

✿ 日本数学会

2019年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション  
講演アブストラクト**

2019年9月

於 金沢大学



✿ 日本数学会

2019年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション  
講演アブストラクト**

2019年9月

於 金沢大学



# 無限可積分系

9月17日(火) 第II会場

14:15~16:00

	(分)	頁
1 星野 歩 (広島工大理) 白石潤一 (東大数理)	Conjecture concerning $B_n$ $q$ -Toda eigenfunctions .....	(15) 1
2 大久保勇輔 (東大数理) 白石潤一 (東大数理) 福田真之 (東大理)	Ding-Iohara-Miki 代数の $2N$ 個 intertwining 作用素の行列要素公 式 .....	(15) 3
3 福田真之 (東大理) 大久保勇輔 (東大数理) 白石潤一 (東大数理)	Koornwinder 作用素の Fock 空間上での実現 .....	(15) 5
4 菅原 優 (東北大理工)	$A_2^{(1)}$ 型アフィン量子群の普遍 $R$ 行列と壁越え公式 .....	(15) 7
5 大山陽介 (徳島大理工)	$q$ -Stokes problems on basic hypergeometric equations .....	(15) 9
6 波多野修也 (中大理工) 松縄竜弥 (中大理工) 佐藤智輝 (中大理工) 竹村剛一 (お茶の水女大基幹)	Variants of $q$ -hypergeometric equation .....	(15) 11

16:20~17:20 特別講演

藤田 遼 (京大理)	Dynkin 籠に付随する量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性 .....	13
------------	---	----

9月18日(水) 第II会場

10:00~11:30

7 大川 領 (早大理工)	$(-2)$ blow-up formula .....	(15) 27
8 行田康晃 (名大多元数理) 百合草寿哉 (名大多元数理)	三角形分割曲面型団代数における $F$ 行列による団の一意性 .....	(15) 29
9 岡田 聡一 (名大多元数理)	ミニスキュール半順序集合上の双有理版 rowmotion と双有理版 Coxeter-motion .....	(15) 31
10 成瀬 弘 (山梨大教育)	Dual factorial Schur $P$ -関数は BKP 階層の解 .....	(15) 33
11 渋川元樹 (神戸大理工)	Multivariate Bernoulli polynomials .....	(15) 35

13:00~14:00 特別講演

津田照久 (一橋大経済)	Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras .....	37
--------------	---	----

# Conjecture concerning $B_n$ $q$ -Toda eigenfunctions

星野歩 (広工大工), 白石潤一 (東大数理)

## 1. $A_{n-1}$ case

$A_{n-1}$  型  $q$ -戸田差分作用素の級数解について復習する.  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $s = (s_1, \dots, s_n)$  を不定元とし,  $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$  に対し,  $t^\delta u = (t^{n-1}u_1, t^{n-2}u_2, \dots, u_n)$  と定める. ここに  $A_{n-1}$  型 Macdonald 作用素は次で与えられる.

$$D^{A_{n-1}}(x|q, t) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q, x_i}.$$

**Definition 1.1.**  $x^\lambda = \prod_i x_i^{\lambda_i}$ ,  $s = q^\lambda t^\delta$  ( $s_i = q^{\lambda_i} t^{n-i}$ ) に対し, 次を定める.

$$D^{A_{n-1}}(x|s|q, t) = x^{-\lambda} D^{A_{n-1}}(x|q, t) x^\lambda = \sum_{i=1}^n s_i \prod_{j < i} \frac{1 - tx_i/x_j}{1 - x_i/x_j} \prod_{k > i} \frac{1 - x_k/tx_i}{1 - x_k/x_i} T_{q, x_i},$$

$$D^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i (1 - x_{i+1}/x_i) T_{q, x_i} + s_n T_{q, x_n}.$$

**Proposition 1.2.**  $t^{-\delta} x = (t^{-n+1}x_1, t^{-n+2}x_2, \dots, x_n)$  に対し, 次を得る.

$$D^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q) = \lim_{t \rightarrow 0} D^{A_{n-1}}(t^{-\delta} x|s|q, t).$$

**Definition 1.3.** 上三角行列  $M^{(n)} = \{\theta = (\theta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} | \theta_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \theta_{i,j} = 0 \text{ if } i \geq j\}$  に対し,  $f^{A_{n-1}}(x|s|q, t) \in \mathbb{Q}(s, q, t)[[x_2/x_1, \dots, x_n/x_{n-1}]]$ ,  $c_n(\theta; s_1, \dots, s_n; q, t) \in \mathbb{Q}(q, t, s_1, \dots, s_n)$  を次で定める.

$$f^{A_{n-1}}(x|s|q, t) = \sum_{\theta \in M^{(n)}} c_n(\theta; s; q, t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j/x_i)^{\theta_{i,j}},$$

$$c_n(\theta; s_1, \dots, s_n; q, t) = \prod_{k=2}^n \prod_{1 \leq i \leq j \leq k-1} \frac{(q^{\sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j+1,a})} t s_{j+1}/s_i; q)_{\theta_{i,k}} (q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} q s_j/t s_i; q)_{\theta_{i,k}}}{(q^{\sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j+1,a})} q s_{j+1}/s_i; q)_{\theta_{i,k}} (q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} s_j/s_i; q)_{\theta_{i,k}}}.$$

**Proposition 1.4** ([NS, BFS]).  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $s = q^\lambda t^\delta$  ( $s_i = q^{\lambda_i} t^{n-i}$ ) とすると, 次を得る.

$$D^{A_{n-1}}(x|s|q, t) f^{A_{n-1}}(x|s|q, t) = \sum_{i=1}^n s_i f^{A_{n-1}}(x|s|q, t).$$

**Definition 1.5.**

$$f^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q) = \sum_{\theta \in M^{(n)}} c_n^{\text{Toda}}(\theta; s; q) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j/x_i)^{\theta_{i,j}},$$

$$c_n^{\text{Toda}}(\theta; s_1, \dots, s_n; q) = \lim_{t \rightarrow 0} c_n(\theta; s_1, \dots, s_n; q, t) \prod_{1 \leq i < j \leq n} t^{(j-i)\theta_{i,j}}$$

$$= \prod_{k=2}^n \prod_{1 \leq i \leq j \leq k-1} \frac{1}{(q^{\sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j+1,a})} q s_{j+1}/s_i; q)_{\theta_{i,k}}} \frac{q^{\theta_{i,k}}}{(q^{\theta_{j,k} - \theta_{i,k} - \sum_{a=k+1}^n (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} q s_i/s_j; q)_{\theta_{i,k}}}.$$

**Corollary 1.6.**  $D^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q) f^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q) = \sum_{i=1}^n s_i f^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q).$

## 2. $B_n$ case

**Definition 2.1.** 差分作用素  $D^{B_n}(x|q, t)$ ,  $D^{B_n}(x|s|q, t)$ ,  $D^{B_n\text{Toda}}(x|s|q)$  を次で定める.

$$D^{B_n}(x|q, t) = \sum_{i=1}^n \frac{(1-tx_i)}{t^{n-1/2}(1-x_i)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_ix_j)(1-tx_i/x_j)}{(1-x_ix_j)(1-x_i/x_j)} T_{q,x_i}^{+1} \\ + \sum_{i=1}^n \frac{(1-t/x_i)}{t^{n-1/2}(1-1/x_i)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_j/x_i)(1-t/x_ix_j)}{(1-x_j/x_i)(1-1/x_ix_j)} T_{q,x_i}^{-1},$$

$$D^{B_n}(x|s|q, t) \\ = \sum_{i=1}^n s_i \frac{1-1/tx_i}{1-1/x_i} \prod_{j < i} \frac{(1-1/tx_ix_j)(1-tx_i/x_j)}{(1-1/x_ix_j)(1-x_i/x_j)} \prod_{k > i} \frac{(1-1/tx_ix_k)(1-x_k/tx_i)}{(1-1/x_ix_k)(1-x_k/x_i)} T_{q,x_i}^{+1} \\ + \sum_{i=1}^n s_i^{-1} \frac{1-t/x_i}{1-1/x_i} \prod_{j < i} \frac{(1-x_i/tx_j)(1-t/x_ix_j)}{(1-x_i/x_j)(1-1/x_ix_j)} \prod_{k > i} \frac{(1-tx_k/x_i)(1-t/x_ix_k)}{(1-x_k/x_i)(1-1/x_ix_k)} T_{q,x_i}^{-1},$$

$$D^{B_n\text{Toda}}(x|s|q) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(1-x_{i+1}/x_i)T_{q,x_i} + s_n(1-1/x_n)T_{q,x_n} + s_1^{-1}T_{q,x_1}^{-1} \\ + \sum_{i=2}^n s_i^{-1}(1-x_i/x_{i-1})T_{q,x_i}^{-1}.$$

このとき,  $D^{B_n}(x|s|q, t) = x^{-\lambda} D^{B_n}(x|q, t) x^\lambda$  (ただし  $s = q^\lambda t^{\delta+1/2}$  ( $s_i = q^{\lambda_i} t^{n-i+1/2}$ )).

**Proposition 2.2.**  $t^{-\delta-1}x = (t^{-n}x_1, t^{-n+1}x_2, \dots, t^{-1}x_n)$  に対し, 次を得る.

$$D^{B_n\text{Toda}}(x|s|q) = \lim_{t \rightarrow 0} D^{B_n}(t^{-\delta-1}x|s|q, t).$$

**Definition 2.3.**  $B_n$  型  $q$ -戸田差分作用素の級数解  $f^{B_n\text{Toda}}(x|s|q)$  を次の形で定める.

$$f^{B_n\text{Toda}}(x|s|q) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} c_{i_1, \dots, i_n}^{B_n}(s_1, \dots, s_n, q)(x_2/x_1)^{i_1} \cdots (x_n/x_{n-1})^{i_{n-1}} (1/x_n)^{i_n}, \\ D^{B_n\text{Toda}}(x|s|q) f^{B_n\text{Toda}}(x|s|q) = (s_1 + \cdots + s_n + 1/s_1 + \cdots + 1/s_n) f^{B_n\text{Toda}}(x|s|q).$$

**Conjecture 2.4.**  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  とする.  $f^{B_n\text{Toda}}(x|s|q)$  の  $f^{A_{n-1}\text{Toda}}(x|s|q)$  による分岐則は次のように表される.

$$f^{B_n\text{Toda}}(x_1, \dots, x_n | s_1, \dots, s_n | q) \\ = \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n \geq 0} e_\theta^{B_n/A_{n-1}}(s|q) \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{-\theta_i} \cdot f^{A_{n-1}\text{Toda}}(x_1, \dots, x_n | q^{-\theta_1} s_1, \dots, q^{-\theta_n} s_n | q), \\ e_\theta^{B_n/A_{n-1}}(s|q) = \prod_{k=1}^n \frac{q^{(n-k+1)\theta_k}}{(q)_{\theta_k} (q/s_k^2)_{\theta_k}} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{(qs_j/s_i)_{\theta_i} (q^{\theta_j - \theta_i} q s_i/s_j)_{\theta_i} (q/s_i s_j)_{\theta_i} (q/s_i s_j)_{\theta_j}}.$$

## 参考文献

- [BFS] A. Braverman, M. Finkelberg and J. Shiraishi, Macdonald polynomials, Laumon spaces and perverse coherent sheaves. Perspectives in representation theory, 2341, Contemp. Math., 610, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [NS] M. Noumi and J. Shiraishi, A direct approach to the bispectral problem for the Ruijsenaars-Macdonald  $q$ -difference operators, arXiv:1206.5364.

# Ding-Iohara-Miki 代数の $2N$ 個 intertwining 作用素の行列要素公式

大久保 勇輔 (東大数理)  
白石 潤一 (東大数理)  
福田 真之 (東大理)

Ding-Iohara-Miki 代数 (DIM 代数) とは量子トロイダル  $\mathfrak{gl}_1$  代数とも呼ばれる代数で、アフィン量子群のある種の一般化に対応する Hopf 代数である。近年、Macdonald 対称関数や ( $q$ -変形版の) AGT 対応などへの応用に向けてその表現論が盛んに研究されてきた。特に、[AFS] では DIM 代数の intertwining 作用素が導入され、refined topological vertex や 5 次元ゲージ理論の (K 理論的) 分配関数が代数的に再現された。本公演では、この intertwining 作用素の合成によって得られる演算子の行列要素に関する公式について説明する。

**Preliminary** まず次の交換関係によって定義される Heisenberg 代数  $\{a_n\}$  を用いる：

$$[a_m, a_n] = m \frac{1 - q^{|m|}}{1 - t^{|m|}} \delta_{m+n, 0}.$$

$|0\rangle$  を  $a_n |0\rangle = 0$  ( $n > 0$ ) によって定まる真空ベクトルとし、この真空ベクトルから生成される Fock 空間を  $\mathcal{F}$  と書く。この時、分割  $\lambda$  に対して、 $\mathcal{F}$  上の頂点作用素  $\Phi_\lambda = \Phi_\lambda[u, v]$ ,  $\Phi_\lambda^* = \Phi_\lambda^*[v, u]$  を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda[u, v] &= u^{|\lambda|} f_\lambda^{-1} \frac{q^{n(\lambda')}}{c_\lambda} : \Phi_\emptyset(v) \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \eta(q^{j-1} t^{-i+1} v) :, \quad c_\lambda = \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - q^{\lambda_i - j} t^{\lambda'_j - i + 1}), \\ \Phi_\emptyset(v) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 - q^n} a_{-n} v^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^n} a_n v^{-n}\right), \\ \eta(z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^{-n}}{n} a_{-n} z^n\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^n}{n} a_n z^{-n}\right), \\ \Phi_\lambda^*[v, u] &= q^{|\lambda|} v^{-|\lambda|} \frac{q^{n(\lambda')}}{c'_\lambda} : \Phi_\emptyset^*(u) \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \xi(q^{j-1} t^{-i+1} u) :, \quad c'_\lambda := \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - q^{\lambda_i - j + 1} t^{\lambda'_j - i}), \\ \Phi_\emptyset^*(u) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1 - q^n} q^{-n/2} t^{n/2} a_{-n} u^n\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{q^n}{1 - q^n} q^{-n/2} t^{n/2} a_n u^{-n}\right), \\ \xi(z) &= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^{-n}}{n} q^{-n/2} t^{n/2} a_{-n} z^n\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - t^n}{n} q^{-n/2} t^{n/2} a_n z^{-n}\right). \end{aligned}$$

ここに  $n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i$ ,  $f_\lambda := (-1)^{|\lambda|} q^{n(\lambda') + |\lambda|/2} t^{-n(\lambda) - |\lambda|/2}$  とし、 $\lambda'$  は  $\lambda$  の転置を表す。さらに Fock 空間  $\mathcal{F}^{\text{vert}} = \text{Spann}\{|\lambda\rangle \mid \lambda : \text{分割}\}$  を用いる。実は、 $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}^{\text{vert}}$  にはそれぞれ DIM 代数の異なる同値な加群構造が入ることが知られている。これらの表現はスペクトルパラメータ  $u$  に依存し、特に  $\mathcal{F}$  の加群構造は整数  $m$  によってラベルされる。以下これらの加群構造を持つ場合に  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F}_u^{(1,m)}$ ,  $\mathcal{F}^{\text{vert}}$  を  $\mathcal{F}_u^{(0,1)}$  と書く。

**Fact** [AFS] 演算子  $\Phi : \mathcal{F}_v^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_u^{(1,0)} \rightarrow \mathcal{F}_{-uv}^{(1,1)}$  と  $\Phi^* : \mathcal{F}_{uv}^{(1,1)} \rightarrow \mathcal{F}_v^{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_u^{(0,1)}$  を

$$\Phi_\lambda . \alpha = \Phi . (|\lambda\rangle \otimes \alpha) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{F}),$$

$$\Phi^* . \alpha = \sum_{\lambda} (\Phi_\lambda^* . \alpha) \otimes |\lambda\rangle \quad (\forall \alpha \in \mathcal{F})$$



によって定義すると、上述した表現を通して  $\Phi$  と  $\Phi^*$  は intertwining 関係式

$$\Phi \Delta(a) = a \Phi, \quad \Delta(a) \Phi^* = \Phi^* a \quad (\forall a \in (\text{DIM 代数}))$$

を満たす。

この3個の intertwining 作用素を合成して、以下のように  $N$  重の Fock 空間のテンソル積に作用する演算子を構成する。

**Definition**  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$  を  $N$  個のパラメータの組とする。演算子  $T^H(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) : \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{v_i}^{(0,1)} \right) \rightarrow \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{u_i}^{(0,1)} \right)$  を  $\alpha \in \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{v_i}^{(0,1)} \right)$  に対して

$$\alpha \otimes |0\rangle \xrightarrow{\Psi^{(1)} \circ \dots \circ \Psi^{(N)}} |0\rangle \otimes (T^H \cdot \alpha) + \sum_{\substack{\lambda: \text{partition} \\ \lambda \neq \emptyset}} a_{-\lambda_1} a_{-\lambda_2} \cdots |0\rangle \otimes \cdots \in \mathcal{F}_w^{(1,0)} \otimes \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{v_i}^{(0,1)} \right),$$

$$\Psi^{(i)} := \underbrace{(id \otimes \cdots \otimes id)}_{i-1} \otimes \Phi^* \otimes \underbrace{(id \otimes \cdots \otimes id)}_{N-i} \circ \underbrace{(id \otimes \cdots \otimes id)}_{i-1} \otimes \Phi \otimes \underbrace{(id \otimes \cdots \otimes id)}_{N-i}$$

にとなるように定め、

$$\mathcal{T}^H(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) = T^H(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) / \langle \emptyset | T^H(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) | \emptyset \rangle$$

と規格化する。また演算子  $\mathcal{T}^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) : \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{u_i}^{(1,0)} \right) \rightarrow \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{v_i}^{(1,0)} \right)$  を

$$T^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) = \sum_{\nu^{(1)}, \dots, \nu^{(N-1)}} \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \Phi_{\nu^{(i)}}^* [v_i, \frac{u_1 \cdots u_i}{v_1 \cdots v_i} w] \Phi_{\nu^{(i-1)}} [u_i, \frac{u_1 \cdots u_{i-1}}{v_1 \cdots v_{i-1}} w], \quad \nu^{(0)} = \nu^{(N)} = \emptyset,$$

$$\mathcal{T}^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) = T^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) / \langle \mathbf{0} | T^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) | \mathbf{0} \rangle$$

と定義する。このとき  $\mathcal{T}^V$ ,  $\mathcal{T}^H$  を  $\mathcal{M}$  カデ作用素と呼ぶ。(3個の intertwining 作用素を合成してできる  $2N$  個の作用素の図 (講演または [FOS] 参照) が由来。)

この二つの作用素は次に定義する  $\widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}^{(1,0)}$  上の基底を  $\widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}^{(0,1)}$  上の基底に対応させることによって、その行列要素が一致する。まず  $X^{(1)}(z) \in \text{End}(\widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \mathcal{F}_{u_i}^{(1,0)})[[z^{\pm 1}]]$  を以下で定義する：

$$X^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^N u_i \Lambda^{(i)}(z), \quad \Lambda^{(i)}(z) := \varphi^-(\gamma^{1/2} z) \otimes \cdots \otimes \varphi^-(\gamma^{i-3/2} z) \otimes \eta(\gamma^{i-1} z) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1,$$

$$\varphi^-(z) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-t^{-n}}{n} (1-t^n q^{-n}) q^{n/4} t^{-n/4} a_{-n} z^n \right), \quad \gamma = (t/q)^{1/2}.$$

この演算子は DIM 代数のある生成元に余積を作用させることで得られる。また  $N$  個の分割の組  $\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$  に対して、固有値  $\epsilon_\lambda = \sum_{i=1}^N u_i (1+(t-1) \sum_{k \geq 1} (1-q^{\lambda_k^{(i)}}) t^{-i})$  を持つ  $X_0^{(1)}$  の固有関数を  $|P_\lambda\rangle$  と書く： $X_0^{(i)} |P_\lambda\rangle = \epsilon_\lambda |P_\lambda\rangle$ 。このときモノミアル対称関数に対応するベクトルのテンソル積  $|m_\lambda\rangle = \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N |m_{\lambda^{(i)}}\rangle$  で展開した際の展開係数が  $|P_\lambda\rangle = 1 \cdot |m_\lambda\rangle + \cdots$  となるように規格化する。

**Theorem** [FOS]  $N$  個の分割の組  $\lambda, \mu$  に対して以下の行列要素公式が成立する：

$$\langle P_\lambda | \mathcal{T}^V(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) | P_\mu \rangle = \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N \langle \mu^{(i)} | \right) \mathcal{T}^H(\mathbf{u}, \mathbf{v}; w) \left( \widehat{\bigotimes}_{i=1}^N | \lambda^{(i)} \rangle \right) \times (\text{monomials}).$$

この公式が  $q$ -変形版 AGT 対応の代数的な解釈を与え、さらに超弦理論から現れる DIM 代数に関する Spectral 双対性を示す。

## 参考文献

- [AFS] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, JHEP **1203**, 041 (2012), arXiv:1112.6074.  
[FOS] M. Fukuda, Y. Ohkubo and J. Shiraishi, arXiv:1903.05905.

## Koornwinder 作用素の Fock 空間上での実現

福田 真之 (東大理)\*<sup>1</sup>

大久保勇輔 (東大数理)

白石潤一 (東大数理)

### 概 要

Askey-Wilson の 2 階の差分作用素の自然な多変数化である、Koornwinder 作用素の Fock 空間上での実現を概説する。またその際に用いられるカレントと Ding-Iohara-Miki 代数の Drinfeld カレントの関係について述べる。

### Koornwinder 多項式

以下本文中では基礎体は  $\mathbb{C}$  とし、 $a, b, c, d$  および  $q, t$  は適当な複素パラメータとする。Koornwinder 作用素は次のように定義される。

**Definition.**  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  に作用する  $n$  変数の Koornwinder 作用素  $D_n^K$  を次で定義する。

$$D_n^K = \sum_{i=1}^n \frac{(1-a/x_i)(1-b/x_i)(1-c/x_i)(1-d/x_i)}{t^{n-1}\alpha(1-1/x_i^2)(1-q/x_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_j/x_i)(1-t/x_jx_i)}{(1-x_j/x_i)(1-1/x_jx_i)} (T_{q,x_i}^{-1} - 1) \\ + \sum_{i=1}^n \frac{(1-ax_i)(1-bx_i)(1-cx_i)(1-dx_i)}{t^{n-1}\alpha(1-x_i^2)(1-qx_i^2)} \prod_{j \neq i} \frac{(1-tx_jx_i)(1-tx_i/x_j)}{(1-x_jx_i)(1-x_i/x_j)} (T_{q,x_i} - 1). \quad (1)$$

ただし  $\alpha = \sqrt{abcd/qt}$  とした。また、 $T_{q,x}$  は変数  $x$  に関する  $q$  差分作用素である。

$P_+$  を  $BC_n$  型の正ルートの集合とする。 $\lambda \in P_+$  に対し、単項対称多項式  $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  を、

$$m_\lambda(x) = \frac{1}{|W_\lambda|} \sum_{\mu \in W \cdot \lambda} \prod_i x_i^{\mu_i}, \quad (2)$$

で定義する。ただし  $W_\lambda$  は  $\lambda$  を stabilize する Weyl 群  $W$  の部分群とする。このとき次の事実が知られている。

**Fact** ([2]).  $D_n^K$  の固有関数  $K_\lambda(x_1, \dots, x_n | a, b, c, d | q, t)$  ( $\lambda \in P_+$ ) で次を満たすものが存在し、一意である。

$$K_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda, \mu \in P_+} u_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad u_{\lambda, \mu} \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

ただし、 $<$  は dominant ordering とする。またこの  $\{K_\lambda(x_1, \dots, x_n | a, b, c, d | q, t)\}_{\lambda \in P_+}$  は  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  の基底をなす。

### Fock 空間上での Koornwinder 作用素の実現

以下では Heisenberg 代数を  $[a_n, a_m] = n \frac{1-q^{|n|}}{1-t^{|n|}} \delta_{n+m,0}$  で定義する。また真空  $|0\rangle$  (ないし、余真空  $\langle 0|$ ) は  $a_n |0\rangle = 0, n > 0$  (ないし、 $\langle 0| a_{-n} = 0, n > 0$ ) を満たすとし、Fock 空間  $\mathcal{F}$  (ないし、余 Fock 空間  $\mathcal{F}^*$ ) を  $\mathcal{F} = \mathbb{C}[a_{-1}, a_{-2}, \dots] |0\rangle$  (ないし、 $\mathcal{F}^* = \langle 0| \mathbb{C}[a_1, a_2, \dots]$ ) と定める。

\*<sup>1</sup> 〒113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1 理学系研究科物理学専攻

**Definition.** Fock空間  $\mathcal{F}$  から  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  への射影演算子  $\pi_n$  を

$$\pi_n(|u\rangle) = \langle 0 | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \phi(1/x_1) \cdots \phi(1/x_n) |u\rangle, \quad \text{for } |u\rangle \in \mathcal{F}, \quad (4)$$

で定義する。ただし、 $\phi(x)$  は

$$\phi(x) := \exp \left( \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \frac{1-q^n}{1-q^n} a_n x^n \right), \quad (5)$$

とした。

また2つの Drinfeld カレントを

$$\begin{aligned} \tilde{e}(z; \mu) &:= \left( \mu \exp \left( \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_{-n} z^n \right) - 1 \right) \\ &\times \left( \exp \left( - \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^{-n} \right) \exp \left( \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} q^{-n} a_n z^n \right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z; \mu) &:= \left( \mu^{-1} \exp \left( - \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} t^n a_{-n} z^n \right) - 1 \right) \\ &\times \left( \exp \left( \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} q^{-n} a_n z^{-n} \right) \exp \left( - \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} a_n z^n \right) - 1 \right), \end{aligned} \quad (7)$$

で定義する。またこれらのフーリエモードを  $\tilde{e}(z; \mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{e}_\mu[n] z^{-n}$ 、 $\tilde{f}(z; \mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_\mu[n] z^{-n}$  と書く。また、次の有理関数の0周りでのテイラー展開の係数を  $c_e[n], c_f[n]$  で定義する。すなわち

$$\sum_{n \geq 0} c_e[n] z^n := \frac{(1-z/a)(1-z/b)(1-z/c)(1-z/d)}{(1-z^2/t)(1-z^2/q)}, \quad (8)$$

$$\sum_{n \geq 0} c_f[n] z^n := \frac{(1-za)(1-zb)(1-zc)(1-zd)}{(1-z^2t)(1-z^2q)}. \quad (9)$$

**Definition.** Fock空間上の作用素  $E$  を次で定義する。

$$E_n = \sum_{n \geq 0} \left( \sqrt{\frac{qt}{abcd}} c_e[n] \tilde{e}_\mu[n] - \sqrt{\frac{abcd}{qt}} c_f[n] \tilde{f}_\mu[n] \right) \Big|_{\mu=t^n}. \quad (10)$$

この時次が成り立つ。

**Theorem.**

$$\pi_n(E_n |u\rangle) = (t^{1/2} - t^{-1/2}) \mathcal{D}_n^K \pi_n(|u\rangle). \quad (11)$$

すなわち、次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\pi_n} & \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] \\ E_n \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}_n^K \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\pi_n} & \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]. \end{array}$$

## 参考文献

- [1] M. Fukuda, Y. Ohkubo and J. Shiraishi, *to appear*.
- [2] T.H. Koornwinder, "Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC", 189–204, Contemp. Math., 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

# $A_2^{(1)}$ 型アフィン量子群の普遍 $R$ 行列と壁越え公式

菅原優 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

## 1. 概要

Dimofte, Gukov, Soibelman らは物理学的な考察から、壁越え公式として次の恒等式を発見した [1].

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{1,-1}\mathbf{U}_{1,0}\mathbf{U}_{0,1} &= (\mathbf{U}_{0,1}\mathbf{U}_{1,1}\mathbf{U}_{2,1}\mathbf{U}_{3,1}\dots) \\ &\quad \times \mathbf{U}_{1,0}^2 \mathbb{E}(-qx_1^2)^{-1} \mathbb{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1} \\ &\quad \times (\dots \mathbf{U}_{3,-1}\mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{1,-1}). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし  $x_1, x_2$  は  $x_1x_2 = q^2x_2x_1$  を満たす不定元,  $\text{Li}_q(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1-q^n)}$  は量子二重対数関数とし,  $\mathbb{E}(x) := \exp(\text{Li}_{q^2}(-qx))$ ,  $\mathbf{U}_{m,n} := \mathbb{E}(q^{-mn}x_1^m x_2^n)$  とおいた.

これは非可換代数上の量子二重対数関数に関する「有限積 = 無限積」という形の、それ自身興味深い恒等式となっているが、数学的に厳密な証明は与えられていなかった. 本講演では、この恒等式が  $A_2^{(1)}$  型アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$  の普遍  $R$  行列の具体的な積表示から代数的に導出できることを示す.

## 2. 凸順序から定まるアフィン量子群の凸基底と普遍 $R$ 行列の積表示

定義 1 [2]

$\Delta$  を Kac-Moody Lie 環  $\mathfrak{g}$  のルート系とする. 正ルートの全体  $\Delta_+$  上の全順序  $\leq$  について、任意の正の実ルート  $\beta, \gamma \in \Delta_+^{\text{re}}$  に対し、 $\beta < \gamma$  かつ  $\beta + \gamma \in \Delta_+$  ならば  $\beta < \beta + \gamma < \gamma$  となるとき、 $\leq$  は凸順序であるという.

$\mathfrak{g}$  が有限型の場合は、Weyl 群の最長元の簡約表示  $w_o = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_N}$  を一つ選ぶことで各正ルートの表示  $\beta_k = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_{k-1}}(\alpha_k)$  が定まり、 $\beta_k \leq \beta_l \Leftrightarrow k \leq l$  で定まる  $\Delta_+$  上の全順序は凸順序となる. また  $U_q(\mathfrak{g})$  への組紐群の作用  $T_i$  を用いて正ルート  $\beta_k \in \Delta_+$  に付随するルートベクトルを  $E_{\beta_k} := T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_{k-1}}(E_{i_k})$  と定めれば、単調増加な単項式  $E_{\beta_1}^{m_1}E_{\beta_2}^{m_2}\dots E_{\beta_N}^{m_N}$  たちが  $U_q^+$  の基底を成すことが知られている [4]. さらにこの基底の凸性を利用することで  $U_q(\mathfrak{g})$  の普遍  $R$  行列の積表示  $\mathcal{R} = q^{-T}\Theta_N\Theta_{N-1}\dots\Theta_1$  が得られることも知られている. ただし  $T \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$  は不変内積の標準元,  $\Theta_k := \exp_{q_k}(-(q_k - q_k^{-1})E_{\beta_k} \otimes F_{\beta_k})$ ,  $q_k := q^{\frac{1}{2}|\beta_k|^2}$ ,  $\exp_q(x) := \mathbb{E}((q - q^{-1})x)$  は  $q$ -指数関数,  $F_{\beta_k} := \Omega(E_{\beta_k})$ ,  $\Omega: U_q^+ \rightarrow U_q^-$  は Chevalley involution である.

$\mathfrak{g}$  がアフィン型の場合になると、もはや Weyl 群の最長元は存在せず、しかも虚ルートが現れるという問題が生じる. 伊藤健氏は非捩型アフィン Lie 環  $\mathfrak{g}$  に対し、正ルート系上の凸順序の分類を行い [2], また有限型の場合の手法を拡張することによって、凸順序を用いたアフィン量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  の凸基底の構成法を示した [3]. その凸基底を用いれば  $U_q(\mathfrak{g})$  の普遍  $R$  行列の積表示も得られる.

$X_\ell^{(1)}$  型アフィン正ルート系上の一般の凸順序は  $\ell$  以下の正整数  $n$  に対し順序数  $n\omega$  の整列順序を組み合わせたものとなり、それは  $n$  行型凸順序と呼ばれる [2]. ただし  $X = A, B, \dots, G$ . 例えば次は  $A_2^{(1)}$  型ルート系上の 2 行型凸順序となっている.

$$\begin{aligned}
& \delta - \alpha_1 - \alpha_2 < \delta - \alpha_2 < 2\delta - \alpha_1 - \alpha_2 < 2\delta - \alpha_2 < 3\delta - \alpha_1 - \alpha_2 < 3\delta - \alpha_2 < \dots \\
& < \alpha_1 < \delta + \alpha_1 < 2\delta + \alpha_1 < 3\delta + \alpha_1 < \dots \\
& < \delta < 2\delta < 3\delta < 4\delta < \dots \\
& \dots < 3\delta - \alpha_1 < 2\delta - \alpha_1 < \delta - \alpha_1 \\
& \dots < \delta + \alpha_1 + \alpha_2 < \delta + \alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

ただし  $\delta := \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \in \Delta_+^{\text{im}}$  は null root と呼ばれる虚ルートである。

### 3. 壁越え公式の導出

伊藤氏の結果より, (2) の凸順序からアフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$  の凸基底が構成でき, それによって簡約普遍  $R$  行列  $\Theta \in U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^-$  の具体的な積表示が得られる. 一方, 簡約普遍  $R$  行列の一意性により, Dynkin 図形の自己同型  $\rho := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  が誘導する  $U_q^\pm$  の自己同型  $E_i \mapsto E_{\rho(i)}, F_i \mapsto F_{\rho(i)}$  について  $\Theta$  は不変となることがわかり, 恒等式  $\Theta = \rho \widehat{\otimes} \rho(\Theta)$  が成り立つ. さらに  $U_q^\pm$  を  $\mathbb{Q}(q)$ -係数の形式冪級数環上の  $q$ -差分作用素として表現することにより, 殆どのルートベクトルの像が 0 になるような  $U_q^+ \widehat{\otimes} U_q^-$  の良い表現  $\pi$  が構成できる. その表現  $\pi$  で恒等式の両辺を射影することにより, 次の恒等式が得られた.

**定理 2** [5]

$q$  を不定元とし, 3 変数の非可換な形式冪級数環  $\mathbb{Q}(q)[[y_0, y_1, y_2]]$  に関係式  $y_1 y_0 = q^2 y_0 y_1, y_2 y_0 = q^2 y_0 y_2, y_2 y_1 = q^2 y_1 y_2$  を入れて定まる完備な位相  $\mathbb{Q}(q)$ -代数において, 正規積を  $:y_0^l y_1^m y_2^n := q^{lm+mn+nl} y_0^l y_1^m y_2^n$  と定める. このとき次の恒等式が成立する.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(:y_2:)\mathbb{E}(:y_1:)\mathbb{E}(:y_0:) &= \left\{ \prod_{m \geq 0}^{\rightarrow} \mathbb{E}(:y_0^{m+1} y_1^m y_2^m:) \mathbb{E}(:y_0^{m+1} y_1^{m+1} y_2^m:) \right\} \mathbb{E}(:y_0 y_2:) \\
&\quad \times \mathbb{E}(-q:y_0 y_1 y_2:)^{-1} \mathbb{E}(-q^{-1}:y_0 y_1 y_2:)^{-1} \\
&\quad \times \mathbb{E}(:y_1:) \left\{ \prod_{m \geq 0}^{\leftarrow} \mathbb{E}(:y_0^m y_1^{m+1} y_2^{m+1}:) \mathbb{E}(:y_0^m y_1^m y_2^{m+1}:) \right\}.
\end{aligned}$$

ただし  $\prod_{m \geq 0}^{\rightarrow} a_m := a_0 a_1 a_2 \dots, \prod_{m \geq 0}^{\leftarrow} a_m := \dots a_2 a_1 a_0$  と定める. また無限和や無限積の収束は, 単項式  $y_0^l y_1^m y_2^n$  の次数を  $l+m+n$  として次数付けを入れることにより定まる線形位相についての収束と解する.

さらにこの恒等式において  $y_0 = x_2, y_1 = x_1, y_2 = qx_1 x_2^{-1}$  を代入すれば (1) が得られる. 従って定理 2 は壁越え公式 (1) の拡張となっていると考えられる.

### 参考文献

- [1] T. Dimofte, S. Gukov, Y. Soibelman. *Quantum Wall Crossing in  $N=2$  Gauge Theories*, Lett. Math. Phys. **95** (2011) 1-25, arXiv:0912.1346.
- [2] K. Ito. *The classification of convex orders on affine root systems*, Comm. in Alg. **29** (2001), 5605-5630, arXiv:math/9912020.
- [3] K. Ito. *A new description of convex bases of PBW type for untwisted quantum affine algebras*, Hiroshima Math. J. **40** (2010), 133-183.
- [4] G. Lusztig. *Introduction to Quantum Groups*, Birkhäuser, Boston, (1993).
- [5] 菅原優. アフィン量子群の凸基底と普遍  $R$  行列について, 東北大学修士論文, (2019).

# $q$ -Stokes problems on basic hypergeometric equations

大山 陽介 (徳島大学大学院社会産業理工学研究部理工学域)<sup>1</sup>

2017年春, 18年春, 秋と過去3度の学会で  $q$ -超幾何方程式の接続問題について話した.  $q$ -超幾何方程式とは, 係数が高々一次式の線型  $q$ -差分方程式であり, 微分の場合の Goursat の表示の差分類似である. 実際,  $q$ -超幾何級数 [GR]

$${}_r\phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, x) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_n}{(b_1, \dots, b_s; q)_n (q; q)_n} \left\{ (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right\}^{1+s-r} x^n.$$

は  $q$ -超幾何方程式をみたす. なお,  $q \in \mathbb{C}^*$ ,  $0 < |q| < 1$  に対して  $q$ -階乗積:

$$(a; q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j), \quad (a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j), \quad (a_1, a_2, \dots, a_m; q)_n = \prod_{j=1}^m (a_j; q)_n.$$

逆に係数が高々一次で2階以上であれば,  ${}_r\phi_s$  で表示される解を持つが, 超幾何級数で表示できない解も持つ. たとえば, テータ函数

$$\theta_q(x) = \theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k(k-1)/2} x^k = (q, -x, -q/x; q)_\infty$$

は  $x\theta_q(xq) = \theta_q(x)$  を満たすが超幾何級数ではない.

散漫になっているので過去の結果をまとめると

- 1) 2016年時点で2階で未解決だった, Hahn-Exton 方程式の発散解と  $q$ -Hermite 函数の接続問題 (17春). 2階  $q$ -超幾何方程式の接続問題が完成
- 2) 高階の場合は ramification が起こるので, 非超幾何解で収束解 (18春) の場合と発散 (19秋) の場合を扱った

確定特異点の場合は Thomae[T] が, 収束する超幾何解の場合は, 高階をふくめて Watson[W] がすでに扱っている. また, 発散する超幾何解の場合は多重  $q$ -Borel 変換を使えば接続公式が得られることがわかっている.

残る場合は,  $q$ -超幾何方程式の Newton 図形が3辺を持つ場合と, 原点と無限遠の両方が不確定特異点の場合である. 後者は2階では  $q$ -Hermit 函数が例になっているが, 高階の場合は未完成である. 今回は,  $q$ -超幾何方程式の Newton 図形が3辺を持つ場合を扱う. もっとも簡単な場合は

$$[xq(1 - a_1\sigma)(1 - a_2\sigma)(1 - a_3\sigma) + \sigma(1 - \sigma)]y(x) = 0. \quad (1)$$

であり, 発散超幾何級数  $y = {}_3\phi_1(a_1, a_2, a_3; 0; q, x)$  が解になる.

■ 無限遠における (1) の局所解はすべて収束級数で表示され

$$y_{1,\infty}(x) = \frac{\theta(-a_1x)}{\theta(-x)} {}_2\phi_2 \left( \begin{matrix} a_1, 0 \\ qa_1/a_2, qa_1/a_3 \end{matrix}; q, \frac{q^2}{a_2a_3x} \right),$$

<sup>1</sup>本研究は科研費 (課題番号:19K03566) の助成を受けたものである. また, フランス・Lille 大学の Changui Zhang 氏との共同研究である.

であり,  $y_{2,\infty}(x), y_{3,\infty}(x)$  は  $a_1, a_2, a_3$  を cyclic に変えることで得る.

■ 原点における局所解は

$$\begin{aligned} y_{1,0}(x) &= \frac{1}{\theta(-qx)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\ y_{2,0}(x) &= {}_3\phi_1(a_1, a_2, a_3; 0; q, x), \\ y_{3,0}(x) &= \theta(-a_1 a_2 a_3 x/q) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \theta(-a_1 a_2 a_3 x/q) w_3(x). \end{aligned}$$

となり,  $u_{2,0}(x), u_{3,0}(x)$  は超幾何級数ではない発散級数で表される.

■ 接続公式 1

$$y_{1,0}(x) = \frac{(q/a_1; q)_{\infty}}{(q, a_2/a_1, a_3/a_1; q)_{\infty}} \frac{\theta(-a_1 q x, -x)}{\theta(-a_1 x, -q x)} y_{1,\infty}(x) + \text{idem}(a_1; a_2, a_3).$$

■ 接続公式 2  ${}_3f_2(\lambda, x) = \mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]} \circ \mathcal{B}_q^+(y_{2,0})(x)$  として

$${}_3f_2(\lambda, x) = \frac{(a_2, a_3; q)_{\infty}}{(a_2/a_1, a_3/a_1; q)_{\infty}} \frac{\theta(a_1 \lambda, q a_1 x/\lambda, -q x)}{\theta(\lambda, q x/\lambda, -a_1 x)} y_{1,\infty}(x) + \text{idem}(a_1; a_2, a_3).$$

■ 接続公式 3  $p^2 = q$ .  $f_3(x; \mu, \lambda) = \mathcal{L}_{p;1}^{[\mu]} \circ \mathcal{L}_{p;1}^{[\lambda]} \circ \mathcal{B}_q^+(w_3)$  とおくと発散級数  $w_3$  は総和可能 (接続係数は長いので講演で述べる). 鍵になるのは bilateral series の変換である.

■ 手法  $q$ -Borel 変換  $\mathcal{B}_q^{\pm} : \mathbb{C}[[t]] \rightarrow \mathbb{C}[[\tau]]$  を次で定める

$$\mathcal{B}_q^{\pm} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{\pm n(n-1)/2} \tau^n.$$

$\mathcal{B}_q^+$  の逆変換として  $q$ -Laplace 変換  $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}$  を次の Jackson 積分で定める:

$$\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}(\varphi)(x) := \frac{1}{1-q} \int_0^{\lambda\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\theta_q(\tau/x)} \frac{d_q \tau}{\tau} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\varphi(q^n \lambda)}{\theta_q(q^n \lambda/x)}.$$

■ 文献:

[GR] Gasper, G., Rahman, M.; Basic Hypergeometric Series, 2nd ed, Cambridge (2004).

[T] Thomae, J.; Les séries Heineennes supérieures, ou les séries de la forme ..., *Ann. Mat. Pura Appl.* **4** (1870), 105–138.

[W] Watson, G. N.; The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

## Variants of $q$ -hypergeometric equation

波多野 修也 (中央大学大学院 理工学研究科)  
 松縄 竜弥 (中央大学大学院 理工学研究科)  
 佐藤 智輝 (中央大学大学院 理工学研究科)  
 竹村 剛一 (お茶の水女子大学 基幹研究院)

超幾何関数の  $q$ -変形として、 $q$  超幾何級数 (basis hypergeometric series) は

$${}_2\phi_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(q; q)_n (c; q)_n} x^n, \quad (\lambda, q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda q^i). \quad (1)$$

により定められる。また、 $q$  超幾何方程式 (basic hypergeometric equation) は

$$(x - q)f(x/q) - ((a + b)x - q - c)f(x) + (abx - c)f(qx) = 0. \quad (2)$$

として定められるが、(1) での  $q$  超幾何級数は、 $q$  超幾何方程式 (2) の解となっている。また、 $a = q^\alpha$ ,  $b = q^\beta$ ,  $c = q^\gamma$  とおいて  $q \rightarrow 1$  の極限をとると、 $q$  超幾何級数 (1) は通常の超幾何級数  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$  に移行し、 $q$  超幾何方程式 (2) は  $z = 0, 1, \infty$  に確定特異点をもつガウスの超幾何微分方程式に移行する。なお、 $q$  超幾何方程式 (2) は (1) とは異なる表示の解ももっており、[1] などで論じられている。

本講演では、相異なる数  $t_1, t_2$  が 0 とは異なる場合に、特異点が  $t_1, t_2, \infty$  となる超幾何微分方程式の  $q$  変形 ( $q$  超幾何方程式の変異形, a variant of  $q$ -hypergeometric equation) を導入し、そのいくつかの解を求める。その  $q$  差分方程式は、 $q$  ホイン方程式を特殊化することで導入する。

$q$  ホイン方程式は、(2) の式において、 $f(x/q)$  などの係数をすべて  $x$  の非退化な 2 次式に変えたものであるが ([2, 4])、この表示として次のものとする ([5])。

$$(x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) + q^{\alpha_1+\alpha_2}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)g(qx) - \{(q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2})x^2 + Ex + q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}(q^{\beta/2} + q^{-\beta/2})t_1t_2\}g(x) = 0. \quad (3)$$

ここで、 $E$  はホインの微分方程式におけるアクセサリーパラメーターに対応するものである。

$q$  ホイン方程式において  $z = 0$  での解の振る舞いが非特異的になるという条件を考えると、 $\beta = \pm 1$ ,  $E = -q^{(\alpha_1+\alpha_2+h_1+h_2+l_1+l_2)/2}\{(q^{-h_2} + q^{-l_2})t_1 + (q^{-h_1} + q^{-l_1})t_2\}$  という条件が得られるので、この特殊化による

$$(z - q^{h_1+1/2}t_1)(z - q^{h_2+1/2}t_2)g(z/q) + q^{\alpha_1+\alpha_2}(z - q^{l_1-1/2}t_1)(z - q^{l_2-1/2}t_2)g(qz) - [(q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2})z^2 + Ez + p(q^{1/2} + q^{-1/2})t_1t_2]g(z) = 0, \quad (4)$$

本研究は科研費 (課題番号:18K03378) の助成を受けたものである。



$$p = q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}, \quad E = -p\{(q^{-h_2} + q^{-l_2})t_1 + (q^{-h_1} + q^{-l_1})t_2\}. \quad (5)$$

を  $q$  超幾何方程式の変異形と呼ぶことにする ([3])。この  $q$  差分方程式に対して  $q \rightarrow 1$  の極限を考えると、3 点  $\{t_1, t_2, \infty\}$  にのみ確定特異点をもつ 2 階線形微分方程式が得られる。

この差分方程式の解を考察するが、 $\lambda_1 = (h_1 + h_2 - l_1 - l_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1)/2$  とおく。まず、 $z = \infty$  での級数解については、

$$g_1(z) = z^{-\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} (q^{1/2}z^{-1})^n \frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1}; q)_n}{(q^{\alpha_1-\alpha_2+1}; q)_n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1-h_2+l_2}; q)_k (q^{\lambda_1+\alpha_1-h_1+l_1}; q)_{n-k} (q^{l_1}t_1)^k (q^{l_2}t_2)^{n-k}}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} \quad (6)$$

というものがとれる ([3])。これは、 $q$ -Appell 関数

$$\Phi^{(1)}(a; b, b'; c; q; x, y) = \sum_{\ell, k \geq 0} \frac{(a; q)_{\ell+k} (b; q)_{\ell} (b'; q)_k}{(q; q)_{\ell} (q; q)_k (c; q)_{\ell+k}} x^{\ell} y^k, \quad (7)$$

の特殊化により表示可能であるが、一方で  $q$ -Appell 関数がみたす  $q$  差分方程式を特殊化することによって  $q$  超幾何方程式の変異形 (4) を得ることもできる。

他の解として以下のものを得ることができた ([3])。

$$g_2(x) = x^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} (x/(q^{l_1-1/2}t_1); q)_n q^n \frac{(q^{\lambda_1+\alpha_1}; q)_n (q^{\lambda_1+\alpha_2}; q)_n}{(q^{h_1-l_1+1}; q)_n (q^{h_2-l_1+1}t_2/t_1; q)_n (q; q)_n}. \quad (8)$$

$$g_3(x) = x^{-\alpha_1} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (q^{h_1+1/2}t_1/x; q)_n \frac{q^n (q^{\lambda_1+\alpha_1}; q)_n}{(q^{h_1-l_2+1}t_1/t_2; q)_n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(q^{\lambda_1-h_2+l_2+\alpha_1}; q)_k q^{k(k+1)/2} (-q^{h_1-l_2}t_1/t_2)^k}{(q^{h_1-l_1+1}; q)_k (q; q)_k (q; q)_{n-k}} \right]. \quad (9)$$

ここで  $g_2(x)$  は  ${}_3\phi_2$  を用いて表示可能であり、和が有限で止まる場合は big  $q$ -Jacobi 多項式となっている。

## 参考文献

- [1] W. Hahn, Beiträge zur Theorie der Heineschen Reihen. Die 24 Integrale der Hypergeometrischen  $q$ -Differenzgleichung. Das  $q$ -Analogon der Laplace-Transformation. *Math. Nachr.* **2** (1949), 340–379.
- [2] W. Hahn, On linear geometric difference equations with accessory parameters, *Funkcial. Ekvac.* **14** (1971), 73–78.
- [3] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of  $q$ -hypergeometric equation, in preparation.
- [4] K. Takemura, Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and  $q$ -Painleve equations, *J. Integrable Systems* **2** (2017), xyx008.
- [5] K. Takemura, On  $q$ -deformations of the Heun equation, *SIGMA* **14** (2018), paper 061.

# Dynkin 籐に付随する量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

藤田 遼 (京都大学大学院理学研究科)\*

## 1. はじめに

異なる代数系の表現論を結びつけるような構成は、それ自身が研究対象として大変興味深いものであるが、しばしば一方の難しい事象を他方のより易しい事象に翻訳し、例えば表現を具体的に構成する手続きをもたらすなど、応用上も有益なことが多い。

前世紀前半からよく知られている Schur-Weyl 双対性はその良い見本である。これは  $A_n$  型複素単純 Lie 代数  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  の表現論と  $d$  次対称群  $\mathfrak{S}_d$  の表現論とを結びつける構成であり、代数系や考える表現のカテゴリを変換することによってそのさまざまな一般化(変種)を考えることができる。特に代数系  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  および  $\mathfrak{S}_d$  を、それらの由緒正しい量子アフィン化である  $A_n$  型アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$  および  $GL_d$  型アフィン Hecke 環  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  にそれぞれ置き換えて得られる一般化は量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性と呼ばれる [3, 5, 10]。これは代数系  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$  と  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  の有限次元表現論を自然かつ強力に結びつけている。その具体的根拠として

- 構成から得られる有限次元表現の圏の間の関手が極めて良い性質を示す。例えば適切な充満部分圏の間の圏同値を導き、モノイダル圏構造とも整合的である [3];
- 旗多様体の同変  $K$  理論を用いて幾何学的に解釈できる [10],

といった事実が挙げられる。

本稿の主題は、この量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性のさらなる変種(ある意味では一般化)であって、Dynkin 籐  $Q$  (ADE 型 Dynkin 図形の各辺に向きを与えたデータ)に付随して得られるものである。以下、単に「籐  $Q$  に付随する Schur-Weyl 双対性」と呼ぶ。これはもともと Kang-柏原-Kim [13] によって導入され、その構成に籐  $Q$  の表現論に関するデータ (Auslander-Reiten 籐) が用いられる点が興味深い。配役としては、 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$  に代わってより一般に Dynkin 籐  $Q$  と同じ型の ADE 型複素単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}_Q$  に付随するアフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$  を考える。一方その相方として、 $GL$  型アフィン Hecke 環  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  に代わって籐  $Q$  に付随する籐 Hecke 環  $H_Q$  が登場する。籐 Hecke 環はその表現論が量子群  $U_v(\mathfrak{g}_Q)$  の圏化 (categorification) を与えるという意味で  $GL$  型アフィン Hecke 環の一般化と思うことができ、Khovanov-Lauda [21] と Rouquier [24] によって導入されたため KLR 代数とも呼ばれている。

本稿では、通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性をお手本に、籐  $Q$  に付随する Schur-Weyl 双対性に関しても以下のように類似の事実が成り立つことを説明する：

- 構成がもたらす有限次元加群圏の間の関手  $H_Q\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$  はテンソル積と整合的であり、適切な部分圏に制限すれば圏同値である；
- 籐  $Q$  に付随する (次数付き) 旗多様体の同変  $K$  理論を用いた幾何学的解釈を持つ。

本研究の一部は科研費 [課題番号 18J10669] の助成を受けたものです。

\* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科 数学教室  
e-mail: rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

これらは「叢  $Q$  に付随する Schur-Weyl 双対性が代数系  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$  と  $H_Q$  の有限次元表現論を自然かつ強力に結びつけている」ことを明確に示すものである。

## 2. 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

まず、通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性について振り返っておく。2つの自然数  $n, d$  を固定する。

### 2.1. 古典的 Schur-Weyl 双対性

古典的な場合から始める。  $V := \mathbb{C}^{n+1}$  を  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  の自然表現とする。その  $d$  回テンソル積表現  $V^{\otimes d}$  はテンソル成分の置換による対称群  $\mathfrak{S}_d$  の右作用を持つ。環上の加群の言葉では、  $U(\mathfrak{sl}_{n+1})$  を包絡環、  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  を群環として、  $V^{\otimes d}$  は  $(U(\mathfrak{sl}_{n+1}), \mathbb{C}\mathfrak{S}_d)$  双加群をなす：

$$U(\mathfrak{sl}_{n+1}) \curvearrowright V^{\otimes d} \curvearrowleft \mathbb{C}\mathfrak{S}_d.$$

双加群  $V^{\otimes d}$  は対応  $M \mapsto V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} M$  によって有限次元左加群の圏の間の関手

$$F_{n,d}: \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

を導く。これに関して以下の事実が成立する：

1. [既約表現の対応] 関手  $F_{n,d}$  は圏  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$  の既約対象を圏  $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  の既約対象または  $\{0\}$  に送る；
2. [アーベル圏構造の対応] 圏  $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  および圏  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$  はともにアーベル圏として半単純である。したがって、自明に関手  $F_{n,d}$  は完全である。特に  $n \geq d$  のとき、関手  $F_{n,d}$  によって圏  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$  は圏  $U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  の Serre 部分圏<sup>1</sup> に圏同値である；
3. [モノイダル圏構造の対応] 対称群の次数  $d$  を動かした直和  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}}$  には放物型誘導  $M \odot M' := \text{Ind}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_{d'}}^{\mathfrak{S}_{d+d'}}(M \boxtimes M')$  によってモノイダル圏の構造が入る。このとき関手の直和

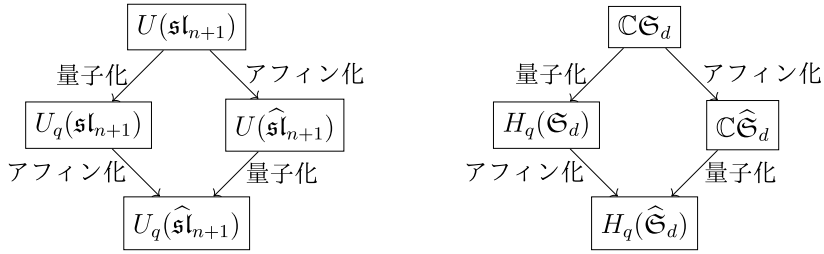
$$F_n := \bigoplus_{d \geq 0} F_{n,d}: \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

はモノイダル関手である。つまり、  $F_n(M \odot M') \cong F_n(M) \otimes F_n(M')$  という自然な同型がある。

### 2.2. 量子化とアフィン化

下図に示す通り、Lie 代数  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  および対称群  $\mathfrak{S}_d$  には、それらの量子化 ( $q$  変形) とアフィン化、さらにその両者を合わせた量子アフィン化が存在する。その各々に対応して Schur-Weyl 双対性の変種を考えることも可能である。ここで、  $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ ,  $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ ,  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$  はそれぞれ量子群、アフィン Lie 代数、アフィン量子群であり、  $H_q(\mathfrak{S}_d)$ ,  $\widehat{\mathfrak{S}}_d := \mathfrak{S}_d \times \mathbb{Z}^d$ ,  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  はそれぞれ  $GL_d$  の岩堀-Hecke 環、アフィン Weyl 群、アフィン Hecke 環である。以下、量子化のパラメータ  $q$  は不定元とし、量子化された代数はいずれも有理関数体  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$  上定義されていると約束する。特に  $q$  は 1 の冪根ではない。

<sup>1</sup>アーベル圏の充満部分圏であって、部分・商・拡大を取る操作に関して閉じているもの。



量子化とアフィン化について表現論的な側面からもう少し詳しく述べよう．一般に複素単純Lie代数  $\mathfrak{g}$  の量子包絡環 (量子群)  $U_q(\mathfrak{g})$  は量子パラメータ  $q$  の導入によって包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を Hopf 代数として非余可換に変形したものである．表現の言葉で言えば、これはテンソル成分の置換  $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$  がもはや  $U_q(\mathfrak{g})$  加群としての同型にはならないことを意味している．結果的に圏  $U_q(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$  は非対称なモノイダル圏になる．一方、複素単純Lie代数  $\mathfrak{g}$  に付随するアフィンLie代数  $\hat{\mathfrak{g}}$  はループLie代数  $L\mathfrak{g} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$  の1次元中心拡大である．我々はその有限次元表現の圏  $U(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  に興味がある．しかし  $\hat{\mathfrak{g}}$  の有限次元表現は常にレベル0, すなわち中心元が自明に作用することが分かる．ゆえに結局  $U(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  と  $U(L\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$  は自然に同一視され、特に圏  $U(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  は半単純でない<sup>2</sup>．まとめると、標語的には「量子化はモノイダル圏構造の非対称化であり、アフィン化はアーベル圏構造の非半単純化である」と言える<sup>3</sup>．

同様に考えれば、アフィン量子群の有限次元加群圏  $U_q(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  がモノイダル圏として非対称かつアーベル圏として非半単純であることは理解しやすい．実際そのような性質のひとつの現れとして、2つの表現  $V_1, V_2 \in U_q(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  についてテンソル積  $V_1 \otimes V_2$  と  $V_2 \otimes V_1$  は同型にならないことがあるが、それらの組成因子は常に重複度込みで一致し、Grothendieck 環  $K(U_q(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}})$  は可換になることが知られている [7]．

圏	アーベル圏構造	モノイダル圏構造
$U(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$	半単純	対称
$U_q(\mathfrak{g})\text{-mod}_{\text{fd}}$	半単純	非対称
$U(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$	非半単純	対称
$U_q(\hat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$	非半単純	非対称

Hecke 環サイドに関しても全く同様のことが成立する．ただし、モノイダル圏の構造は次数  $d$  に関して有限次元加群圏の直和の上に放物型誘導 (の類似) を考えることで得られる．特に、アフィン Hecke 環の有限次元加群圏の直和  $\bigoplus_{d \geq 0} H_q(\hat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$  は非半単純アーベル圏かつ非対称モノイダル圏で、その Grothendieck 環は可換になる．このことは後で登場する籐 Hecke 環の加群圏  $\mathcal{M}_Q$  でも同様である．

### 2.3. 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性

さて、アフィン Hecke 環  $H_q(\hat{\mathfrak{S}}_d)$  は2種類の生成元  $\{X_k^{\pm 1}\}_{1 \leq k \leq d}, \{T_\ell\}_{1 \leq \ell < d}$  といくつかの関係式によって定義される  $\mathbb{k}$  代数であった．ここで元  $X_k^{\pm 1}$  たちは互いに可換であり、Laurent 多項式環  $\mathbb{k}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_d^{\pm 1}]$  と同型な部分代数を生成する．一方、元  $T_\ell$  たちは組紐関係式を満たし、岩堀-Hecke 環  $H_q(\mathfrak{S}_d)$  と同型な部分代数を生成する．

<sup>2</sup>例えば、 $\mathfrak{g}$  の非自明な有限次元表現  $V$  に対し、 $L\mathfrak{g}$  の表現  $V[z^{\pm 1}] := V \otimes \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$  を考える．このとき任意の複素数  $a \in \mathbb{C}^\times$  に対し有限次元商  $V[z^{\pm 1}]/(z-a)^2 V[z^{\pm 1}]$  は半単純でない．

<sup>3</sup>もちろんここでは有限次元表現に話を限定している．

Lie代数  $\mathfrak{sl}_{n+1}$  の自然表現  $V = \mathbb{C}^{n+1}$  の量子アフィン化として、アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$  はベクトル空間  $\mathbb{V} := \mathbb{k}^{n+1} \otimes \mathbb{k}[z^{\pm 1}]$  上に自然な作用を持つ。その  $d$  回テンソル積  $\mathbb{V}^{\otimes d}$  上にはアフィン Hecke 環  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  が右から作用する。この作用は、生成元  $X_k^{\pm 1}$  を  $k$  番目のテンソル成分におけるスペクトル変数  $z^{\pm 1}$  の掛け算作用素に、生成元  $T_\ell$  を  $(\ell, \ell + 1)$  番目のテンソル成分  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  上の正規  $R$  行列（後述）を用いて適切に作られる作用素にそれぞれ送ることで定まる。これより  $(U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}), H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d))$  双加群を得る：

$$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \curvearrowright \mathbb{V}^{\otimes d} \curvearrowleft H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d).$$

**定理 2.1** (Chari-Pressley [3]). 対応  $M \mapsto \mathbb{V}^{\otimes d} \otimes_{H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)} M$  によって誘導される有限次元加群の圏の間の関手

$$\mathcal{F}_{n,d}: H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

に関して、以下の事実が成立する：

1. [既約表現の対応] 関手  $\mathcal{F}_{n,d}$  は圏  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$  の既約対象を圏  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  の既約対象または  $\{0\}$  に送る；
2. [アーベル圏構造の対応] 関手  $\mathcal{F}_{n,d}$  は完全である。特に  $n \geq d$  のとき、関手  $\mathcal{F}_{n,d}$  によって圏  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$  は圏  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  の Serre 部分圏に圏同値である；
3. [モノイダル圏構造の対応] 次数  $d$  に関する直和として得られる関手

$$\mathcal{F}_n := \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{F}_{n,d}: \bigoplus_{d \geq 0} H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$$

はモノイダル関手である。つまり、 $\mathcal{F}_n(M \odot M') \cong \mathcal{F}_n(M) \otimes \mathcal{F}_n(M')$ 。

**注意 2.2.** 上で見たように圏  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)\text{-mod}_{\text{fd}}$  と圏  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})\text{-mod}_{\text{fd}}$  はともに半単純でないので、1の既約表現の対応に関する主張から2の圏同値に関する主張は直ちには導かれない。この部分が古典的 Schur-Weyl 双対性の時よりも難しい。

### 3. Dynkin 籠に付随する一般化

以下  $X \in \{A, D, E\}$  とし、 $Q = (I, \Omega)$  を  $X_n$  型 Dynkin 図形から各辺に向きを与えて得られる籠とする。ここで  $I = \{1, \dots, n\}$  は Dynkin 図形の頂点集合、 $\Omega$  は籠  $Q$  の矢の集合（向き付けのデータ）である。また  $\mathfrak{g}_Q$  を  $X_n$  型複素単純 Lie 代数<sup>4</sup>、 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  をその単純ルートの集合とし、 $Q^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$  とおく。さらに  $W$  を  $\mathfrak{g}_Q$  の Weyl 群、 $R^+ := W\{\alpha_i\}_{i \in I} \cap Q^+$  を正ルートの集合とする。

#### 3.1. 籠 Hecke 環

正ルートの和  $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in Q^+$  に対して、籠 Hecke 環  $H_Q(\beta)$  が定まる [21, 24]。これは生成元と関係式で定義される体  $\mathbb{k}$  上の次数付き代数である。基礎体  $\mathbb{k}$  はとりあえず何でも良いが、後で Schur-Weyl 双対性を考えるときは  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$  とする。生成元は3種類  $\{e_i\}_{i \in I}, \{x_k\}_{1 \leq k \leq d}, \{\tau_\ell\}_{1 \leq \ell < d}$  からなる。ただし  $d := \text{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} d_i$  とし、

<sup>4</sup>もちろん Lie 代数  $\mathfrak{g}_Q$  は籠  $Q$  の向き付けには依らず、Dynkin 図形だけで決まるのであるが、籠  $Q$  と同じ Dynkin 型であることを忘れないためにここでは敢えて  $\mathfrak{g}_Q$  と書く。

$I^\beta := \{(i_1, \dots, i_d) \in I^d \mid \sum_{k=1}^d \alpha_{i_k} = \beta\}$  とおいた．集合  $\{e_i\}_{i \in I^\beta}$  は 1 を分割する直交冪単元の集合，すなわち  $\sum_{i \in I^\beta} e_i = 1$  かつ  $e_i \cdot e_{i'} = \delta_{i,i'} e_i$  を満たす．また生成元  $x_k, \tau_\ell$  はそれぞれアフィン Hecke 環  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  における生成元  $X_k, T_\ell$  の類似である（ただし  $\tau_\ell$  たちは厳密には組紐関係式を満たさない）．集合  $\{e_i\}_{i \in I^\beta} \cup \{x_k\}_{1 \leq k \leq d}$  は多項式環の直和  $P_\beta := \bigoplus_{i \in I^\beta} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_d] e_i$  に同型な  $H_Q(\beta)$  の部分代数を生成する．生成元  $\tau_\ell$  を含む定義関係式たちはやや複雑なので本稿では省略する．代わりに籠 Hecke 環  $H_Q(\beta)$  の多項式表現を記述しよう．これは後で Schur-Weyl 双対性の構成でも用いる．

**命題 3.1** (cf. [21] Proposition 2.3). 多項式環の直和  $P_\beta = \bigoplus_{i \in I^\beta} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_d] e_i$  には変数  $x_k$  の置換および  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I^\beta$  の成分の並べ替えによる自然な  $\mathfrak{S}_d$  作用があることに注意する．階数 1 の自由  $P_\beta$  加群  $P_\beta$  上に，さらに元  $\tau_\ell$  が  $P_\beta$  上の  $\mathbb{k}$  線形作用素

$$f \mapsto \sum_{\mathbf{i}: i_\ell = i_{\ell+1}} \frac{(s_\ell - 1)(e_i \cdot f)}{x_\ell - x_{\ell+1}} + \sum_{\mathbf{i}: (i_\ell \leftarrow i_{\ell+1}) \in \Omega} (x_{\ell+1} - x_\ell) s_\ell(e_i \cdot f) + \sum_{\mathbf{i}: \text{それ以外}} s_\ell(e_i \cdot f) \quad (1)$$

によって作用することで，籠 Hecke 環  $H_Q(\beta)$  の忠実な右表現  $H_Q(\beta) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(P_\beta)^{\text{op}}$  が定まる．ただし  $s_\ell$  は隣接互換  $(\ell, \ell+1) \in \mathfrak{S}_d$  である．

籠 Hecke 環  $H_Q(\beta)$  は  $\deg e_i = 0, \deg x_k = 2, \deg(\tau_\ell e_i) = -a_{i_\ell, i_{\ell+1}}$  によって  $\mathbb{Z}$  次数付き代数になる（ただし  $(a_{ij})_{i,j \in I}$  は  $X_n$  型 Cartan 行列）．この次数付けは下に有界であることが知られている．特に  $H_Q(\beta)$  の次数に関する完備化  $\widehat{H}_Q(\beta)$  も自然に  $\mathbb{k}$  代数となる．

さて，籠 Hecke 環に関して重要なことはその次数付き加群の圏が量子群  $U_v(\mathfrak{g}_Q)$  の圏化するという事実であり，その点では  $GL$  型アフィン Hecke 環の場合（LLT-有木の理論）の精密化・一般化を与えている．より正確には，有限次元次数付き加群圏  $H_Q(\beta)\text{-gmod}_{\text{fd}}$  を  $\beta \in \mathbb{Q}^+$  に関して直和した圏に放物型誘導の類似によってモノイダル圏の構造が入り，その Grothendieck 環が量子群の上三角部分の双対整形式  $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$  と同型になる [21, 24]．ここで  $v^{\pm 1}$  は加群圏の次数シフトに対応する．さらに基礎体  $\mathbb{k}$  の標数が 0 ならば，この同型の下で既約表現の類が  $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$  の双対標準基底 (dual canonical basis) の元と  $1:1$  に対応する [26, 25]．次数を忘却する関手  $H_Q(\beta)\text{-gmod}_{\text{fd}} \rightarrow \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}}$  は，Grothendieck 環のレベルでは特殊化  $v = 1$  に対応する．双対整形式  $U_v^+(\mathfrak{g}_Q)_{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]}$  の  $v = 1$  における特殊化は可換環であり，その複素化は  $\mathfrak{g}_Q$  の上三角部分に対応する冪単群  $N_Q$  の座標環を与える．以上をまとめると次が分かる：

**定理 3.2** (Khovanov-Lauda [21], Rouquier [24, 25], Varagnolo-Vasserot [26]). 基礎体  $\mathbb{k}$  の標数は 0 とする．このときモノイダル圏

$$\mathcal{M}_Q := \bigoplus_{\beta \in \mathbb{Q}^+} \widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}}$$

の Grothendieck 環（の複素化） $K(\mathcal{M}_Q)_{\mathbb{C}}$  は座標環  $\mathbb{C}[N_Q]$  と同型で，これは既約表現の類と（特殊化された）双対標準基底の元との  $1:1$  対応を導く．

**注意 3.3.** 籠  $Q$  が  $A_n$  型単調籠  $(1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n)$  の場合は，籠 Hecke 環とアフィン Hecke 環の間にもっと直接の関係がある．すなわち，籠 Hecke 環  $\widehat{H}_Q(\beta)$  がアフィン Hecke 環  $H_q(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  の  $\beta$  から適切に決まる中心指標に関する完備化と同型になる [1, 24]．

### 3.2. Kang-柏原-Kimによる双加群の構成

ここではKang-柏原-Kim [13]による籐 $Q$ に付随するSchur-Weyl双対性の構成を述べる。

まず, Dynkin 籐 $Q$ の複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現の圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ のAuslander-Reiten (AR) 籐が重要である. AR 籐は圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ の直既約加群 (の同型類) を頂点とし, 対応する直既約加群の間の既約射を矢とすることで定まる籐である. Gabriel の定理より, 圏 $\mathbb{C}Q\text{-mod}_{\text{fd}}$ の直既約加群はその次元ベクトルによって正ルートと $1:1$ 対応しているので, AR 籐の頂点集合は正ルートの集合 $R^+$ と同一視できる. 矢の情報もルート系の言葉だけで完全に統制される. AR 籐には自然に座標を入れることができ, それによって写像 $\phi_Q: R^+ \hookrightarrow I \times q^{\mathbb{Z}}$ が定まる. これは $q^{\mathbb{Z}}$ 方向の平行移動を除いて一意である. 本稿ではこれ以上詳しいことは述べないが, 代わりに次ページにAR 籐とその座標の例を図示した. ただし図では正ルート $\sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in R^+$ を $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$ と略記している. 特に図1からはAR 籐が籐 $Q$ の向き付けに依存する様子が窺える.

さて,  $\{\varpi_i\}_{i \in I}$ を $\mathfrak{g}_Q$ の基本ウェイトの集合とする. 各 $i \in I$ に対しアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ のレベル0可積分加群 $\mathbb{V}_i$ であって, 古典ウェイト $\varpi_i$ の巡回ベクトル $v_i \in \mathbb{V}_i$ を持ち, その古典ウェイトの集合がWeyl群軌道 $W \cdot \varpi_i$ の凸包に含まれるような最大のものを考える. これはChari-Pressley [4]の意味での大域Weyl加群であり, 柏原 [17]によるレベル0端ウエイト加群, 中島 [22]による籐多様体の中心ファイバーの同変 $K$ 群として実現される標準加群とも同型である.  $\mathfrak{g}_Q$ が $A_n$ 型で $i=1$ のとき,  $\mathbb{V}_1$ はアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ のベクトル表現 $\mathbb{V} = \mathbb{k}^{n+1}[z^{\pm 1}]$ に他ならない. 一般の場合も同型 $\text{End}_{U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)}(\mathbb{V}_i) \cong \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]$ があり,  $\mathbb{V}_i$ は $\mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]$ 加群として有限階数自由である. この $z_i$ は所謂スペクトル変数である. スペクトル変数 $z_i$ を任意のスカラー $a \in \mathbb{k}^\times$ に特殊化して得られる $\mathbb{V}_i$ の有限次元商 $V_i(a) := \mathbb{V}_i / (z_i - a)\mathbb{V}_i$ は既約 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 加群である. 任意の有限次元既約 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 表現は $V_i(a)$ たちの適当なテンソル積の組成因子として現れ, モノイダル圏 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$ のGrothendieck環は類 $[V_i(a)]$ たちを変数とする無限変数多項式環と同型になる [2, 7]. その意味で族 $\{V_i(a)\}_{i \in I, a \in \mathbb{k}^\times}$ は基本的である.

正ルート $\alpha \in R^+$ に対して, AR 籐におけるその座標が $\phi_Q(\alpha) = (i, q^p)$ であったとする. このとき, 2種類の $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 加群 $\widehat{V}(\alpha) := \mathbb{V}_i \otimes_{\mathbb{k}[z_i^{\pm 1}]} \mathbb{k}[x], V(\alpha) := \mathbb{V}_i(q^p)$ を考える. ただし $x := q^{-p}z_i - 1$ とおいた. 加群 $\widehat{V}(\alpha)$ は変形パラメータ $x$ による既約加群 $V(\alpha)$ の無限小変形である. そして, 単純ルートに付随する加群 $\widehat{V}(\alpha_i)$ を用いて

$$\widehat{V}^{\otimes \beta} := \bigoplus_{\mathbf{i}=(i_1, \dots, i_d) \in I^\beta} \widehat{V}(\alpha_{i_1}) \widehat{\otimes} \widehat{V}(\alpha_{i_2}) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \widehat{V}(\alpha_{i_d}) \quad (2)$$

と定義する. ここに, 次の段落で説明する正規 $R$ 行列 (normalized  $R$ -matrix) を用いて, 籐Hecke環 $\widehat{H}_Q(\beta)$ の右作用を入れる.

2頂点 $i, j \in I$ に付随する正規 $R$ 行列 $R_{i,j}$ はテンソル積加群 $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j$ からその順序を入れ替えたテンソル積加群 $\mathbb{V}_j \otimes \mathbb{V}_i$ への $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \otimes \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}, z_j^{\pm 1}]$ 準同型写像であって, 正規性条件 $R_{i,j}(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$ を満たすものである. しかし, 実際にそのような $R_{i,j}$ が存在するためにはスペクトル変数の比 $z_j/z_i$ に関する局所化を行う必要があり, 正確には $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \otimes \mathbb{k}[z_i^{\pm 1}, z_j^{\pm 1}]$ 準同型写像

$$R_{i,j}: \mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j \rightarrow \mathbb{k}(z_j/z_i) \otimes_{\mathbb{k}[(z_j/z_i)^{\pm 1}]} (\mathbb{V}_j \otimes \mathbb{V}_i), \quad R_{i,j}(v_i \otimes v_j) = 1 \otimes (v_j \otimes v_i)$$

としてはじめてwell-definedに定まる. 正規 $R$ 行列 $R_{i,j}$ が $z_j/z_i = a_j/a_i$ に極を持つということは,  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$ 準同型 $V_i(a_i) \otimes V_j(a_j) \rightarrow V_i(a_i) \otimes V_j(a_j)$ であって (古典) 最高ウエ

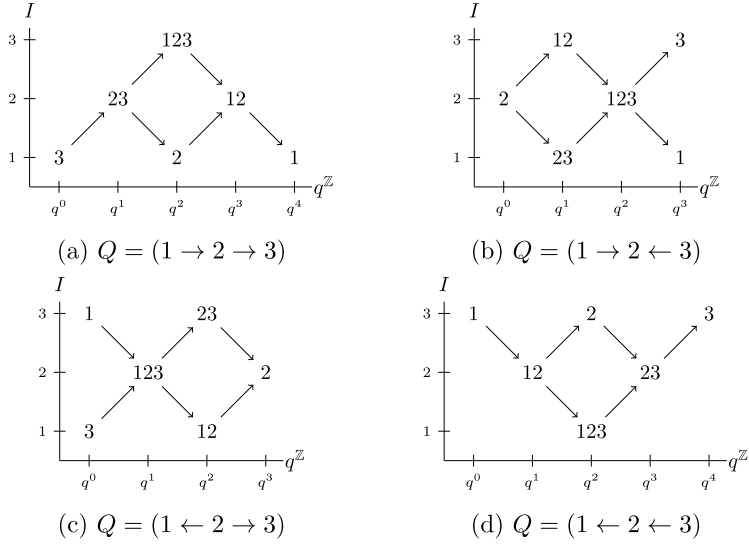


図 1:  $A_3$  型の 4 つの AR 筋とその座標

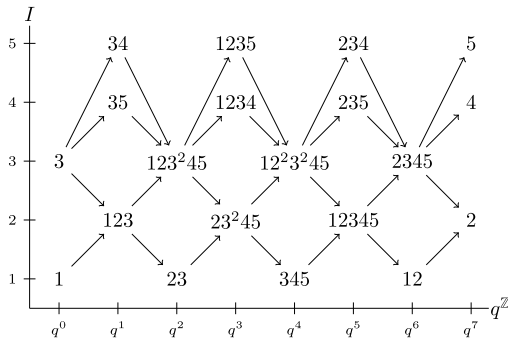


図 2:  $D_5$  型  $Q = ( 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \begin{smallmatrix} \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \end{smallmatrix} )$  の AR 筋とその座標

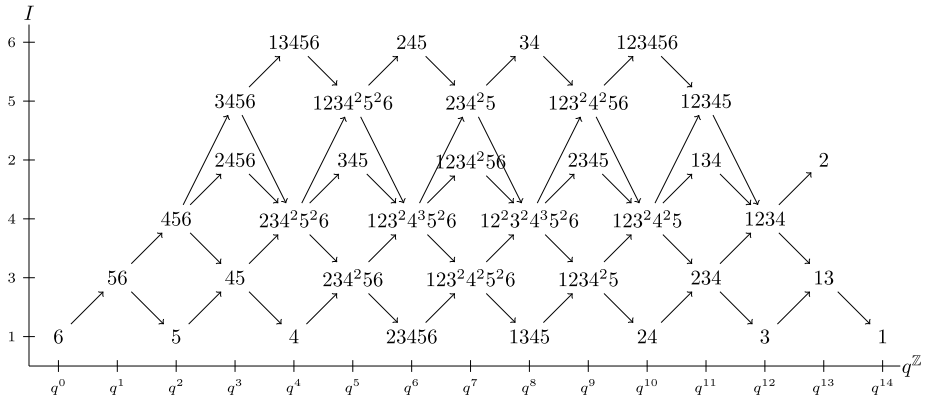


図 3:  $E_6$  型  $Q = ( 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \begin{smallmatrix} \downarrow 2 \\ \downarrow \end{smallmatrix} \rightarrow 5 \rightarrow 6 )$  の AR 筋とその座標



イト空間の同型  $\mathbb{k}(v_i \otimes v_j) \cong \mathbb{k}(v_j \otimes v_i)$  を導くものが存在しないことを意味しており、特にこのとき  $V_i(a_i) \otimes V_j(a_j) \not\cong V_j(a_j) \otimes V_i(a_i)$  であることが従う。このように正規  $R$  行列がどこに極を持つかを理解することは圏  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$  のモノイダル圏としての性質を理解する上で極めて重要である。

以上の準備のもとで籠 Hecke 環の作用を具体的に述べることができる。

**定理 3.4** (Kang-柏原-Kim [13], Oh-Scrimshaw [23], F. [9]). 以下の対応は、式 (2) で定義される左  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$  加群  $\widehat{V}^{\otimes \beta}$  上に、籠 Hecke 環  $\widehat{H}_Q(\beta)$  の右作用を定義する：

- $e_i \mapsto i$  番目の直和成分への射影;
- $x_k \mapsto k$  番目のテンソル成分上の変形パラメータ  $x$  を掛ける作用素;
- $\tau_\ell \mapsto$  命題 3.1 の式 (1) に現れる  $s_\ell$  を正規  $R$  行列に置き換えて得られる作用素.

これにより  $\widehat{V}^{\otimes \beta}$  は  $(U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q), \widehat{H}_Q(\beta))$  双加群をなす：

$$U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \curvearrowright \widehat{V}^{\otimes \beta} \curvearrowleft \widehat{H}_Q(\beta).$$

**注意 3.5.** ここで非自明なのは  $\tau_\ell$  の作用の well-defined 性である。これを直接示すには構成に関係する正規  $R$  行列の極とその位数を知る必要がある。代数的方法では籠  $Q$  の Dynkin 型に対する個別の考察により、AD 型のときは [13] で、E 型のときは計算機を援用して [23] でなされた。一方、[9] による幾何学的別構成（後述の定理 4.3）を用いる証明は Dynkin 型について統一かつ計算機を使わない。

### 3.3. 誘導される関手の性質

双加群  $\widehat{V}^{\otimes \beta}$  は対応  $M \mapsto \widehat{V}^{\otimes \beta} \otimes_{\widehat{H}_Q(\beta)} M$  によって加群圏の間の関手  $\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$  を誘導する。ここで、既約加群  $\{V(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$  を含みかつテンソル積で閉じている最小の Serre 部分圏  $\mathcal{C}_Q \subset U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)\text{-mod}_{\text{fd}}$  を考えると、構成より圏  $\mathcal{C}_Q$  は関手の像を含む。実はこの部分圏  $\mathcal{C}_Q$  はもともと Hernandez-Leclerc [12] によって Kang-柏原-Kim [13] 以前に研究されており、座標環  $\mathbb{C}[N_Q]$  の圏化を与えることが分かっていた。

**定理 3.6** (Hernandez-Leclerc [12]). モノイダル圏  $\mathcal{C}_Q$  の Grothendieck 環  $K(\mathcal{C}_Q)_{\mathbb{C}}$  は座標環  $\mathbb{C}[N_Q]$  と同型で、これは既約表現の類と双対標準基底の元の間での 1 : 1 対応を導く。実際にはこの同型の量子化が成立する。

定理 3.2 と定理 3.6 を合わせると、環同型  $K(\mathcal{M}_Q) \cong K(\mathcal{C}_Q)$  であって既約表現の類の間での 1 : 1 対応を導くものが存在することが分かる。籠  $Q$  に付随する Schur-Weyl 双対性はこの環同型を圏化する。すなわち：

**定理 3.7** (Kang-柏原-Kim [13]). 双加群  $\widehat{V}^{\otimes \beta}$  が誘導する関手  $\widehat{H}_Q(\beta)\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow \mathcal{C}_Q$  から、さらに定義域の  $\beta \in \mathbb{Q}^+$  に関する直和を考えることによって得られる関手

$$\mathcal{F}_Q: \mathcal{M}_Q \rightarrow \mathcal{C}_Q$$

はモノイダル完全関手であり、Grothendieck 環のレベルで上記の環同型  $K(\mathcal{M}_Q) \cong K(\mathcal{C}_Q)$  を導く。特に、関手  $\mathcal{F}_Q$  は圏  $\mathcal{M}_Q$  の既約対象を圏  $\mathcal{C}_Q$  の既約対象に送り、この対応は同型を除いて 1 : 1 である。

次節で説明する幾何学的考察を用いるとさらに次が証明できる。

定理 3.8 ([8, 9]). 関手  $\mathcal{F}_Q$  はモノイダル圏の同値  $\mathcal{M}_Q \simeq \mathcal{C}_Q$  である.

注意 3.9. 注意 2.2 で述べたことと同様であるが, 圏  $\mathcal{M}_Q, \mathcal{C}_Q$  はともに半単純でないので, 既約対象の 1:1 対応 (定理 3.7) から直ちに圏同値 (定理 3.8) が導けるわけではないことに念のため注意を向けておく.

注意 3.10. 箝  $Q$  が  $A_n$  型単調箝  $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n)$  のとき, 箝 Hecke 環  $\widehat{H}_Q(\beta)$  はアフィン Hecke 環  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathfrak{S}}_d)$  の適当な中心指標に関する完備化と同型になるのだった (注意 3.3). このとき同様の完備化によって双加群  $\mathbb{V}^{\otimes d}$  から双加群  $\widehat{V}^{\otimes \beta}$  が得られる. その意味で, 箝  $Q$  に付随する Kang-柏原-Kim の構成は通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性の構成の一般化と言える. また, この特別な場合における定理 3.7 および定理 3.8 は Chari-Pressley [3] の議論の直接の帰結としても得られる.

## 4. 幾何学的解釈

前節までの記号を引き続き用いる. 特に  $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(q)$  とする. また以下で多様体と言えばそれは常に準射影的複素代数多様体を意味するものとする.

### 4.1. 双加群の幾何学的レシピ

$G$  を線形代数群とし,  $R(G)$  をその表現環とする. ただし本稿で具体的に扱うのは  $G$  が一般線形群  $GL_k(\mathbb{C})$  いくつかの直積になっている場合だけである.  $G = GL_k(\mathbb{C})$  のときは標準的な同型  $R(GL_k(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_k^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_k}$  がある.

今, 群  $G$  が代数的に作用する多様体とそれらの間の  $G$  同変な固有射からなる図式

$$\begin{array}{ccc} M_1 & & M_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & N & \end{array} \quad \curvearrowright \quad G$$

が与えられたとする. ここで多様体  $N$  は特異点を持って良いが, 多様体  $M_1$  と  $M_2$  は非特異であると仮定する. このとき, 畳み込み積 (convolution product, cf. [6]) に関して,  $G$  同変  $K$  群  $K^G(M_1 \times_N M_1)$  および  $K^G(M_2 \times_N M_2)$  はともに  $R(G)$  代数をなし,  $K^G(M_1 \times_N M_2)$  は  $(K^G(M_1 \times_N M_1), K^G(M_2 \times_N M_2))$  双加群をなす:

$$K^G(M_1 \times_N M_1) \quad \curvearrowright \quad K^G(M_1 \times_N M_2) \quad \curvearrowright \quad K^G(M_2 \times_N M_2).$$

以下ではこのレシピを具体的な設定に適用することで, 量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性とその箝  $Q$  に付随する一般化が幾何学的に実現できることを述べる.

### 4.2. 通常の Schur-Weyl 双対性の幾何学的解釈

2つの自然数  $n, d$  を固定する. ここでは以下の図式に対してレシピを適用する:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_d^n & & \mathcal{F}_d \\ & \searrow \pi & \swarrow \mu \\ & \mathcal{N}_d & \end{array} \quad \curvearrowright \quad \mathbb{G}_d = GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

記号の意味をひとつずつ説明しよう.  $\mathcal{N}_d := \{x \in \text{End}(\mathbb{C}^d) \mid x^d = 0\}$   $\mathfrak{gl}_d(\mathbb{C})$  の冪零錐,

$$\mathcal{B}_d := \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \cdots \supseteq F^d = 0) \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間}\}$$

は  $GL_d(\mathbb{C})$  の旗多様体,  $\mu: \mathcal{F}_d := T^*\mathcal{B}_d \rightarrow \mathcal{N}_d$  は Springer 特異点解消である. 余接束  $\mathcal{F}_d = T^*\mathcal{B}_d$  は標準的に

$$\mathcal{F}_d = \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_d \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq d\}.$$

と同一視できて, この同一視の下で  $\mu$  は単に射影  $(F^\bullet, x) \mapsto x$  である.

左側の固有射  $\pi: \mathfrak{M}_d^n \rightarrow \mathcal{N}_d$  は上と類似の構成を旗多様体  $\mathcal{B}_d$  の代わりに  $n+1$  ステップの部分旗のなす多様体  $\mathcal{B}_d^n$  に対して行うことで得られる. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_d^n &:= \{F^\bullet = (\mathbb{C}^d = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^{n+1} = 0 \mid F^i \text{ は部分ベクトル空間})\}, \\ \mathfrak{M}_d^n &:= \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_d^n \times \mathcal{N}_d \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq n+1\}, \end{aligned}$$

であって  $\pi(F^\bullet, x) = x$  である. 多様体  $\mathcal{N}_d, \mathcal{F}_d, \mathfrak{M}_d^n$  には自然な  $GL_d(\mathbb{C})$  作用に加えて, 1次元代数的トーラス  $\mathbb{C}^\times$  の作用  $\mathbb{C}^\times \ni t: x \mapsto t^2x$  が入る. このとき,  $\mu, \pi$  はともに  $G_d := GL_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$  作用に関して同変な固有射である.

簡単のため  $A := R(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$  とおき,  $\mathbb{k}$  を  $X \mapsto q$  によって  $A$  代数とみなす. Kashdan-Lusztig および Ginzburg は  $\mathbb{k}$  代数の同型  $H_{q^{-2}}(\widehat{\mathcal{G}}_d) \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{F}_d \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$  が存在することを示した (cf. [6]). 一方, Ginzburg-Vasserot [11] は  $\mathbb{k}$  代数の準同型  $\Phi: U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \rightarrow K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$  を構成した. これらを踏まえたうえで, 前節のレシピにより, 通常の量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性が幾何学的に実現される.

**定理 4.1** (Ginzburg-Reshtikhin-Vasserot [10]). 同型  $\mathbb{V}^{\otimes d} \cong K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k}$  であって, 次の図式を可換にするようなものが存在する:

$$\begin{array}{ccccc} U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}) & \curvearrowright & \mathbb{V}^{\otimes d} & \curvearrowleft & H_{q^{-2}}(\widehat{\mathcal{G}}_d) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathfrak{M}_d^n) \otimes_A \mathbb{k} & \curvearrowright & K^{\mathbb{G}_d}(\mathfrak{M}_d^n \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k} & \curvearrowleft & K^{\mathbb{G}_d}(\mathcal{F}_d \times_{\mathcal{N}_d} \mathcal{F}_d) \otimes_A \mathbb{k} \end{array}$$

### 4.3. Dynkin 籠に付随する場合

Dynkin 籠  $Q = (I, \Omega)$  と元  $\beta = \sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in Q^+$  からなる組  $(Q, \beta)$  を固定する. また, 前と同様に  $d := \text{ht}(\beta) = \sum_{i \in I} d_i$  とおく.

各  $i \in I$  に対して  $d_i$  次元ベクトル空間  $D_i = \mathbb{C}^{d_i}$  を固定し, 集合  $I$  で次数付けられたベクトル空間  $D := \bigoplus_{i \in I} D_i$  を考える. このとき, 前節の  $\mathcal{N}_d, \mathcal{B}_d, \mathcal{F}_d$  の籠  $Q$  に付随する類似として, 多様体  $E_\beta, \mathcal{B}_\beta, \mathcal{F}_\beta$  をそれぞれ次のように定義する:

$$\begin{aligned} E_\beta &:= \bigoplus_{(i \rightarrow j) \in \Omega} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(D_i, D_j), \\ \mathcal{B}_\beta &:= \{F^\bullet = (D = F^0 \supseteq F^1 \supseteq \dots \supseteq F^d = 0) \mid F^k \text{ は } I \text{ 次数付き部分ベクトル空間}\}, \\ \mathcal{F}_\beta &:= \{(F^\bullet, x) \in \mathcal{B}_\beta \times E_\beta \mid x(F^{k-1}) \subset F^k, 1 \leq \forall k \leq d\}. \end{aligned}$$

ここで,  $E_\beta$  は籠  $Q$  の次元ベクトル  $\beta$  の表現の空間であり, 多様体としては単にアフィン空間である. 各多様体には群  $G_\beta := \prod_{i \in I} GL(D_i)$  が自然に作用し, 射  $\mu: \mathcal{F}_\beta \rightarrow E_\beta$  を  $\mu(F^\bullet, x) = x$  で定義すれば, これは  $G_\beta$  同変な固有射であることが分かる. これらはもともと Lusztig によって量子群の標準基底 (canonical basis) を構成する際に導入され

たものであるが, Varagnolo-Vasserot [26] はこれを用いて籠 Hecke 環  $H_Q(\beta)$  が幾何学的に実現できることを示した. 特に [26] の結果から  $\mathbb{k}$  代数の同型

$$\widehat{H}_Q(\beta) \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{F}_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_{\mathbb{k}}$$

を導くことができる. ただし,  $\widehat{K}^G(-)_{\mathbb{k}}$  は同変  $K$  群  $K^G(-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$  の標準的な完備化を表す.

一方, アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q)$  の表現を幾何学的に実現する多様体としては, 中島による籠多様体  $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$  がある. 詳しい構成はここでは述べないが, これらは籠  $Q$  の枠付き表現の空間の余接束から Hamilton 簡約によって構成され, 枠に対応する  $I$  次数付きベクトル空間  $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$  を入力データに持つ. Hamilton 簡約で商をとるときの安定性パラメータを変えることで非特異な多様体  $\mathfrak{M}(W)$  と一般には特異点を持つアフィン多様体  $\mathfrak{M}_0(W)$  との 2 種類が構成される. とともに群  $\mathbb{G}_W := \prod_{i \in I} GL(W_i) \times \mathbb{C}^\times$  の作用をもち, 自然な固有射  $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$  は  $\mathbb{G}_W$  同変になる. 中島 [22] は各  $W$  に対して,  $\mathbb{k}$  代数の準同型

$$\Phi: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \rightarrow K^{\mathbb{G}_W}(\mathfrak{M}(W) \times_{\mathfrak{M}_0(W)} \mathfrak{M}(W)) \otimes_A \mathbb{k} \quad (3)$$

を構成した. 籠  $Q$  が  $A_n$  型で  $W_i = \mathbb{C}^{\delta_{ii}d}$  のとき籠多様体  $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$  は前節の  $\pi: \mathfrak{M}_d^a \rightarrow \pi(\mathfrak{M}_d^a)$  と同じになり, 中島 [22] の構成は Ginzburg-Vasserot [11] の構成の一般化を与える.

今, 与えられた  $(Q, \beta)$  から  $I$  次数付きベクトル空間  $W = \bigoplus_{i \in I} W_i$  と 1 次元トーラス  $T_\beta \subset \mathbb{G}_W$  を適切に定めて, 籠多様体  $\pi: \mathfrak{M}(W) \rightarrow \mathfrak{M}_0(W)$  の  $T_\beta$  固定点部分として,  $\pi^\bullet: \mathfrak{M}_\beta^\bullet \rightarrow \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet$  なる固有射を得る. 正確には単純ルート  $\alpha_i$  の AR 籠における座標を  $\phi_Q(\alpha_i) = (k_i, p_i)$  と書いて,

$$W_i := \bigoplus_{j: k_j=i} D_j, \quad T_\beta := \left\{ \left( \bigoplus_{j \in I} t^{p_j} \text{id}_{D_j}, t \right) \mid t \in \mathbb{C}^\times \right\}$$

と定義し,  $\mathfrak{M}_\beta^\bullet := \mathfrak{M}(W)^{T_\beta}, \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet := \mathfrak{M}_0(W)^{T_\beta}$  と定める. 一般にこのようなトーラスに関する籠多様体の固定部分を次数付き籠多様体と呼ぶ. トーラス  $T_\beta \subset \mathbb{G}_W$  の中心化群は自然に群  $G_\beta = \prod_{i \in I} GL(D_i)$  を含んでおり, 固有射  $\pi^\bullet: \mathfrak{M}_\beta^\bullet \rightarrow \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet$  は  $G_\beta$  同変になる. 中島の準同型 (3) において値域を  $T_\beta$  に対応する表現環  $R(\mathbb{G}_W) \otimes_A \mathbb{k}$  の極大イデアルに関して完備化し, さらに局所化定理を適用することで準同型写像

$$\widehat{\Phi}: U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) \rightarrow \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{\mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet} \mathfrak{M}_\beta^\bullet)_{\mathbb{k}}$$

を得る. 我々の構成の鍵は定理 3.6 の幾何学的根拠として証明された次の事実である.

**定理 4.2** (Hernandez-Leclerc [12]).  $G_\beta$  多様体としての同型  $\mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet \cong E_\beta$  が存在する.

これにより, 次の図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_\beta^\bullet & & \mathcal{F}_\beta \\ \pi^\bullet \searrow & & \swarrow \mu \\ \mathfrak{M}_{0,\beta}^\bullet \cong E_\beta & & \curvearrowright G_\beta \end{array}$$

この図式にはレシピを適用することができて、結果として箭 $Q$ に付随する Schur-Weyl 双対性の幾何学的実現を得る.

**定理 4.3** ([9]). 同型  $\widehat{V}^{\otimes\beta} \cong \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k}$  であって、次の図式を可換にするようなものが存在する:

$$\begin{array}{ccccc}
 U_q(\widehat{\mathfrak{g}}_Q) & \curvearrowright & \widehat{V}^{\otimes\beta} & \curvearrowright & \widehat{H}_Q(\beta) \\
 \downarrow \widehat{\Phi} & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathfrak{M}_\beta^\bullet)_\mathbb{k} & \curvearrowright & \widehat{K}^{G_\beta}(\mathfrak{M}_\beta^\bullet \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k} & \curvearrowright & \widehat{K}^{G_\beta}(\mathcal{F}_\beta \times_{E_\beta} \mathcal{F}_\beta)_\mathbb{k}
 \end{array}$$

**注意 4.4.** 箭 $Q$ が  $A_n$  型単調箭  $Q = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n)$  のとき、定理 4.3 の図式は定理 4.1 の図式を適切に完備化することによって得られる. このことは注意 3.10 の幾何学的説明を与えている.

## 5. 補足

本稿で扱った「箭 $Q$ に付随する Schur-Weyl 双対性」は、実際には Kang-柏原-Kim [14] によるもっと一般的な枠組みにおけるひとつの重要だが特殊な例である. [14] では、(ADE 型に限らない) アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$  の良い表現の族を入力データとして与えたとき、それらのテンソル積の間の正規  $R$  行列の極とその位数のデータから (Dynkin 型に限らない) 箭 $Q$ が決め、対応する箭 Hecke 環  $H_Q$  の加群圏からのモノイダル関手  $\mathcal{F}: H_Q\text{-mod}_{\text{fd}} \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}_{\text{fd}}$  を構成する一般的な手続きが示されている. その特殊例として、本稿で扱ったもの以外にも、興味深い関手が多く構成されている [15, 16, 18, 19, 20, 23]. それらに対しても、例えば本稿で述べたような方法 (幾何学的解釈など) を用いてより深い理解が得られるかどうかは今後追究すべき課題のひとつである.

## 参考文献

- [1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent. Math. **178** (2009), no. 3, 451–484.
- [2] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 59–78.
- [3] ———, *Quantum affine algebras and affine Hecke algebras*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 295–326.
- [4] ———, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191–223.
- [5] I.V. Cherednik, *A new interpretation of Gel'fand-Tsetlin bases*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 563–577.
- [6] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [7] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *The  $q$ -characters of representations of quantum affine algebras and deformations of  $\mathcal{W}$ -algebras.*, Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998), Contemp. Math., no. 248, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 163–205.
- [8] R. Fujita, *Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types*, preprint. arXiv:1710.11288.

- [9] ———, *Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur-Weyl duality*, Int. Math. Res. Not. (2018), published online.
- [10] V. Ginzburg, N. Reshetikhin, and E. Vasserot, *Quantum groups and flag varieties*, Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, MA, 1992), Contemp. Math., no. 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 101–130.
- [11] V. Ginzburg and E. Vasserot, *Langlands reciprocity for affine quantum groups of type  $A_n$* , Int. Math. Res. Not. **3** (1993), 67–85.
- [12] H. Hernandez and B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 77–126.
- [13] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and  $R$ -matrices of quantum affine algebras, II*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 8, 1549–1602.
- [14] ———, *Symmetric quiver Hecke algebras and  $R$ -matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.
- [15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, *Symmetric quiver Hecke algebras and  $R$ -matrices of quantum affine algebras, III*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **111** (2015), no. 2, 420–444.
- [16] ———, *Symmetric quiver Hecke algebras and  $R$ -matrices of quantum affine algebras, IV*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 4, 1987–2015.
- [17] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. **73** (1994), no. 2, 383–413.
- [18] M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type  $A$  and  $B$* , Proc. London Math. Soc. **118** (2019), 43–77.
- [19] M. Kashiwara, M. Kim, S.-j. Oh, and Park. E., *Cluster algebra structures on module categories over quantum affine algebras*, preprint. arXiv:1904.01264.
- [20] M. Kashiwara and S.-j. Oh, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Doubly laced types*, J. Algebr. Comb. **49** (2019), no. 4, 401–435.
- [21] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.
- [22] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238.
- [23] S.-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Exceptional cases*, Comm. Math. Phys. **368** (2019), no. 1, 295–367.
- [24] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint. arXiv:0812.5023.
- [25] ———, *Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras*, Algebra Colloq. **19** (2012), 359–410.
- [26] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and KLR-algebras*, J. Reine Angew. Math. **659** (2011), 67–100.



## (-2) blow-up formula

大川 領 (早稲田大学基幹理工学部) \*

この講演では  $A_1$  特異点から定まるネクラソフ分配関数について紹介する. これは特異点解消上の枠付き接続層のモジュライ上の積分を係数とする母関数である. 特異点解消として二つ、極小解消とスタック的な解消、つまり、射影平面を位数 2 の巡回群で割った商スタックを考える. これら二つの特異点解消から定まるネクラソフ分配関数の間の関数等式について紹介する.

アフィン平面  $Q = \mathbb{C}^2$  と  $SL(Q)$  の有限部分群  $\Gamma$  を考える. 有限群  $\Gamma$  は射影平面  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus Q)$  に自然に作用する. この作用による商スタックを  $X_0 = [\mathbb{P}(\mathbb{C} \oplus Q)/\Gamma]$  とおく.  $X_0$  から無限遠直線  $\ell_\infty = [\mathbb{P}(Q)/\Gamma]$  を取り除いた開集合を  $U_0$  とおく.  $U_0$  は商特異点  $Q/\Gamma = \text{Spec } \mathbb{C}[Q]^\Gamma$  のスタック的な特異点解消  $f: U_0 \rightarrow Q/\Gamma$  を与え,  $X_0 = U_0 \sqcup \ell_\infty$  はそのコンパクト化である.

一方, 極小特異点解消  $g: U_1 \rightarrow Q/\Gamma = \text{Spec } \mathbb{C}[Q]^\Gamma$  が  $\Gamma$ -ヒルベルトスキーム  $U_1 = \Gamma\text{-Hilb}(Q)$  により得られる.  $U_1$  のコンパクト化  $X_1$  を次のように構成する. アフィン平面  $Q = \mathbb{C}^2$  への  $\Gamma$ -作用は原点  $O = \{(0, 0)\} \subset Q$  以外では自由なので, 同型

$$U_1 \setminus g^{-1}(O) \cong U_0 \setminus f^{-1}(O)$$

を得る. この同型により,  $U_1$  と  $X_0 \setminus f^{-1}(O)$  とを貼り合わせることににより

$$X_1 = U_1 \cup (X_0 \setminus f^{-1}(O)) = U_1 \sqcup \ell_\infty$$

を得る.

$X_\kappa$  ( $\kappa = 0, 1$ ) 上の枠付き接続層とは組  $(E, \Phi)$  であり,  $E$  は  $X_\kappa$  上のねじれを持たない接続層,  $\Phi: E|_{\ell_\infty} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty} \otimes W$  は接続層の同型を表す. ここで,  $W$  は有限次元  $\Gamma$ -表現である.

本講演では,  $\Gamma = \{\pm \text{id}_Q\} \subset SL(Q)$  の場合を考える. この時,  $\Gamma$ -表現は  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -次数付き複素ベクトル空間  $W = W_0 \oplus W_1$  により与えられる. この状況において,  $X_\kappa$  上の枠付き接続層のモジュライから定まるネクラソフ分配関数と呼ばれる母関数について比較する.

$X_\kappa$  の  $K$  群を  $K(X_\kappa)$  とおき,  $X_\kappa$  上の接続層  $E$  の  $K$  群におけるクラスを  $[E] \in K(X_\kappa)$  で表す. クラス  $c \in K(X)$  をひとつ固定し, 枠付き接続層のモジュライ

$$M_{X_\kappa}(c) = \{(E, \Phi) \mid [E] = c \in K(X_\kappa)\}$$

---

\*email: ohkawa.ryo@aoni.waseda.jp



を考える. 以下では,  $c$  の第一 Chern 類は 0 とする.

モジュライ空間  $M_{X_\kappa}(c)$  上の積分は, 代数的トーラス  $\tilde{T} = (\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^r \times (\mathbb{C}^*)^{2r}$  の作用による局所化の方法によって定義される. ここでは  $M_{X_\kappa}(c)$  への作用として,  $(\mathbb{C}^*)^2$  の  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{P}^2$  への対角作用が誘導する作用,  $(\mathbb{C}^*)^r$  の対角作用  $\mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r} \cong \mathcal{O}_{\ell_\infty}^{\oplus r}$  が誘導する作用, 自明な  $(\mathbb{C}^*)^{2r}$  作用を考える. このとき, 0 以上の整数  $m$  に対し Nekrasov 分配関数

$$Z_\kappa^m(\varepsilon, \mathbf{a}, q) = \sum_c q^{n(c)} \int_{M_{X_\kappa}(c)} \mu(C)^m \in \mathbb{Q}(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m})[[q]]$$

が定義される. ここで,  $c \in K(X_\kappa)$  は階数と第一 Chern 類が固定された範囲を動き,  $n(c)$  は  $c$  により定まる有理数で,  $\mu(C)$  は普遍連接層  $\mathcal{E}$  の第二 Chern 類  $c_2(\mathcal{E})$  と例外曲線  $C$  のスラント積  $c_2(\mathcal{E})/[C]$  である. また,

$$(t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2, (e_1, \dots, e_r) \in (\mathbb{C}^*)^r, (e^{m_1}, \dots, e^{m_{2r}}) \in (\mathbb{C}^*)^{2r}$$

とし,  $\varepsilon = (c_1(t_1), c_1(t_2))$ ,  $\mathbf{a} = (c_1(e_1), \dots, c_1(e_r))$ ,  $\mathbf{m} = (c_1(e^{m_1}), \dots, c_1(e^{m_{2r}}))$  を対応する重み空間を一点  $\text{pt}$  の上の  $\tilde{T}$ -同変直線束と見たときの第一 Chern 類とする. 有理関数体  $\mathbb{Q}(\varepsilon, \mathbf{a}, \mathbf{m})$  は  $\tilde{T}$ -同変 Chow ring  $A_{\tilde{T}}^*(\text{pt})$  の商体とみなされる.

本講演では, 特殊な Chern 類の場合に (-2) blow-up formula を紹介する.

**主定理 0.1.** 階数が 2 で枠が自明表現の時,  $m \leq 2$  に対して以下の等式が成り立つ.

$$Z_1^m(\varepsilon, \mathbf{a}, q) = Z_0^m(\varepsilon, \mathbf{a}, q).$$

この公式は中島-吉岡の示した blow-up formula [NY] の類似である. 証明には, ADHM データと呼ばれる行列の組によるモジュライ  $M_{X_\kappa}(c)$  の記述を用いる. この記述に望月拓郎氏の開発した壁越え公式 [M] を適用することで主定理が得られる.

## 参考文献

- [M] T. Mochizuki, *Donaldson Type Invariants for Algebraic Surfaces: Transition of Moduli Stacks*, Lecture Notes in Math. 1972, Springer, Berlin, 2009.
- [NY] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Invent. Math. 162 (2005), no. 2, 313–355.
- [O] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda* by Ryo Ohkawa, to appear in Moscow Mathematical Journal.

# 三角形分割曲面型団代数における F 行列による団の一意性

行田 康晃 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)  
百合草 寿哉 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

## 1. F 行列による団の一意性予想

団  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , 係数  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , 交換行列  $B = (b_{ij})$  の組 (シード) の変換

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = \ell \text{ or } j = \ell; \\ b_{ij} + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} + b_{i\ell} [b_{\ell j}]_+ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y'_j = \begin{cases} y_\ell^{-1} & \text{if } j = \ell; \\ y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (y_\ell \oplus 1)^{-b_{\ell j}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{if } j \neq \ell; \\ \frac{y_\ell \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{i\ell}]_+} + \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{i\ell}]_+}}{(y_\ell \oplus 1) x_\ell} & \text{if } j = \ell \end{cases}$$

は  $\ell$  に関する **変異** と呼ばれる [FZ07]. ただし,  $[x]_+ = \max(x, 0)$  とする. この変換を,  $\ell$  を任意にとりながら, 初期条件  $(\mathbf{x}_{t_0} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), B = (b_{ij}))$  から次々と作用させることを考える. 変異は対合であるため, この操作を介して得られるシードは  $n$  正則木  $\mathbb{T}_n$  の頂点と同一視することができる. これを **団パターン** という, この中の団の1つを  $\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$  とする. 各  $x_{j;t}$  について,  $y$  変数  $\{y_1, \dots, y_n\}$  の和  $\oplus$  として

$$\prod_{i=1}^n y_i^{a_i} \oplus \prod_{i=1}^n y_i^{b_i} = \prod_{i=1}^n y_i^{\min(a_i, b_i)}.$$

で定まるものを導入し,  $x_{j;t}$  に関する  $F$  多項式  $F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$  を次のように定義する:

$$F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = x_{j;t} \mid_{x_1=\dots=x_n=1}.$$

さらに,  $F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$  の  $y_i$  に関する最大次数を  $f_{ij;t}$  としたとき, 団  $\mathbf{x}_t$  に関する  $F$  行列を次で定義する:

$$F_t^{B;t_0} = (f_{ij;t})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

$F$  行列について, 次の予想を考える:

**予想 1.1** ([GY19, Conjecture 4.4]). 任意の  $B$  に対して,  $F_t^{B;t_0} = F_s^{B;t_0}$  ならば  $\{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \dots, x_{n;s}\}$ .

この予想を **F 行列による団の一意性予想** と呼ぶ.

本研究は科研費 (課題番号:17J04270) の助成を受けたものである。  
2010 Mathematics Subject Classification: 13F60

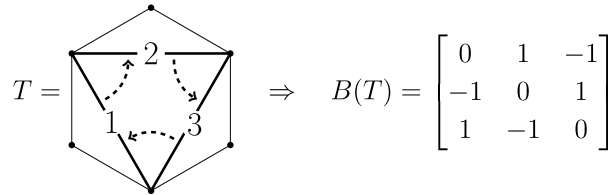
## 2. 三角形分割曲面と団パターン

$S$  を連結な向き付リーマン面,  $M$  を  $S$  の閉包における点と呼ばれる有限集合とする. このとき,  $(S, M)$  を **点付曲面** という. この点付曲面を辺によって三角形分割したものを **三角形分割曲面** と呼ぶ.  $S$  を分割する辺には  $\{1, \dots, n\}$  のラベルを与えることにする.  $(S, M)$  上の三角形分割  $T$  から交換行列  $B(T)$  を次の手順で構成することができる:

(1)  $(S, M)$  を分割する各三角形  $\Delta$  に付随する行列  $B^\Delta = (b_{ij}^\Delta)_{1 \leq i, j \leq n}$  を次のようにして定める:  $\Delta$  において  $i, j$  のラベルを持つ辺が共有点を基準にこの順に反時計回りに並んでいるとき,  $b_{ij} = 1, b_{ji} = -1$  とする.  $\Delta$  を構成する三角形に  $k$  が含まれないとき, 任意の  $\ell \in \{1, \dots, n\}$  に対して  $b_{\ell k} = b_{k\ell} = 0$  とする.

(2)  $B(T) = \sum_{\Delta} B^\Delta$  と定める.

例 2.1.



逆に, 団パターンの初期条件  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$  について,  $B = B(T)$  を満たす点付曲面  $(S, M)$  と三角形分割  $T$  が存在するとき,  $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{T}_n}$  を **三角形分割曲面型の団パターン** という. このクラスの団パターンと点付曲面の間には, 変異の操作が対応する三角形分割の対角線を入れ替える操作に対応する, 団と三角形分割, そこに含まれる変数と辺の間に全単射が存在する, といった対応が存在することが知られている [FST08].

## 3. 主定理

本講演の主定理は,  $F$  行列による団の一意性予想 (予想 1.1) の三角形分割曲面型の団パターンにおける解決である.

**定理 3.1** ([GY19, Corollary 4.8]). 任意の三角形分割  $T$  に付随する交換行列  $B = B(T)$  について,

$$\{\mathbf{f}_{1;t}, \dots, \mathbf{f}_{n;t}\} = \{\mathbf{f}_{1;s}, \dots, \mathbf{f}_{n;s}\} \Rightarrow \{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \dots, x_{n;s}\}.$$

ただし,  $\mathbf{f}_{i;t}$  は  $F_t^{B;t_0}$  の  $i$  列目の列ベクトルとする.

## 参考文献

- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.
- [FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, Comp. Math. **143** (2007), 112–164.
- [GY19] Y. Gyoda and T. Yurikusa, *F-matrices of cluster algebras from triangulated surfaces*, 2019. preprint, arXiv:1902.09317 [math.CO].

# ミニスキュール半順序集合上の 双有理版 rowmotion と双有理版 Coxeter-motion

岡田 聡一 (名古屋大学)\*

## 1. 半順序集合上の rowmotion と双有理版 rowmotion

有限半順序集合  $P$  に対して, その順序イデアル全体のなす集合を  $J(P)$  と表す. このとき,  $I \in J(P)$  に,  $P \setminus I$  の極小元の全体で生成される  $P$  の順序イデアルを対応させることによって, 全単射  $R: J(P) \rightarrow J(P)$  ([6] に従って **rowmotion** と呼ぶ) が得られる. 各  $v \in P$  に対して,  $t_v: J(P) \rightarrow J(P)$  を

$$t_v(I) = \begin{cases} I \cup \{v\} & (v \notin I \text{ であり } I \cup \{v\} \in J(P) \text{ であるとき}) \\ I \setminus \{v\} & (v \in I \text{ であり } I \setminus \{v\} \in J(P) \text{ であるとき}) \\ I & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって定義すると,  $R$  は  $P$  の線型拡張  $(v_1, \dots, v_n)$  を用いて  $R = t_{v_1} \circ \dots \circ t_{v_n}$  と表される.

Einstein-Propp [1] は, 上記の  $t_v$  を  $P$  の順序多面体上の区分線型版に拡張しさらにその双有理版を考えることにより, 双有理版 rowmotion を次のようにして導入した.  $P$  に最大元  $\hat{1}$  と最小元  $\hat{0}$  を新たに付け加えてできる半順序集合を  $\hat{P} = P \sqcup \{\hat{1}, \hat{0}\}$  と表す. 正の実数全体のなす集合を  $\mathbb{R}_{>0}$  とする.  $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$  を固定し,

$$\mathcal{K}^{A,B}(P) = \{F: \hat{P} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : F(\hat{1}) = A, F(\hat{0}) = B\}$$

とおく. 各  $v \in P$  に対して, 写像  $\tau_v^{A,B}: \mathcal{K}^{A,B}(P) \rightarrow \mathcal{K}^{A,B}(P)$  を

$$(\tau_v^{A,B} F)(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{w \in \hat{P}, w < v} F(w)}{F(v) \sum_{z \in \hat{P}, z > v} 1/F(z)} & (x = v \text{ のとき}) \\ F(x) & (x \neq v \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する. ここで, 記号  $x < y$  は,  $x < y$  であり,  $x < z < y$  となる  $z$  が存在しないことを意味する. そして,  $P$  の線型拡張  $(v_1, \dots, v_n)$  をとり,  $\rho^{A,B} = \tau_{v_1}^{A,B} \circ \dots \circ \tau_{v_n}^{A,B}$  と定義 (線型拡張のとり方に依らない) し, 双有理版 **rowmotion** と呼ぶ.

## 2. ミニスキュール半順序集合上の双有理版 rowmotion

一般の有限半順序集合では rowmotion や双有理版 rowmotion がよい性質をもつとは限らないが, 例えば  $r$  元鎖  $[r]$  と  $s$  元鎖  $[s]$  の直積  $[r] \times [s]$  では周期性などのよい性質をもつことが知られている ([1], [3], [4] を見よ). ここでは, これらの性質をミニスキュール半順序集合上で考える.

$\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元単純 Lie 代数とし,  $\Delta$  をその単純ルートの集合,  $W$  をその Weyl 群とする. 支配的整ウェイト  $\lambda$  に対して,  $\lambda$  を最高ウェイトとする既約  $\mathfrak{g}$  加群  $V_\lambda$  のウェイト全体のなす集合を  $L_\lambda$  と表す.  $\mu, \nu \in L_\lambda$  に対して,  $\nu - \mu$  が単純ルートの非負整数係数の和として表されるとき  $\mu \geq \nu$  であると定義し,  $L_\lambda$  を半順序集合とみなす. ウェイト  $\lambda$  は,  $L_\lambda$  が 1 つの  $W$  軌道となるとき, ミニスキュール (minuscule) であるという.  $\lambda$  がミニスキュールであるとき,  $L_\lambda$  は分配束となることが知られている. そこで,  $L_\lambda$  の結び既約元全体のなす集合を

$$P_\lambda = \{\mu \in L_\lambda : \mu \geq \nu \text{ となる } \nu \text{ はちょうど 1 つである}\}$$

\* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学 多元数理科学研究科  
e-mail: okada@math.nagoya-u.ac.jp

とおき,  $\lambda$  に対応するミニスキュール半順序集合 (minuscule poset) と呼ぶ. このとき,  $J(P_\lambda) \cong L_\lambda$  である. また,  $P_\lambda$  の  $\Delta$  による彩色  $c: P_\lambda \rightarrow \Delta$  が次のようにして定まる.  $\mu \in P_\lambda$  が与えられたとき,  $\mu \succ \nu$  となる  $\nu \in L_\lambda$  が定まり,  $\nu - \mu$  は単純ルートとなるので,  $c(\mu) = \nu - \mu$  と定義する. このとき, 主結果の 1 つは次の定理である.

**定理 1.**  $P = P_\lambda$  を単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  とそのミニスキュールウェイト  $\lambda$  から定まるミニスキュール半順序集合とする. このとき,  $\rho = \rho_P^{A,B}: \mathcal{K}^{A,B}(P) \rightarrow \mathcal{K}^{A,B}(P)$  に対して, 次が成り立つ.

- (1) ( $E_7$  型以外は [3])  $\rho$  の位数は,  $\mathfrak{g}$  の Coxeter 数  $h$  に等しい.
- (2) ( $A$  型の場合は [4])  $\alpha \in \Delta$  とする.  $P^\alpha = \{x \in P: c(x) = \alpha\}$  とおき,

$$\Phi^\alpha(F) = \prod_{x \in P^\alpha} F(x) \quad (F \in \mathcal{K}^{A,B}(P))$$

と定義すると, 任意の  $F \in \mathcal{K}^{A,B}(P)$  に対して,

$$\prod_{k=0}^{h-1} \Phi^\alpha(\rho^k F) = A^{2h\langle \varpi, -w_0\lambda \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle} B^{2h\langle \varpi, \lambda \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

ここで,  $\varpi$  は  $\alpha$  に対応する基本ウェイトであり,  $w_0$  は  $W$  の最長元である. 特に, 左辺の積は  $F$  には依らない.

この定理の超離散化を考えることにより, ミニスキュール半順序集合上の rowmotion に対する次の結果を導くことができる.

**系 2.** (Rush–Wang [5]) ミニスキュール半順序集合  $P = P_\lambda$  上の rowmotion  $R: J(P) \rightarrow J(P)$  に対して, 次が成り立つ.

- (1)  $R$  の位数は,  $\mathfrak{g}$  の Coxeter 数  $h$  に等しい.
- (2)  $\alpha \in \Delta$  とする. 任意の  $I \in J(P)$  に対して,

$$\frac{1}{h} \sum_{k=0}^{h-1} \#(R^k(I) \cap P^\alpha) = \frac{2\langle \varpi, \lambda \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}.$$

### 3. ミニスキュール半順序集合上の双有理版 Coxeter-motion

$P$  をミニスキュール半順序集合とし,  $c: P \rightarrow \Delta$  を単純ルートによる彩色とする. このとき,  $\alpha \in \Delta$  に対して  $\sigma_\alpha^{A,B} = \prod_{c(x)=\alpha} \tau_x^{A,B}$  ( $c(x) = c(y)$  ならば  $\tau_x^{A,B} \tau_y^{A,B} = \tau_y^{A,B} \tau_x^{A,B}$  である) とおき, これらの単純ルートにわたる積を双有理版 **Coxeter-motion** と呼ぶことにする. 2 つの双有理的 Coxeter-motion は,  $\tau_x^{A,B}$  ( $x \in P$ ) の生成する群の中で共役である. このとき, 双有理版 Coxeter-motion に対しても, 定理 1 と同様の主張が成り立つ.

#### 参考文献

- [1] D. Einstein and J. Propp, Combinatorial, piecewise-linear, and birational homomesy for products of two chains, [arXiv:1310.5294](#).
- [2] D. Grinberg and T. Roby, Iterative properties of birational rowmotion I: Generalities and skeletal posets, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), P1.33.
- [3] D. Grinberg and T. Roby, Iterative properties of birational rowmotion II: Rectangles and triangles, *Electron. J. Combin.* **22** (2015), P3.40.
- [4] G. Musiker and T. Roby, Paths to understanding birational rowmotion on products of two chains, *Algebr. Comb.* **2** (2019), 275–304.
- [5] D. B. Rush and K. Wang, On orbits of order ideals of minuscule posets II: Homomesy, [arXiv:1509.08047](#).
- [6] J. Striker and N. Williams, Promotion and rowmotion, *European J. Combin.* **33** (2012), 1919–1942.

# Dual factorial Schur $P$ -関数はBKP階層の解

成瀬 弘 (山梨大学大学院総合研究部)\*

## 1. はじめに

2012年に岡山大学の中川征樹氏との論文で、C型グラスマン多様体(より正確には $Sp(\infty)$ のループ空間)の同変ホモロジーのシューベルト基底に相当するものとして、dual factorial Schur  $P$ -関数 $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}_m|b)$ を定義した。([2]では、一般コホモロジーで定義している。)具体的には、次のようにコーシー核を用いて、factorial Schur  $Q$ -関数 $Q_\lambda(\mathbf{x}_n|b)$ の双対として定めた。すなわち、 $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y}_m = (y_1, \dots, y_m)$ を変数の列として、

$$\prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \frac{1 + x_i y_j}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in SP} Q_\lambda(\mathbf{x}_n|b) \hat{p}_\lambda(\mathbf{y}_m|b)$$

ここで、 $SP$ はstrict partitonの集合で分割 $\lambda = (\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0) \in SP$ に対して

$$Q_\lambda(\mathbf{x}_n|b) := \sum_{w \in S_n / (S_1^{\lambda_1} \times \dots \times S_{n-r}^{\lambda_r})} w \left( (x|b)^\lambda \prod_{1 \leq i \leq r, i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right)$$

ただし、 $(x|b)^\lambda := (x_1|b)^{\lambda_1} \dots (x_r|b)^{\lambda_r}$ ,  $(x|b)^k := 2x(x-b_1) \dots (x-b_{k-1})$ である。 $Q_\lambda(\mathbf{x}_n|b)$ および $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}_m|b)$ は、変数の数 $n, m$ の増加に対してstabilityがあり、無限変数にしたものを、それぞれ $Q_\lambda(\mathbf{x}|b)$ および $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}|b)$ と書く。

Factorial Schur  $Q$ -関数 $Q_\lambda(\mathbf{x}|b)$ が、BKP階層の解となっていることは、N. Rozhkovskaya [4]によって示されている。今回、その双対基底である $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}|b)$ も( $\mathbf{y}$ を適当に変数変換することで)BKP階層の(形式)解となっていることが判明したので、その事を報告する。証明には、津田塾大学の執行洋子氏の判定法[5]を用いた。

## 2. 主結果と証明の概要

**定理 1.** dual factorial Schur  $P$ 関数 $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}|b)$ は、変数を次のように変換することで、BKP階層の偏微分方程式系の(形式)解となる。

$x_k = \frac{y_1^k + y_2^k + \dots}{k}$ とし、 $\hat{p}_\lambda(\mathbf{y}|b)$ の $y_i$ 達を消去して $x_1, x_3, \dots$ で書き換えたものを $P_\lambda^{(b)}(x)$ とおくとき、 $\tau(x) = P_\lambda^{(b)}\left(\frac{x}{2}\right)$ は、BKP階層の(形式)解である。

[5]での判定法を用いて証明するために、次のfactorial Schur  $Q$ -関数のパラメータの変換公式([3]を参照)を使う。成分数 $r$ のstrict partitionは、 $\rho_r + \lambda$ と表される。ただし、 $\rho_r = (r, r-1, \dots, 1)$ で、 $\lambda$ は成分数 $r$ 以下の分割である。パラメータの列 $a = (a_1, a_2, \dots)$ と $b = (b_1, b_2, \dots)$ に対して、

$$Q_{\rho_r + \lambda}(\mathbf{x}|a) = \sum_{\mu \subset \lambda} s_{\lambda/\mu}^{L,r}(b|a) Q_{\rho_r + \mu}(\mathbf{x}|b)$$

本研究は科研費(課題番号:16H03921)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 37K10

キーワード: BKP hierarchy, Factorial Schur  $Q$ -function, Giambelli formula

\* 〒400-8510 山梨県甲府市武田4-4-37 山梨大学大学院総合研究部教育学域

e-mail: hnaruse@yamanashi.ac.jp

web: <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~hnaruse/>

ここで、 $\mu$  は  $\lambda$  に含まれる分割を動く。係数  $s_{\lambda/\mu}^{L,r}(b|a)$  は、励起ヤング図形 (EYD) で記述される  $a$  と  $b$  の多項式で  $\lambda/\mu$  に対して定まる対称群のある要素  $w_{\lambda/\mu}$  を添え字にもつ二重シューベルト多項式になっている。(skew flagged Schur 関数ということもでき、一般には対称関数ではない。)  $s_{\lambda/\mu}^{L,r}(b|a)$  が、EYD で記述できることから、これらの係数の間に、Giambelli 型の border strip 分解による行列式公式が成り立つ。 $(\mu$  を固定して  $\lambda$  を動かす。 $\mu = \emptyset$  の時が通常の Giambelli 公式) この関係式がまさに、[5] の判定での条件式に一致する。より詳しく説明すると、 $a_1 = a_2 = \dots = 0$  において  $Q_{\rho_r+\lambda}(\mathbf{x}|0) = Q_{\rho_r+\lambda}(\mathbf{x})$  なので、

$$Q_{\rho_r+\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \subset \lambda} s_{\lambda/\mu}^{L,r}(b|0) Q_{\rho_r+\mu}(\mathbf{x}|b)$$

ここで、 $\hat{p}_{\rho_r+\mu}(\mathbf{y}|0) = P_{\rho_r+\lambda}(\mathbf{y})$  に注意して、双対性より

$$\hat{p}_{\rho_r+\mu}(\mathbf{y}|b) = \sum_{\lambda \supset \mu} s_{\lambda/\mu}^{L,r}(b|0) P_{\rho_r+\lambda}(\mathbf{y})$$

となる。 $P$ -関数と  $Q$ -関数の違いは、strict partition の成分数の 2 べきだけであり、右辺に登場する  $P$ -関数の添え字の分割はすべて成分数  $r$  であることに注意すると、[5] の判定がそのまま使える。

### 3. dual factorial Schur $P$ -関数のその他の性質

なお、dual factorial Schur  $P$ -関数については、以下のような factorial Schur  $Q$ -関数に類似の次のような事が分かっている。(cf. [3])

(0) (対称化による) 明示式 ([1]) の別証明

(1) 母関数表示

(2) divided difference による漸化式

(3) EYD 公式

(4) Pfaffian 公式

(5) skew 型の定義とその性質

補足: このうち、(1) の母関数表示を使って、[4] の証明方法で上記の主結果 (定理 1) の別証明 (添え字  $\lambda$  が正整数列の場合も含む) をする事もできる。

### 参考文献

- [1] S. Korotkikh, Dual multiparameter Schur  $Q$ -functions. J. Math. Sci. (N.Y.) 224 (2017), no. 2, 263-268.
- [2] M. Nakagawa and H. Naruse, Universal factorial Schur  $P, Q$ -functions and their duals, arXiv:1812.03328, old paper written in 2012.12.
- [3] H. Naruse, Dual factorial Schur  $P, Q$ - functions, in preparation.
- [4] N. Rozhkovskaya, Multiparameter Schur  $Q$ -functions are solutions of BKP hierarchy, arXiv:1805.06971.
- [5] Y. Sinyo, On the expansion coefficients of Tau-function of the BKP hierarchy, J. Phys. A 49 (2016), 295201.

# Multivariate Bernoulli polynomials

渋川 元樹 (神戸大学・理)\*

## 概 要

Jack 多項式を用いて, Bernoulli 多項式の変数類似を導入し, その基本的性質を導出する.

$r$  を正の整数,  $d$  を複素数として,

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^r \mid m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 0\},$$

$$\delta := (r-1, r-2, \dots, 2, 1, 0) \in \mathcal{P},$$

$$e_{r,k}(\mathbf{z}) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} z_{i_1} \cdots z_{i_k} \quad (k = 1, \dots, r), \quad e_{r,0}(\mathbf{z}) := 1, \quad |\mathbf{z}| := e_{r,1}(\mathbf{z}),$$

$$E_k(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad D_k(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^r z_j^k \partial_{z_j}^2 + d \sum_{1 \leq j \neq l \leq r} \frac{z_j^k}{z_j - z_l} \partial_{z_j} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とする. 任意の分割  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathcal{P}$  と複素数の  $r$  組  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$  について, Jack 多項式 (Jack polynomials)  $P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$  を以下の 2 条件を満たす  $|\mathbf{m}|$  次斉次多項式として定義する.

$$(1) D_2(\mathbf{z})P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) \sum_{j=1}^r m_j (m_j - 1 - d(r-j)),$$

$$(2) P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = m_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}) + \sum_{\mathbf{k} < \mathbf{m}} c_{\mathbf{m}\mathbf{k}} m_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}).$$

また補間 Jack 多項式 (interpolation Jack polynomials)  $P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$  を次の 2 条件で定める.

$$(1)^{\text{ip}} P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = 0, \quad \text{unless } \mathbf{k} \subset \mathbf{m} \in \mathcal{P}$$

$$(2)^{\text{ip}} P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{m}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) + (\text{lower terms}).$$

更に便宜上, 次のようにおく.

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})} \quad (\text{normalized Jack polynomials}),$$

$$\Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} = \frac{P_{\mathbf{m}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{m}}^{\text{ip}}(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}),$$

$$\binom{\mathbf{z}}{\mathbf{k}}^{(d)} := \frac{P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}(\mathbf{z} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} \quad (\text{generalized (or Jack) binomial coefficients}),$$

$${}_0\mathcal{F}_0^{(d)}(\mathbf{z}; \mathbf{u}) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} \Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{u}).$$

キーワード: Jack polynomials, interpolation Jack polynomials, Bernoulli polynomials

\* 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学科学研究科

e-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp



多変数 Bernoulli 多項式  $B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$  を次のように母函数で定める.

$$\frac{u}{e^u - 1} e^{zu} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(z) \frac{u^m}{m!} \Rightarrow \frac{|\mathbf{u}|}{e^{|\mathbf{u}|} - 1} {}_0\mathcal{F}_0^{(d)}\left(; \mathbf{z}, \mathbf{u}\right) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{P}} B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) \Psi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{u}).$$

多変数 Bernoulli 多項式  $B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z})$  については次が以下が成立する.

定理 1. (1) Special value at  $\mathbf{z} = 0$

$$B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{0}) = \frac{B_{|\mathbf{m}|}}{|\mathbf{m}|!}, \quad (1)$$

where  $B_m$  is the Bernoulli numbers defined by  $B_m(0) = B_m$ .

(2) Difference equation

$$B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z} + \mathbf{1}) - B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r \Phi_{\mathbf{m}_i}^{(d)}(\mathbf{z}) \left( m_i + \frac{d}{2}(r - i) \right) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{m}), \quad (2)$$

where

$$h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{m}) := \prod_{1 \leq k \neq i \leq r} \frac{m_i - m_k - \frac{d}{2}(i - k) - \frac{d}{2}}{m_i - m_k - \frac{d}{2}(i - k)}.$$

(3) Differential equation

$$E_0(\mathbf{z}) B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r B_{\mathbf{m}_i}^{(d)}(\mathbf{z}) \left( m_i + \frac{d}{2}(r - i) \right) h_{-,i}^{(d)}(\mathbf{m}). \quad (3)$$

(4) Symmetry

$$B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{1} - \mathbf{z}) = (-1)^{|\mathbf{m}|} B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}). \quad (4)$$

(5) Explicit formula

$$B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \subset \mathbf{m}} B_{|\mathbf{m}| - |\mathbf{n}|} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}^{(d)} \Phi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}). \quad (5)$$

(6) Inversion formula

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \subset \mathbf{m}} \frac{1}{|\mathbf{m}| - |\mathbf{n}| + 1} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}^{(d)} B_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}). \quad (6)$$

(7) Multiplication formula

$$\sum_{i=0}^{N-1} B_{\mathbf{m}}^{(d)}\left(\mathbf{z} + \frac{i}{N} \mathbf{1}\right) = N^{1-|\mathbf{m}|} B_{\mathbf{m}}^{(d)}(N\mathbf{z}). \quad (7)$$

(8) Binomial formula

$$B_{\mathbf{m}}^{(d)}(\mathbf{z} + \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \subset \mathbf{m}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}^{(d)} B_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}). \quad (8)$$

## 参考文献

- [1] G. Shibukawa : *Multivariate Bernoulli polynomials*, arXiv : 1905.01914.

# Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras \*

津田 照久 (一橋大学大学院 経済学研究科)

## 概要

団代数は、籠 (有向グラフ) の変異と呼ばれる操作と、ある簡単な双有理変換によって生成される代数構造である。この講演では、団代数を介したワイル群の双有理表現の構成法について紹介する。得られる双有理表現は、ある有理代数多様体上のワイル群作用や  $q$ -差分パウルヴェ方程式など、可積分系にも関係した興味深いクラスを与える。とくに、構成の鍵となる「閉路グラフに付随する鏡映変換」の組合せ的な側面に焦点をあてて論ずる。

## 1 団代数からの準備

はじめに Fomin–Zelevinsky [3] に従って、団代数について必要な事柄をまとめる。 $Q = (V, E)$  は  $V = \{1, 2, \dots, N\}$  を頂点集合、 $E \subseteq V \times V$  を有向辺集合とする籠 (有向グラフ) である。但し  $Q$  は辺として自己ループ  $i \rightarrow i$  および 2 サイクル  $i \rightarrow j \rightarrow i$  は持たないものとする。尚、同じ 2 頂点の間に複数の辺を持って構わない。

代数的に独立で可換な変数の組  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  を  $y$  変数と呼び、 $Q$  と  $\mathbf{y}$  の組を (初期)  $Y$  種子と呼ぶ。頂点  $k$  における  $Y$  種子の**変異 (mutation)**  $(Q', \mathbf{y}') = \mu_k(Q, \mathbf{y})$  を定義しよう。籠の変異  $Q' = \mu_k(Q)$  は次の手順で定める。

1. 部分グラフ  $i \rightarrow k \rightarrow j$  ごとに辺  $i \rightarrow j$  を加える
2. 頂点  $k$  を含む辺の向きを全て反転する
3. 現れた 2 サイクルを消す

また  $y$  変数の変異  $\mathbf{y}' = \mu_k(\mathbf{y})$  は  $Q$  の符合付き隣接行列  $B = (b_{ij})_{i,j=1}^N$ :

$$b_{ij} = -b_{ji} = (\text{辺 } i \rightarrow j \text{ の本数})$$

---

\*この講演は青山学院大学の久保直人氏、増田 哲氏との共同研究に基づく。また、この予稿は RIMS 研究会「組合せ論的表現論の諸相」(2018 年 10 月 9 日～12 日) の講究録原稿に加筆修正をしたものである。本研究は JSPS 科研費 17K05270 の助成を受けて行われた。

を用いて、次の双有理変換で定める。

$$(1) \quad y'_i = \begin{cases} y_k^{-1} & (i = k) \\ y_i \frac{(1 + y_k)^{[b_{ik}]_+}}{(1 + y_k^{-1})^{[b_{ki}]_+}} & (i \neq k) \end{cases}$$

ここで  $a \in \mathbb{R}$  に対し  $[a]_+ = \max\{a, 0\}$  という記号を用いた。変異の合成  $w = \mu_{i_1} \circ \mu_{i_2} \circ \cdots \circ \mu_{i_t}$  の有理関数  $\varphi = \varphi(\mathbf{y})$  への作用は

$$w.\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}.w)$$

のように、 $y$  変数への右作用によって定義する。このとき

$$\mu_k^2 = \text{id} \quad (\text{対合性}) \quad \text{および} \quad \mu_i \circ \mu_j = \mu_j \circ \mu_i \quad (b_{ij} = 0)$$

が成り立つ。

籠  $Q$  には頂点のラベルの貼り替えとして対称群  $\mathfrak{S}_N$  が作用する。これを

$$\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_N$$

のように  $y$  変数に拡張すれば、任意の  $i, j \in V$  に対して

$$(i, j) \circ \mu_i = \mu_j \circ (i, j)$$

が成り立つ。また籠  $Q$  の辺の向きを一斉に反転する操作を  $\iota$  と記し、 $y$  変数への作用を

$$\iota(y_i) = y_i^{-1}$$

と定めれば、任意の変異と  $\iota$  は可換となる。

変異  $\mu_k$  や置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_N$  (および反転  $\iota$ ) は、一般に籠  $Q$  の形を変える。与えられた籠  $Q$  に対して、変異と置換の合成で  $Q$  を不変に保つものの全体を  $G_Q$  と表す。このとき  $G_Q$  は  $y$  変数への作用を介して、有理関数体  $\mathbb{Q}(y_1, y_2, \dots, y_N)$  上の非自明な双有理変換群を定める。これが我々の興味ある対象である。

**例** (変異の合成の計算). 次の  $Y$  種子

$$Q = \begin{array}{ccc} & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & \uparrow & & \searrow \\ & 3 & & \end{array} \quad \text{および} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

に変異の合成  $w = \mu_2 \circ \mu_1$  を施す。籠の変異は、上記 1, 2, 3 の手順から

$$\mu_1(Q) = \begin{array}{ccc} & 1 & \longleftarrow & 2 \\ & \downarrow & & \\ & 3 & & \end{array}, \quad \mu_2 \circ \mu_1(Q) = \begin{array}{ccc} & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & \downarrow & & \\ & 3 & & \end{array}$$



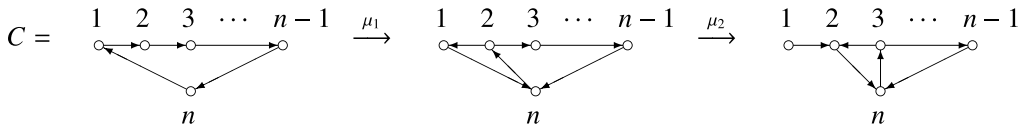
を考える。変異と置換の合成の列

$$(2) \quad R = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M, \quad M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1} = \mu_{n-1} \circ \dots \circ \mu_2 \circ \mu_1$$

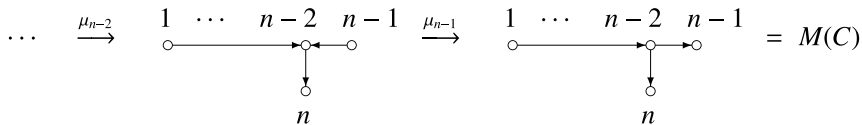
によって閉路  $C$  に付随する鏡映  $R = R_C$  を定義しよう。

**命題 1.** 変換  $R$  は籓  $C$  を不変に保ち、かつ  $R^2 = \text{id}$  を満たす。

証明 対合性  $R^2 = \text{id}$  は  $\mu_k^2 = (n-1, n)^2 = \text{id}$  から容易に従う。籓については、下図のように変異の様子を追いかける。



「3 角形  $n \rightarrow k+1 \rightarrow k \rightarrow n$  が右にずれていく」

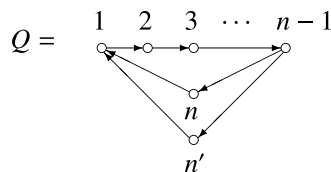


最後の三つ又グラフ  $M(C)$  は、頂点  $n-1$  と  $n$  について対称な形ゆえ、明らかに置換  $(n-1, n)$  で不変である。よって

$$R(C) = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M(C) = M^{-1} \circ M(C) = C$$

が従う。 □

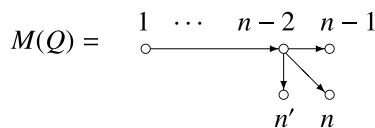
閉路グラフ  $C$  に頂点  $n$  の「複製」  $n'$  を付け加えた籓



を考える。このとき鏡映  $R = R_C$  と置換  $(n, n')$  について、次が成り立つ。

**命題 2.**  $(R \circ (n, n'))^3 = \text{id}$

証明 籓  $Q$  に先程と同じ変異の合成  $M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1}$  を施すと、3 頂点  $n-1, n, n'$  が対称な四つ又グラフ



が得られる。ここで  $M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1}$  と  $(n, n')$  は可換ゆえ

$$\begin{aligned} R \circ (n, n') &= M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M \circ (n, n') \\ &= M^{-1} \circ (n-1, n) \circ (n, n') \circ M \end{aligned}$$

となり、 $(n-1, n) \circ (n, n')$  が位数 3 の巡回置換であることから  $(R \circ (n, n'))^3 = \text{id}$  が従う。□

とくに上の証明から籠  $Q$  が鏡映  $R_C$  で不変に保たれることが分かる。

ところで、一般に閉路  $C$  を部分グラフとして含む籠  $Q (\supseteq C)$  は、一体いつ鏡映  $R = R_C$  で不変となるのだろうか。まず鏡映の定義

$$R_C = M^{-1} \circ (n-1, n) \circ M, \quad M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1}$$

から、

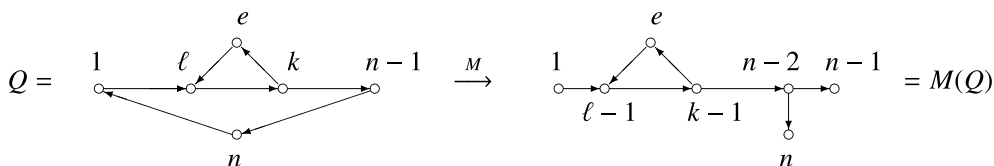
$$Q \text{ が鏡映 } R_C \text{ で不変} \iff M(Q) \text{ が置換 } (n-1, n) \text{ で不変}$$

であることに注意しておこう。

**鏡映不変な籠の特徴付け** 次の補題は簡単だが、この問題の大切な鍵である。

**補題 3.** 閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  に「松葉グラフ」 $w = (k \rightarrow e \rightarrow \ell)$  を付け加えた籠  $Q = C \cup w$  を考える。但し  $e$  は  $C$  にない新しい頂点で、 $k, \ell$  は  $C$  の相異なる任意の 2 頂点である。このとき  $R = R_C$  は籠  $Q$  を不変に保つ。

証明 変異の合成  $M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1}$  を施した籠  $M(Q)$  は頂点  $n-1$  と  $n$  について対称となる。これは、実際に変異の様子を追いかけることで容易に確かめられる。例えば  $2 \leq \ell < k \leq n-1$  の場合、



のようになる。あとは命題 1 の証明と同様である。□

閉路  $C$  に「松葉」をいくつか付け加えても得られる籠は、やはり  $R_C$  不変である。

**補題 4.** 閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  に  $m$  個の「松葉」 $w_i = (k_i \rightarrow e_i \rightarrow \ell_i)$  を付け加えた籠  $Q^{(m)} = C \cup \bigcup_{i=1}^m w_i$  を考える。但し、各  $e_i$  は  $C$  にない新しい頂点で、各  $k_i, \ell_i$  は  $C$  の相異なる任意の 2 頂点である。(尚、付け加わる新しい頂点と辺には重複があっても構わない。) このとき  $R = R_C$  は籠  $Q^{(m)}$  を不変に保つ。

証明 まず  $M = \mu_{n-1, \dots, 2, 1}$  の形から  $M(C \cup w_i)$  と  $M(Q^{(m)})$  は、ともに  $M(C)$  を部分グラフとして含む。さらに 2 つのグラフ  $\bigcup_{i=1}^m (M(C \cup w_i) - M(C))$  と  $M(Q^{(m)}) - M(C)$  は  $V_e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

の頂点同士を結ぶ辺を除いて等しい<sup>1</sup>。命題 1 と補題 3 から  $M(C)$  と  $M(C \cup w_i)$  は、ともに頂点  $n-1$  と  $n$  について対称である。よって  $M(Q^{(m)})$  も頂点  $n-1$  と  $n$  について対称となり、 $Q^{(m)}$  は  $R = R_C$  で不変である。□

籐の変異の定義から直ちに従う次の一般的な事実を述べておこう。

**補題 5.** 自己ループと 2 サイクルを持たない籐  $Q = (V, E)$  を考える。部分集合  $V_0 \subset V$  について、 $Q$  から  $V_1 = V \setminus V_0$  の頂点同士を結ぶ辺を除いた籐を  $Q'$  とおく。このとき、任意の変異の合成列  $M = \mu_{i_1, i_2, \dots, i_\ell}$  ( $i_1, i_2, \dots, i_\ell \in V_0$ ) に対し、 $M(Q)$  と  $M(Q')$  は  $V_1$  の頂点同士を結ぶ辺を除いて等しい。

ここまでの準備の下で、鏡映不変な籐の特徴付けが得られる。

**定理 6** (cf. Goncharov–Shen [4, Theorem 7.7]). 閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  を部分グラフとして含む籐  $Q$  が鏡映  $R = R_C$  で不変となるための必要十分条件は、

条件 (W): 閉路  $C$  に含まれない  $Q$  の任意の頂点  $v$  に対し、 $v$  から  $C$  に入る辺と出る辺の本数が等しい

である。

**証明** この証明では、 $C$  の頂点に接続する全ての辺からなる  $Q$  の部分グラフを  $Q'$  と記す。

[十分性]  $Q$  が条件 (W) を満たすならば、 $Q'$  は  $C$  に適当な数の「松葉」を付け加えた籐に等しい。このとき補題 4 から  $M(Q')$  は頂点  $n-1$  と  $n$  について対称ゆえ、補題 5 から  $M(Q)$  もそうなる。即ち  $Q$  は  $R = R_C$  で不変である。

[必要性]  $R$  不変な籐  $Q$  が条件 (W) を満たさないと仮定して、矛盾を導く。条件 (W) より  $Q'$  から適当な数の「松葉」を除いた籐  $Q''$  は、 $C$  の 1 つの頂点  $n$  に  $p$  個の多重辺  $v_j \xrightarrow{m_j} n$  または  $v_j \xleftarrow{m_j} n$  ( $1 \leq j \leq p$ ) を付け加えた形にできる。ここで  $v_1, v_2, \dots, v_p$  は  $C$  にない相異なる頂点とした。明らかに  $M(Q'')$  は頂点  $n-1$  と  $n$  について対称ではない。また  $Q''$  に適当な数の「松葉」 $w_1, w_2, \dots, w_q$  を付け加えた籐である  $Q'$  に対し、2 つのグラフ  $M(Q') - M(C)$  と  $\bigcup_{k=1}^q (M(C \cup w_k) - M(C)) \cup (M(Q'') - M(C))$  は  $C$  の頂点に接続する辺に制限すれば等しい。よって補題 4 と同様の議論から  $M(Q')$  も頂点  $n-1$  と  $n$  について対称ではない。

しかるに  $Q$  の  $R$  不変性から  $M(Q)$  は頂点  $n-1$  と  $n$  について対称となり、補題 5 から  $M(Q')$  もそうなる。これは矛盾である。□

## 双有理変換 $R = R_C$ の具体形と巡回対称性 $n$ 変数多項式

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y}) &= F(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= y_0 + y_0 y_1 + y_0 y_1 y_2 + \dots + y_0 y_1 \dots y_{n-1} \end{aligned}$$

を導入する。但し、変数  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  の添字は  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  の元と看做す (つまり  $y_{i+n} = y_i$  なる周期性を課す)。また巡回置換  $\rho = (1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{S}_n$  を用いて、 $F = F(\mathbf{y})$  の変数の添字を  $k$

<sup>1</sup> グラフ  $G$  とその部分グラフ  $H$  について、差  $G - H$  は  $G$  から  $H$  の辺を除いて得られるグラフを表す。

だけずらして得られる多項式

$$F_k = \rho^k \cdot F(\mathbf{y}) = F(y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_{n+k}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

も導入しておく。

はじめに籠が閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  の場合、鏡映  $R = R_C = \mu_{1,2,\dots,n-1} \circ (n-1, n) \circ \mu_{n-1,\dots,2,1}$  の  $y$  変数への作用は

$$(3) \quad R(y_k) = \frac{F_{k-1}}{y_{k-1}F_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

となることが単純な計算から従う<sup>2</sup>。とくに添字の巡回置換  $\rho = (1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{S}_n$  に対して

$$\rho^{-1} \circ R \circ \rho = R$$

のような対称性が (3) 式的具体形から直ちに分かる。

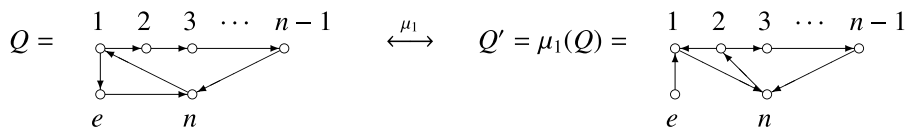
次に閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  に 1 個の「松葉」  $w = (1 \rightarrow e \rightarrow n)$  を付け加えた籠  $Q = C \cup w$  を考える。変異の定義式 (1) より明らかに  $R = R_C$  の  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) への作用は、籠が  $C$  の場合 (3) に等しい (一般に  $C$  を含み、かつ鏡映  $R = R_C$  で不変な籠  $Q$  についても全く同様である)。あとは新しい頂点  $e$  の変数  $y_e$  への作用について調べればよい。

**補題 7.** 閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  に 1 個の「松葉」  $w = (1 \rightarrow e \rightarrow n)$  を付け加えた籠  $Q = C \cup w$  について、鏡映  $R = R_C$  の  $y_e$  への作用は

$$(4) \quad R(y_e) = y_e \frac{y_n F_1}{F_n}$$

で与えられる。

証明 籠  $Q' = \mu_1(Q)$  は下図のように長さ  $n-1$  の閉路  $C' = (2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 2)$  を含む。



このとき鏡映  $R = R_C$  は  $C'$  に付随する鏡映  $R' = R_{C'}$  を用いて

$$R = \mu_1 \circ R' \circ \mu_1$$

と表される。勿論、定理 6 より  $Q'$  は  $R'$  不変である。

そこで、初期  $Y$  種子  $(Q, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_e))$  の変換の様子を追いかけてみよう。

$$(Q, \mathbf{y}) \xleftarrow{\mu_1} (Q' = \mu_1(Q), \mathbf{y}') \xleftarrow{R'} (Q'' = Q', \mathbf{y}'') \xleftarrow{\mu_1} (Q''' = Q, \mathbf{y}''')$$

<sup>2</sup>例えば、閉路  $C$  の長さ  $n$  に関する帰納法を用いて容易に証明できる。



変異の定義式 (1) より

$$y'_e = \mu_1(y_e) = y_e \frac{y_1}{1+y_1}, \quad y''_e = \mu_1(y''_e) = y''_e(1+y''_e) = y''_e \left(1 + \frac{1}{y''_e}\right)$$

である。また籠  $Q'$  において頂点  $e$  は  $C'$  に隣接しないので、 $y''_e = R'(y'_e) = y'_e$  となる。これらと既に示した (3) 式：

$$y''_e = R(y_1) = \frac{F_n}{y_n F_2}$$

を合わせれば、

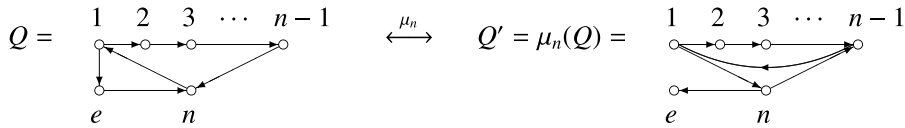
$$(5) \quad y''_e = R(y_e) = y_e \frac{y_1}{1+y_1} \cdot \frac{F_n + y_n F_2}{F_n}$$

が従う。最後に簡単な恒等式

$$F_k + y_k F_{k+2} = \frac{y_k(1+y_{k+1})F_{k+1}}{y_{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

の成立に注意すれば、(5) は (4) と等価である。 □

上と同じ籠  $Q$  に対し、 $Q' = \mu_n(Q)$  は下図のようにやはり長さ  $n-1$  の閉路  $C' = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow 1)$  を含み、かつ頂点  $e$  は  $C'$  に隣接しない。



ここで変異と置換の合成列

$$T := \mu_{n,1,2,\dots,n-2} \circ (n-2, n-1) \circ \mu_{n-2,\dots,2,1,n} = \rho^{-1} \circ R \circ \rho$$

を考える。但し  $\rho = (1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{S}_n$  である。このとき、補題 7 の証明と全く同様の議論によって双有理変換  $T(y_e)$  の具体形が計算できるが、驚くべきことに  $T(y_e) = R(y_e)$  が成り立つ。即ち、鏡映  $R = R_C$  は籠  $Q$  においても巡回対称性  $\rho^{-1} \circ R \circ \rho = R$  を持つ。

次は補題 7 の一般化である ( $k=1$  の場合が補題 7 そのもの)。

**補題 8.** 閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  に 1 個の「松葉」  $w_k = (k \rightarrow e \rightarrow k-1)$  ( $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) を付け加えた籠  $Q = C \cup w_k$  について、鏡映  $R = R_C$  の  $y_e$  への作用は

$$R(y_e) = y_e \frac{y_{k-1} F_k}{F_{k-1}}$$

で与えられる。

証明 鏡映  $R$  の持つ上記の巡回対称性を用いれば、補題 7 より明らかである。 □

以下、籠  $Q = (V, E)$  は閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  を部分グラフとして含み、かつ鏡映  $R = R_C$  で不変なものとする。また  $C$  の頂点集合を  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  と記す。このとき定理 6 より、 $C$  に属さない任意の頂点  $e \in V \setminus I$  について、部分集合  $\{e\} \cup I \subset V$  の誘導する部分グラフ<sup>3</sup>  $Q[\{e\} \cup I] \subseteq Q$  は、閉路  $C$  に  $e$  を新しい頂点とする適当な個数の「松葉」を付け加えた形になっている。即ち、非負整数の組  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$  を適当にとると、 $Q[\{e\} \cup I]$  は  $C$  に「松葉」  $w_k = (k \rightarrow e \rightarrow k-1)$  を  $m_k$  個ずつ付け加えた籠  $C \cup \bigcup_{k=1}^n m_k w_k$  に等しい。

**命題 9** (cf. [4, Theorem 7.7]). 籠  $Q$  は閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  を部分グラフとして含み、かつ鏡映  $R = R_C$  で不変なものとする。このとき、

i)  $C$  の頂点  $k \in I$  について

$$R(y_k) = \frac{F_{k-1}}{y_{k-1} F_{k+1}};$$

ii)  $C$  に外から隣接する頂点  $e$  について、上のような非負整数の組  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$  を定めると、

$$R(y_e) = y_e \prod_{k=1}^n \left( \frac{y_{k-1} F_k}{F_{k-1}} \right)^{m_k};$$

iii) それ以外の頂点  $v$  について  $R(y_v) = y_v$  である。

証明 i) は既に示してあり (補題 7 の手前を見よ)、iii) は変異の定義から自明である。以下、ii) を示す。まず、各  $k \in I$  について  $m_k$  個の「松葉」  $w_{k,i} = (k \rightarrow e_{k,i} \rightarrow k-1)$  ( $1 \leq i \leq m_k$ ) を閉路  $C$  に付け加えて得られる籠  $\tilde{Q} = C \cup \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i=1}^{m_k} w_{k,i}$  を考える。但し、付け加わる  $|\mathbf{m}| = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  個の新しい頂点  $\{e_{k,i}\}$  は互いに異なるものとする。このとき、補題 8 より

$$R(y_{e_{k,i}}) = y_{e_{k,i}} \frac{y_{k-1} F_k}{F_{k-1}}$$

である。一方、頂点  $\{e_{k,i}\}$  を全て 1 点  $e$  に接着して得られる籠は  $Q[\{e\} \cup I]$  に等しい。ここで頂点  $e$  の変数  $y_e$  は  $\{y_{e_{k,i}}\}$  の積

$$y_e = \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} y_{e_{k,i}}$$

として定められる。鏡映  $R = R_C$  の  $y_e$  への作用が  $Q$  でも  $Q[\{e\} \cup I]$  でも同じであることに注意すれば、上の 2 式から ii) は直ちに従う。□

とくに (繰り返しになるが)、鏡映  $R = R_C$  の  $y$  変数への双有理変換の具体形から巡回対称性

$$(6) \quad \rho^{-1} \circ R \circ \rho = R, \quad \rho = (1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{S}_n$$

が成り立つ。

<sup>3</sup>つまり  $Q[\{e\} \cup I]$  は、両端点が  $\{e\} \cup I$  に属する辺からなる  $Q$  の部分グラフを表す。

**系 10** (cf. [4, Theorem 7.1]). 任意の置換  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  に対し,  $\sigma^{-1} \circ R \circ \sigma = R$  が成り立つ。

**証明** 籠  $Q (\supseteq C)$  は定理 6 の条件 (W) を満たすものとする。変異の定義から, 閉路  $C$  の任意の頂点  $i_1 \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  に対し, 籠  $Q' = \mu_{i_1}(Q)$  は  $I \setminus \{i_1\}$  を頂点とする長さ  $n-1$  の閉路  $C'$  を含み, かつ  $C'$  について条件 (W) を満たす。また巡回対称性 (6) より  $R = \mu_{i_1} \circ R_{C'} \circ \mu_{i_1}$  である。以下, 同様の操作を繰り返せば,  $I$  の任意の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$$

に対し  $R = \mu_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \circ (i_{n-1}, i_n) \circ \mu_{i_{n-1}, \dots, i_2, i_1}$  が成り立つ。□

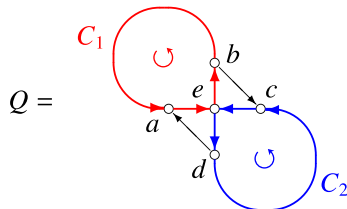
**註.** 閉路グラフに付随する鏡映変換 (2) が可積分系の文脈に現れたのは, 井上–Lam–Pylyavskyy [6] による団代数と幾何的  $R$  行列の研究が最初である。彼らは, 本稿 4.2 節の例に見る籠  $Q$  において縦方向の周期条件のみを課したような円筒上の籠の団代数を考察し, 対称群 (つまり  $A$  型のワイル群) の双有理的实现を得た。さらに最近の井上–石橋–大矢 [5] による高次タイヒミュラー空間の研究では, より一般のコクセター群の双有理的实现が重み付き籠の団代数から導出された。尚, 群の生成元の満たす基本関係式は, 以下 3 節に見るようなグラフの組合せ的な議論ではなく, 変異の具体形を用いた直接計算で証明されている。

鏡映変換 (2) の初出自体は, 恐らく Bucher [2] による曲面の 3 三角形分割に由来した団代数の研究であり, その後 Goncharov–Shen [4, Section 7] にその性質が詳細に調べられた。実際, 定理 6 (鏡映不変な籠の特徴付け) の条件 (W) の十分性, 命題 9 (双有理変換の具体形), および系 10 (鏡映の対称性) は既知の結果である。但し証明は本稿とは全く異なっている。例えば, 命題 9 の [4] による証明は閉路の長さに関する帰納法で双有理変換を計算するものだが, 場合分けもあって些か煩雑である。一方, 我々の証明は「頂点の接着」のアイデアを用いた (計算を殆ど必要としない) 見通しのよいものになっている。系 10 についても, その特別な場合である「巡回対称性」が本質的であることが今回の証明で露となった。

### 3 鏡映変換の満たす関係式

籠  $Q$  が閉路を部分グラフとして複数含み, かつそれらに付随する鏡映で不変に保たれるとき, 鏡映同士はどのような関係式を満たすのだろうか。

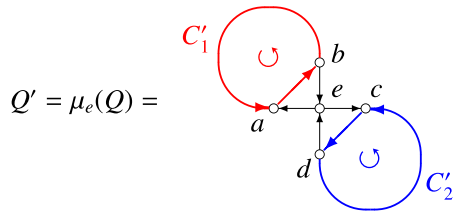
**交叉する閉路** 2つの閉路  $C_1$  と  $C_2$  が頂点  $e$  で交叉した次のような籠



を考える。但し  $C_1 = (\dots \rightarrow a \rightarrow e \rightarrow b \rightarrow \dots)$  と  $C_2 = (\dots \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow d \rightarrow \dots)$  の長さは異なっても構わない。辺  $b \rightarrow c$  と  $d \rightarrow a$  の存在によって、定理6から  $Q$  は鏡映  $R_{C_i}$  ( $i = 1, 2$ ) で不変であることに注意しておく。

**命題 11.**  $R_{C_1}$  と  $R_{C_2}$  は互いに可換である。

証明 2つの閉路の交点  $e$  における変異を施すと



が得られる。鏡映の巡回対称性を用いて

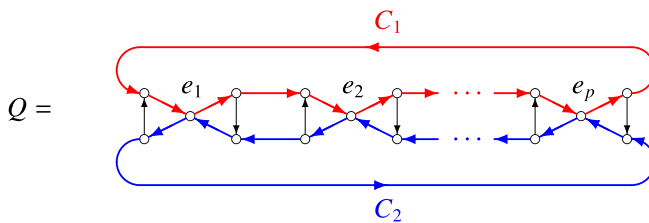
$$R_{C_i} = \mu_e \circ R_{C'_i} \circ \mu_e, \quad i = 1, 2$$

と表される。ここで2つの閉路  $C'_1 = (\dots \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow \dots)$  と  $C'_2 = (\dots \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow \dots)$  は互いに隣接していないことから  $R_{C'_1}$  と  $R_{C'_2}$  は可換である。よって

$$\begin{aligned} R_{C_1} \circ R_{C_2} &= \mu_e \circ R_{C'_1} \circ R_{C'_2} \circ \mu_e \\ &= \mu_e \circ R_{C'_2} \circ R_{C'_1} \circ \mu_e = R_{C_2} \circ R_{C_1} \end{aligned}$$

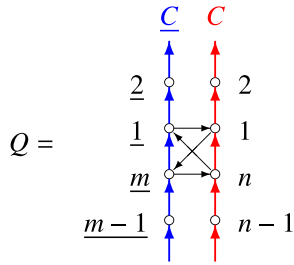
が従う。 □

より一般に2つの閉路  $C_1$  と  $C_2$  が複数の頂点  $e_1, e_2, \dots, e_p$  で交叉した筋



においても、上の命題11と同様に、交点  $e_1, e_2, \dots, e_p$  における変異で2つの閉路を分離すれば、鏡映の巡回対称性を用いて  $R_{C_1}$  と  $R_{C_2}$  の可換性が証明できる。

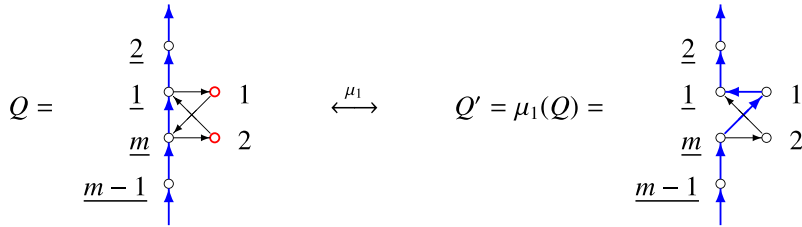
**蝶番で繋がれた閉路** 長さ  $n$  の閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  と長さ  $m$  の閉路  $\underline{C} = (\underline{1} \rightarrow \underline{2} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{m} \rightarrow \underline{1})$  が「蝶番」 $\underline{1} \rightarrow 1 \rightarrow \underline{m} \rightarrow n \rightarrow \underline{1}$  で繋がれた筋



を考える。

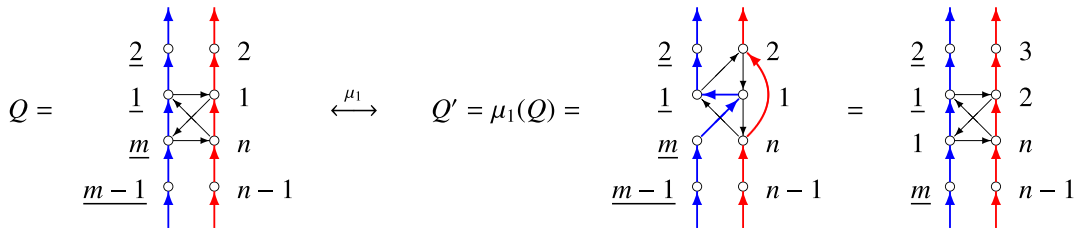
**命題 12.**  $R_C$  と  $R_{\underline{C}}$  は組紐関係式  $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \text{id}$  を満たす。

**証明** i)  $n = 2$ , つまり  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$  の場合, 箭  $Q' = \mu_1(Q)$  は下図のように長さ  $m+1$  の閉路  $\underline{C}' = (1 \rightarrow \underline{1} \rightarrow \underline{2} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{m} \rightarrow 1)$  に頂点 1 の「複製」2 を付け加えた形である。



よって命題 2 から  $(R_{\underline{C}'} \circ (1, 2))^3 = \text{id}$  が成り立つ。鏡映の巡回対称性から  $R_{\underline{C}} = \mu_1 \circ R_{\underline{C}'} \circ \mu_1$  と表せるので, 定義  $R_C = \mu_1 \circ (1, 2) \circ \mu_1$  と合わせて  $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \text{id}$  が分かる。

ii)  $n > 2$  の場合, 箭  $Q$  に変異  $\mu_1$  を施すと

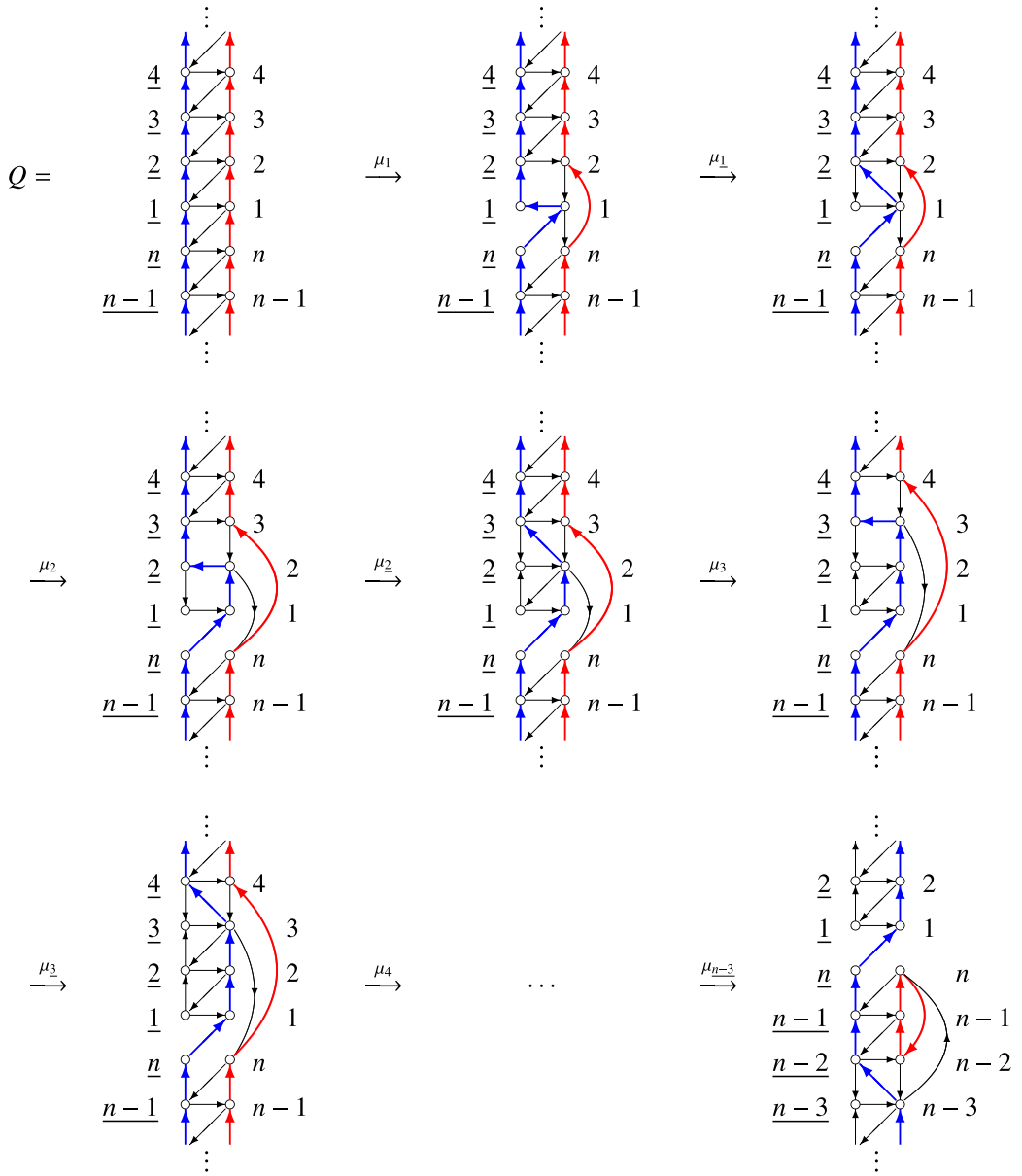


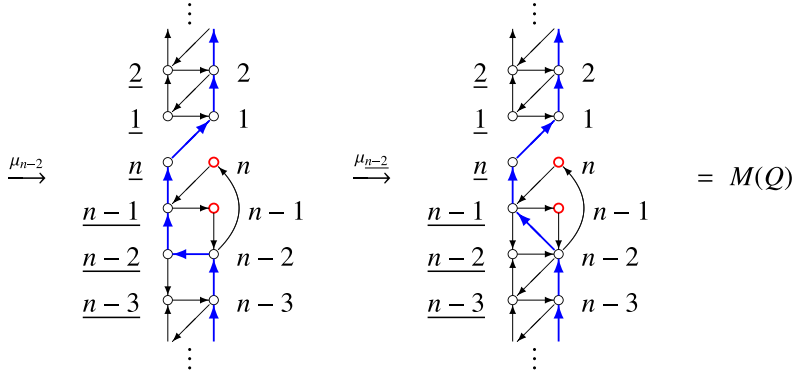
が得られる。これは長さ  $n-1$  の閉路  $C' = (2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 2)$  と長さ  $m+1$  の閉路  $\underline{C}' = (1 \rightarrow \underline{1} \rightarrow \underline{2} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{m} \rightarrow 1)$  が「蝶番」で繋がれた形である。以下, 鏡映の巡回対称性に注意しながら変異  $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n-2}$  を順番に施すことで, i)  $n = 2$  の場合に帰着できる。□

**隣接する閉路** 同じ長さ  $n$  の 2 つの閉路  $C = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1)$  と  $\underline{C} = (\underline{1} \rightarrow \underline{2} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{n} \rightarrow \underline{1})$  を「松葉」  $\underline{i} \rightarrow i \rightarrow \underline{i-1}$  ( $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) で隣接させた箭  $Q$  を考える。

**命題 13** (cf. [6, Theorem 3.2]).  $R_C$  と  $R_{\underline{C}}$  は組紐関係式  $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \text{id}$  を満たす。

**証明** 些か天下りのではあるが  $Q$  に変異の合成列  $M = \mu_{n-2, n-2, \dots, 2, 2, 1, 1}$  を施してみよう。





上図のように  $Q^{(2k-1)} = \mu_{k,k-1,k-1,\dots,2,2,1,1}(Q)$  は、長さ  $n-k$  の閉路  $C^{(2k-1)} = (k+1 \rightarrow k+2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow k+1)$  と長さ  $n+1$  の閉路  $\underline{C}^{(2k-1)} = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow \underline{k} \rightarrow k+1 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{n} \rightarrow 1)$  を部分グラフとして含み、かつ  $R_{C^{(2k-1)}}$  と  $R_{\underline{C}^{(2k-1)}}$  で不変な籠である。同様に  $Q^{(2k)} = \mu_{k,k,\dots,2,2,1,1}(Q)$  は、長さ  $n-k$  の閉路  $C^{(2k)} = C^{(2k-1)}$  と長さ  $n$  の閉路  $\underline{C}^{(2k)} = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k \rightarrow \underline{k+1} \rightarrow k+2 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{n} \rightarrow 1)$  を含み、かつ  $R_{C^{(2k)}}$  と  $R_{\underline{C}^{(2k)}}$  で不変な籠である。ここで

$$(7) \quad R_C = M^{-1} \circ R_{C^{(2n-4)}} \circ M, \quad R_{\underline{C}} = M^{-1} \circ R_{\underline{C}^{(2n-4)}} \circ M$$

が成り立つが、これは変異の各段階で鏡映の巡回対称性に注意すれば明らかである。とくに籠  $Q^{(4n-4)} = M(Q)$  において、長さ 2 の閉路  $C^{(4n-4)} = (n-1 \rightarrow n \rightarrow n-1)$  と長さ  $n$  の閉路の  $\underline{C}^{(2n-4)} = (1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n-2 \rightarrow \underline{n-1} \rightarrow \underline{n} \rightarrow 1)$  は「蝶番」で繋がれた形ゆえ、命題 12 から  $(R_{C^{(2n-4)}} \circ R_{\underline{C}^{(2n-4)}})^3 = \text{id}$  が成り立つ。これは (7) 式を介して  $(R_C \circ R_{\underline{C}})^3 = \text{id}$  と同値である。□

## 4 例

これまでに説明した一般的な枠組みを用いて、様々なワイル群の双有理表現が団代数から得られる。以下 2 つの具体例を実際に見てみよう。

### 4.1 $D_5^{(1)}$ 型の $q$ -差分パルヴェ方程式 ( $q$ -PV1)

はじめに 2 つの 2 サイクル  $C_{13} = (1 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$  と  $C_{24} = (2 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$  が「蝶番」 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  で繋がれた籠<sup>4</sup>

$$Q_0 = (V_0, E_0), \quad V_0 = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E_0 = \{i \rightarrow i+1 \mid i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

を考える。定理 6 から  $C_{13}, C_{24}$  に付随する鏡映  $R_{13}, R_{24}$  は  $Q_0$  を不変に保ち、また命題 12 からは組紐関係式  $(R_{13} \circ R_{24})^3 = \text{id}$  が従う。即ち  $Q_0$  を不変に保つ群  $G_{Q_0}$  は、 $A_2$  型の (有限) ワイル群  $W(A_2)$  と同型な群  $\langle R_{13}, R_{24} \rangle$  を含む。

<sup>4</sup>あるいは 2 つの 2 サイクル  $C_{13}$  と  $C_{24}$  を「松葉」 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  と  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$  で隣接させた籠と看做しても同じである。

$$Q_0 = \begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ 3 & 4 \end{array} & = & \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ 4 & 3 \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} R_{13} \quad R_{24} \\ \circ \text{---} \circ \end{array} & A_2 \text{ 型} \end{array}$$

図において左側には籠を、右側には現れたワイル群に対応する**ディンキン図形**を記した。

次に  $Q_0$  に頂点 1 の「複製」 $1'$  を付け加えた籠  $Q_1$  を考える。明らかに頂点 1 と頂点  $1'$  の置換  $(1, 1')$  は  $Q_1$  を不変に保ち、また命題 2 から  $(R_{13} \circ (1, 1'))^3 = \text{id}$  が従う。尚  $(1, 1')$  と  $R_{24}$  は可換である。即ち  $G_{Q_1} \supset \langle R_{13}, R_{24}, (1, 1') \rangle \simeq W(A_3)$  となる。

$$Q_1 = \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1' & & 2 \\ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ \\ & 4 & 3 \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{c} (1, 1') \\ \circ \\ \circ \text{---} \circ \\ R_{13} \quad R_{24} \end{array} & A_3 \text{ 型} \end{array}$$

同様に  $Q_0$  の 4 頂点全てに対し「複製」を付け加えた籠

$$Q = (V, E), \\ V = \{1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'\}, \quad E = \{i \rightarrow i+1, i' \rightarrow i+1, i \rightarrow (i+1)' \mid i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

を考えれば

$$G_Q \supset W = \langle R_{13}, R_{24}, (1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4') \rangle \simeq W(D_5^{(1)})$$

となり、 $D_5^{(1)}$  型のアフィン・ワイル群  $W(D_5^{(1)})$  の双有理表現が得られる。

$$Q = (V, E) = \begin{array}{ccc} \begin{array}{cccc} 1' & & & 2' \\ & \circ & & \circ \\ & \circ & & \circ \\ & \circ & & \circ \\ & \circ & & \circ \\ & \circ & & \circ \\ 4' & & & 3' \end{array} & \longleftrightarrow & \begin{array}{ccc} (1, 1') & & (2, 2') \\ \circ & & \circ \\ \circ & \text{---} \circ & \circ \\ R_{13} & & R_{24} \\ \circ & & \circ \\ (3, 3') & & (4, 4') \end{array} & D_5^{(1)} \text{ 型} \end{array}$$

籠  $Q$  の頂点に付随する  $y$  変数  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'$ ) への双有理変換

$$s_0 = (1, 1'), \quad s_1 = (3, 3'), \quad s_2 = R_{13}, \quad s_3 = R_{24}, \quad s_4 = (4, 4'), \quad s_5 = (2, 2')$$

の具体形は、命題 9 から次のように書き下すことができる。

$$(8) \quad \begin{array}{l} s_0 : y_1 \leftrightarrow y_{1'}, \quad s_1 : y_3 \leftrightarrow y_{3'}, \quad s_4 : y_4 \leftrightarrow y_{4'}, \quad s_5 : y_2 \leftrightarrow y_{2'}, \\ s_2(y_{\{1,3\}}) = \frac{1}{y_{\{3,1\}}}, \quad s_2(y_{\{2,2'\}}) = y_{\{2,2'\}} \frac{y_1(1+y_3)}{1+y_1}, \quad s_2(y_{\{4,4'\}}) = y_{\{4,4'\}} \frac{y_3(1+y_1)}{1+y_3}, \\ s_3(y_{\{2,4\}}) = \frac{1}{y_{\{4,2\}}}, \quad s_3(y_{\{1,1'\}}) = y_{\{1,1'\}} \frac{y_4(1+y_2)}{1+y_4}, \quad s_3(y_{\{3,3'\}}) = y_{\{3,3'\}} \frac{y_2(1+y_4)}{1+y_2} \end{array}$$

その他の記していない変数への作用は自明である。頂点の置換と辺の向きの方転  $\iota$  の合成

$$\sigma_1 = (1, 2) \circ (1', 2') \circ (3, 4) \circ (3', 4') \circ \iota, \quad \sigma_2 = (1, 3) \circ (1', 3') \circ \iota$$

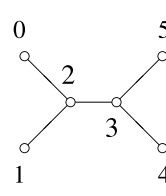


もやはり籠  $Q$  を不変に保つが、これはディンキン図形の自己同型に相当する。

さて、乗法的ルート変数  $a_i$  ( $0 \leq i \leq 5$ ) を

$$a_2 = y_1 y_3, \quad a_3 = y_2 y_4, \\ a_0 = \frac{y_1'}{y_1}, \quad a_1 = \frac{y_3'}{y_3}, \quad a_4 = \frac{y_4'}{y_4}, \quad a_5 = \frac{y_2'}{y_2}$$

で導入しよう。このとき

$$(C_{ij})_{0 \leq i, j \leq 5} = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ & & -1 & 2 & & \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & & -1 & 2 \\ & & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$


を  $D_5^{(1)}$  型の一般カルタン行列として  $s_i(a_j) = a_j a_i^{-C_{ij}}$  が成り立つ。全ての頂点の  $y$  変数の積

$$q := y_1 y_2 y_3 y_4 y_1' y_2' y_3' y_4' = a_0 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5$$

は  $W(D_5^{(1)})$  で不変となり、零ルートに対応する。乗法的ルート変数をパラメタと看做せば、ワイル群作用 (8) の離散力学系としての次元は  $8 - 6 = 2$  に等しい。例えば「従属変数」 $f_1, f_2$  を

$$f_1 = \left( \frac{y_1 y_1'}{y_3 y_3'} \right)^{1/4}, \quad f_2 = \left( \frac{y_4 y_4'}{y_2 y_2'} \right)^{1/4}$$

で導入すると、それらと乗法的ルート変数への作用は次のように閉じた形で書ける。

$$s_i(a_j) = a_j a_i^{-C_{ij}}, \\ \sigma_1(a_{(0,1,2,3,4,5)}) = \frac{1}{a_{(5,4,3,2,1,0)}}, \quad \sigma_2(a_{(0,1,2,3,4,5)}) = \frac{1}{a_{(1,0,2,3,4,5)}}, \\ \frac{s_2(f_2)}{f_2} = a_2^{1/2} \frac{f_1 + a_0^{1/4} a_1^{-1/4} a_2^{-1/2}}{f_1 + a_0^{1/4} a_1^{-1/4} a_2^{1/2}}, \quad \frac{s_3(f_1)}{f_1} = a_3^{-1/2} \frac{f_2 + a_3^{1/2} a_4^{1/4} a_5^{-1/4}}{f_2 + a_3^{-1/2} a_4^{1/4} a_5^{-1/4}}, \\ \sigma_1(f_{(1,2)}) = f_{(2,1)}, \quad \sigma_2(f_2) = \frac{1}{f_2}$$

これは坂井 [12] による有理曲面の代数幾何に由来したワイル群作用と一致する<sup>5</sup>。拡大アフィン・ワイル群  $\tilde{W} = \langle s_i (0 \leq i \leq 5), \sigma_1, \sigma_2 \rangle$  の平行移動部分  $\ell = (\sigma_1 \sigma_2 s_2 s_0 s_1 s_2)^2$  から生ずる 2 次元の離散力学系が、 $q$ - $P_{VI}$  と呼ばれる  $q$ -差分パンルヴェ方程式に他ならない。

同様の方法で様々なディンキン図形に対応したワイル群作用が構成できる。本節では 2 つの 2 サイクルが「蝶番」で繋がれた籠  $Q_0 = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$  を基礎として、各頂点に「複製」を 1 つ付け加えた籠  $Q$  から  $D_5^{(1)}$  を得たが、替わりに付け加える「複製」の個数

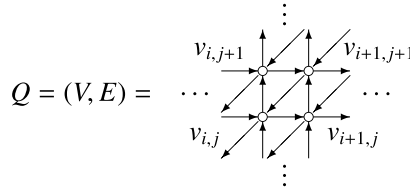
<sup>5</sup>坂井 [12] は射影平面の 9 点ブローアップとその退化を考えて、 $E_8^{(1)}$  型の楕円差分方程式を頂点とする 2 次元の離散パンルヴェ系の一族を幾何学的に構成した。

を任意に選ぶことで論文 [13] のワイル群作用が再現される<sup>6</sup>。また任意の個数の 2 サイクルを「蝶番」で数珠繋ぎにした籠を基礎とし、付け加える「複製」の個数も任意に選ぶことで津田-竹縄 [14] の与えたある有理代数多様体上のワイル群作用が再現される<sup>7</sup>。

**註.** 上記の籠  $Q$  から  $q$ - $P_{VI}$  が導出できることは、大久保 [9, 10] による離散ソリトン方程式と団代数についての一連の研究の中で発見された<sup>8</sup>。また Bershtein–Gavrylenko–Marshakov の論文 [1] は「団可積分系」の非自励化を介して、2次元の全ての  $q$ -差分パンルヴェ系（および、その背景のアフィン・ワイル群対称性）を団代数から導出する画期的なものである。反面これらの結果において、籠とディンキン図形との対応は漠然としていた。本稿の 2 節と 3 節に整備した「閉路グラフに付随する鏡映変換」の一般論は、従来の結果に自然な解釈を許すのみならず、様々なワイル群の双有理表現を統一的に構成する枠組みを与えている。

## 4.2 高次元の例

$m, n$  を 2 以上の整数とする。頂点集合が  $V = \{v_{i,j} \mid i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$  で、有向辺集合が  $E = \{v_{i,j} \rightarrow v_{i+1,j}, v_{i,j} \rightarrow v_{i,j+1}, v_{i+1,j+1} \rightarrow v_{i,j}\}$  で与えられた円環面上の籠



を考える。籠  $Q$  は長さ  $n$  の「縦方向の閉路」  $C_i^v = (v_{i,1} \rightarrow v_{i,2} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{i,n} \rightarrow v_{i,1})$  ( $i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ) と長さ  $m$  の「横方向の閉路」  $C_j^h = (v_{1,j} \rightarrow v_{2,j} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{m,j} \rightarrow v_{1,j})$  ( $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) を部分グラフとして含む。また  $m, n$  が互いに素でない場合には、その最大公約数を  $g \geq 2$  として長さ  $\ell := mn/g$  の「斜め方向の閉路」  $C_k^d = (v_{k,0} \rightarrow v_{k-1,-1} \rightarrow v_{k-2,-2} \rightarrow \cdots \rightarrow v_{k-\ell+1,-\ell+1} \rightarrow v_{k,0})$  ( $k \in \mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$ ) も含んでいる。定理 6 の条件 (W) が満たされていることから、籠  $Q$  はこれらの縦・横・斜め 3 種類の閉路に付随する鏡映

$$s_i^\Delta = R_{C_i^\Delta}, \quad \Delta = v, h, d$$

で不変であることが分かる。

以下では、簡単のため  $m, n \geq 3$  の場合を考えよう<sup>9</sup>。各  $\Delta = v, h, d$  ごとに閉路  $C_i^\Delta$  と  $C_j^\Delta$  は、 $|i-j| = 1$  のとき隣接し、 $|i-j| \geq 2$  のとき互いに接続する辺を持たない。また  $\Delta \neq \Delta'$  のとき、

<sup>6</sup>例えば  $Q_0 = (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$  の頂点 1 に 2 つ、頂点 3 に 5 つ「複製」を付け加えた籠からは  $E_8^{(1)}$  型の  $q$ -差分パンルヴェ方程式が得られる。

<sup>7</sup>このワイル群作用は、高次元の  $q$ -差分パンルヴェ系の幾何学的な起源の 1 つである。実際、増田 [8] はここから  $D_4^{(1)}$  型の高階  $q$ -差分パンルヴェ方程式と呼ぶべき新しい系列を導出した。

<sup>8</sup>大久保 [10] は離散 KdV 方程式に対応する無限グラフに周期条件を課すことで  $q$ - $P_{VI}$  に対応する籠  $Q$  を得た。その他のいくつかの  $q$ -差分パンルヴェ方程式についても同様の構成が為されている。

<sup>9</sup> $m$  または  $n$  が 2 の場合は  $A_1^{(1)}$  型のアフィン・ワイル群が現れる。

任意の  $i, j$  に対し  $C_i^\Delta$  と  $C_j^{\Delta'}$  は交叉している。よって命題 11 と命題 13 から鏡映の満たす基本関係式

$$\begin{aligned}(s_i^\Delta)^2 &= (s_i^\Delta \circ s_{i+1}^\Delta)^3 = \text{id} \quad (\forall i; \forall \Delta) \\ s_i^\Delta \circ s_j^\Delta &= s_j^\Delta \circ s_i^\Delta \quad (|i-j| \geq 2; \forall \Delta) \\ s_i^\Delta \circ s_j^{\Delta'} &= s_j^{\Delta'} \circ s_i^\Delta \quad (\forall i, j; \Delta \neq \Delta')\end{aligned}$$

が得られる。各  $\Delta = v, h, d$  ごとに  $\{s_i^\Delta\}$  は  $A_r^{(1)}$  型のアフィン・ワイル群  $W(A_r^{(1)})$  ( $r = m-1, n-1, g-1$ ) を生成し、それらの作用は互いに可換である。即ち  $Q$  を不変に保つ群  $G_Q$  について

$$G_Q \supset W = \langle s_i^v, s_i^h, s_i^d \rangle \simeq W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)}) \times W(A_{g-1}^{(1)})$$

が分かる。

頂点  $v_{i,j}$  の  $y$  変数を  $y_{i,j}$  とおくと、双有理変換  $s_i^\Delta$  の具体形は命題 9 から次のようになる。

$$(9) \quad s_i^v \text{ の作用: } \quad s_i^v(y_{i,j}) = \frac{F_{i,j-1}}{y_{i,j-1}F_{i,j+1}}, \quad s_i^v(y_{i+1,j}) = \frac{s_i^v(y_{i-1,j-1})}{y_{i+1,j}} = \frac{s_i^v(y_{i-1,j-1})}{y_{i-1,j-1}} = \frac{y_{i,j-1}F_{i,j}}{F_{i,j-1}}$$

$$(10) \quad s_j^h \text{ の作用: } \quad s_j^h(y_{i,j}) = \frac{G_{i-1,j}}{y_{i-1,j}G_{i+1,j}}, \quad s_j^h(y_{i,j+1}) = \frac{s_j^h(y_{i-1,j-1})}{y_{i,j+1}} = \frac{s_j^h(y_{i-1,j-1})}{y_{i-1,j-1}} = \frac{y_{i-1,j}G_{i,j}}{G_{i-1,j}}$$

$$(11) \quad s_k^d \text{ の作用: } \quad s_k^d(y_{i+k,i}) = \frac{H_{i+k+1,i+1}}{y_{i+k+1,i+1}H_{i+k-1,i-1}}, \quad s_k^d(y_{i+k,i+1}) = \frac{s_k^d(y_{i+k+1,i})}{y_{i+k,i+1}} = \frac{s_k^d(y_{i+k+1,i})}{y_{i+k+1,i}} = \frac{y_{i+k+1,i+1}H_{i+k,i}}{H_{i+k+1,i+1}}$$

その他の記していない変数への作用は自明である。ここで  $y$  変数の多項式  $F_{i,j}, G_{i,j}, H_{i,j}$  を

$$F_{i,j} = \sum_{a=1}^n \prod_{b=0}^{a-1} y_{i,j+b}, \quad G_{i,j} = \sum_{a=1}^m \prod_{b=0}^{a-1} y_{i+b,j}, \quad H_{i,j} = \sum_{a=1}^{\ell} \prod_{b=0}^{a-1} y_{i-b,j-b}$$

と定めた。定理としてまとめておこう。

**定理 14.** 双有理変換 (9)–(11) は  $A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)} \times A_{g-1}^{(1)}$  型のアフィン・ワイル群  $W$  の生成元  $s_i^v, s_j^h, s_k^d$  の有理函数体  $\mathbb{Q}(\{y_{i,j} \mid i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\})$  上の実現を与える。

**註.** 上記の内 (9), (10) の部分は、山田 [15] および梶原–野海–山田 [7] による  $W(A_{m-1}^{(1)}) \times W(A_{n-1}^{(1)})$  の作用<sup>10</sup>と (適当な変数変換を介して) 等価である。斜めの閉路に付随する鏡映 (11) の出現は、団代数を用いた 1 つの利点であろう。アフィン・ワイル群の平行移動部分からは  $q\text{-}P_{IV}$ ,  $q\text{-}P_V$  およびその高階化が得られることは論文 [7] に述べられた通りである。また  $m=2$  かつ  $n$  が 4 以上の偶数の場合、(11) も含んだ今回の構成法に基づいて、全く同じ籠  $Q$  から  $q\text{-}$ ガルーニエ系など種々の  $q\text{-}P_{VI}$  の高階化も得られることが大久保–鈴木 [11] に報告されている<sup>11</sup>。

<sup>10</sup> 離散戸田方程式や幾何学的  $R$  行列の文脈にも現れる可積分系の分野では馴染み深い対象である。尚、2 節末の註にも述べた通り、井上–Lam–Pylyavskyy [6] は  $Q$  において縦方向の周期条件のみを課したような円筒上の籠の団代数から、 $m$  次対称群  $\mathfrak{S}_m \simeq W(A_{m-1})$  の作用を構成している。

<sup>11</sup> 離散ソリトン方程式の観点から、 $q\text{-}P_{VI}$  の高階化が  $Q$  から生ずること自体は [10] 以来予見されていた。

**謝辞** 本研究の共同研究者である大久保直人氏と増田哲氏, および団代数について様々な議論や有益な助言を頂いた井上玲氏, 鈴木貴雄氏, 寺嶋郁二氏に厚く感謝いたします。

## 参考文献

- [1] Bershtein, M., Gavrylenko, P., Marshakov, A.: Cluster integrable systems,  $q$ -Painlevé equations and their quantization. *J. High Energy Phys.* **2018**, 077 (33pp)
- [2] Bucher, E.: Maximal green sequences for cluster algebras associated to the  $n$ -torus. arXiv:1412.3713
- [3] Fomin, S., Zelevinsky, A.: Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.* **143**, 112–164 (2007)
- [4] Goncharov, A., Shen, L.: Donaldson-Thomas transformations of moduli spaces of  $G$ -local systems. *Adv. in Math.* **327**, 225–348 (2018)
- [5] Inoue, R., Ishibashi, T., Oya, H.: Cluster realization of Weyl groups and higher Teichmüller theory. arXiv:1902.02716
- [6] Inoue, R., Lam, T., Pylyavskyy, R.: On the cluster nature and quantization of geometric  $R$ -matrices. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **55**, 25–78 (2019)
- [7] Kajiwara, K., Noumi, M., Yamada, Y.: Discrete dynamical systems with  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  symmetry. *Lett. Math. Phys.* **60**, 211–219 (2002)
- [8] Masuda, T.: A  $q$ -analogue of the higher order Painlevé type equations with the affine Weyl group symmetry of type  $D$ . *Funkcial. Ekvac.* **58**, 405–430 (2015)
- [9] Okubo, N.: Discrete integrable systems and cluster algebras. *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **B41**, 25–41 (2013)
- [10] Okubo, N.: Bilinear equations and  $q$ -discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras. *J. Phys. A* **48**, 355201 (2015) (25pp)
- [11] Okubo, N., Suzuki, T.: Generalized  $q$ -Painlevé VI systems of type  $(A_{2n+1} + A_1 + A_1)^{(1)}$  arising from cluster algebra. arXiv:1810.03252
- [12] Sakai, H.: Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.* **220**, 165–229 (2001)
- [13] Tsuda, T.: Tropical Weyl group action via point configurations and  $\tau$ -functions of the  $q$ -Painlevé equations. *Lett. Math. Phys.* **77**, 21–30 (2006)
- [14] Tsuda, T., Takenawa, T.: Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties. *Adv. Math.* **221**, 936–954 (2009)
- [15] Yamada, Y.: A birational representation of Weyl group, combinatorial  $R$ -matrix and discrete Toda equation. *Physics and Combinatorics 2000: Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop*. World Scientific, 2001, pp. 305–319