpha_0 + \alpha_5 + 1)t_i - \alpha_3(t_i - 1) \quad (i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

によって定義し

$$\frac{w_1}{w_0} = -t_1 p_1, \quad \frac{w_2}{w_0} = -t_2 p_2, \quad \frac{w_3}{w_0} = t_1 t_2 (p_1 p_2 - \alpha_2 p_3),$$

とする。

¹⁸ リジッド方程式 I_4 による解を持つ事は [22] によって既に示されていたが、今回 F_4 との関係が明確になった。

定理 4.1 ([22]). ベクトル値関数 $\mathbf{w} = {}^t[w_0, w_1, w_2, w_3]$ は線形パッフ系

$$d\mathbf{w} = \{A_1^{(1)}d\log(t_1 - 1) + A_0^{(1)}d\log t_1 + A_t d\log(t_1 - t_2) + A_1^{(2)}d\log(t_2 - 1) + A_0^{(2)}d\log t_2\}\mathbf{w}, \quad (4.1)$$

を満たす. ここで, d は t_1, t_2 についての外微分とし, 留数行列は

$$A_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -(\alpha_0 + \alpha_5 + 1) & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_0(\alpha_0 + \alpha_5 + 1) & \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_5 + 1) & -1 \\ 0 & 0 & (\alpha_0 + \alpha_2)(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_5 + 1) & \alpha_0 + \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$A_0^{(1)} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

及び

$$A_1^{(2)} = E_{23}A_1^{(1)}E_{23}, \quad A_0^{(2)} = E_{23}A_0^{(1)}E_{23}, \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

によって与える.

線形パッフ系 (4.1) のリーマン図式は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} t_1 = 1, t_2 = 1 & t_1 = 0, t_2 = 0 & t_1 = \infty, t_2 = \infty & t_1 = t_2 \\ -\alpha_5 - 1 & -\alpha_3 & \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_5 + 1 & 2\alpha_2 \\ -\alpha_5 - 1 & -\alpha_3 & \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_5 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_0 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_0 - \alpha_2 & 0 \end{array} \right\},$$

によって与えられる. これにより, (4.1) の変数 t_1, t_2 についての切り口が共にスペクトル型 31, 22, 22, 22 のリジッド方程式となっている事が分かる.

線形パッフ系 (4.1) の解は, アペル超幾何函数 F_4 によって記述される. F_4 は線形微分方程式系

$$\begin{aligned} [t_1(\delta_1 + a)(\delta_1 + b) - \delta_1(\delta_1 + c_1) + \frac{(a + b - c_1 - c_2 + 1)t_1(t_2 - 1)(\delta_1 - \delta_2)}{t_1 - t_2}]z &= 0, \\ [t_2(\delta_2 + a)(\delta_2 + b) - \delta_2(\delta_2 + c_1) + \frac{(a + b - c_1 - c_2 + 1)t_2(t_1 - 1)(\delta_2 - \delta_1)}{t_2 - t_1}]z &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

を満たす [10]¹⁹. ここでパラメータは

$$a = \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_5 + 1, \quad b = -\alpha_0 - \alpha_2, \quad c_1 = \alpha_3 + 1, \quad c_2 = \alpha_5 + 1,$$

としておく.

¹⁹ 論文 [10] では 4 次正方形行列による線形パッフ系も与えられており, これは簡単なゲージ変換によって (4.1) に移される.

補題 4.2. 方程式系 (4.2) の解 z によって, 変数 w_0, w_1, w_2, w_3 を

$$\begin{aligned} w_1 &= -[(\delta_1 - \alpha_0)(\delta_2 - \alpha_0) + \frac{\alpha_2\{t_2(\delta_1 - \alpha_0) - t_1(\delta_2 - \alpha_0)\}}{t_1 - t_2}]z, \\ w_2 &= \alpha_0[(\delta_1 + \alpha_3)(\delta_2 - \alpha_0) + \frac{\alpha_2\{t_2(\delta_1 + \alpha_3) - t_1(\delta_2 + \alpha_3)\}}{t_1 - t_2}]z, \\ w_3 &= \alpha_0[(\delta_1 - \alpha_0)(\delta_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2\{t_2(\delta_1 + \alpha_3) - t_1(\delta_2 + \alpha_3)\}}{t_1 - t_2}]z, \\ w_4 &= -\alpha_0(\alpha_0 + \alpha_2)[(\delta_1 + \alpha_3)(\delta_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2\{t_2(\delta_1 + \alpha_3) - t_1(\delta_2 + \alpha_3)\}}{t_1 - t_2}]z, \end{aligned}$$

と定める. この時, $\mathbf{w} = {}^t[w_0, w_1, w_2, w_3]$ は線形パツフ系 (4.1) を満たす.

A. シュレジンガー系とその特殊解

シュレジンガー系は, 対応するスペクトル型が特別な場合に, リジッド方程式による特殊解を持つ [22, 23]. 本付録ではこの事実について, シュレジンガー系の定義と併せて述べる.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上のフックス型方程式系

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x) = \sum_{i=1}^{m+2} \frac{A_i}{x - t_i} Y(x), \quad A_1, \dots, A_{m+2} \in M_L(\mathbb{C}),$$

を考える. ここで, 各 A_i ($i = 1, \dots, m+2$) は対角化可能とし, $A_\infty := -\sum_{i=1}^{m+2} A_i$ は対角行列であるとする. また, $t_{m+1} = 1, t_{m+2} = 0$ と規格化しておく. この方程式系のモノドロミー保存変形から, シュレジンガー系

$$dA_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{m+2} [A_i, A_j] d \log(t_i - t_j),$$

が導かれる [9, 20]. ただし, d は t_1, \dots, t_m についての外微分とする.

シュレジンガー系の正準座標系によるハミルトン系としての表示は, 論文 [8] において与えられた. それによると, 留数行列の分割

$$A_i = B_i C_i, \quad B_i = \left(b_{k,l}^{(i)} \right)_{k,l} \in M_{L, \text{rank} A_i}(\mathbb{C}), \quad C_i = \left(c_{l,k}^{(i)} \right)_{l,k} \in M_{\text{rank} A_i, L}(\mathbb{C}),$$

によって得られた変数 $b_{k,l}^{(i)}, c_{l,k}^{(i)}$ に対して, ポワソン括弧を

$$\{b_{k,l}^{(i)}, c_{l',k'}^{(j)}\} = -\delta_{i,j} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \quad \{b_{k,l}^{(i)}, b_{l',k'}^{(j)}\} = \{c_{l,k}^{(i)}, c_{l',k'}^{(j)}\} = 0,$$

と定義する事で与えられるハミルトン系

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_j}{\partial t_i} &= \{H_i, B_j\}, \quad \frac{\partial C_j}{\partial t_i} = \{H_i, C_j\}, \quad H_i = \sum_{j=1, j \neq i}^{m+2} \frac{\text{tr} A_i A_j}{t_i - t_j} \\ &(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m+2), \end{aligned}$$

はシュレジンガー系を導く. 以降の議論のために, このハミルトン系を更に

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_j}{\partial t_i} &= \frac{A_i}{t_i - t_j} B_j, & \frac{\partial C_j}{\partial t_i} &= -C_j \frac{A_i}{t_i - t_j} \quad (j \neq i), \\ \frac{\partial B_i}{\partial t_i} &= - \sum_{j=1; j \neq i}^{N+2} \frac{A_j}{t_i - t_j} B_i, & \frac{\partial C_i}{\partial t_i} &= C_i \sum_{j=1; j \neq i}^{N+2} \frac{A_j}{t_i - t_j} \quad (j \neq i),\end{aligned}\tag{A.1}$$

の形に書き換えておく.

ここで, 自然数 n の分割 $m+2$ 個の組

$$\mu = \{\mu_2, \dots, \mu_{m+3}\}, \quad \mu_i = (\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n_i}), \quad \mu_{i,1} + \dots + \mu_{i,n_i} = m+2,$$

で関係式

$$mn^2 - \sum_{i=2}^{m+3} \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{i,j}^2 + 2 = 0,$$

を満たすものを考える. 更に, μ に自然数 n の分割 $\mu_1 = (\mu_{1,1}, \mu_{1,2})$ を付け加えて $\tilde{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m+3}\}$ とする²⁰. このような2つの分割の組について, 次の補題が成り立つ事が直ちに分かる.

補題 A.1. スペクトル型 $\tilde{\mu}$ に対応するシュレジンガー系 (A.1) の下で, 特殊化の条件 $C_1 = 0$ を課すと, 行列値函数 B_1 は次の線形方程式系を満たす.

$$\frac{\partial B_1}{\partial t_1} = - \sum_{j=2}^{m+2} \frac{A_j}{t_1 - t_j} B_1, \quad \frac{\partial B_1}{\partial t_i} = \frac{A_j}{t_i - t_1} B_1 \quad (i = 2, \dots, m).$$

ここで, t_1 微分についての方程式系はスペクトル型 μ のリジッド方程式となっている. しかしその他の微分については, 方程式系のゲージ自由度が t_2, \dots, t_m に依存するため, そのスペクトル型を決定するのは簡単ではない.²¹

B. 高階パルヴェ方程式 $\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ の導出

スペクトル型 31, 31, 22, 22, 22 に対応するシュレジンガー系として, 次のものを考える:

$$dA_i = \sum_{j=1; j \neq i}^4 [A_i, A_j] d \log(t_i - t_j) \quad (i = 1, 2),$$

ただし, d は t_1, t_2 についての外微分, $t_3 = 1, t_4 = 0$ とし, 係数行列は

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - b_1 c_1 - b_2 c_2 & a_1 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & \theta_2 - a_2 - b_3 c_3 & 1 & c_3 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a_4 & a_5 \\ a_6 & a_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_3 - a_4 & -a_5 & 1 & 0 \\ -a_6 & \theta_3 - a_7 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & A_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_4 & 0 & a_8 & a_9 \\ 0 & \theta_4 & a_{10} & a_{11} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

²⁰ フックス型方程式系でスペクトル型が μ のものはリジッドとなり, また $\tilde{\mu}$ のものはアクセサリパラメータを $2m_{1,1}m_{1,2}$ 個持つ.

²¹ 大島の最近の結果によると, リジッドでない方程式が現れる場合もあるらしい.

及び

$$A_\infty := -\sum_{i=1}^4 A_i = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{13} & \rho_2 & 0 \\ a_{14} & a_{15} & 0 & \rho_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

によって与える²².

この時, (B.1) によって従属変数 a_1, \dots, a_{15} は $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ の多項式として一意に決まり²³, シンプレクティック形式 $\omega = \sum_{j=1}^3 db_j \wedge dc_j$ を持つハミルトン系

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_j}{\partial t_i} &= \{H_i, b_j\}, \quad \frac{\partial c_j}{\partial t_i} = \{H_i, c_j\} \quad (i = 1, 2), \\ H_1 &= \frac{\text{tr} A_1 A_2}{t_1 - t_2} + \frac{\text{tr} A_1 A_3}{t_1 - 1} + \frac{\text{tr} A_1 A_4}{t_1}, \quad H_2 = \frac{\text{tr} A_2 A_1}{t_2 - t_1} + \frac{\text{tr} A_2 A_3}{t_2 - 1} + \frac{\text{tr} A_2 A_4}{t_2}, \end{aligned}$$

が導かれる. このハミルトン系の下で, 正準変換

$$\begin{aligned} t_1 p_1 &= b_1 + b_2 c_3, \quad t_2 p_2 = b_3 + b_2 c_1, \quad t_1 t_2 p_3 = b_2, \\ \frac{q_1}{t_1} &= -c_1, \quad \frac{q_2}{t_2} = -c_3, \quad \frac{q_3}{t_1 t_2} = -c_2 + c_1 c_3, \end{aligned}$$

を行い, パラメータを

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\theta_1 - \theta_2 - 2\rho_2}{2}, \quad \alpha_1 = -\theta_1, \quad \alpha_2 = \frac{-\theta_1 + \theta_2}{2}, \\ \alpha_3 &= -\theta_4, \quad \alpha_4 = -\rho_1 + \rho_2 + 1, \quad \alpha_5 = -\theta_3 - 1, \end{aligned}$$

とおくと²⁴, 最終的に次の結果が得られる.

定理 B.1 ([22]). 正準変数 q_j, p_j ($j = 1, 2, 3$) は $\mathcal{H}^{31,31,22,22,22}$ を満たす.

ここで与えた行列 A_2, A_3 の由来は, それぞれフックス型方程式系の特異点 $x = t_2, 1$ における留数行列であった. ところで, この2つの行列を入れ替えても得られる6階パンルヴェ方程式は本質的に等価であるが, その入れ替えが特殊解として現れる2変数超幾何函数のレベルにどのように持ち上がるかについてはまだ不明である. この問題はリジッド方程式と多変数超幾何函数との関係を考える上で, 重要な具体例になると期待される.

参考文献

- [1] P. Appell and J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques: Polynomes d'Hermite, (Gauthier-Villars, 1937).
- [2] R. Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63** (1907) 301-321.
- [3] K. Fuji, K. Inoue, K. Shinomiya and T. Suzuki, Higher order Painlevé system of type $D_{2n+2}^{(1)}$ and monodromy preserving deformation, J. Nonlinear Math. Phys. **20** (2013) 57-69.

²² ここではシュレジンガー系の持つゲージ自由度を固定する事で, ある種の規格化を行っている.

²³ 具体的な形はここでは省略するが, 特に困難もなく簡単な計算によって求まる.

²⁴ リーマンの関係式 $\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4 + 2\rho_1 + 2\rho_2 = 0$ が満たされている事に注意.

- [4] R. Garnier, Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixés, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **29** (1912) 1-126.
- [5] 原岡 喜重, 超幾何関数, すうがくの風景 **7** (朝倉書店, 2002).
- [6] Y. Haraoka and G. M. Filipuk, Middle convolution and deformation for Fuchsian systems, *J. Lond. Math. Soc.* **76** (2007) 438-450.
- [7] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions, *Aspects of Mathematics* **E16** (Vieweg, 1991).
- [8] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato, Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent, *Physica* **1D** (1980) 80-158.
- [9] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I, *Physica* **2D** (1981) 306-352.
- [10] M. Kato, Connection Formulas for Appell's System F_4 and Some Applications, *Funkcialaj Ekvacioj*, **38** (1995) 243-266.
- [11] N. M. Katz, *Rigid Local Systems*, *Annals of Mathematics Studies* **139** (Princeton University Press, 1995).
- [12] 川上 拓志, 行列 Painlevé 方程式, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010 年 9 月.
- [13] H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai, Toward a classification of four-dimensional Painlevé-type equations, *AMS Contemp. Math.* **593** (2013).
- [14] V. P. Kostov, The Deligne-Simpson problem for zero index of rigidity, *Perspective in Complex Analysis, Differential Geometry and Mathematical Physics* (World Scientific, 2001) 1-35.
- [15] T. Oshima, Classification of Fuchsian systems and their connection problem, *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **B37** (2013) 163-192.
- [16] T. Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, *MSJ Memoirs* **28** (2012).
- [17] H. Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimensional Painlevé type equations, *UTMS* **2010-17** (Univ. of Tokyo, 2010) 1-21.
- [18] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, *RIMS Koukyuroku* **1473** (2006) 143-163.
- [19] C. T. Simpson, Products of Matrices, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings* **12** (AMS, 1991) 157-185.
- [20] L. Schlesinger, Über eine klasse von differentialsystemen beliebiger ordnung mit festen kritischen punkten, *J. Reine Angew. Math.* **141** (1912) 96-145.
- [21] T. Suzuki, A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$, *SIGMA* **6** (2010) 078.
- [22] T. Suzuki, Six-dimensional Painlevé systems and their particular solutions in terms of hypergeometric functions, preprint (arXiv:1212.5871).
- [23] 鈴木 貴雄, シュレジンガー系 $\mathcal{H}_{3,2}$ のリジッド方程式による特殊解, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学, 2013 年 9 月.
- [24] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, *J. Reine Angew. Math.*, in press.
- [25] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, *Quart. J. Math.* **63** (2012) 489-505.
- [26] T. Yokoyama, On an irreducibility condition for hypergeometric systems, *Funkcial. Ekvacioj*, **38** (1995) 11-19.