

✿ 日本数学会

2016年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2016年9月

於 関西大学

✿ 日本数学会

2016年度秋季総合分科会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2016年9月

於 関西大学

無 限 可 積 分 系

9月15日(木) 第VI会場

10:15~12:00		(分)	頁
1	伊藤 雅彦 (東京電機大未来) 野海 正俊 (神戸大理)	Gustafson–Rakha 和公式の楕円化	(15) 1
2	池田 亜瑞沙 (青学大理工) 増田 哲 (青学大理工)	A 型 q -Painlevé 系とその拡張について	(15) 3
3	増田 哲 (青学大理工)	$A_2^{(1)}$ および $A_3^{(1)}$ 型 q -Painlevé 系の超幾何解	(15) 5
4	神谷 亮 (東大数理) 神吉 雅崇 (関西大システム理工) 時弘 哲治 (東大数理) 間瀬 崇史 (東大数理)	2次元離散戸田方程式の擬似可積分拡張	(15) 7
5	筧 三郎 (立教大理) 上岡 修平 (京大情報) 片山 陽介 (立教大理) 太田 泰広 (神戸大理)	Jeu de taquin slide と離散2次元戸田方程式	(15) 9
6	山根 英司 (関西学院大理工)	離散非線型シュレーディンガー方程式の漸近解析	(15) 11

14:15~15:15

7	野邊 厚 (千葉大教育)	$A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異と離散戸田格子	(15) 13
8	中島 俊樹 (上智大理工) K. C. Misra (North Carolina State Univ.)	Affine geometric crystal of $A_n^{(1)}$ and limit of Kirillov–Reshetikhin perfect crystals	(15) 15
9	尾角 正人 (阪市大理) 坂本 玲峰 (東京理大理) A. Schilling (UC Davis) T. Scrimshaw (Univ. of Minnesota)	D 型のパスと織装配位の全単射	(15) 17
10	国場 敦夫 (東大総合文化) V. Mangazeev (Australia Nat. Univ.) 丸山 翔也 (東大理) 尾角 正人 (阪市大理)	Stochastic R matrix for $U_q(A_n^{(1)})$	(15) 19

15:30~16:30 特別講演

	茂木 康平 (東京海洋大海洋工)	可解格子模型の分配関数と対称多項式	21
--	------------------	-------------------------	----

9月16日(金) 第VI会場

10:15~11:45

11	高木 太一郎 (防衛大) 吉川 拓真 (防衛大)	共形場理論における一般化された Wick の定理と Borchers 恒等式	(15) 43
12	高崎 金久 (近畿大理工) 中津 了勇 (摂南大理工)	Closed topological vertex の量子ミラー曲線と q -差分型 Kac–Schwarz 作用素	(15) 45

13 小寺 諒介 (京大数理研)* Cherednik algebras and quantized Coulomb branches (15) 47
 中島 啓 (京大数理研)

14 池田 岳 (岡山理大理) Pieri rule for the K -theoretic P -functions (15) 49

15 I. Ip (京大理) Positive representations of split real quantum groups (15) 51

13:00~14:00 特別講演

疋田 辰之 (京大数理研)^b On the cohomology of conical symplectic resolutions 53

Gustafson–Rakha 和公式の楕円化

伊藤 雅彦 (東京電機大学・未来科学部)

野海 正俊 (神戸大学・理)

本講演では, Gustafson–Rakha の和公式 [1, Theorem 1.2] の楕円化として, Spiridonov [3, p. 953] の予想した和公式の証明を与える. Gustafson–Rakha の和公式は \mathfrak{S}_n 対称性を有するものの「ちょっと変わった」公式である. この公式も BC_n 型の楕円超幾何和公式 [2] の場合と同様に, q 差分 de Rham 理論と補間函数の枠組みで証明可能である. ここでは, 底 $p \in \mathbb{C}^*$ ($|p| < 1$) に関する乗法的テータ函数及び q 階乗の以下の記号を用いる.

$$\sigma(u) = u^{-\frac{1}{2}}\theta(u; p), \quad \theta(u; p) = (u; p)_\infty (p/u; p)_\infty, \quad (u; p) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - p^i u),$$

$$\sigma(u)_k = \sigma(u)\sigma(pu)\cdots\sigma(p^{k-1}u) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Gustafson–Rakha 和公式の楕円化. 変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$, パラメータ t, a_1, a_2, a_3, a_4 , 及び自然数 N について次の楕円多重和 $J_{n,N}(x)$ を考える. 記号 $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ とし,

$$J_{n,N}(x) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}^n \\ |\lambda| = N}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(q^{\lambda_i - \lambda_j} x_i / x_j)}{\sigma(x_i / x_j)} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(tx_i x_j)^{\lambda_i + \lambda_j}}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \sigma(qx_i / x_j)^{\lambda_i}} \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^4 \sigma(tx_i a_l)^{\lambda_i}.$$

定理

$\xi = x_1 \cdots x_n$ とおき, 平衡条件 $q^N t^{n+2} \xi^2 a_1 \cdots a_4 = q$ を課すと, 上記の和は n の偶奇に応じて次のように因子化する.

$$J_{n,N}(x) = \begin{cases} (-1)^N \frac{\sigma(t^r \xi)^N}{\sigma(q)_N} \prod_{1 \leq k < l \leq 3} \sigma(t^{r+1} \xi a_k a_l)_N & (n \text{ が偶数のとき, } n = 2r), \\ (-1)^N \frac{\sigma(t^{r+2} \xi a_1 a_2 a_3)^N}{\sigma(q)_N} \prod_{k=1}^3 \sigma(t^{r+1} \xi a_k)_N & (n \text{ が奇数のとき, } n = 2r + 1). \end{cases}$$

証明の手順. 以下, A_{n-1} 型のルート $\epsilon_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$ ($1 \leq i < j \leq n$) による p シフトを記号 $T_{p,x}^{\epsilon_{ij}} = T_{p,x_i} T_{p,x_j}^{-1}$ で表す. 上記定理は次の 3 段階の議論で証明することができる.

- (1) $J_{n,N}(x)$ が, q シフト $T_{q,x}^{\epsilon_{ij}}$ に関して不変であることを示す: $T_{q,x}^{\epsilon_{ij}} J_{n,N}(x) = J_{n,N}(x)$.
- (2) $J_{n,N}(x)$ が, p シフト $T_{p,x}^{\epsilon_{ij}}$ に関して不変であることを示す: $T_{p,x}^{\epsilon_{ij}} J_{n,N}(x) = J_{n,N}(x)$.
- (3) x をうまく特殊化することにより $J_{n,N}(x)$ の値を決定する.

この (1), (2) が示されると, 制約条件 $x_1 \cdots x_n = \xi$ (定数) の下で $J_{n,N}(x)$ は x に依存しないことが分かる. そこで $J_{n,N}(x)$ を計算しやすい特別な x を選んで $J_{n,N}(x)$ の値が上記の因子で書けることを示すのが (3) である. (2) は $J_{n,N}(x)$ の擬周期性を直接分析することで確認できる. また (3) に関しては x の単純な特殊化を見つけることができるので, 以下では証明の鍵となる (1) を q 差分 de Rham 理論と補間函数の枠組みで説明する.

Jackson 和表示. 指数函数 $e(v) = e^{2\pi\sqrt{-1}v}$ に対し, $e(\eta) = u, e(\delta) = q$ なる η, δ を用いて, $\sigma(u)$ に付随する楕円ガンマ函数 $G(u)$ を $G(u) = e(-\frac{\delta}{2}(\frac{\eta}{2}))\Gamma(u; p, q)$ で定義する. ただし $\Gamma(u; p, q) = (pq/u; p, q)_\infty / (u; p, q)_\infty, (u; p, q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - p^i q^j u)$. このとき $\sigma(u) = G(qu)/G(u)$ である. この記法で函数 $\Phi(z; x)$ と差積 $\Delta(z)$ を以下のように定める.

$$\Phi(z; x) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} G(tz_i z_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n G(qz_i / x_j)} \prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^4 G(tz_i a_l), \quad \Delta(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(z_i / z_j).$$

$z_1 \cdots z_n = \zeta$ のもとで一般に函数 $f(z)$ に対して格子上の和を $\int_x f(z) \varpi_q(z) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^n \\ |\lambda| = N}} f(q^\lambda x)$

本研究は科研費 [課題番号: (C)25400118, (B)15H03626] の助成を受けたものである.

によって定める. $x_1 \cdots x_n = \xi$ のもとで $\zeta = q^N \xi$ とおけば, $J_{n,N}(x)$ の Jackson 和表示 $J_{n,N}(x) = \frac{1}{\Phi(x; x) \Delta(x)} \int_x \Phi(z; x) \Delta(z) \varpi_q(z)$ を得る. (1) の証明には, 一般性を失うことなく $i = 1, j = n$ のときの q シフト $T_{q,x}^{\epsilon_{1n}}$ のみを考察すればよい. (1) の q シフト不変性『平衡条件 $t^{n+2} \xi \zeta a_1 \cdots a_n = q$ のもとで, $T_{q,x}^{\epsilon_{1n}} J_{n,N}(x) = J_{n,N}(x)$ 』において $x_n \rightarrow qx_n$ の置き換えをすると, 『条件 $t^{n+2} \xi \zeta a_1 \cdots a_n = 1$ のもとで, $T_{q,x_1} J_{n,N}(x) = T_{q,x_n} J_{n,N}(x)$ 』となる. これを Jackson 和表示から計算して, 結局 (1) は, 条件 $t^{n+2} \xi \zeta a_1 \cdots a_n = 1$ のもとで

$$\int_x \left(\varphi_{1n}(x; z) - \varphi_{n1}(x; z) \right) \Delta(z) \Phi(z; x) \varpi_q(z) = 0, \quad (a)$$

と同値になる. ただし $\varphi_{ij}(x; z) = \prod_{k=1}^n \sigma(x_i/z_k) \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i,j}} \sigma(tx_k x_j) \prod_{l=1}^n \sigma(ta_l x_j)$.

式 (a) を示すために次の補題が使われる.

補題 (基本恒等式). $f_{kl}(z; x) = \sigma(uz_k z_l/x_1) \sigma(vz_k z_l/x_n) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k,l}} \sigma(z_i/x_1) \sigma(z_i/x_n)$ とし, $\Delta_{kl}(z) = \Delta(z_1, \dots, \widehat{z}_k, \dots, \widehat{z}_l, \dots, z_n)$ とする. (記号 \widehat{z}_k はその座標を除くの意味.) $F(z)$ を

$$F(z) = \sum_{1 \leq k < l \leq n} (-1)^{l-k-1} f_{kl}(z; x) \left(\varphi_{kl}(z; x) - \varphi_{lk}(z; x) \right) \Delta_{kl}(z) \quad (b)$$

とし, 条件 $t^{n+2} \xi \zeta a_1 \cdots a_n = 1$ と $uv = t\xi/\zeta$ を課すと, $F(z)$ は以下のように展開される.

$$F(z) = \frac{\sigma(tx_1/u) \sigma(tx_n/v)}{\sigma(x_n/x_1)} \left(\varphi_{1n}(x; z) - \varphi_{n1}(x; z) \right) \Delta(z). \quad (c)$$

注. $\int_x f_{kl}(z; x) \left(\varphi_{kl}(z; x) - \varphi_{lk}(z; x) \right) \Delta_{kl}(z) \Phi(z; x) \varpi_q(z) = 0$ が q 差分 de Rham 理論から容易に導けるため, (b) より $\int_x F(z) \Phi(z; x) \varpi_q(z) = 0$ であり, (c) より (a) が導かれる.

さて, 上記補題を示すためには次の補間関数 $E_k(x; z)$ が使われる.

補間関数. $\zeta \in \mathbb{C}^*$ を定数として固定し, $(\mathbb{C}^*)^n$ の超曲面 $H_{n,\zeta} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid z_1 \cdots z_n = \zeta\}$ 上の正則関数 $f(z)$ で, z_1, \dots, z_n に関して \mathfrak{S}_n 不変, かつ擬周期性の条件 $T_{p,z}^{\epsilon_{ij}} f(z) = f(z) (pz_i/z_j)^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq n$) を満たすものの全体を $\mathcal{H}_{n,\zeta}$ と表す. すなわち,

$$\mathcal{H}_{n,\zeta} = \left\{ f(z) \in \mathcal{O}(H_{n,\zeta})^{\mathfrak{S}_n} \mid T_{p,z}^{\epsilon_{ij}} f(z) = f(z) (pz_i/z_j)^{-1} \ (1 \leq i < j \leq n) \right\}.$$

$x_1 \cdots x_n = \xi$ とするとき,

$$E_k(x; z) = \frac{\prod_{i=1}^n \sigma(z_i/x_k)}{\sigma(\zeta/\xi) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \sigma(x_i/x_k)} \quad (k = 1, \dots, n)$$

と定義すると, z の関数 $E_k(x; z)$ は \mathbb{C} 線形空間 $\mathcal{H}_{n,\zeta}$ の基底をなし, $E_k(x; x^{(l)}) = \delta_{kl}$ ($k, l = 1, \dots, n$) を満たす. ただし $x^{(l)}$ は $x^{(l)} = (x_1, \dots, x_{l-1}, x_l/\xi, x_{l+1}, \dots, x_n) \in H_{n,\zeta}$ で与えられる点. 特に $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{n,\zeta} = n$.

注. (b) の $F(z)$ について擬周期性を計算すると $F(z)/\Delta(z) \in \mathcal{H}_{n,\zeta}$ が分かり, $F(z)/\Delta(z)$ は $E_k(x; z)$ ($k = 1, \dots, n$) の線形結合で書ける. 特に $E_k(x; x^{(l)}) = \delta_{kl}$ の性質を使うと, 以下のように線形結合が 2 項からなることが確かめられる. すなわち以下の右辺が (c) を与える.

$$\frac{F(z)}{\Delta(z)} = \frac{F(x^{(1)})}{\Delta(x^{(1)})} E_1(x; z) + \frac{F(x^{(n)})}{\Delta(x^{(n)})} E_n(x; z).$$

参考文献

- [1] R.A. Gustafson and M.A. Rakha: q -Beta integrals and multivariate hypergeometric series associated to root systems of type A_m , Ann. Comb. **4** (2000), 347–373.
- [2] M. Ito and M. Noumi: Derivation of a BC_n elliptic summation formula via the fundamental invariants, to appear in Constr. Approx., pp.1–14. First online: 13 May 2016. (See also arXiv1504.17018)
- [3] V.P. Spiridonov: Theta hypergeometric integrals, St. Petersburg Math. J. **15**(2004), 929–967.

A型 q -Painlevé 系とその拡張について

池田亜瑞沙 (青山学院大学 理工学部)

増田 哲 (青山学院大学 理工学部)*1

命題 1 $n \geq 3$ とする. 変数 $\varepsilon_i, f_i, \tau_i$ ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) および q を用意し, 変換 s_i ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), π および ι を,

$$\begin{aligned} s_i(\varepsilon_i) &= q^{-1}\varepsilon_{i+1}, & s_i(\varepsilon_{i+1}) &= q\varepsilon_i, & s_i(\varepsilon_j) &= \varepsilon_j \quad (j \neq i, i+1), \\ \pi(\varepsilon_i) &= \varepsilon_{i+1}, & \iota(\varepsilon_i) &= \varepsilon_{1-i}, \\ s_i(f_{i+1}) &= f_{i+1} + q \frac{\varepsilon_i - q^{-1}\varepsilon_{i+1}}{f_i}, & s_i(f_{i-1}) &= f_{i-1} - \frac{\varepsilon_i - q^{-1}\varepsilon_{i+1}}{f_i}, \\ s_i(f_j) &= f_j \quad (j \neq i \pm 1), & \pi(f_i) &= f_{i+1}, & \iota(f_i) &= f_{-i}, \\ s_i(\tau_j) &= \tau_j \quad (i \neq j), & s_i(\tau_i) &= f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, & \pi(\tau_i) &= \tau_{i+1}, & \iota(\tau_i) &= \tau_{-i}, \\ s_i(q) &= \pi(q) = q, & \iota(q) &= q^{-1} \end{aligned}$$

で定める. このとき, これらは拡大アフィン Weyl 群

$$W = \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) \rtimes \langle \iota \rangle, \quad \widetilde{W}(A_{n-1}^{(1)}) = \langle s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \pi \rangle$$

の実現を与える. すなわち, 基本関係

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1, & s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1}, & \pi^n &= \iota^2 = 1, & \iota \pi &= \pi^{-1} \iota, \\ \pi s_i &= s_{i+1} \pi, & \iota s_i &= s_{-i} \iota \end{aligned}$$

が成り立つ.

注釈 これらは, $q = 1$ のとき, 野海 - 山田系 [2, 1] の拡大アフィン Weyl 群対称性に帰着する. そこでは, $\alpha_i := \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ が単純ルートの役割を果たしていた.

さて, 変数 a_i ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) を用意し, 拡大アフィン Weyl 群 W の作用を

$$\begin{aligned} s_i(a_i) &= a_i^{-1}, & s_i(a_{i\pm 1}) &= a_{i\pm 1} a_i, & s_i(a_j) &= a_j \quad (j \neq i, i \pm 1), \\ \pi(a_i) &= a_{i+1}, & \iota(a_i) &= a_{-i}^{-1} \end{aligned}$$

で定める. このとき,

$$q = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}, \quad \varepsilon_i = \prod_{k=0}^{n-1} a_{i+k}^{(n-1)/2-k}$$

としても, 整合的である. また, $n = 5$ のとき, これらは $A_4^{(1)}$ 型 q -Painlevé 系 [3] の対称形式を与える.

キーワード: 高階 q -Painlevé 系, アフィン Weyl 群, Jacobi-Trudi 公式

*1 e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

上でも述べたように、命題 1 で与えた Weyl 群の作用は、野海 - 山田による加法的な双有理作用に、パラメータ q を入れて変形したものである。このような変形をしても、文献 [1] と同様の議論を進めることができ、Weyl 群の変数 τ_i への作用に付随して現れる特殊多項式の Jacobi-Trudi 型明示公式を構成することができる。

平行移動演算子 T_i ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) を $T_1 = \pi s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_1$ および $\pi T_j = T_{j+1} \pi$ で導入しよう。多重指数 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して、 $\tau_\nu = T_1^{\nu_1} \cdots T_n^{\nu_n}(\tau_0)$ とする。

命題 2 任意の $\nu \in \mathbb{Z}^n$ に対し、

$$\tau_\nu = \phi_\nu \tau_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_0} \right)^{\nu_1} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{\nu_2} \cdots \left(\frac{\tau_0}{\tau_{n-1}} \right)^{\nu_n}$$

と表せる。ここで、 ϕ_ν は $a_i^{1/2}, f_i$ の有理函数である。

定義からは、 ϕ_ν 因子が $a_i^{1/2}, f_i$ の有理函数であることしかわからないが、実際には $a_i^{\pm 1/2}, f_i$ の \mathbb{Z} 係数多項式であり、Jacobi-Trudi 型の明示公式をもつ。

文献 [1] と同様に、命題 1 で与えた Weyl 群の作用をさらに一般化することができて、その場合にも、Jacobi-Trudi 型の明示公式を構成できる。講演では、一般化した場合について説明する。

参考文献

- [1] M. Noumi, Painlevé equations through symmetry, Translations of Mathematical Monographs, 223. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [2] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_i^{(1)}$, Funkcial. Ekvac., 41 (1998), 483-503.
- [3] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), no.1, 165-229.

\$A_2^{(1)}\$ および \$A_3^{(1)}\$ 型 \$q\$-Painlevé 系の 超幾何解

増田 哲 (青山学院大学 理工学部)*

我々は、野海、山田による \$A\$ 型 Weyl 群の双有理作用の 1-径数変形 (\$q\$-変形) を与えた [1]. 平行移動演算子の作用を離散時間発展と見做すことで、\$q\$-差分方程式系 (\$q\$-Painlevé 系) が得られる. 本講演では、\$A_2^{(1)}\$ および \$A_3^{(1)}\$ 型の場合を考察し、\$q\$-超幾何解で表される特殊解について述べる. 紙幅の都合上、ここでは、\$A_2^{(1)}\$ 型についての結果を概略のみ記す.

拡大アフィン Weyl 群 \$\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle\$ の変数 \$a_i, f_i\$ (\$i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\$) への作用は、

$$\begin{aligned} s_i(a_i) &= a_i^{-1}, & s_i(a_{i\pm 1}) &= a_{i\pm 1}a_i, & \pi(a_i) &= a_{i+1}, \\ s_i(f_{i+1}) &= f_{i+1} + q \frac{\varepsilon_i - q^{-1}\varepsilon_{i+1}}{f_i}, & s_i(f_{i-1}) &= f_{i-1} - \frac{\varepsilon_i - q^{-1}\varepsilon_{i+1}}{f_i}, \\ s_i(f_i) &= f_i, & \pi(f_i) &= f_{i+1} \end{aligned}$$

で与えられる. ここで、\$q = a_0a_1a_2\$ および \$\varepsilon_i = a_i a_{i+2}^{-1}\$ (\$i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\$) である.

平行移動演算子 \$T_1 = \pi s_2 s_1\$ の作用を離散時間発展と見做し、\$\bar{x} = T_1(x)\$ と記そう. 変数 \$a_i\$ への作用は \$T_1 : (a_0, a_1, a_2) \mapsto (qa_0, a_1/q, a_2)\$ で与えられるから、\$a_0\$ を (\$q\$-差分) 方程式系の独立変数、\$a_2\$ をパラメータと見做し、\$a_0 = t\$ と記す. 変数 \$f_i\$ への作用を書き下すと、

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 &= f_1 + \frac{qa_2^{-1}(t-t^{-2})}{f_0} - \frac{q^{-1}(a_2^2t - a_2^{-1}t^{-2})f_0}{f_2f_0 - a_2^{-1}(t-t^{-2})}, \\ \bar{f}_1 &= f_2 - \frac{a_2^{-1}(t-t^{-2})}{f_0}, \\ \bar{f}_2 &= \frac{f_2f_0 + t(a_2^2 - a_2^{-1})}{f_2f_0 - a_2^{-1}(t-t^{-2})}f_0 \end{aligned} \tag{1}$$

である.

まず、\$q\$-差分方程式系 (1) で、\$a_2 = 1\$ の場合を考えよう. このとき、

$$\bar{f}_2 = \frac{f_2f_0^2}{f_2f_0 - (t-t^{-2})}$$

であるから、\$f_2 = 0\$ と特殊化することが許される. すると、(1) は変数 \$f_0, f_1\$ に対する \$q\$-差分方程式系

$$\bar{f}_0 = f_1 + \frac{q(t-t^{-2})}{f_0} + q^{-1}f_0, \quad \bar{f}_1 = -\frac{t-t^{-2}}{f_0}$$

キーワード：高階 \$q\$-Painlevé 系, アフィン Weyl 群, \$q\$-超幾何関数

*e-mail: masuda@gem.aoyama.ac.jp

に帰着する. さらに, $\bar{f}_0 + q\bar{f}_1 = q^{-1}(f_0 + qf_1)$ であることがわかる. そこで, $c \in \mathbb{C}^\times$ として,

$$q^{-1}f_0 + f_1 = ct^{-1}$$

とできる. こうして, f_0 に対する離散 Riccati 方程式

$$\bar{f}_0 = \frac{q(t-t^{-2})}{f_0} + ct^{-1}$$

を得る.

命題 q -差分方程式系 (1) は, $a_2 = 1$ のとき, 特殊解

$$f_0 = \frac{q F(qt)}{t F(t)}, \quad f_1 = \frac{1-t^3/q^3 F(t/q)}{t F(t)}, \quad f_2 = 0$$

を持つ. ここで,

$$F(t) = c_1 t^{\log \rho_1 / \log q} \varphi_1 + c_2 t^{\log \rho_2 / \log q} \varphi_2, \quad \varphi_j = {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} 0, 0 \\ q^3 \rho_j^2 \end{matrix}; q^3; t^3 \right)$$

であり, ρ_1, ρ_2 は特性方程式 $\rho^2 - c\rho + 1 = 0$ の 2 根, c_1, c_2 は (少なくとも一方は 0 でない) 任意定数である.

Bäcklund 変換, 具体的には平行移動 $T_2 = s_1 \pi s_2$ を施すことで, 以下を得る.

命題 函数 $\sigma_n = \sigma_n(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を

$$\sigma_n(t) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ \det (F(q^{i+j-n-1}t))_{i,j=1}^n & n > 0 \end{cases}$$

で定める. q -差分方程式系 (1) は, $a_2 = q^{-n}$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) のとき, 特殊解

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{q^{n-1}t} \frac{\sigma_n(t/q)\sigma_{n+1}(qt)}{\sigma_{n+1}(t)\sigma_n(t)}, \\ f_1 &= \frac{1-q^{-3n-3}t^3}{q^{-2n}t} \frac{\sigma_n(t)\sigma_{n+1}(t/q)}{\sigma_n(t/q)\sigma_{n+1}(t)}, \\ f_2 &= \frac{1}{q^{n-2}t} \frac{\sigma_{n+1}(t)\sigma_{n-1}(t/q)}{\sigma_n(t)\sigma_n(t/q)} \end{aligned}$$

を持つ.

参考文献

- [1] A. Ikeda and T. Masuda, A q -deformation of discrete dynamical systems associated with the Weyl group of type A , to appear in Journal of Integrable Systems.

2次元離散戸田方程式の擬似可積分拡張

神谷 亮 (東大数理)*1
 神吉 雅崇 (関西大システム理工)*2
 時弘 哲治 (東大数理)
 間瀬 崇史 (東大数理)

概 要

擬似可積分性をもつ3次元格子上の離散方程式を紹介する。本方程式は2次元離散戸田方程式の指数部分の拡張によって得られる。

1. 導入

離散力学系の可積分性を判定する基準はいくつかあり、特に「特異点閉じ込めテスト」および「零代数的エントロピー」が有名である。一方Hietarinta-Viallet方程式のように特異点閉じ込めテストに通るものの、代数的エントロピーが正である系は多い。しかし、2次元以上の格子ではこのような系は有名ではなかった。離散力学系が擬似可積分性 (quasi-integrability) をもつとは、系が特異点閉じ込めテストに通る一方で、写像の合成によって得られる一般項について、初期値の有理式としての次数が指数増大することと定義する¹。本講演では3次元格子上の擬似可積分方程式を紹介する。本研究は離散KdV方程式の擬似可積分拡張に関する結果[1]に引き続く一般化である。

2. 擬似可積分2次元戸田方程式

紹介する方程式は、従属変数 τ および独立変数 $t, n, m \in \mathbb{Z}$ 、パラメータ $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+$ に対する

$$\tau_{t+1, n, m+1} \tau_{t-1, n+1, m} = (\tau_{t, n+1, m})^{k_1} (\tau_{t, n, m+1})^{k_2} + (\tau_{t, n, m})^{l_1} (\tau_{t, n+1, m+1})^{l_2} \quad (1)$$

である。(1)は2次元離散戸田方程式の τ 関数において指数部分を拡張したものである。(1)の発展は、 t について増加する方向に行く。初期値集合を $I = \{\tau_{0, n, m}, \tau_{1, n, m}\}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$)として、 $t \geq 2$ における $\tau_{t, n, m}$ を $t = 2, 3, \dots$ の順に決定する。本講演の主結果は以下である：

定理 1 4変数多項式 $(X^{k_1} Y^{k_2} + Z^{l_1} Z^{l_2})$ が \mathbb{Z} 上既約であるとする。このとき方程式(1)の一般項は初期値のローラン多項式 $(\tau_{t, n, m} \in \mathbb{Z}[I, I^{-1}])$ であり、かつ既約である。また相異なる2項は互いに素である。

なお、 $X^{k_1} Y^{k_2} + Z^{l_1} Z^{l_2}$ が分解する場合でも「相異なる2項は互いに素」の部分は成立すると予想される。定理1により(1)は「互いに素条件」を満たすことが分かった。証

本研究は科研費(課題番号:15H06128)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 39A20

キーワード: integrability test, pseudo-integrability, quasi-integrability

*1 〒153-8914 東京都目黒区駒場3-8-1

e-mail: kamiya@ms.u-tokyo.ac.jp

*2 〒564-8680 大阪府吹田市山手町3-3-3 5

¹ 常差分系以外では代数的エントロピーは定義されないが、ある直線方向を指定することで、次数の増大度を観察することはできる。

明は煩雑である。互いに素条件は、特異点閉じ込めテストの代数的な解釈から生じ、各種境界条件下の離散戸田方程式を含む離散系の可積分性の判定基準として用いられている [2]。また、簡約により 1 次元離散戸田方程式の擬似可積分拡張

$$\tau_{t+1,n}\tau_{t-1,n} = (\tau_{t,n})^k + (\tau_{t,n-1})^{l_1}(\tau_{t,n+1})^{l_2}, \quad (k, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_+) \quad (2)$$

が得られ、式 (2) の互いに素条件も同様に証明できる：

定理 2 3変数多項式 $(X^k + Y^{l_1}Z^{l_2})$ は \mathbb{Z} 上既約であるとする。このとき (2) について $\tau_{n,t}$ は初期値 $\{\tau_{0,n}, \tau_{1,n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の既約ローラン多項式であり、相異なる 2 項は互いに素である。

さらなる簡約により Somos-4 数列 $x_{n+4}x_n = x_{n+3}x_{n+1} + x_{n+2}^2$ の擬似可積分拡張

$$x_{n+4}x_n = x_{n+3}^l x_{n+1}^m + x_{n+2}^k, \quad (l, m, k \in \mathbb{Z}_+) \quad (3)$$

を導出でき、(3) について下記の互いに素命題が成立する：

命題 1 3変数多項式 $(X^l Y^m + Z^k)$ は \mathbb{Z} 上で既約であるとする。このとき (3) の項 x_n は x_0, x_1, x_2, x_3 の既約ローラン多項式であり、かつ $x_n, x_m (n \neq m)$ は互いに素である。

証明は比較的容易である。

3. 結論と展望

擬似可積分性をもつ離散力学系の紹介を行った。方程式 (1) は 3 次元格子上の方程式系としては初めての例と考えられる。今後さらに擬似可積分性をもつ離散系の例を多く挙げるとともに、統一的な観点からそれらを分類することを目標としたい。また現状では、互いに素条件の証明は系に応じた技術が必要であり、機械的に証明するための基礎理論の整備も行いたい。擬似可積分性は、一般にカオス的な解軌道を持つことから、カオス理論との関連において、位相的エントロピー、リアプノフ指数などについても調査を行いたい。

参考文献

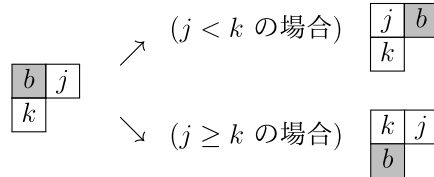
- [1] M. Kanki, T. Mase, T. Tokihiro: Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016) 23LT01 (9pp).
- [2] M. Kanki, J. Mada, T. Tokihiro: Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation, *J. Math. Phys.* **56** (2015) 022706 (22pp).

Jeu de taquin slide と離散2次元戸田方程式

笥 三郎 (立教大学理学部)
 上岡修平 (京都大学大学院情報学研究所)
 片山陽介 (立教大学大学院理学研究科)
 太田泰広 (神戸大学大学院理学研究科)

Schützenberger [1] によって導入された“jeu de taquin slide”とは、歪標準盤に対して、標準盤という性質を保ったまま変形していく操作であり、対称群の表現論との関係も深い[2, 3]。本研究の目的は、この jeu de taquin slide を離散可積分系の視点から眺めて、離散2次元戸田方程式[4, 5]との関連を明らかにすることである。

まずは jeu de taquin slide の操作方法について説明する[1, 2, 3]。λ, μ を λ ⊇ μ を満たすヤング図形として、歪ヤング図形 λ/μ を考える。箱 b ∈ μ において、b の右側、および下側がどちらも μ の箱でないとき、b を λ/μ の“inside corner”と呼ぶ。T を shape λ/μ の標準盤、b を λ/μ の inside corner のひとつとするとき、次のように数字をスライドさせていく。



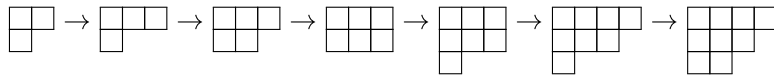
\boxed{b} の右側および下側に数字の入った箱がなくなったら \boxed{b} を取り除く。そうして得られる(歪)標準盤が jeu de taquin slide の結果であり、 $\text{jdt}_b(T)$ と表すことにする。例をひとつ挙げておこう。

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & 1 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \text{jdt}_b(T) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

歪標準盤 T に対し、“growth diagrams” $\{\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots); k = 0, 1, \dots, |\lambda/\mu|\}$ を次のように定める [2]:

$$\lambda^{(0)} = \mu, \quad \lambda^{(1)} = \mu \cup \boxed{1}, \quad \lambda^{(2)} = \mu \cup \boxed{1} \cup \boxed{2}, \quad \dots, \quad \lambda^{(|\lambda/\mu|)} = \lambda.$$

上の図の歪標準盤 T に対する growth diagrams は、次で与えられる:



定理 1. Shape λ/μ の歪標準盤 T に対し、μ の inside corner b をひとつ定め、 $\hat{T} = \text{jdt}_b(T)$ とする。さらに、 T, \hat{T} に対応する growth diagrams を、それぞれ $\{\lambda^{(k)}\}, \{\hat{\lambda}^{(k)}\}$ とする。このとき、次が成り立つ ($n = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, |\lambda/\mu|$):

$$\hat{\lambda}_n^{(k+1)} + \lambda_n^{(k)} = \max \left[\hat{\lambda}_n^{(k)}, \lambda_{n+1}^{(k+1)} \right] + \min \left[\lambda_n^{(k+1)}, \hat{\lambda}_{n-1}^{(k)} \right]. \quad (1)$$

本研究は科研費(課題番号: 23540252, 26610029, 16K05058, 16K05184)の助成を受けたものである。

関係式 (1) の naive な “逆超離散化”, すなわち, $\max\{x, y\} \mapsto x + y$, $x + y \mapsto x \cdot y$, $x - y \mapsto x/y$ と置き換えることを考えると, $\lambda_n^{(k)}$ に対応する変数を u_n^k と表すことにして,

$$\hat{u}_n^{k+1} u_n^k = \frac{\hat{u}_n^k + u_{n+1}^{k+1}}{1/u_n^{k+1} + 1/\hat{u}_{n-1}^k} \quad (2)$$

なる方程式が得られる。さらに $u_n^k = \delta^{2n} e^{-q_n(x,y)}$, $\hat{u}_n^k = \delta^{2n} e^{-q_n(x,y+\delta)}$, $x = x_0 + k\delta$ とおいて極限 $\delta \rightarrow 0$ を取ると, 2次元戸田方程式 (戸田場方程式)

$$\frac{\partial^2 q_n}{\partial x \partial y} + e^{-q_{n+1}+q_n} - e^{-q_n+q_{n-1}} = 0 \quad (3)$$

が得られる。この意味で, (2) を離散 2次元戸田方程式, (1) を超離散 2次元戸田方程式と呼ぶことにする。すなわち, jeu de taquin slide は超離散 2次元戸田方程式 (1) によって記述され, 離散 2次元戸田方程式 (2) は, jeu de taquin slide に対する “tropical combinatorics” [6, 7] の側の対応物を与えていることになる。Jeu de taquin slide を離散可積分系で記述する試みは [8] でも行われており, そこでも (1), (2) と類似の方程式が現れているが, 変数の取り方が異なっており, ここでの結果と完全には一致しない。

また, 離散 2次元戸田方程式 (2) は文献 [4] のものとは座標の取り方が異なっているが, それでも [4] とまったく同様にして行列式型の解を作ることができる。すると, その行列式の成分が jeu de taquin slide の初期値とどのように対応するかという問題が考えられる。今の場合は, [9] と同様の手法により, 行列式解の成分を, ある格子上的経路和として記述することができる。行列式解の詳細については, 講演の際に述べる予定である。

参考文献

- [1] M.P. Schützenberger, La correspondance de Robinson, In *Combinatoire et Représentation du Groupe Symétrique (Actes Table Ronde CNRS, Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976), Lecture Notes in Math.* **579** Springer, Berlin, (1977), 59–113.
- [2] S. Fomin, Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood-Richardson rule, Appendix 1 in: R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] W. Fulton, *Young tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [4] R. Hirota, Discrete two-dimensional Toda molecule equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987), 4285–4288.
- [5] R.S. Ward, Discrete Toda field equations, *Phys. Lett. A* **199** (1995), 45–48.
- [6] A.N. Kirillov, Introduction to tropical combinatorics, In: *Physics and Combinatorics, Proc. Nagoya 2000 2nd Internat. Workshop* (A.N. Kirillov, N. Liskova, eds.), World Scientific, Singapore (2001), pp. 82–150.
- [7] M. Noumi and Y. Yamada, Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, *Adv. Stud. Pure Math.* **40** (2004), 371–442.
- [8] 三上優, Skew Young 盤の jeu de taquin slide と超離散 KP 方程式の関係, 神戸大学大学院修士論文 (平成 18 年 3 月, 指導教員 太田泰広).
- [9] 上岡修平, 平面分割と直交多項式, 数理解析研究所講究録 **1986** (2015), pp. 108–120.
- [10] S. Kakei, S. Kamioka, Y. Katayama, and Y. Ohta, Jeu de taquin slide and discrete 2-dimensional Toda equation, in preparation.

離散非線型シュレーディンガー方程式の漸近解析

山根英司 (やまね ひでし) (関西学院大学)*

可積分離散非線型シュレーディンガー方程式

Ablowitz and Ladik によって導入された focusing な可積分離散非線型シュレーディンガー方程式 (IDNLS)

$$i \frac{d}{dt} R_n + (R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1}) + |R_n|^2 (R_{n+1} + R_{n-1}) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (1)$$

について考える。これは $iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0$ の離散版である。逆散乱法で解ける。ラックス形式には n -part と t -part がある。 n -part から、ポテンシャル $\{R_n\}_n$ に関する散乱データ、すなわち固有値、規格化係数、反射係数が決まる。固有値は常に四つ組で現れる。

無反射の場合 (ソリトン解)

無反射の場合は (1) は (多重) ソリトン解を持つ。固有値の四つ組が一組しかない場合は 1-ソリトン解である。4 個のうちの 1 個を $z_1 = \exp(\alpha_1 + i\beta_1)$ ($\alpha_1 > 0$) と表す。規格化係数が $C_1(0)$ とすると、1-ソリトン解は次のような表示を持つ。

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \text{BS}(n, t; z_1, C_1(0)) = \frac{C_1(0)}{|C_1(0)|} \exp(-i[2\beta_1(n+1) - 2w_1t]) \\ &\quad \times \sinh(2\alpha_1) \text{sech}[2\alpha_1(n+1) - 2v_1t - \theta_1]. \\ v_1 &= -\sinh(2\alpha_1) \sin(2\beta_1), \quad w_1 = \cosh(2\alpha_1) \cos(2\beta_1) - 1, \\ \theta_1 &= \log |C_1(0)| - \log \sinh(2\alpha_1). \end{aligned}$$

指数関数で表される carrier wave と sech で表される traveling wave の積になっている。

$C_1(0)$ に何か他の定数を掛けると何が起きるか? その定数を極形式で表すとき、その偏角が carrier wave の phase shift を引き起こし、絶対値が traveling wave の phase shift を引き起こす。

Ablowitz et al. ([1]) によれば多重ソリトン解は $t \rightarrow \infty$ において漸近的に 1-ソリトンたちの和に分かれる。そのとき、上述のような phase shift が起きる。規格化定数に掛かる別の定数は、固有値たちで決まる。各 1-ソリトンにおいては、「自分」に対応する固有値と自分よりも速いソリトンに関する固有値だけが関係する。

反射がある場合

初期値のポテンシャルは $|n| \rightarrow \infty$ で急減少するとし、さらに generic な仮定を置いて、Deift-Zhou ([2]) の the method of nonlinear steepest descent を用いて、反射がある場合の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動を調べた。やはり、解は 1-ソリトンたちの和プラス小さい摂動項となる。反射係数が phase shift に影響する。ただし、その影響は $|n| < 2t$ に限られる。 $|n| \geq 2t$ における phase shift は無反射の場合と同じである。

本研究は科研費 (課題番号:26400127) の助成を受けたものである。

* 〒 669-1337 兵庫県三田市学園 2-1 関西学院大学理工学部数理科学科

e-mail: yamane@kwansei.ac.jp

web: <http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane> (講演のスライドをここに置く.)

Nonlinear steepest descent

$r(z)$ ($|z| = 1$) を初期値 $\{R_n(0)\}_n$ に関する反射係数とする. $\varphi = \frac{1}{2}it(z - z^{-1})^2 - n \log z$ と置く. $\{\pm z_j, \pm \bar{z}_j^{-1}\}$ を固有値の四つ組, $C_j(t)$ を時刻 t における規格化定数とする (初期から計算できる). このとき, 次のような極付きの Riemann-Hilbert 問題を考える.

$$m_+(z) = m_-(z)v(z) \text{ on } |z| = 1,$$

$$v(z) = \begin{bmatrix} 1 + |r(z)|^2 & e^{-2\varphi}\bar{r}(z) \\ e^{2\varphi}r(z) & 1 \end{bmatrix}$$

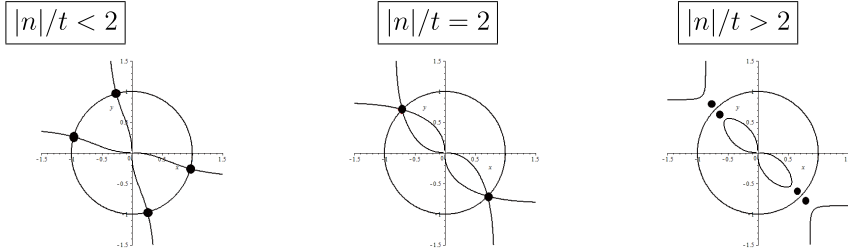
$$\text{Res}(m(z); \pm z_j) = \lim_{z \rightarrow \pm z_j} m(z) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z_j^{-2n} C_j(t) & 0 \end{bmatrix}, \forall j,$$

$$\text{Res}(m(z); \pm \bar{z}_j^{-1}) = \lim_{z \rightarrow \pm \bar{z}_j^{-1}} m(z) \begin{bmatrix} 0 & \bar{z}_j^{-2n-2} \bar{C}_j(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall j.$$

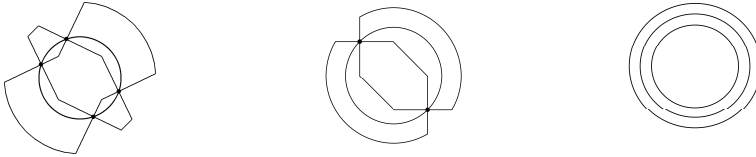
$$m(z) \rightarrow I \text{ as } z \rightarrow \infty.$$

$R_n(t)$ は $m(z) = m(z; n, t)$ から計算できる. φ の鞍点 (あるいは高次の停留点) に注目して経路の $|z| = 1$ をうまく変形すれば $R_n(t)$ の漸近挙動が分かる. $|n| < 2t$ のときは4個の鞍点が円 $|z| = 1$ 上にある. $|n| = 2t$ のときは2個ずつの鞍点が重なって, 高次の停留点となる. $|n| > 2t$ のときは円の内部・外部に鞍点が2個ずつある. このように幾何学的状況が異なるため, 各場合で異なった経路の変形を行う.

下の3つの図で, 黒丸は鞍点 (停留点) を表し, 曲線は $\text{Im} \varphi(z) = 0$ である.



上の図の曲線 $\text{Im} \varphi(z) = 0$ を避けて steepest descent path を描く.



参考文献

- [1] M. J. Ablowitz, B. Prinari and A. D. Trubatch, *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] P. A. Deift and X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, *Ann. of Math.*(2), **137**(2) (1993), 295-368.
- [3] H. Yamane, Long-time asymptotics for the integrable discrete nonlinear Schrödinger equation: the focusing case, arXiv:1512.01760.

$A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異と離散戸田格子

野邊 厚 (千葉大学教育学部)*

初期種子 $\Sigma_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, B_0)$ をもつ $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数 \mathcal{A} を考える：

$$\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y}_0 = (y_1, y_2), \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、 \mathbf{x}_0 はクラスター、 \mathbf{y}_0 は係数、 B_0 は交換行列である。また、係数体は y_1, y_2 の生成するトポカル半体 $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, y_2)$ とする。辺が1または2のラベルをもつ正則二分木 \mathbb{T}_2 の頂点 t_m と種子 $\Sigma_m = (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, B_m)$ ($m \in \mathbb{Z}$) との対応を \mathcal{A} のクラスターパターンという。ただし、頂点 $t_m, t_{m'}$ $\in \mathbb{T}_2$ がラベル $k \in \{1, 2\}$ をもつ辺で結ばれているとき、対応する種子どうしは k 方向の変異 μ_k で互いに移り合うものとする。

いま、クラスターパターン $t_m \rightarrow \Sigma_m = (\mathbf{x}_m, \mathbf{y}_m, B_m)$ が与えられているとする。このとき、クラスター \mathbf{x}_m の変異

$$\mathbf{x}_m = (x_{1;m}, x_{2;m}) \xrightarrow{\mu_1} \mathbf{x}_{m+1} = (x_{1;m+1}, x_{2;m+1}) \xrightarrow{\mu_2} \mathbf{x}_{m+2} = (x_{1;m+2}, x_{2;m+2})$$

は、適当な変数変換により、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の写像力学系 (QRT 写像 [2]) として実現される。

命題 1 変数 z^t および w^t を次のようにおく：

$$z^t := \frac{x_{1;2t}}{(y_1 y_2)^t}, \quad w^t := \frac{x_{2;2t}}{(y_1 y_2)^t} \quad (t \geq 1), \quad z^0 := \frac{x_1}{y_1 (y_2)^2}, \quad w^0 := \frac{x_2}{y_2}.$$

このとき、変異の合成 $\mu_2 \circ \mu_1$ は次の行列 A_{CA}, B_{CA} の定める QRT 写像 $\varphi_{CA} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (z^t, w^t) \mapsto (z^{t+1}, w^{t+1}) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ である。

$$A_{CA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1^2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 y_2^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{CA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z^{t+1} = \frac{y_1 y_2^2 (w^t)^2 + 1}{y_1^2 y_2^3 z^t}, \quad w^{t+1} = \frac{y_1^2 y_2^3 (z^{t+1})^2 + 1}{y_1 y_2^2 w^t}$$

また、 φ_{CA} の不変曲線は次で与えられる (λ は φ_{CA} の保存量)：

$$y_1 y_2^2 w^2 + \lambda z w + y_1^2 y_2^3 z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

QRT 写像の不変曲線は一般に楕円曲線であるが、(1) は 2 次曲線であるため、 φ_{CA} の楕円曲線の加法としての幾何学的構造は見えていないことに注意しよう。

次に、 $\mathbf{I} = (I_1, I_2)$ 、 $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ とおき、最低次元 (4 次元) の周期離散戸田格子 $\chi_1 : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4; (\mathbf{I}, \mathbf{V}) \mapsto (\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{V}})$ を考える：

$$\bar{I}_i + \bar{V}_{i-1} = I_i + V_i, \quad \bar{I}_i \bar{V}_i = I_{i+1} V_i$$

本研究は科研費 (課題番号:26400107) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 37K10, 14T05, 37K20, 37B15

キーワード：クラスター代数、離散戸田格子、QRT 写像

* 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33 千葉大学教育学部数学教室

e-mail: nobe@faculty.chiba-u.jp

ここで、添え字は mod 2 で考えるものとする。周期離散戸田格子 χ_1 は、楕円曲線をスペクトル曲線にもち、その時間発展はスペクトル曲線上の点の加法として実現できる。一方、QRT 写像は楕円曲線の加法の定める写像力学系の一般的形式であるため、 χ_1 を QRT 写像として実現可能である。

命題 2 周期離散戸田格子 χ_1 の初期値を $\mathbf{I}^0 = (I_1^0, I_2^0)$, $\mathbf{V}^0 = (V_1^0, V_2^0)$ とし

$$a := I_1^0 I_2^0 - V_1^0 V_2^0, \quad b := -V_1^0 V_2^0, \quad c_1 := I_1^0 + I_2^0 + V_1^0 + V_2^0$$

$$z^t := \frac{1}{V_2^t (I_2^t + V_1^t)}, \quad w^t := \frac{1}{V_2^t}$$

とおく。このとき、 χ_1 は次の行列 $A_{\text{TL}}, B_{\text{TL}}$ の定める QRT 写像 $\varphi_{\text{TL}} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と等価である：

$$A_{\text{TL}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\text{TL}} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$z^{t+1} = \frac{-(bz^t + 1)(w^t)^2}{b(bz^t + 1)(w^t)^2 - (a - b)z^t}, \quad w^{t+1} = \frac{a(z^{t+1})^2 + z^{t+1}}{(bz^{t+1} + 1)w^t}$$

また、 φ_{TL} の不変曲線は次式で与えられ、 c_1 が φ_{TL} の保存量となる：

$$bzw^2 + w^2 - bc_1 z^2 w - c_1 zw + az^2 + z = 0 \quad (2)$$

ここで、周期離散戸田格子 χ_1 が $A_1^{(1)}$ 型 Lie 代数に関連すること [3] を思い出すと、上に述べた二つの QRT 写像 φ_{CA} と φ_{TL} との間に何かしらの関係があることが期待される。実際、パラメータ a, b および y_1, y_2 を適切にとることで、これらの QRT 写像は関係づけられる [4]。

定理 1 $\xi, \eta, a \in \mathbb{C}$ とし、 $b = 0$ と仮定する。また

$$y_1 = a^2 \xi, \quad y_2 = 1/a\xi$$

とおく。このとき、 $n \geq 0$ に対し、次が成り立つ：

$$\xi \varphi_{\text{TL}}^{2n}(\xi, \eta) = x^{(n)} \varphi_{\text{CA}}^n(\xi, \eta)$$

ただし、 $x^{(n)}$ は $\varphi_{\text{CA}}^n(\xi, \eta)$ の x 成分とする。

この定理から、 $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異を楕円曲線 (2) 上の点の加法の退化極限として理解することができる。

参考文献

- [1] Fomin S and Zelevinsky A 2002 *J. Amer. Math. Soc.* **15** 497-529
- [2] Quispel G R W, Roberts J A G and Thompson C J 1989 *Physica D* **34** 183-92
- [3] Suris Y B 2003 “The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach” (Basel: Birkhäuser)
- [4] Nobe A 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 285201

Affine Geometric Crystal of $A_n^{(1)}$ and Limit of Kirillov-Reshetikhin Perfect Crystals

中島 俊樹 (上智大学理工学部)

Kailash C. Misra (North Carolina State University)

1. Geometric Crystal

G (resp. $\mathfrak{g} = \langle e_i, f_i, h_i \rangle_{i \in I}$) を symmetrizable generalized Cartan 行列 $(a_{ij})_{i,j \in I}$ で定義される Kac-Moody 群 (resp. Lie 代数) とし、 $W(\mathfrak{g})$ を付随する Weyl 群とする。 $x_i(c) = \exp(ce_i)$, $y_i(c) = \exp(cf_i)$ ($c \in \mathbb{C}$), $\alpha_i^\vee(c) := c^{h_i}$ ($c \in \mathbb{C}$) とする。

Definition 1. $(X, \{e_i\}_{i \in I}, \{\gamma_i\}_{i \in I}, \{\varepsilon_i\}_{i \in I})$ が G (or \mathfrak{g})-geometric crystal とは、次が成り立つこと: X は (ind-)代数多様体で $e_i : \mathbb{C}^\times \times X \rightarrow X$ は unital \mathbb{C}^\times -action, $\{1\} \times X \subset \text{dom}(e_i)$ ($\forall i \in I$), γ_i, ε_i は X 上の rational function, $\gamma_j(e_i^c(x)) = c^{a_{ij}} \gamma_j(x)$, $\varepsilon_i(e_i^c(x)) = c^{-1} \varepsilon_i(x)$, $\varepsilon_i(e_j^c(x)) = \varepsilon_i(x)$ if $a_{i,j} = a_{j,i} = 0$. そして、 $\{e_i\}$ は次の関係式を満たす:

$$\begin{aligned} e_i^{c_1} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1} && \text{if } a_{ij} = a_{ji} = 0, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1} && \text{if } a_{ij} = a_{ji} = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^2 c_2} e_i^{c_1} && \text{if } a_{ij} = -2, a_{ji} = -1, \\ e_i^{c_1} e_j^{c_1^3 c_2} e_i^{c_1^2 c_2} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} &= e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1^3 c_2} e_i^{c_1^2 c_2} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_1} && \text{if } a_{ij} = -3, a_{ji} = -1, \end{aligned}$$

Proposition 1 ([BK]). Geometric crystal $(X, \{e_i\}, \{\gamma_i\}, \{\varepsilon_i\})$ に対して $s_i(x) := e_i^{\gamma_i(x)^{-1}}(x)$ ($x \in X$) とおくと $\langle s_i | i \in I \rangle$ は X への Weyl 群 $W(\mathfrak{g})$ の rational action を与える。

Proposition 2 ([BK]). Positive geometric crystal χ に対して、ultra-discretization functor UD により crystal $UD(\chi)$ を得る。

2. [KNO] の予想

[KNO] において、次の予想を提示した。

Conjecture 1. アファインリー代数 \mathfrak{g} と Dynkin index $k \in I \setminus \{0\}$ に対して、positive geometric crystal $\mathcal{V}(\mathfrak{g})$, $\{e_i\}_{i \in I}$, $\{\gamma_i\}_{i \in I}$, $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ があって、その ultra-discretization $UD(\mathcal{V}(\mathfrak{g}))$ は Langlands dual \mathfrak{g}^L の perfect crystal のある coherent family の極限 B_∞ と同型である。

この予想は、 $k = 1$, $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, A_{2n-1}^{(2)}, A_{2n}^{(2)}, D_{n+1}^{(2)}$ の場合 [KNO] において正しいことが示されている。また、 $k = 1$, $\mathfrak{g} = G_2^{(1)}, D_4^{(3)}$ の場合にも予想が正しいことがわかっている。 $k > 1$ については、 $A_n^{(1)}$, $k = 2$ の場合のみ正しいことがわかっていた。今回 $A_n^{(1)}$ の場合に全ての k について、予想が正しいことが示された。

3. Affine Geometric Crystal $\mathcal{V}(A_n^{(1)})$

以下 $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ とする。 k 番目のレベル 0 基本 weight ϖ_k に対して $W(\varpi_k)$ ($1 \leq k \leq n$) を ${}_{n+1}C_k$ 次元の $A_n^{(1)}$ 型の基本表現とする。 $W(\varpi_k)$ の extremal weight μ に対して u_μ を対応する extremal weight vector とする。 $u_1 := u_{\varpi_k}$, $u_2 := u_{\sigma^{-1}\varpi_k}$ とおく。ここで、 σ は Dynkin diagram automorphism : $\sigma(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ ($i \in I$) である。affine geometric crystal

$\mathcal{V}(A_n^{(1)})$ を $W(\varpi_k)$ ($1 \leq k \leq n$) の中に構成するために、2種類の A_n 型 geometric crystal $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset W(\varpi_k)$ を定義する。

Translation $t(\varpi_k), t(\sigma^{-1}\varpi_k)$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} t(\varpi_k) &= \sigma^k(s_{k'}s_{k'-1} \cdots s_1)(s_{k'+1}s_{k'} \cdots s_2) \cdots (s_n s_{n-1} \cdots s_k), \\ t(\sigma^{-1}\varpi_k) &= \sigma^k(s_{k'-1} \cdots s_1 s_0)(s_{k'}s_{k'-1} \cdots s_1) \cdots (s_{n-1} \cdots s_{k-1}), \end{aligned}$$

ここで $k' = n+1-k$ である。 $w_1 := \sigma^{-k}t(\varpi_k) \in W$, $w_2 := \sigma^{-k}t(\sigma^{-1}\varpi_k) \in W$ とおく。これらの Weyl group elements $w_1, w_2 \in W$ に付随してセル $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset W(\varpi_k)$ を次のように定義する：2種類の変数 $x, y \in (\mathbb{C}^\times)^{kk'}$ は次で与える：

$$x = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} & \cdots & x_{k'}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k-1}^{(2)} & x_k^{(2)} & \cdots & x_{n-1}^{(2)} \\ x_k^{(1)} & x_{k+1}^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0^{(k)} & y_1^{(k)} & \cdots & y_{k'-1}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{k-2}^{(2)} & y_{k-1}^{(2)} & \cdots & y_{n-2}^{(2)} \\ y_{k-1}^{(1)} & y_k^{(1)} & \cdots & y_{n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}^\times)^{kk'},$$

$Y_i(c) := y_i(c^{-1})\alpha_i^\vee(c)$ として、次のようにおく：

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &:= \{v_1(x) := Y_{k'}(x_{k'}^{(k)}) \cdots Y_1(x_1^{(k)}) \cdots Y_n(x_n^{(1)}) \cdots Y_k(x_k^{(1)})u_1 \mid x \in (\mathbb{C}^\times)^{kk'}\}, \\ \mathcal{V}_2 &:= \{v_2(y) := Y_{k'-1}(y_{k'-1}^{(k)}) \cdots Y_0(y_0^{(k)}) \cdots Y_{n-1}(y_{n-1}^{(1)}) \cdots Y_{k-1}(y_{k-1}^{(1)})u_2 \mid y \in (\mathbb{C}^\times)^{kk'}\}. \end{aligned}$$

\mathcal{V}_1 は $\{1, 2, \dots, n\}$ に対応する A_n -geometric crystal, \mathcal{V}_2 は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ に対応する A_n -geometric crystal. この2つの geometric crystal の間に birational bi-positive map $\bar{\sigma} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ が構成される。この $\bar{\sigma}$ により \mathcal{V}_1 上に \mathcal{V}_2 の 0-structure が移植され、 \mathcal{V}_1 上に affine geometric crystal $\mathcal{V}(A_n^{(1)})$ が構成される ([MN])。

4. Limit of Kirillov-Reshetikhin Perfect Crystals $B^{k,\infty}$

$B^{k,l}$ ($1 \leq k \leq n, l \geq 1$) は $A_n^{(1)}$ 型 Kirillov-Reshetikhin module $W^{k,l}$ に対応する perfect crystal で、それらは coherent family をなす。その極限の crystal を $B^{k,\infty}$ と書く ([OSS]). 集合としては、

$$B^{k,\infty} := \left\{ (b_{ji})_{1 \leq j \leq k, j \leq i \leq j+k'} \left| b_{ji} \in \mathbb{Z}, \sum_{i=j}^{j+k'} b_{ji} = 0 \text{ for any } j \right. \right\}.$$

Theorem 1 ([MN]). Affine geometric crystal $\mathcal{V}(A_n^{(1)})$ の ultra-discretization $\mathcal{UD}(\mathcal{V}(A_n^{(1)}))$ は $B^{k,\infty}$ に同型である。

Corollary 1 ([MN]). 以上の結果の応用として、affine Weyl 群 $W(A_n^{(1)})$ の $\mathcal{V}(A_n^{(1)})$ 上の birational action と $B^{k,\infty}$ 上の piecewise-linear action を得る。

参考文献

- [BK] Berenstein A. and Kazhdan D., Geometric crystals and Unipotent crystals, GAFA 2000(Tel Aviv,1999), Geom Funct.Anal.2000, Special Volume, PartI, 188–236.
- [KNO] Kashiwara M., Nakashima T. and Okado M., Affine geometric crystals and limit of perfect crystals, Trans.Amer.Math.Soc., **360**, (2008), no.7, 3645–3686.
- [OSS] Okado M., Schilling A. Shimozono M., A tensor product theorem related to perfect crystals, J. Algebra **267** (2003), 212–245.
- [MN] Misra K.C. and Nakashima T., Affine geometric crystal of $A_n^{(1)}$ and limit of Kirillov-Reshetikhin perfect crystals, preprint.

D型のパスと臙装配位の全単射

尾角 正人 (阪市大理)
 坂本 玲峰 (東京理科大)
 Anne Schilling (カリフォルニア大デーヴィス校)
 Travis Scrimshaw (ミネソタ大)

パスとはKRクリスタルのテンソル積の最高ウェイト元であり、臙装配位 (RC) はベータ仮説から生まれた組合せ論的対象である [2, 4]. $X = M$ 予想はそれらの間に重みを保存する全単射が存在することを主張する [1]. D型の場合の $X = M$ 予想は [5] によって解決済みだが、今回A型で Kirillov-Schilling-Shimozono [3] が構成したような明示的なアルゴリズムをD型でも構成したので報告する [6].

1. KKR型アルゴリズム

$D_5^{(1)}$ 型の以下の例で全単射 Φ がどのように構成されているかを見る. クリスタルのテンソル積は反柏原ルールを使う.

$$b = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \in B^{3,2} \otimes B^{3,1} \otimes B^{2,2} \otimes B^{1,2} \otimes B^{1,1}$$

対応する RC は

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Φ は以下のパスでの操作の RC での対応物を構成することで帰納的に与えられる.

1.1. 列スプリット ls

左端の $B^{r,s}$ の元を $B^{r,1} \otimes B^{r,s-1}$ の元に対応させる.

$$b' = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \in (B^{3,1})^{\otimes 3} \otimes B^{2,2} \otimes B^{1,2} \otimes B^{1,1}$$

RC は不変である (γ). (ただし、真ん中の 3 行目の vacancy number は 2 になる)

1.2. 箱スプリット bs

左端の $B^{r,1}$ を $B^{1,1} \otimes B^{r-1,1}$ の元に対応させる.

$$b'' = \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \in B^{1,1} \otimes B^{2,1} \otimes (B^{3,1})^{\otimes 2} \otimes B^{2,2} \otimes B^{1,2} \otimes B^{1,1}$$

RC は以下のように変化する (β).

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 2 & & 1 \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

1.3. 箱削除 lh

左端の $B^{1,1}$ を削除する.

$$b''' = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \in B^{2,1} \otimes (B^{3,1})^{\otimes 2} \otimes B^{2,2} \otimes B^{1,2} \otimes B^{1,1}$$

RCは以下のように変化する (δ).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} 1 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ \hline 2 & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & & 0 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

2. 主結果

1. ls, lb, lh がそれぞれ γ, β, δ に対応するようなパスの集合から臙装配位の集合への全単射 Φ が存在する.
2. Φ をある involution θ で捻った $\tilde{\Phi} = \theta \circ \Phi$ のもとで, パスと臙装配位の重み (energy と charge) が保存される.
3. パスの側で組合せ R を施しても臙装配位は変化しない.

2 の帰結として D 型の場合の $X = M$ 予想の別証明が得られた. 箱玉系への応用のためには, この全単射の構成は重要である. 3 の帰結として Φ が D 型に付随する箱玉系の時間発展を線形化することが従う.

参考文献

- [1] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, MathPhys Odyssey 2001, 205–272, Prog. Math. Phys. **23**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [2] S. V. Kerov, A. N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, *Combinatorics, the Bethe ansatz and representations of the symmetric group*, Zap.Nauchn. Sem. (LOMI) **155** (1986) 50–64. (English translation: J. Sov. Math. **41** (1988) 916–924.)
- [3] A. N. Kirillov, A. Schilling and M. Shimozono, *A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002) no. 1, 67–135.
- [4] 国場敦夫, ベーテ仮説と組合せ論, 朝倉書店 (2011)
- [5] K. Naoi, *Fusion products of Kirillov-Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture*, Adv. Math., **231** 1546–1571 (2012).
- [6] M. Okado, R. Sakamoto, A. Schilling and T. Scrimshaw, *Type $D_n^{(1)}$ rigged configuration bijection*, arXiv:1603.08121.

Stochastic R matrix for $U_q(A_n^{(1)})$

国場敦夫 (東大総合文化)

Vladimir Mangazeev (オーストラリア国立大)

丸山翔也 (東大理)

尾角正人 (阪市大理)

1 Stochastic R matrix

n を自然数とし, 無限次元ベクトル空間 $W = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathbb{C}|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ を考える. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を用いて $|\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle$ を $|\alpha\rangle$ 等と略記し, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ とおく. q, λ, μ を generic なパラメータとする. $W \otimes W$ に作用する線形演算子 $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda, \mu)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= \sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{S}(\lambda, \mu)^{\gamma, \delta}_{\alpha, \beta} |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle, \\ \mathcal{S}(\lambda, \mu)^{\gamma, \delta}_{\alpha, \beta} &= \theta(\gamma + \delta = \alpha + \beta) \Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu), \\ \Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu) &= q^{\varphi_{\alpha, \beta} - \gamma, \gamma} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{|\gamma|} \frac{(\lambda; q)_{|\gamma|} (\frac{\mu}{\lambda}; q)_{|\beta| - |\gamma|}}{(\mu; q)_{|\beta|}} \prod_{i=1}^n \binom{\beta_i}{\gamma_i}_q. \end{aligned}$$

ここで $\varphi_{\alpha, \beta} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \beta_j$. 以下で用いる記号と併せて定義をまとめておく. $\theta(\text{true}) - 1 = \theta(\text{false}) = 0$, $(z; q)_m = \theta(m \geq 0) \prod_{j=1}^m (1 - zq^{j-1})$, $\binom{m}{k}_q = \theta(0 \leq k \leq m) \frac{(q; q)_m}{(q; q)_k (q; q)_{m-k}}$, $\alpha \geq \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

定義により $\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu)$ は $\beta \geq \gamma$ でない限り 0 である. $P \in \text{End}(W \otimes W)$ を成分の入れ換え $P(|u\rangle \otimes |v\rangle) = |v\rangle \otimes |u\rangle$ とし, $\check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) = PS(\lambda, \mu)$ とおく. $\mathcal{S}(\lambda, \mu)$, $\check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu)$ を Stochastic R matrix と呼ぶ.

定理 ([1]) Stochastic R matrix は以下の Yang-Baxter 方程式, 反転関係式, Sum-to-Unity 条件を満たす.

$$\mathcal{S}_{1,2}(\nu_1, \nu_2) \mathcal{S}_{1,3}(\nu_1, \nu_3) \mathcal{S}_{2,3}(\nu_2, \nu_3) = \mathcal{S}_{2,3}(\nu_2, \nu_3) \mathcal{S}_{1,3}(\nu_1, \nu_3) \mathcal{S}_{1,2}(\nu_1, \nu_2), \quad (1)$$

$$\check{\mathcal{S}}(\lambda, \mu) \check{\mathcal{S}}(\mu, \lambda) = \text{id}_{W \otimes W}, \quad (2)$$

$$\sum_{\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \mathcal{S}(\lambda, \mu)^{\gamma, \delta}_{\alpha, \beta} = 1 \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n). \quad (3)$$

$\mathcal{S}(\lambda, \mu) = \mathcal{S}(c\lambda, c\mu)$ は成立せず, Yang-Baxter 方程式 (1) は「差分性」を持たない. $n = 1$ の場合, 関数 $\Phi_q(\gamma|\beta; \lambda, \mu)$ は [2, 3] に登場し, 性質 (3) が指摘された [3]. 次節の文脈では全確率保存条件に相当する.

2 可積分 Markov 過程

定理の応用として, 周期的境界条件を持つ 1 次元格子上に可積分な Markov 過程を構成できる [1]. 離散時間および連続時間のバージョンがあり, 非対称な遷移確率を持つ n 種の粒子系として記述され, その Markov 行列は, 可解模型に擬えるならば, それぞれ 2 次元頂点模型の可換な転送行列と 1 次元スピン系の Hamiltonian に対応する. ここではスペースの都合上連続時間版に限って記述する.

これはマスター方程式 $\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = H|P(t)\rangle$ に従う $W^{\otimes L}$ 上の Markov 過程であり, その Markov 行列 H は $(i, i+1)$ 番目のサイトに働く局所 Markov 行列 h の和 $H = \sum_{i \in \mathbb{Z}_L} h_{i, i+1}$ である. $|P(t)\rangle$ の隣接サイトの状態を $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ とするとその作用は以下で定義される.

$$\begin{aligned} h(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) &= \epsilon a \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \frac{q^{\varphi_{\alpha-\gamma, \gamma}} \mu^{|\gamma|-1} (q)_{|\gamma|-1}}{(\mu q^{|\alpha|-|\gamma|}; q)_{|\gamma|}} \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\gamma_i}_q |\alpha - \gamma\rangle \otimes |\beta + \gamma\rangle \\ &+ \epsilon b \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} \frac{q^{\varphi_{\gamma, \beta-\gamma}} (q)_{|\gamma|-1}}{(\mu q^{|\beta|-|\gamma|}; q)_{|\gamma|}} \prod_{i=1}^n \binom{\beta_i}{\gamma_i}_q |\alpha + \gamma\rangle \otimes |\beta - \gamma\rangle - \epsilon \left(\sum_{i=0}^{|\alpha|-1} \frac{a q^i}{1 - \mu q^i} + \sum_{i=0}^{|\beta|-1} \frac{b}{1 - \mu q^i} \right) |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle. \end{aligned}$$

ここで $\epsilon = \pm 1, a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ である. \sum_{γ} は $0 < \gamma \leq \alpha$ ないし $0 < \gamma \leq \beta$ を満たす有限和となる. a, b に比例する遷移確率はそれぞれ $-\epsilon\mu^{-1} \left. \frac{\partial \Phi_q(\gamma|\alpha; \lambda, \mu)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1}$ と $\epsilon\mu \left. \frac{\partial \Phi_q(\beta-\gamma|\beta; \lambda, \mu)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\mu}$ に等しく, h は可換な転送行列の対数微分により Hamiltonian を導く所謂 Baxter 公式を $\lambda = 1$ と $\lambda = \mu$ で重ね合わせた行列になっている. Markov 行列 H のパラメータ依存性を明示して $H(\epsilon, a, b, q, \mu)$ と書くと $H(-\epsilon, a, b, q^{-1}, \mu^{-1}) = \mathcal{P}H(\epsilon, \mu b, \mu a, q, \mu)\mathcal{P}$ が成り立つ, 但し $\mathcal{P} \in \text{End } W^{\otimes L}$ はサイトの反転 $\mathcal{P}|\sigma_1, \dots, \sigma_L\rangle = |\sigma_L, \dots, \sigma_1\rangle$ である. $0 \leq q^\epsilon, \mu^\epsilon < 1$ のとき, H は Markov 行列の要請, (非対角成分の非負性と全確率保存条件) を満たす. H はこれまでに提唱された多くの可積分ゼロレンジ型確率過程 [3, 4, 5, 6, 7, 8] を含み, その固有値は Bethe ansatz で記述される.

3 起源

Drinfeld-Jimbo 量子アフィン代数 $U_q(A_n^{(1)})$ は, 生成元 $e_i, f_i, k_i^{\pm 1}$ ($i \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$) と関係式により定義される Hopf 代数で, その余積を $\Delta k_i^{\pm 1} = k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}$, $\Delta e_i = 1 \otimes e_i + e_i \otimes k_i$, $\Delta f_i = f_i \otimes 1 + k_i^{-1} \otimes f_i$ と定める. 自然数 l に対し, ベクトル空間 $V_l = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, |\alpha| \leq l} \mathbb{C}|\alpha\rangle$ 上に $U_q(A_n^{(1)})$ の l 階対称テンソル表現 $\pi_x^l : U_q(A_n^{(1)}) \rightarrow \text{End } V_l$ が定義される. x は spectral parameter である. x, y が generic の場合, テンソル積表現 $\pi_{x,y}^{l,m} := (\pi_x^l \otimes \pi_y^m) \circ \Delta$ は既約で $\pi_{y,x}^{m,l}$ と同型である. その intertwiner $\check{R}(z) = \check{R}^{l,m}(z) : V_l \otimes V_m \rightarrow V_m \otimes V_l$ は $z = \frac{x}{y}$ に依存し, $\check{R}(z)\pi_{x,y}^{l,m}(g) = \pi_{y,x}^{m,l}(g)\check{R}(z), \forall g \in U_q(A_n^{(1)})$ と規格化 $\check{R}(z)(|0, \dots, 0\rangle \otimes |0, \dots, 0\rangle) = |0, \dots, 0\rangle \otimes |0, \dots, 0\rangle$ により一意的に定まる. 量子 R 行列の成分を $P\check{R}(z)(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) = \sum_{\gamma, \delta} R(z)_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$ により定義する. 定理 (第 1 節) や可積分 Markov 過程の構成 (第 2 節) は以下の事実から導かれる.

命題 ([1]) $\eta = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (\delta_i \gamma_j - \alpha_i \beta_j)$ とおく, 但し $(\gamma_{n+1}, \beta_{n+1}) = (l - |\gamma|, m - |\beta|)$. $l < m$ のとき, 量子 R 行列 $\check{R}(z) = \check{R}^{l,m}(z)$ は $z = q^{l-m}$ において次の明示式を持つ.

$$q^n R(q^{l-m})_{\alpha, \beta}^{\gamma, \delta} = \theta(\gamma + \delta = \alpha + \beta) \Phi_{q^2}(\gamma|\beta; q^{-2l}, q^{-2m}).$$

参考文献

- [1] A. Kuniba, V. V. Mangazeev, S. Maruyama and M. Okado, Stochastic R matrix for $U_q(A_n^{(1)})$. arXiv:1604.08304.
- [2] V. Mangazeev, On the Yang-Baxter equation for the six-vertex model. Nucl. Phys. B **882** (2014) 70–96.
- [3] A. M. Povolotsky, On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states. J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 465205 (25pp).
- [4] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: I. Multiline process and combinatorial R . J. Integrable Systems in press.
- [5] A. Kuniba, S. Maruyama and M. Okado, Multispecies totally asymmetric zero range process: II. Hat relation and tetrahedron equation. arXiv:1602.04574.
- [6] I. Corwin and L. Petrov, Stochastic higher spin vertex models on the line. arXiv:1502.07374.
- [7] Y. Takeyama, Algebraic construction of multi-species q -Boson system. arXiv:1507.02033.
- [8] T. Sasamoto and M. Wadati, Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models. J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 6057–6071.

可解格子模型の分配関数と対称多項式

茂木康平 (東京海洋大学 海洋工学部)*

概 要

近年、可解格子模型の分配関数と対称多項式の対応に基づく、対称多項式の組合せ論的表現論の研究が発展している。本稿ではまず、代表的な可解格子模型である6頂点模型の波動関数と対称多項式の対応及び、5頂点模型への退化について議論する。また、この対応に基づく Grothendieck 多項式の Cauchy 公式、Littlewood 公式などの量子逆散乱法による導出について述べる。最後にボゾン模型や Felderhof 模型に関する話題について触れる。

1. はじめに

1次元量子可積分系は量子力学の誕生間もない頃の1931年、Bethe [1]によって行われた Heisenberg XXX 模型の導入と、現在では座標 Bethe 仮設法と呼ばれる手法による波動関数の構成に起源を発する。その後、2次元可解格子模型との対応や、量子逆散乱法(代数的 Bethe 仮設法)[2, 3, 4, 5]により、 R 行列(局所 Boltzmann 重率)が最も基本的な構成要素であることが認識されるようになり、その後の量子群の表現論の誕生、発展の礎となった[6, 7]。

R 行列が最も基本的な構成要素であるのは確かであるが(近年の四面体方程式の研究[8, 9, 10, 11]もあり、そうとも言い切れないかもしれないが)、一方で、量子可積分系や可解格子模型は元々、「解ける」多体系として導入された統計物理的对象である。統計物理や場の理論における最も重要な研究対象は分配関数であり、近年の数理物理の進展においても最も重要な役割を果たしている。可解格子模型の分野でも、1980年代には無限系の基底状態の分配関数とアフィンリー環の指標との対応[12, 13]、1990年代にはドメイン壁分配関数と呼ばれるクラスの分配関数から交代符号行列の数え上げ母関数が導出されることが見出された[14, 15, 16, 17, 18, 19]。また、古典可積分系の τ 関数との関係[20, 21, 22, 23]も見出されているが、分配関数の持つ数学的意味はまだ汲み尽くされていないように思われる。

その最も大きな理由は分配関数が大域的对象であり、計算が煩わしくて解析が困難、組合せ論、表現論の対象との関係が仮に予想できたとしてもその証明の糸口が全く見えなさそうだ、ということにあると思われるが近年、量子可積分系や量子情報理論の研究により発展してきた代数解析的手法、統計物理的手法を組合せ論と融合することによって、分配関数との対応に基づく対称多項式の研究が進展している。また、数え上げ幾何や保型関数論などの研究分野で導入されている組合せ論的对象の中には分配関数と事実上同一のものがあったり、分配関数を積極的に使う動きが近年あり、Hecke 代数が絡む代数分野において今後、重要な役割を果たすことが期待される。本稿ではこの研究の一端(主に[24, 25, 26]に基づく)について解説する。

まず、2節で6頂点模型、3節で波動関数を導入し、対称多項式との対応を与える。また、量子群のパラメータを0にした5頂点模型の極限で、波動関数に対応する対称多

* 〒 135-0044 東京都江東区越中島 2-1-6 東京海洋大学 海洋工学部 流通情報工学科 kmoteg0@kaiyodai.ac.jp 本研究は科研費[課題番号:基盤研究(C)16K05468 および 研究活動スタート支援 15H06218]の助成を受けたものである。

項式が Grassmann 多様体の Grothendieck 多項式で与えられることをみる。4節で波動関数と対称多項式の対応に関して、行列積の手法とドメイン壁分配関数に関する結果を組み合わせた証明を与える。このうち、ドメイン壁分配関数に関して必要な結果の証明は5節で与える。6節で、スカラー積の解析による Grothendieck 多項式に関する Cauchy 公式、Littlewood 公式、直交性の導出のアイデアを述べる。7節で親戚の模型であるボソン模型と Grothendieck 多項式の関係、8節でべき根の量子群の模型である Felderhof 模型と Schur 多項式の対応及び、双対 Cauchy 公式への応用について簡単に触れる。

なお、本研究内容は主に堺和光氏(東京理科大学)との共同研究に基づく。

2. 6頂点模型

可解格子模型で最も基本的な構成要素は、表現空間 W_a のテンソル積 $W_a \otimes W_b$ に作用する R 行列 $R(u)$ であり、Yang-Baxter 関係式

$$R_{ab}(u_1/u_2)R_{ac}(u_1)R_{bc}(u_2) = R_{bc}(u_2)R_{ac}(u_1)R_{ab}(u_1/u_2) \in \text{End}(W_a \otimes W_b \otimes W_c), \quad (1)$$

を満たす。 W_a として複素2次元ベクトル空間をとる。最も代表的な R 行列の1つとして、現在では $U_q(sl_2)$ R 行列 [6, 7] とも呼ばれているもの

$$R_{ab}(u) = \begin{pmatrix} u-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(u-1) & (1-t)u & 0 \\ 0 & 1-t & u-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u-t \end{pmatrix}, \quad (2)$$

がある。ここで、 t が量子群のパラメータ、 u がスペクトルパラメータに対応する。 W_a の正規直交基底 $\{|0\rangle_a, |1\rangle_a\}$ と双対正規直交基底 $\langle_a\langle 0|, \langle_a\langle 1|$ を使い、 R 行列の行列要素を ${}_a\langle\gamma|{}_b\langle\delta|R_{ab}(u)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b = [R(u)]_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ と表すと、 R 行列(2)は行列成分では具体的に

$${}_a\langle 0|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|0\rangle_a|0\rangle_b = u-t, \quad (3)$$

$${}_a\langle 0|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|0\rangle_a|1\rangle_b = t(u-1), \quad (4)$$

$${}_a\langle 0|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|1\rangle_a|0\rangle_b = (1-t)u, \quad (5)$$

$${}_a\langle 1|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|0\rangle_a|1\rangle_b = 1-t, \quad (6)$$

$${}_a\langle 1|{}_b\langle 0|R_{ab}(u)|1\rangle_a|0\rangle_b = u-1, \quad (7)$$

$${}_a\langle 1|{}_b\langle 1|R_{ab}(u)|1\rangle_a|1\rangle_b = u-t, \quad (8)$$

で与えられる。また、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ を満たさないとき、 $[R(u)]_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = 0$ である。この性質を ice rule や、total spin 保存条件などという。更に、Pauli の spin 演算子 σ^+, σ^- を、基底に

$$\sigma^+|1\rangle = |0\rangle, \quad \sigma^+|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\sigma^+ = \langle 1|, \quad \langle 1|\sigma^+ = 0, \quad (9)$$

$$\sigma^-|0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma^-|1\rangle = 0, \quad \langle 1|\sigma^- = \langle 0|, \quad \langle 0|\sigma^- = 0, \quad (10)$$

と作用する演算子として定義する。

Yang-Baxter 関係式 (1) は「RRR型」の Yang-Baxter 関係式であるが、次の「LLL型」の Yang-Baxter 関係式

$$R_{ab}(u_1/u_2)L_{aj}(u_1)L_{bj}(u_2) = L_{bj}(u_2)L_{aj}(u_1)R_{ab}(u_1/u_2) \in \text{End}(W_a \otimes W_b \otimes V_j), \quad (11)$$

を満たす L 演算子も、転送行列が可換な保存量の族を成すという意味での量子可積分性を保つため、数学的にも良い性質があると期待される。 L 演算子は表現空間のテンソル積 $W_a \otimes V_j$ に作用するが、2次元可解格子模型と1次元量子可積分系の対応から、空間 W は補助空間、 V は量子空間と呼ばれる。表現空間 V は必ずしも W と同じである必要はないが、ここでは V として、 W と同じく複素2次元ベクトル空間をとる。

RLL 関係式(11)で R として $U_q(sl_2)$ 行列(2)をとり、 L 演算子が未知であるとする、 RLL 関係式を L 演算子に関する方程式とみなすことができる。連立1次双次方程式を解くことにより、次の形の L 演算子

$$L_{aj}(u) = \begin{pmatrix} au + b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & atu + b & (1-t)cu & 0 \\ 0 & (1-t)d & eu + f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & eu + tf \end{pmatrix}, \quad (12)$$

が解であることがわかる [25]。但し、ここで、 a, b, c, d, e, f は関係式

$$(1-t)cd + af - be = 0, \quad (t^2 - t)cd + t^2af - be = 0, \quad (13)$$

を満たす定数(スペクトルパラメータに依らない)である。 $t \neq 1$ を仮定すると、関係式(13)は更に

$$cd + af = 0, \quad tcd + be = 0, \quad (14)$$

に簡約化される。

V_j の正規直交基底 $\{|0\rangle_j, |1\rangle_j\}$ と双対正規直交基底 $\{{}_j\langle 0|, {}_j\langle 1|\}$ を用い、 L 演算子の行列要素 ${}_a\langle \gamma|_j\langle \delta|L_{aj}(u)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_j = [L(u)]_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ は

$${}_a\langle 0|_j\langle 0|L_{aj}(u)|0\rangle_a|0\rangle_j = au + b, \quad (15)$$

$${}_a\langle 0|_j\langle 1|L_{aj}(u)|0\rangle_a|1\rangle_j = atu + b, \quad (16)$$

$${}_a\langle 0|_j\langle 1|L_{aj}(u)|1\rangle_a|0\rangle_j = (1-t)cu, \quad (17)$$

$${}_a\langle 1|_j\langle 0|L_{aj}(u)|0\rangle_a|1\rangle_j = (1-t)d, \quad (18)$$

$${}_a\langle 1|_j\langle 0|L_{aj}(u)|1\rangle_a|0\rangle_j = eu + f, \quad (19)$$

$${}_a\langle 1|_j\langle 1|L_{aj}(u)|1\rangle_a|1\rangle_j = eu + ft. \quad (20)$$

次節では L 演算子から波動関数と呼ばれるクラスの分配関数を導入し、(14)を満たす L 演算子(12)の波動関数と対称多項式の対応を与える。

3. 波動関数と対称多項式

局所的な L 演算子からより大域的な対象を、量子逆散乱法 [2, 3, 4, 5] の記法を用いて構成する。まず、モノドロミー行列 $T_a(u)$ を、 L 演算子を同一の補助空間に関して掛け合わせたものとして定義する。

$$T_a(u) = L_{aM}(u) \cdots L_{a1}(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}_a \in \text{End}(W_a \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_M). \quad (21)$$

モノドロミー行列の行列要素

$$A(u) = {}_a \langle 0|T_a(u)|0\rangle_a, \quad (22)$$

$$B(u) = {}_a \langle 0|T_a(u)|1\rangle_a, \quad (23)$$

$$C(u) = {}_a \langle 1|T_a(u)|0\rangle_a, \quad (24)$$

$$D(u) = {}_a \langle 1|T_a(u)|1\rangle_a, \quad (25)$$

は量子空間 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_M$ に作用する $2^M \times 2^M$ 行列である。 V の基底のうち、 $|0\rangle$ を粒子が無い状態(空孔)、 $|1\rangle$ を粒子のある状態であるとみなすと、 ice ruleにより、 B 演算子1つは量子空間の粒子が1個生成する役割を果たすことがわかる。従って B 演算子を N 回、真空と呼ばれる粒子のない状態 $|\Omega\rangle := |0^M\rangle := |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M$ に作用させた状態

$$|\psi(\{u\}_N)\rangle = B(u_N) \cdots B(u_1)|\Omega\rangle, \quad (26)$$

は N 粒子状態となる。この状態 (26) は off-shell Bethe ベクトルと呼ばれることが多い。ここで、「off-shell」とは、スペクトルパラメータ u_j ($j = 1, \dots, N$) 達の間 Bethe 方程式と呼ばれる拘束条件を課していないという意味である。Bethe 方程式をスペクトルパラメータに課すことにより、(26) は Hamiltonian などの母関数である転送行列 $t(u) := \text{Tr}_a T_a(u) = A(u) + D(u)$ の固有ベクトルとなる。

次に波動関数を、off-shell Bethe ベクトル $|\psi(\{u\}_N)\rangle$ と粒子の配位ベクトル $|x_1 \cdots x_N\rangle = \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j} |\Omega\rangle$ ($1 \leq x_1 < \cdots < x_N \leq M$) の内積

$$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = \langle x_1 \cdots x_N | B(u_N) \cdots B(u_1) | \Omega \rangle, \quad (27)$$

として定義する。

L 演算子を1つ定める毎に、波動関数が定まることに注意する。 L 演算子 (12), (14) に対し、波動関数 (27) が次の u_j ($j = 1, \dots, N$) に関する対称多項式で与えられることを次節で証明する。

定理 1

L 演算子 (12), (14) に対し、波動関数 (27) は次の u_j ($j = 1, \dots, N$) に関する対称多項式

$$\begin{aligned} \langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(au_j+b)^M}{eu_j+f} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + f}{au_{\sigma(j)} + b} \right)^{x_j}, \end{aligned} \quad (28)$$

で与えられる。

(28) の右辺の表示では一見、 u_j が対称変数になっているのを見るのは難しいが、これは左辺 $\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = \langle x_1 \cdots x_N | B(u_N) \cdots B(u_1) | \Omega \rangle$ を u_1, \dots, u_N の関数とみなし、 B 演算子が互いに可換 $[B(u_j), B(u_k)] = 0$ であることに注意すると、 u_j に関して対称であることがわかる。

L 演算子 (12) のパラメータ a, b, c, d, e, f は拘束条件 (14) を満たす必要がある。特に次の特殊化 $a = 1, b = t\beta, c = 1, d = 1, e = -\beta^{-1}, f = -1$ が重要であると思われる。 L 演算子を行列表示で具体的に書くと、

$$L_{aj}(u) = \begin{pmatrix} u + t\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(u + \beta) & (1-t)u & 0 \\ 0 & 1-t & \beta^{-1}u - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta^{-1}u - t \end{pmatrix}, \quad (29)$$

であるが、このときの波動関数 (28) は

$$\begin{aligned} \langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)u_j(u_j + t\beta)^M}{-\beta^{-1}u_j - 1} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ &\times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{-\beta^{-1}u_{\sigma(j)} - 1}{u_{\sigma(j)} + t\beta} \right)^{x_j}, \quad (30) \end{aligned}$$

となるが、更に量子群のパラメータ t を $t = 0$ とおくことにより、Grothendieck 多項式で表されることがわかる。

$$\begin{aligned} \langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{u_j^{M+1}}{-\beta^{-1}u_j - 1} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{-u_k}{u_j - u_k} \\ &\times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{-u_{\sigma(k)}}{u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N (-\beta^{-1} - u_{\sigma(j)}^{-1})^{x_j} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{u_j^M}{-\beta^{-1}u_j - 1} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{u_k - u_j} \\ &\times \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^N u_j^j \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)}}{u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N (-\beta^{-1} - u_{\sigma(j)}^{-1})^{x_j} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^N u_j^M (-\beta^{-1}u_j - 1)^{-1}}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (u_k - u_j)} \det_N(u_j^k (-\beta^{-1} - u_j^{-1})^{x_k}) \\ &= (-\beta)^{-N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^M G_\lambda(\mathbf{z}; \beta). \quad (31) \end{aligned}$$

ここで、 $G_\lambda(\mathbf{z}; \beta)$ は Grassmann 多様体 $Gr(M, N)$ の β -Grothendieck 多項式であり [27, 28, 29, 30, 31, 32]、次の行列式表示を持つ。

$$G_\lambda(\mathbf{z}; \beta) = \frac{\det_N(z_j^{\lambda_k + N - k} (1 + \beta z_j)^{k-1})}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j - z_k)}. \quad (32)$$

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (31) において、Grothendieck 多項式の対称変数 $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_N\}$ と、波動関数を構成する B 演算子のスペクトルパラメータ u_1, \dots, u_N は、関係 $z_j = -\beta^{-1} - u_j^{-1}$, $j = 1, \dots, N$ で結ばれている。また、Young 図形 $\lambda =$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ ($M - N \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$) は、波動関数を構成する粒子の配位ベクトル $|x_1 \cdots x_N\rangle$ ($1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq M$) から変換 $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1$, $j = 1, \dots, N$ によって得られる。

この波動関数と Grothendieck 多項式の対応を更に調べると、excited Young 図形 [30] と呼ばれる、Schubert calculus において導入された組合せ論の対象は、波動関数にゼロでない寄与をする内部状態と事実上同等であることがわかる。可解格子模型の言葉で記述する利点としては、上でみたように、量子群のパラメータを $t = 0$ とした極限の波動関数として Grothendieck 多項式が出現することが理解される点や、代数解析の手法、統計物理的手法を導入して解析することが可能になる点が挙げられる。また、BCD 型 Grassmann 多様体の K 理論的構造層の多項式代表である K 理論的 Schur Q , P 関数の excited Young 図形による記述 [30] も、 L 演算子に加えて反射方程式を満たすある K 行列を更に導入し、境界条件を変更することによって実現される波動関数に読み替えることができることに注意しておく。

定理 1 を証明する前に、同様の対応関係を以下、列挙する。定理 1 の対応と共に、後々 Grothendieck 多項式の Cauchy 公式や直交性を導出するのに用いられる。

定理 2

L 演算子 (12), (14) に対し、以下の波動関数は次の u_j ($j = 1, \dots, N$) に関する対称多項式

$$\begin{aligned} \langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) | x_1 \cdots x_N \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)d(eu_j + f)^M}{au_j + b} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_j - tu_k}{u_j - u_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}}{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{au_{\sigma(j)} + b}{eu_{\sigma(j)} + f} \right)^{x_j}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle 1 \cdots M | B(u_1) \cdots B(u_N) | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(atu_j + b)^M}{eu_j + tf} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{u_j - tu_k}{t(u_j - u_k)} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}}{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + tf}{atu_{\sigma(j)} + b} \right)^{\bar{x}_j}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N | C(u_N) \cdots C(u_1) | 1 \cdots M \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)d(eu_j + tf)^M}{atu_j + b} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{t(u_j - u_k)} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{atu_{\sigma(j)} + b}{eu_{\sigma(j)} + tf} \right)^{\bar{x}_j}, \end{aligned} \quad (35)$$

で与えられる。

但し、ここで、真空状態と充満状態を以下のように定める。

$$|\Omega\rangle := |0^M\rangle := |0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M, \quad (36)$$

$$\langle\Omega| := \langle 0^M| := {}_1\langle 0| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 0|, \quad (37)$$

$$\langle 1 \cdots M| := \langle 1^M| := {}_1\langle 1| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 1|, \quad (38)$$

$$|1 \cdots M\rangle := |1^M\rangle := |1\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |1\rangle_M. \quad (39)$$

また、空孔によりラベル付けをするため、配位ベクトル

$$|x_1 \cdots x_N\rangle = \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}^- (|0\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |0\rangle_M), \quad (40)$$

$$\langle x_1 \cdots x_N| = ({}_1\langle 0| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 0|) \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}^+, \quad (41)$$

に加え、空孔配位ベクトル

$$|\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N\rangle = \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}^+ (|1\rangle_1 \otimes \cdots \otimes |1\rangle_M), \quad (42)$$

$$\langle \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N| = ({}_1\langle 1| \otimes \cdots \otimes {}_M\langle 1|) \prod_{j=1}^N \sigma_{x_j}^-, \quad (43)$$

を導入した。ここで、空孔座標 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$ は $1 \leq \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_N \leq M$ を満たす。

4. 行列積表示

今節の行列積の手法と次節のドメイン壁分配関数の解析を組み合わせると定理 1 を証明する。証明の方針としてまず、波動関数が $\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle$

$$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = K \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + f}{au_{\sigma(j)} + b} \right)^{x_j}, \quad (44)$$

の形で表されることを行列積の手法 [33, 34, 35] により示す。ここで、因子 K は粒子の配位ベクトル x_1, \dots, x_N に依らない量である。次に、次節のドメイン壁分配関数の表示と組み合わせることにより、この表示 (44) の因子 K が

$$K = \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(au_j + b)^M}{eu_j + f} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k}, \quad (45)$$

で表されることを示すことにより、証明を完了する。

この節では波動関数 $\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = \langle x_1 \cdots x_N | \prod_{j=1}^N B(u_j) | \Omega \rangle$ を、行列積表示を用いて書き直す。はじめに、波動関数を次の形に書き直す。

$$\langle x_1 \cdots x_N | \prod_{j=1}^N B(u_j) | \Omega \rangle = \text{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \langle x_1 \cdots x_N | \prod_{a=1}^N T_a(u_a) | \Omega \rangle \right]. \quad (46)$$

ここで $Q = |1^N\rangle\langle 0^N|$ は補助空間 $W_1 \otimes \cdots \otimes W_N$ にする演算子である。また、トレースも補助空間に関して取る。

次に、モノドロミー行列を、「横型」の $T_a(u_a) \in \text{End}(W_a \otimes V_1 \otimes \cdots \otimes V_M)$ から「縦型」のもの

$$\mathcal{T}_j(\{u\}_N) := \prod_{a=1}^N L_{aj}(u_a) \in \text{End}(W^{\otimes N} \otimes V_j), \quad (47)$$

に変更する (有限温度における量子転送行列の類似)。この縦型のモノドロミー行列 $\mathcal{T}_j(\{u\}_N)$ の成分

$$\mathcal{T}_j(\{u\}_N) := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_N(\{u\}_N) & \mathcal{B}_N(\{u\}_N) \\ \mathcal{C}_N(\{u\}_N) & \mathcal{D}_N(\{u\}_N) \end{pmatrix}_j, \quad (48)$$

のうち、 $\mathcal{A}_N(\{u\}_N)$ と $\mathcal{C}_N(\{u\}_N)$ を用いて波動関数 (46) が

$$\begin{aligned} \langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle &= \text{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \langle x_1 \cdots x_N | \prod_{j=1}^M \mathcal{T}_j(\{u\}_N) | \Omega \rangle \right] \\ &= \text{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \mathcal{A}_N^{M-x_N} \mathcal{C}_N \mathcal{A}_N^{x_N-x_{N-1}-1} \cdots \mathcal{C}_N \mathcal{A}_N^{x_2-x_1-1} \mathcal{C}_N \mathcal{A}_N^{x_1-1} \right], \end{aligned} \quad (49)$$

と書き表すことができる。

表示 (49) から (44) に持つていくために、成分 \mathcal{A}_N と \mathcal{C}_N の間の交換関係式を導出する。まず、縦の長さが 1 異なる演算子 $\mathcal{A}_{n+1}(\{u\}_{n+1})$ 、 $\mathcal{C}_{n+1}(\{u\}_{n+1})$ と $\mathcal{A}_n(\{u\}_n)$ 、 $\mathcal{C}_n(\{u\}_n)$ の間に次の漸化式が成り立つことがわかる。

$$\mathcal{A}_{n+1}(\{u\}_{n+1}) = \begin{pmatrix} au_{n+1} + b & 0 \\ 0 & eu_{n+1} + f \end{pmatrix} \otimes \mathcal{A}_n(\{u\}_n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-t)d & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathcal{C}_n(\{u\}_n), \quad (50)$$

$$\mathcal{C}_{n+1}(\{u\}_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & (1-t)cu_{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathcal{A}_n(\{u\}_n) + \begin{pmatrix} atu_{n+1} + b & 0 \\ 0 & eu_{n+1} + ft \end{pmatrix} \otimes \mathcal{C}_n(\{u\}_n), \quad (51)$$

また、 $n = 1$ (初期条件) の場合は L 演算子の定義より、

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} au_1 + b & 0 \\ 0 & eu_1 + f \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & (1-t)cu_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

であることもわかる。漸化式 (50)、(51) 及び初期条件 (52) を用いて、次の補題を n に関して帰納的に証明することができる。

補題 3

\mathcal{A}_n と $\mathcal{C}_n^{(j)}$ の間に次の代数関係式が成立するような \mathcal{C}_n の分解 $\mathcal{C}_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{C}_n^{(j)}$ が存在

する。

$$\mathcal{C}_n^{(j)} \mathcal{A}_n = \frac{eu_j + f}{au_j + b} \mathcal{A}_n \mathcal{C}_n^{(j)}, \quad (53)$$

$$(\mathcal{C}_n^{(j)})^2 = 0, \quad (54)$$

$$\mathcal{C}_n^{(j)} \mathcal{C}_n^{(k)} = \frac{(eu_j + f)(au_k + b)(u_j - tu_k)}{(au_j + b)(eu_k + f)(tu_j - u_k)} \mathcal{C}_n^{(k)} \mathcal{C}_n^{(j)}, \quad (j \neq k). \quad (55)$$

補題3を n に関する帰納法で示す。 $n = 1$ の場合、(52) から \mathcal{A}_1 が対角的で、関係式が成立することを直接確かめることができる。次に、 n の場合に代数関係式が成立することを仮定する。更に \mathcal{A}_n が対角化可能であることを仮定し、対応する対角行列を $\mathcal{A}_n = G_n^{-1} \mathcal{A}_n G_n$ と表す。この対角化に伴い、 \mathcal{C}_n に G_n を随伴的に作用させ、 $\mathcal{C}_n = G_n^{-1} \mathcal{C}_n G_n$ 、 $\mathcal{E}_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{E}_n^{(j)}$ を定義する。代数関係式が基底の選び方に依らないことに注意すると、帰納法の仮定より、 \mathcal{A}_n と $\mathcal{E}_n^{(j)}$ に関しても同様の代数関係式が成立することがわかる。

この仮定を基に、 $n + 1$ でも成立することを示す。まず G_{n+1} を帰納的に構成する。(50) より、 \mathcal{A}_{n+1} が下三角ブロック行列であり、対角成分が \mathcal{A}_n で表されることに注意すると、 G_{n+1} が

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} G_n & 0 \\ G_n H_n & G_n \end{pmatrix}, \quad (56)$$

で表されるとして良い。上の仮定では $2n \times 2n$ 行列 H_n が未知であり、その具体的な形をこれから決定する。 n に関する帰納法より、次の式を得る。

$$\begin{aligned} & G_{n+1}^{-1} \mathcal{A}_{n+1} G_{n+1} \\ &= \begin{pmatrix} (au_{n+1} + b) \mathcal{A}_n & 0 \\ (eu_{n+1} + f) \mathcal{A}_n H_n + (1-t)d \mathcal{E}_n - (au_{n+1} + b) H_n \mathcal{A}_n & (eu_{n+1} + f) \mathcal{A}_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (57)$$

この行列が対角であるためには

$$(eu_{n+1} + f) \mathcal{A}_n H_n + (1-t)d \mathcal{E}_n - (au_{n+1} + b) H_n \mathcal{A}_n = 0, \quad (58)$$

が満たされなければならない。この関係式を用い、 \mathcal{A}_n と $\mathcal{E}_n^{(j)}$ が (53) と同じ関係式を満たすことに注意すると、 H_n が

$$H_n = \mathcal{A}_n^{-1} \sum_{j=1}^n \frac{au_j + b}{c(u_j - u_{n+1})} \mathcal{E}_n^{(j)}, \quad (59)$$

と表されることがわかる。こうして \mathcal{A}_{n+1} より、 G_{n+1} を用いて対角行列 \mathcal{A}_{n+1} を求めることができた。

$$\mathcal{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} (au_{n+1} + b) \mathcal{A}_n & 0 \\ 0 & (eu_{n+1} + f) \mathcal{A}_n \end{pmatrix}. \quad (60)$$

残りは $\mathcal{E}_{n+1}^{(j)}$ を求め、関係式 (53)–(55) が $n + 1$ で成立することを示せば良い。(51)、(56) と (59) を組み合わせ、関係式 (54) と (55) を挿入することにより、 $\mathcal{E}_n^{(j)}$ と \mathcal{A}_n を用いて

$$\mathcal{C}_{n+1} \text{ が } \mathcal{C}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}^{(j)}$$

$$\mathcal{C}_{n+1}^{(j)} = \begin{cases} \frac{1}{u_j - u_{n+1}} \begin{pmatrix} (u_j - tu_{n+1})(au_{n+1} + b)\mathcal{C}_n^{(j)} & 0 \\ 0 & (tu_j - u_{n+1})(eu_{n+1} + f)\mathcal{C}_n^{(j)} \end{pmatrix} \\ \text{for } 1 \leq j \leq n \\ \begin{pmatrix} 0 & (1-t)cu_{n+1}\mathcal{A}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ for } j = n+1 \end{cases}, \quad (61)$$

と表されることがわかる。最後に、 \mathcal{A}_n と $\mathcal{C}_n^{(j)}$ が関係式 (53)–(55) を満たすという仮定及び、 \mathcal{A}_n と $\mathcal{C}_n^{(j)}$ を用いた明示式 \mathcal{A}_{n+1} (60) と $\mathcal{C}_{n+1}^{(j)}$ (61) より、代数関係式 (53)–(55) と同じ関係式を \mathcal{A}_{n+1} と $\mathcal{C}_{n+1}^{(j)}$ が満たすことを示すことで、帰納法による補題3の証明を完了する。

補題3の代数関係式 (53)、(54) と (55) を用いることにより、波動関数の行列積表示 (49) を次のように書き直すことができる。

$$\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle = K \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + f}{au_{\sigma(j)} + b} \right)^{x_j}. \quad (62)$$

ここで S_N は位数 N の対称群を表し、因子 K は

$$K = \prod_{j=1}^N \left(\frac{au_j + b}{eu_j + f} \right)^j \text{Tr}_{W^{\otimes N}} \left[Q \mathcal{A}_N^{M-N} \mathcal{C}_N^{(N)} \cdots \mathcal{C}_N^{(1)} \right], \quad (63)$$

と表される。

定理1の証明を完結させるのに必要なことは因子 K の具体的な表示を決定することである。(63)の右辺を直接求めるのは困難であるが、次節のドメイン壁分配関数に関する定理5を用いて決定することができる。

補題4

因子 K は

$$K = \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(au_j + b)^M}{eu_j + f} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k}, \quad (64)$$

で与えられる。

補題4を以下の議論で示す。まず、 K はその定義 (63) より、粒子の配位ベクトルの情報 x_1, \dots, x_N に依存しないことがわかる。そのため、 $\langle x_1 \cdots x_N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ をある特定の配位ベクトル $\langle x_1 \cdots x_N |$ の場合に対して決定さえすれば、(62) より K を定めることができる。 $x_j = j, j = 1, \dots, N$ の時の波動関数 $\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ を以下のようにして求めることができる。まず、波動関数 $\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ のグラフ表示より、 $N \times M$ 格子の

内、右側の $N \times (M - N)$ 格子の内部スピンは凍りつき、波動関数 $\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle$ の計算は事実上、ドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ の計算に帰着することがわかる。

$$\langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle = Z_N(\{u\}_N) \prod_{j=1}^N (az_j + b)^{M-N}, \quad (65)$$

$$Z_N(\{u\}_N) = \langle 1 \cdots N | B_N(u_1) \cdots B_N(u_N) | \Omega \rangle, \quad (66)$$

$$B_N(u) = {}_a \langle 0 | L_{aN}(u) \cdots L_{a1}(u) | 1 \rangle_a. \quad (67)$$

次節証明するドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ に関する評価である (69) を (65) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \langle 1 \cdots N | \psi(\{u\}_N) \rangle &= \prod_{j=1}^N \frac{(1-t)cu_j(au_j+b)^M}{eu_j+f} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N \left(\frac{eu_{\sigma(j)} + f}{au_{\sigma(j)} + b} \right)^j, \end{aligned} \quad (68)$$

が得られる。(62) で $x_j = j$, $j = 1, \dots, N$ とおいたものと (68) を比較することにより、 K が (64) で与えられることがわかる。

5. ドメイン壁分配関数

今節では、定理1の証明を完成させるのに必要である、次のドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ に関する以下の表示を証明する。

定理5

ドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N)$ は次の表示を持つ。

$$\begin{aligned} Z_N(\{u\}_N) &= \prod_{j=1}^N (1-t)cu_j \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ &\quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{j=1}^N (au_{\sigma(j)} + b)^{N-j} \prod_{j=1}^N (eu_{\sigma(j)} + f)^{j-1}. \end{aligned} \quad (69)$$

証明すべきはこの定理自体ではなく、量子空間 V_j , $j = 1, \dots, N$ に非等質パラメータ w_j を入れてできる次の L 演算子

$$L_{aj}(u, w_j) = \begin{pmatrix} au + bw_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & atu + bw_j & (1-t)cu & 0 \\ 0 & (1-t)dw_j & eu + fw_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & eu + tfw_j \end{pmatrix}, \quad (70)$$

より構成されるより一般的なドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N)$

$$Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N) = \langle 1 \cdots N | B(u_1 | \{w\}_N) \cdots B(u_N | \{w\}_N) | \Omega \rangle, \quad (71)$$

$$B(u | \{w\}_N) = {}_a \langle 0 | L_{aN}(u, w_N) \cdots L_{a1}(u, w_1) | 1 \rangle_a, \quad (72)$$

に関して成立する以下の表示である。

定理 6

一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は以下の表示を持つ。

$$\begin{aligned} & Z_N(\{u\}_N, \{w\}_N) \\ &= \prod_{j=1}^N (1-t)cu_j \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (au_{\sigma(j)} + bw_k) \prod_{1 \leq k < j \leq N} (eu_{\sigma(j)} + fw_k). \quad (73) \end{aligned}$$

定理 5 は定理 6 で、非等質パラメータ w_j を $w_j = 1, j = 1, \dots, N$ とした極限として直ちに得られる。

非等質パラメータを量子空間にも入れて分配関数を一般化した上で、漸化式を構成して解く手法を Izergin-Korepin 流解析 [36, 37] という。相関関数の研究でも使われる技術であることに注意する。この手法によって定理 6 を証明する。証明の方針としてはまず、一般化された分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N) = \langle 1 \cdots N | B(u_1|\{w\}_N) \cdots B(u_N|\{w\}_N) | \Omega \rangle$ を w_1, \dots, w_N に関する多項式であるとみなし、グラフ表示を用いて次の補題で示される性質を分配関数が満たすことを示す。補題の性質を満たす w_1, \dots, w_N の多項式は唯一存在するが、次にこれらの性質を (73) の右辺の多項式が満たすことを示すことにより、証明が完了する。

補題 7

一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は以下の性質を満たす。

- (1) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は w_N に関して $N-1$ 次の多項式である。
- (2) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ は $u_j, j = 1, \dots, N$ に関して対称である。
- (3) $Z_1(u_1|w_1) = (1-t)cu_1$ が成立する。
- (4) $Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)$ の N に関する次の漸化式が成立する。

$$\begin{aligned} Z_N(\{u\}_N|\{w\}_N)|_{w_N = -au_N/b} &= (1-t)ca^{N-1}u_N \prod_{j=1}^{N-1} (tu_j - u_N) \prod_{j=1}^{N-1} (eu_N + fw_j) \\ & \quad \times Z_{N-1}(\{u\}_{N-1}|\{w\}_{N-1}). \quad (74) \end{aligned}$$

補題の性質 (1),(2),(3),(4) を次の多項式

$$\begin{aligned} & F_N(\{u\}_N, \{w\}_N) \\ &= \prod_{j=1}^N (1-t)cu_j \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{tu_j - u_k}{u_j - u_k} \\ & \quad \times \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \sigma(j) > \sigma(k)}} \frac{u_{\sigma(k)} - tu_{\sigma(j)}}{tu_{\sigma(k)} - u_{\sigma(j)}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (au_{\sigma(j)} + bw_k) \prod_{1 \leq k < j \leq N} (eu_{\sigma(j)} + fw_k), \quad (75) \end{aligned}$$

が満たすことがわかる。例えば (4) は、 $w_N = -au_N/b$ と置くことにより、(75) の和のうち、 $\sigma(N) = N$ を満たさない σ は必ず $\prod_{1 \leq j < k \leq N} (au_{\sigma(j)} + bw_k) = 0$ となるので、 $\sigma(N) = N$ を満たす σ のみ考えれば良いことを踏まえ、(74) を $F_N(\{u\}_N, \{w\}_N)$ が満たすことがわかる。従って分配関数 $Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N)$ が多項式 $F_N(\{u\}_N, \{w\}_N)$ によって与えられることが示された。

最後に、分配関数 $Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N)$ に関しては以下の行列式表示 [36, 37] の方がより有名であることを注意して、本節を終える。

定理 8

一般化されたドメイン壁分配関数 $Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N)$ は以下の行列式表示を持つ。

$$Z_N(\{u\}_N | \{w\}_N) = \frac{\prod_{j=1}^N (1-t)cu_j \prod_{j,k=1}^N (au_j + bw_k)(eu_j + fw_k)}{\prod_{1 \leq j < k \leq N} (u_j - u_k)(w_k - w_j)} \times \det_N \left(\frac{1}{(au_j + bw_k)(eu_j + fw_k)} \right). \quad (76)$$

6. Grothendieck 多項式の Cauchy 公式、Littlewood 公式、直交性

前節まで、波動関数と呼ばれるクラスの分配関数が対称多項式を与えることを見てきた。今節では、他のクラスの分配関数の量子逆散乱法による解析を組み合わせたことにより、対称多項式の種々の公式の導出、証明をどうやって行うかに関するアイデアを述べる (詳細については [24])。今節と次節では、論文の記法 [24] に合わせるため、 R 行列や L 演算子を以下のものとして採用する。

$$R(u) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u - u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (77)$$

$$L(u) = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta^{-1}u - u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta^{-1}u \end{pmatrix}. \quad (78)$$

(77)、(78) はそれぞれ (2)、(29) を対称化し、 $t = 0$ としたものと基本的に等価である。 L 演算子 (78) より構成される波動関数と Grothendieck 多項式の対応は以下である。

$$\langle x_1 \cdots x_N | B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle = (-\beta^{-1})^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^{M-1} G_\lambda(\mathbf{z}; \beta), \quad (79)$$

$$\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) | x_1 \cdots x_N \rangle = (-\beta^{-1})^{N(N-1)/2} \prod_{j=1}^N u_j^{M-1} G_{\lambda^\vee}(\mathbf{z}; \beta). \quad (80)$$

ここで、 u_j と z_j の対応は $z_j = -\beta^{-1} - u_j^{-2}$ である。また、粒子の配位 $x = (x_1, \dots, x_N)$ は Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ($M - N \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$)、 $\lambda^\vee = (\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_N^\vee)$ ($M - N \geq \lambda_1^\vee \geq \dots \geq \lambda_N^\vee \geq 0$) に $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1$ 、 $\lambda_j^\vee = M - N + j - x_j$ の

ルールで翻訳される。Young 図形 λ^\vee は $N \times (M - N)$ 長方形の Young 図形の Young 図形 λ の補完部分に相当する。

次に off-shell Bethe ベクトル $B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle$ と $\langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)$ の内積である、スカラー積と呼ばれる分配関数

$$\langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle, \quad (81)$$

を導入する。スカラー積は 1 次元量子可積分系や可解確率過程の相関関数などの物理量の研究で基礎となる分配関数であるが、このスカラー積は次の行列式表示を持つ [22, 38, 24]。

定理 9

Off-shell Bethe ベクトルのスカラー積 $\langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle$ に関して、以下の行列式を用いた以下の表示が成立する。

$$\begin{aligned} & \langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle \\ &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(u_j^2 - u_k^2)(v_k^2 - v_j^2)} \det_N Q(\{u\}_N | \{v\}_N). \end{aligned} \quad (82)$$

但し、 Q は行列成分が

$$Q(\{u\}_N | \{v\}_N)_{jk} = \frac{u_j^M (-\beta^{-1} v_k - v_k^{-1})^M v_k^{2(N-1)} - v_k^M (-\beta u_j - u_j^{-1})^M u_j^{2(N-1)}}{v_k/u_j - u_j/v_k}, \quad (83)$$

で与えられる $N \times N$ 行列である。

定理 9 を証明する一つの手法として、ドメイン壁分配関数の解析と同様にして、量子空間に非等質パラメータを導入して模型を一般化し、そのスカラー積の行列式表示を、中間スカラー積 [39] と呼ばれる分配関数を更に導入し、それを off-shell のままで Izergin-Korepin 流に解析することによって証明する方法がある。定理 9 は R 行列が $t = 0$ である場合の L 演算子一般に対して成り立つと思われる。また、 R 行列が $t = -1$ の場合に対応する L 演算子のスカラー積の行列式表示は [40] で証明を与えている。

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79)、(80) 及び、off-shell Bethe ベクトルのスカラー積の行列式表示 (82) を用いて、Grothendieck 多項式の Cauchy 公式をこれから導出する。まず、恒等行列の配位ベクトルによる分解

$$\sum_{\{x\}} |x_1 \cdots x_N\rangle \langle x_1 \cdots x_N| = \text{Id}, \quad (84)$$

を用いて、スカラー積を分解し、

$$\begin{aligned} & \langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle \\ &= \sum_{1 \leq x_1 < \cdots < x_N \leq M} \langle\Omega|C(u_1) \cdots C(u_N)|x_1 \cdots x_N\rangle \langle x_1 \cdots x_N|B(v_1) \cdots B(v_N)|\Omega\rangle, \end{aligned} \quad (85)$$

波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79)、(80) を (85) の右辺に代入すると、Grothendieck 多項式 $G_\lambda(\mathbf{z}; \beta)$ と $G_{\lambda^\vee}(\mathbf{z}; \beta)$ の積を、 $\lambda \subseteq L^N$, $L = M - N$ を満たす Young 図形 λ 全

てに関して足し上げる形に化ける。一方でスカラー積はそれ自身、行列式表示 (82) を持っているので、2通りのスカラー積の評価を組み合わせるにより、以下を得る。

定理 10

Grothendieck 多項式に関して以下の Cauchy 公式が成立する。

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \subseteq L^N} G_\lambda(\mathbf{z}; \beta) G_{\lambda^\vee}(\mathbf{w}; \beta) \\ &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{(z_j - z_k)(w_k - w_j)} \det_N \left[\frac{z_j^{L+N}(1 + \beta w_k)^{N-1} - w_k^{L+N}(1 + \beta z_j)^{N-1}}{z_j - w_k} \right], \quad (86) \end{aligned}$$

ここで、Young 図形 $\lambda^\vee = (\lambda_1^\vee, \dots, \lambda_N^\vee)$ は Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ より、 $\lambda_j^\vee = L - \lambda_{N+1-j}$ で与えられる。

更に、波動関数のスカラー積の行列式表示 (定理9) で、Bethe ベクトル $\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N)$ のスペクトルパラメータ u_j の極限 $u_j \rightarrow \infty, j = 1, \dots, N$ を取るにより、Grothendieck 多項式の (重み付き) Littlewood 公式を得る。

定理 11

Grothendieck 多項式に関して、以下の Littlewood 公式が成立する。

$$\sum_{\lambda \subseteq (M-N)^N} (-\beta)^{\sum_{j=1}^N \lambda_j} G_\lambda(\mathbf{z}; \beta) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{z_k - z_j} \det_N V^{(M)}. \quad (87)$$

ここで、 $V^{(M)}$ は行列成分が

$$\begin{aligned} V_{jk}^{(M)} &= \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m (-\beta)^{j-N} \binom{M}{m} (1 + \beta z_k)^{m-j+N-1} \quad (1 \leq j \leq N-1), \\ V_{Nk}^{(M)} &= - \sum_{m=\max(N-1, 1)}^M (-1)^m \binom{M}{m} (1 + \beta z_k)^{m-1}, \quad (88) \end{aligned}$$

で与えられる $N \times N$ 行列である。

$\beta = -1$ では、Bethe ベクトル $\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N)$ で $u_j \rightarrow \infty, j = 1, \dots, N$ を取ることは、周期 TASEP (totally asymmetric simple exclusion process) と呼ばれる確率過程の定常状態をとるということに対応するので、物理的には、Grothendieck 多項式の Littlewood 公式は、TASEP の off-shell Bethe ベクトルと定常状態の内積の足し上げに関する行列式表示という解釈ができる。

最後に、Grothendieck 多項式の直交性に関してコメントして今節を終える。Bethe 状態の完全性を仮定すると、on-shell Bethe ベクトルによる恒等行列の分解

$$I = \sum_{\{u\}_N} \frac{B(u_1) \cdots B(u_N) |\Omega\rangle \langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N)}{\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) B(u_1) \cdots B(u_N) |\Omega\rangle}, \quad (89)$$

が成立する。ここで和は、Bethe 方程式を満たすあらゆる $M!/N!(M-N)!$ ケの Bethe 根の組 $\{u\}$ に関して和を取るという意味である。配位ベクトルに関する自明な直交性

$\langle x_1 \cdots x_N | x'_1 \cdots x'_N \rangle = \prod_{j=1}^N \delta_{x_j x'_j}$ にこの分解を挿入することで、以下の式

$$\sum_{\{u\}_N} \frac{\langle x_1 \cdots x_N | B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle \langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) | x'_1 \cdots x'_N \rangle}{\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle} = \prod_{j=1}^N \delta_{x_j x'_j}, \quad (90)$$

を得るが、左辺に波動関数と Grothendieck 多項式の対応 (79), (80) とノルム $\langle \Omega | C(u_1) \cdots C(u_N) B(u_1) \cdots B(u_N) | \Omega \rangle$ に関する因子化公式を代入することにより、Grothendieck 多項式の直交性として表すことができる。この直交性は Schur 多項式の直交性の拡張に当たる (詳細については [25]。同変の場合への拡張は [67])。この直交性の和では Bethe 方程式の根が必要となるが、Bethe 方程式を定める多項式は、Grassmann 多様体の量子 K 理論の定義イデアルに対応するという解釈が与えられる。

7. ボソン模型

前節では R 行列 (77) に対し、「 RLL 」型の Yang-Baxter 関係式を満たす、2次元複素ベクトル空間のテンソル積に作用する L 演算子 (78) について考えた。今度は、量子空間を無限次元 Boson Fock 空間 \mathcal{F} に取り替える。正規直交基底をボソンの占有数 n によって $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots, \infty$) と表す。Boson Fock 空間 \mathcal{F} の生成元 ϕ , ϕ^\dagger , N と π はそれぞれ消滅、生成、数、真空射影演算子という意味を持ち、 \mathcal{F} への具体的な作用は

$$\phi|0\rangle = 0, \quad \phi|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \phi^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \quad N|n\rangle = n|n\rangle, \quad \pi|n\rangle = \delta_{n0}|n\rangle, \quad (91)$$

で定義される。この代数はある t -boson 代数の $t = 0$ 極限として得られる代数とみなすことができるが、この boson 代数の演算子を用いた「 RLL 」の Yang-Baxter 関係式

$$R_{ab}(u/v) \mathcal{L}_{aj}(u) \mathcal{L}_{bj}(v) = \mathcal{L}_{bj}(v) \mathcal{L}_{aj}(u) R_{ab}(u/v) \in \text{End}(W_a \otimes W_b \otimes \mathcal{F}_j), \quad (92)$$

の解 [41]

$$\mathcal{L}_{aj}(v) = \begin{pmatrix} v^{-1} - \beta v \pi_j & \phi_j^\dagger \\ \phi_j & v \end{pmatrix}, \quad (93)$$

が知られている。以前と同様にして量子逆散乱法の通常の手続きを実行し、 L 演算子よりモノドロミー行列

$$\mathcal{T}_a(v) = \mathcal{L}_{aM-1}(v) \cdots \mathcal{L}_{a0}(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(v) & \mathcal{B}(v) \\ \mathcal{C}(v) & \mathcal{D}(v) \end{pmatrix}_a, \quad (94)$$

更に、off-shell Bethe ベクトル

$$|\Psi(\{v\}_N)\rangle = \prod_{j=1}^N \mathcal{B}(v_j) |\Omega\rangle, \quad \langle \Psi(\{v\}_N) | = \langle \Omega | \prod_{j=1}^N \mathcal{C}(v_j), \quad (95)$$

を導入する。これら off-shell Bethe ベクトルと Boson Fock 空間のテンソル積 $\otimes_{j=0}^{M-1} \mathcal{F}_j$ の基底 $|\{n\}_M\rangle := \otimes_{j=0}^{M-1} |n_j\rangle$, $n_j = 0, 1, \dots, \infty$ とその双対 $\langle \{n\}_M | := \otimes_{j=0}^{M-1} \langle n_j |$ の内積として定義される boson 波動関数 $\langle \{n\}_{M,N} | \Psi(\{v\}_N)\rangle$, $\langle \Psi(\{v\}_N) | \{n\}_{M,N}\rangle$ も Grothendieck 多項式で表すことができる。

今度は、boson の配位 $\{n\}_{M,N} = \{n_0, n_1, \dots, n_{M-1}\}$ ($n_0 + n_1 + \dots + n_{M-1} = N$) と Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ($M-1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$, $\lambda_1 \leq M-1$) は次の関係 $\lambda = ((M-1)^{n_{M-1}}, \dots, 1^{n_1}, 0^{n_0})$ で対応することにまず注意する。この対応の下、次が成立する [25]。

定理 12

Boson L 演算子 (93) より構成される波動関数 $\langle \{n\}_{M,N} | \Psi(\{v\}_N) \rangle$ 、 $\langle \Psi(\{v\}_N) | \{n\}_{M,N} \rangle$ は Grothendieck 多項式と次の対応がある。

$$\langle \{n\}_{M,N} | \Psi(\{v\}_N) \rangle = \prod_{j=1}^N (v_j^{-1} - \beta v_j)^{M-1} G_\lambda(z_1, \dots, z_N; \beta), \quad (96)$$

$$\langle \Psi(\{v\}_N) | \{n\}_{M,N} \rangle = \prod_{j=1}^N (v_j^{-1} - \beta v_j)^{M-1} G_{\lambda^\vee}(z_1, \dots, z_N; \beta). \quad (97)$$

ここで、スペクトル変数 v_j と Grothendieck 多項式の対称変数 z_j には $z_j^{-1} = v_j^{-2} - \beta$ の対応がある。また、 $\lambda^\vee = (\lambda_1^\vee, \lambda_2^\vee, \dots, \lambda_N^\vee)$ ($M-1 \geq \lambda_1^\vee \geq \dots \geq \lambda_N^\vee \geq 0$) は Young 図 λ と $\lambda_j^\vee = M-1 - \lambda_{N+1-j}$ の対応で結ばれる。

本節で述べた boson L 演算子より構成される可解模型は、TAZRP (totally asymmetric zero-range process) と呼ばれる可解確率過程である。また、 t -boson 代数の模型の $t=0$ 極限とみなせる。 t が一般の模型に関しても、確率過程や代数構造への興味などから様々な研究が近年行われている (例えば [42, 43, 44, 45])。

8. Felderhof 模型、双対 Cauchy 公式、Tokuyama 公式

最後に Felderhof 模型について触れる。近年、次の形

$$L_{aj}(z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & (t+1)z & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix}, \quad (98)$$

で与えられる L 演算子より構成される波動関数が、Schur 多項式の Weyl 公式の変形に当たる Tokuyama 公式を自然に実現することが見出された [46]。この L 演算子は「 RLL 」型の Yang-Baxter 関係式を満たすが、この時の R 行列は

$$R_{ab}(z, t) = \begin{pmatrix} 1+tz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t(1-z) & t+1 & 0 \\ 0 & (t+1)z & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z+t \end{pmatrix}, \quad (99)$$

で与えられる。この R 行列 (98)、 L 演算子 (99) や「 RLL 」型の Yang-Baxter 関係式は、実はより一般的な R 行列と、その満たす「 RRR 」型の Yang-Baxter 関係式を特殊化 (してゲージ変換) したものに相当する。Felderhof 模型や色付き頂点模型とも呼ばれ [47]、また、その一般化された R 行列は 1 のべき根の量子群より構成できることが知られている [48, 49, 50]。 L 演算子 (98) のパラメータ t は量子群のパラメータではなく、べき根の有限次元表現を構成する際に自由に入れることのできるパラメータに相

当している。パラメータが各表現に付随しているとみなすと、 R 行列は表現空間のテンソル積に作用するため、最低2つの自由に動けるパラメータを入れることができる。パラメータ t は補助空間に付随している自由パラメータとみなすことができる。また、 L 演算子 (98) は一般化 R 行列で、量子空間に入っている自由パラメータを潰したものとみることができる。量子空間に (の) 自由パラメータを入れた (残した) L 演算子から factorial Schur 関数が出現することが [51, 52] で示されているが、この自由パラメータが factorial パラメータに対応している。

Felderhof 模型について1点注意すべきことを述べる。2節で扱った6頂点模型では R 行列の行列成分 R_{00}^{00} と R_{11}^{11} が等しいことより、 B 演算子は互いに可換であった。これに対し、Felderhof 模型では R_{00}^{00} と R_{11}^{11} が等しくない。これに対応して、 B 演算子は可換ではない。

$$(1 + tz_1/z_2)B(z_1)B(z_2) = B(z_2)B(z_1)(z_1/z_2 + t). \quad (100)$$

特に、 $t = -1$ で B 演算子は反可換になる。このため、波動関数を扱うとき際には、作用させる B 演算子のスペクトルパラメータの並びに注意しなければならない。

波動関数と Schur 多項式の対応が [46] において見出された。

定理 13

Felderhof 模型の波動関数 $\langle x_1 \cdots x_N | B(z_1) \cdots B(z_N) | \Omega \rangle$ は Schur 多項式を用いて

$$\langle x_1 \cdots x_N | B(z_1) \cdots B(z_N) | \Omega \rangle = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j + tz_k) s_\lambda(\{z\}_N), \quad (101)$$

と表すことができる。Young 図形 $\lambda_j, j = 1, \dots, N$ は粒子の配位 $x_j, j = 1, \dots, N$ と $\lambda_j = x_{N-j+1} - N + j - 1, j = 1, \dots, N$ の対応で結ばれる。

論文 [46] では更に、定理 13 と波動関数の strict Gelfand-Tsetlin パターン (内部スピン状態) による特徴付けを合わせたものとして、Schur 多項式の Weyl 公式の変形である Tokuyama 公式 [53, 54] を導出されることが見出された。Felderhof 模型が Schur 多項式の Tokuyama 公式の自然な実現を与えているのである。また、この対応の factorial Schur 関数への拡張 [51] や、Yang-Baxter 関係式の p 進体版への拡張 [55] (metaplectic ice [56, 57]) が最近発見されており、興味深い。

Felderhof 模型の双対波動関数 $\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_N) | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N \rangle$ に関しては最近、次の結果を得た [58]。

定理 14

Felderhof 模型の双対波動関数 $\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_N) | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N \rangle$ は Schur 多項式を用いて

$$\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_N) | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_N \rangle = t^{N(M-N)} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (z_j + tz_k) s_{\bar{\lambda}} \left(\left\{ \frac{z}{t} \right\}_N \right), \quad (102)$$

と表すことができる。Young 図形 $\bar{\lambda}_j, j = 1, \dots, N$ は空孔の配位 $\bar{x}_j, j = 1, \dots, N$ と $\bar{\lambda}_j = \bar{x}_{N-j+1} - N + j - 1, j = 1, \dots, N$ の対応で結ばれる。また、Schur 多項式の対称変数は、 $\left\{ \frac{z}{t} \right\}_N = \left\{ \frac{z_1}{t}, \dots, \frac{z_N}{t} \right\}$ で与えられる。

論文 [58] で、定理 14 と双対波動関数の strict Gelfand-Tsetlin パターンによる特徴付けを合わせ、Schur 多項式の双対 Tokuyama 公式と呼ぶべき公式を導出したことを報告する。

最後に、Felderhof 模型のドメイン壁分配関数

$$\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle, \quad (103)$$

と波動関数、双対波動関数と Schur 多項式の対応である定理 13、14 を組み合わせることにより、Schur 多項式の双対 Cauchy 公式が導出されることをみて本節を終える。まず、(101) または (102) で $M = N$ とおくと、 $M \times M$ ドメイン壁分配関数が

$$\langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle = \prod_{1 \leq j < k \leq M} (z_j + tz_k), \quad (104)$$

と完全に因子化されることがわかる。後はスカラー積から Cauchy 公式を得るのと基本的に同じで、恒等行列の分解

$$\sum_{\{x\}} |x_1 \cdots x_N\rangle \langle x_1 \cdots x_N| = \text{Id}, \quad (105)$$

を B 演算子の間に差し込めば良い。即ち、

$$\begin{aligned} & \langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\{x\}} \langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_{M-N}) | x_1 \cdots x_N \rangle \langle x_1 \cdots x_N | B(z_{M-N+1}) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle \\ &= \sum_{\{x\}} \langle 1 \cdots M | B(z_1) \cdots B(z_{M-N}) | \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_{M-N} \rangle \langle x_1 \cdots x_N | B(z_{M-N+1}) \cdots B(z_M) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (106)$$

に波動関数及び双対波動関数の Schur 多項式による表示 (101)、(102) を代入し、(104) と合わせることで、

$$\sum_{\lambda \subseteq (M-N)^N} s_{\bar{\lambda}} \left(\frac{z}{t} \right) s_{\lambda}(\bar{z}) = \prod_{j=1}^{M-N} \prod_{k=M-N+1}^M \left(\frac{z_j}{t} + z_k \right), \quad (107)$$

$\bar{z} = \{z_{M-N+1}, \dots, z_M\}$, $z = \{z_1, \dots, z_{M-N}\}$ を得るが、これは Schur 多項式の双対 Cauchy 公式に他ならない [46] (z を tz にスケールする)。可解格子模型の分配関数を利用したこの議論により、双対 Cauchy 公式は factorial Schur 多項式にも拡張されている [51]。

9. 終わりに

本稿では可解格子模型の分配関数と対称多項式との対応及び、それに基づく対称多項式の研究の一端を紹介した。これまでに挙げてきた文献に加え、他の文献のリストの一部を以下に挙げる [59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78]。例えば有限系ではなく、半無限系の波動関数の量子逆散乱法による Hall-Littlewood 多項式やその一般化の研究が行われている [64, 70, 71]。これは半無限系を解析する代表

的な手法である頂点演算子法 [79, 80, 81, 82, 83, 84] と思想的に似ていると思われるが、現在のところ両者の手法の関係は明確でないと思われる。また、Grothendieck 多項式が 6 頂点模型を退化させた 5 頂点模型の波動関数として出現することを本稿で説明したが、これは Schubert calculus における excited Young 図形 [30] と等価である。この他にも数え上げ幾何と量子可積分系との対応、例えば Gromov-Witten 不変量の母関数の cylindric Young 図による記述 [85] の可解模型の分配関数としての解釈や、 R 行列の幾何学的構成 [62, 66, 67, 86, 87] がなされている。Schubert calculus [88, 89, 90] を含む数え上げ幾何や、代数的組合せ論、特殊関数論などの世界で導入された組合せ論的対象の「可解格子模型表現」を見出し、量子可積分系の世界で発展してきた代数解析の手法を持ち込み、解析することで新たな等式を発見、証明することは興味深い研究テーマであると思われる。

この他にも、量子群のべき根の模型である Felderhof 模型の波動関数が、 p 進体の保型表現論における多重 Dirichlet 級数の nonmetaplectic 極限に相当する [57] ことがわかってきており、また p 進版の Yang-Baxter 関係式が最近 [55] 見つかっている。Felderhof 模型は高次元表現や楕円表現などがあり、これも保型表現の対象とつながっているかもしれないと想像される。いずれも Hecke 代数を基礎とする量子可積分系、Schubert calculus、保型表現論の間の関連を見出していく作業は今後、重要であると思われる。

参考文献

- [1] Bethe H, *Z. Phys.* **71** (1931) 205.
- [2] Faddeev L D, Sklyanin E K and Takhtajan E K *Theor. Math. Phys.* **40** (1979) 194.
- [3] Baxter R J *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London (1982).
- [4] Korepin V E, Bogoliubov N M and Izergin A G *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [5] 武部尚志 (関谷信寛 記)、可解格子模型と共形場理論の話題から、上智大学数学講究録 47 (2006).
- [6] Drinfeld V *Sov. Math.-Dokl.* **32** (1985) 254.
- [7] Jimbo M *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63.
- [8] Zamolodchikov A *Commun. Math. Phys.* **79** (1981) 489.
- [9] Korepanov I G *Commun. Math. Phys.* **154** (1993) 85.
- [10] Bazhanov V and Sergeev S *J. Phys. A* **39** (2006) 3295.
- [11] Kuniba A, Okado M and Sergeev S *J. Phys. A* **48** (2015) 304001.
- [12] Andrews G E, Baxter R J and Forrester P J *J. Stat. Phys.* **35** (1984) 193.
- [13] Date E, Jimbo M, Kuniba A, Miwa T and Okado M *Lett. Math. Phys.* **17** (1989) 69.
- [14] Bressoud D *Proofs and confirmations: The story of the alternating sign matrix conjecture*, MAA Spectrum, Mathematical Association of America, Washington, DC, (1999).
- [15] Kuperberg G *Int. Math. Res. Not.* **3** (1996) 139.
- [16] Kuperberg G *Ann. Math.* **156** (2002) 835.
- [17] Okada S *J. Alg. Comb.* **23** (2001) 43.
- [18] 岡田聡一、交代符号行列の数え上げと Cauchy 型行列式, Pfaffian、第 49 回代数学シンポジウム報告集原稿 (2004).
- [19] 高崎金久、線形代数と数え上げ、日本評論社 (2012).
- [20] Foda O, Wheeler M and Zuparic M *J. Stat. Mech.* (2009) P03017.

- [21] Foda O, Wheeler M and Zuparic M *Nucl. Phys. B* **820** (2009) 649.
- [22] Takasaki K KP and Toda tau functions in Bethe ansatz *New Trends in Quantum Integrable Systems* ed Feigin B, Jimbo M and Okado M (Singapore: World Scientific) (2010) p 373.
- [23] 渡邊拓弥、笈三郎、ドメイン壁境界条件下での対称性付き6頂点模型の分配関数とタウ関数、応用力学研究所研究集会報告. 25AO-S2, (25), pp. 157-162, 2014-03.
- [24] Motegi K and Sakai K *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 355201.
- [25] Motegi K and Sakai K *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 445202.
- [26] Motegi K in preparation.
- [27] Lascoux A and Schützenberger M *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* **295** (1982) 629.
- [28] Fomin S and Kirillov A N *Proc. 6th Internat. Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, DIMACS* (1994) 183.
- [29] Buch A S *Acta. Math.* **189** (2012) 37.
- [30] Ikeda T and Naruse H *Adv. in Math.* **243** (2013) 22.
- [31] Ikeda T and Shimazaki T *Math. Res. Lett.* **21** (2014) 333.
- [32] McNamara P J *Electron. J. Combin.* **13** (2006) 71.
- [33] Golinelli O and Mallick K *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 10647.
- [34] Katsura H and Maruyama I *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 175003.
- [35] 松枝宏明、量子系のエンタングルメントと幾何学 ホログラフィー原理に基づく異分野横断の数理、森北出版 (2016).
- [36] Korepin V E *Commun. Math. Phys.* **86** (1982) 391.
- [37] Izergin A *Sov. Phys. Dokl.* **32** (1987) 878.
- [38] Bogoliubov N M *SIGMA* **5** (2009) 052.
- [39] Wheeler M *Nucl. Phys. B* **852** (2011) 468.
- [40] Motegi K and Sakai K arXiv:1507.06740.
- [41] Bogoliubov N M and Nassar M *Phys. Lett. A* **234** (1997) 345.
- [42] Sasamoto T and Wadati M *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 6057.
- [43] Takeyama Y *Funckeilaj Ekvacioj* **57** (2014) 107.
- [44] Takeyama Y *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014) 465203.
- [45] Borodin A, Corwin I, Petrov L and Sasamoto T *Comp. Math.* **151** (2015) 1.
- [46] Brubaker B, Bump D and Friedberg S *Commun. Math. Phys.* **308** (2011) 281.
- [47] Felderhof B U *Physica* **65** (1973) 421.
- [48] Murakami J *Infinite analysis, Adv. Ser. Math. Phys.* **16B** (1991) 765.
- [49] Deguchi T and Akutsu Y *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) 19.
- [50] Foda O, Caradoc A D, Wheeler M and Zuparic M L *J. Stat. Mech.* **0703** (2007) P03010.
- [51] Bump D, McNamara P and Nakasuji M *Comm. Math. Univ. St. Pauli* **63** (2014) 23.
- [52] 中筋麻貴、Factorial Schur function に対する Tokuyama-type formula、数理研講究録 **1795** (2012) 88.
- [53] Tokuyama T *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988) 671.
- [54] Okada S *J. Algebraic Comb.* **2** (1993) 155.
- [55] Brubaker B, Buciuma V and Bump D arXiv:1604.02206.
- [56] Brubaker B, Bump D, Chinta G, Friedberg S and Gunnells P E *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 65.
- [57] Brubaker B, Bump B and Friedberg S Weyl Group Multiple Dirichlet Series: Type A

- Combinatorial Theory, Annals of Mathematics Studies 175 Princeton University Press, Princeton, (2011).
- [58] Motegi K arXiv:1606.08552.
 - [59] Bogoliubov N M *J. Phys. A* **38** (2005) 9415.
 - [60] Shigechi K and Uchiyama M *J. Phys. A* **38** (2005) 10287.
 - [61] Tsilevich N V *Funct. Anal. Appl.* **40** (2006) 207.
 - [62] Korff C and Stroppel C *Adv. in Math.* **225** (2010) 200.
 - [63] C. Korff *Commun. Math. Phys.* **318** (2013) 173.
 - [64] Borodin A arXiv:1410.0976.
 - [65] Korff C *Lett. Math. Phys.* **104** (2014) 771.
 - [66] Gorbounov V and Korff C arXiv:1402.2907.
 - [67] Gorbounov V and Korff C arXiv:1408.4718.
 - [68] Betea D, Wheeler M and Zinn-Justin P *J. Alg. Comb.* **42** (2015) 555.
 - [69] Betea D and Wheeler M *J. Comb. Th. Ser. A* **137** (2016) 126.
 - [70] Wheeler M and Zinn-Justin P *Adv. in Math.* **299** (2016) 543.
 - [71] Duval A and Pasquier V arXiv:1510.08709.
 - [72] Motegi K, Sakai K and Watanabe S arXiv:1512.07955.
 - [73] van Diejen J F and Emsiz E arXiv:1602.02152.
 - [74] Ivanov D *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 205.
 - [75] Brubaker B, Bump D, Chinta G, and Gunnells P E *Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, vol 300 of Progr. Math.* Birkhäuser/Springer, New York, (2012) 93.
 - [76] Tabony, S.J.: *Deformations of characters, metaplectic Whittaker functions and the Yang-Baxter equation*, PhD. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, USA.
 - [77] Hamel A M and King R C *Elect. J. Comb.* **22** (2015) 2.
 - [78] Brubaker B and Schultz A J. *Alg. Comb.* **42** (2015) 917.
 - [79] Jimbo J and Miwa T *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics vol. 85, AMS (1994).
 - [80] 中屋敷厚、「アフィン量子群の表現論と可解格子模型」、数理物理 95 予稿集、(1995) pp95-117.
 - [81] 白石潤一、量子可積分系入門、別冊数理科学、サイエンス社、2003.
 - [82] 今野均、ELLIPTIC QUANTUM GROUPS AND INTEGRABLE SYSTEMS (楯円量子群と可積分系)、日本数学会 2000 年度秋季総合分科会無限可積分系セッション 特別講演原稿.
 - [83] 今野均、Elliptic QUANTUM GROUP: HOPF ALGEBROID STRUCTURE AND REPRESENTATIONS (楯円量子群: Hopf algebroid 構造と表現)、日本数学会 2009 年度年会無限可積分系セッション 特別講演原稿.
 - [84] 桑野泰宏、2005 年度前期 神戸大学集中講義 講義メモ.
 - [85] Postnikov A *Duke Math. J.* **128** (2005) 473.
 - [86] Maulik D and Okounkov A arXiv:1211.1287.
 - [87] Rimanyi R, Tarasov V and Varchenko A arXiv:1411.0478.
 - [88] 池田岳、成瀬弘、現代のシュレーベルト・カルキュラス、特殊多項式論の視点から、数学 Vol. 63 (2011) No. 3 p.313-337.
 - [89] 前野俊昭、Schubert 多項式とその仲間たち、問題・予想・原理の数学 3、数学書房、2016.
 - [90] Kirillov A N *SIGMA* **12** (2016) 034.

共形場理論における一般化された Wick の定理と Borcherds 恒等式

高木 太一郎 (防衛大)*¹

吉川 拓真 (防衛大)*²

1. 一般化された Wick の定理

共形場理論において (自由場だけでなく) 相互作用のある場に対して一般化された Wick の定理として以下の公式が知られている [1, 2]。

$$\overline{A(z)(BC)}(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{x-w} \left\{ \overline{A(z)B(x)C(w)} + B(x)\overline{A(z)C(w)} \right\}. \quad (1)$$

ここで $A(z)$ などは場の演算子であり、 $(BC)(w) = :B(w)C(w):$ は正規順序積、 $\overline{A(z)B(x)}$ は縮約すなわち演算子積展開の特異部分を表す。この公式は、正規順序積によって定義された場と単独の場との演算子積展開において、前者が積の右側にある場合の特異部分を表すものである。「正規順序積が左側にある場合に対する類似の公式は存在するか」と問うのは自然であり、かつ相互作用のある場に対してそれは非自明な問いである。これに対する肯定的な答えとして、われわれは以下の公式を提案する。

$$\overline{(AB)(z)C}(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \left\{ :A(x)\overline{B(x)C(w)}: + B(x)\overline{A(x)C(w)} \right\}. \quad (2)$$

以下、この公式の背景および導出について述べる。

2. Borcherds 恒等式

場 $A(w), B(w)$ および任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 n 次の積 (あるいは留数積) と呼ばれる場 $A(w)_{(n)}B(w)$ が定義される [3, 4]。非負の n に対してそれは縮約 $\overline{A(z)B(w)}$ における $(z-w)^{-(n+1)}$ の係数であり、また $A(w)_{(-1)}B(w) = :A(w)B(w):$ である。

命題 1 ([4], Corollaries 3.2.2. および 3.4.2.). $A(w), B(w), C(w)$ を場とする。このとき任意の $p, r \in \mathbb{N}$ および $q \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (A(w)_{(r+i)}B(w))_{(p+q-i)}C(w) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} (A(w)_{(p+r-i)}(B(w)_{(q+i)}C(w)) - (-1)^r B(w)_{(q+r-i)}(A(w)_{(p+i)}C(w))) \end{aligned} \quad (3)$$

が成り立つ。さらに、もし $A(w), B(w), C(w)$ が互いに局所的 ([4], Definition 2.1.1) であるならば、この公式は任意の $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ。

公式 (3) は頂点代数の公理の一つを成すものであり、Borcherds 恒等式と呼ばれる。

本研究は科研費 (課題番号:25400122) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 17B69, 81R10, 81T40

*¹ 〒239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校 応用科学群 応用物理学科

e-mail: takagi@nda.ac.jp

*² 現在の所属先: 〒630-8001 奈良県奈良市法華寺町 1578 航空自衛隊 幹部候補生学校

3. 両者の関係

式(3)において $r = 0, q = -1$ とおくと以下の式になる :

$$A(w)_{(p)}(B(w)_{(-1)}C(w)) = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (A(w)_{(i)}B(w))_{(p-i-1)}C(w) + B(w)_{(-1)}(A(w)_{(p)}C(w)). \quad (4)$$

Kac [3] はこれと実質的に同じ式を “non-commutative” Wick formula と呼び、それが「文献 [1] に明示的に書かれ、組織的に使用されている (... is explicitly written down and systematically used in the paper [BBSS])」と述べている。実際には [1] に書かれているのは (1) のような式であるが、積分の意味を適切に解釈してその計算を実行すると上の式が得られる。同様に、われわれの提案する公式 (2) に対しては以下の式を得る。

$$(A(w)_{(-1)}B(w))_{(q)}C(w) = \sum_{i=0}^{\infty} (A(w)_{(-i-1)}(B(w)_{(q+i)}C(w)) + B(w)_{(q-i-1)}(A(w)_{(i)}C(w))). \quad (5)$$

これは式(3)において $p = 0, r = -1$ とおいたものである。

4. 主結果

実際には 2,3 節の演算子は形式的級数で定義されており、 w に数値を代入することが許されないため積分もできない。厳密な定式化のため文献 [4] Appendix B の解析的方法を用い、行列要素で考える。 $A(w), B(w), C(w)$ はあるベクトル空間 M に作用する互いに局所的かつ許容的な演算子であると、 M_u^\vee を $u \in M$ に関してそれらの演算子に適合する限定された双対空間とする。

定理 1. 任意の $u \in M, v^\vee \in M_u^\vee$ に対して以下の式が成り立つ:

$$\langle v^\vee, \overline{(AB)(z)C(w)u} \rangle = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{C_w} \frac{dx}{z-x} \langle v^\vee, \left\{ :A(x)\overline{B(x)C(w)}: + R(B(x)\overline{A(x)C(w)}) \right\} u \rangle.$$

右辺の R は実質的に動径順序積である。証明は、定義にもとづいて左辺を 2 重積分で表し積分路を変形する方法で行うことができ、右辺の形が自然に導出される [5]。

参考文献

- [1] Bais, F.A., Bouwknegt, P., Surridge, M. and Schoutens, K.: Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac-Moody algebras using higher order Casimir invariants. Nucl. Phys. **B304**, 348-370 (1988)
- [2] Di Francesco, P., Mathieu, P. and Sénéchal, D.: Conformal Field Theory. Springer, New York (1997)
- [3] Kac, V.G.: Vertex algebras for beginners. AMS, University Lecture series, Vol. **10**, Providence (1996). Second edition, (1998)
- [4] Matsuo, A. and Nagatomo, K.: Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields. Mathematical Society of Japan, MSJ Memoirs Vol. **4**, Tokyo (1999)
- [5] Takagi, T., Yoshikawa, T.: Generalized Wick Theorems in Conformal Field Theory and the Borchers Identity. preprint, arXiv:1604.04032v2 [math-ph], (2016)

Closed topological vertex の量子ミラー曲線と q -差分型 Kac-Schwarz 作用素

高崎金久 (近畿大学理工学部)

中津了勇 (摂南大学理工学部)

Closed topological vertex の量子ミラー曲線が q 差分型 Kac-Schwarz 作用素として解釈できることを示す。同様の解釈は resolved conifold をはじめとする strip geometry 上の位相的弦理論の開弦振幅全般にもあてはまる。

1. Kac-Schwarz 作用素とその類似物

無限次元グラスマン多様体 (Sato Grassmannian) Gr の big cell の点をローラン級数の空間 $\mathbb{V} = \mathbb{C}((x))$ の部分空間

$$\mathbb{W} = \text{Span}\{\Psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \Psi_n(x) = w_{n0}x^{-n} + w_{n1}x^{-n+1} + w_{n2}x^{-n+2} + \dots,$$

として実現する (w_{n0} を 1 に正規化しないで残しておくのは、あとで生成作用素 G を考えるためである)。通常の (?) 設定では $z = x^{-1}$ を変数に用いるが、ここでは開弦振幅の母関数の作り方に合わせる。グラスマン多様体の原点 (フェルミオンフォック空間の真空) に相当するのは

$$\mathbb{W}_0 = \text{Span}\{x^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$$

である。

Kac と Schwarz [1] が弦方程式 $[P, Q] = 1$ (P, Q は z, x とは別の変数に関する有限階微分作用素である) の研究において導入した作用素 A は

$$A = \frac{d}{d(x^{-q})} + \dots = -\frac{1}{qx^{-q-1}} \frac{d}{dx} + \dots \quad (\dots \text{ は } x \text{ のローラン多項式})$$

という形の微分作用素で、弦方程式の解に対応する $\mathbb{W} \in Gr$ を不変に保つ ($A\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$)。さらに、相方の作用素 $B = x^{-q}$ ($B\mathbb{W} \subset \mathbb{W}$) とは正準交換関係 $[A, B] = 1$ に従う。

最近の一般化 Hurwitz 数の母関数や \mathbb{C}^3 , resolved conifold の開弦振幅の母関数の研究 [2, 3] においては、Kac-Schwarz 作用素の類似物として無限階微分作用素や q -差分作用素が登場する。それらは

$$\Psi_n(x) = Gx^{-n}, \quad G = G(x, D), \quad D = x \frac{d}{dx} \quad (1)$$

という生成作用素 G を用いて定義される。特に開弦振幅の場合には、 G 自体が q 差分作用素になり、Kac-Schwarz 作用素の q 類似が

$$A = G \cdot q^D \cdot G^{-1}, \quad B = G \cdot x^{-1} \cdot G^{-1} \quad (2)$$

というように定義される。 $\Psi_n(x)$ は

$$A\Psi_n(x) = q^{-n}\Psi_n(x), \quad B\Psi_n(x) = \Psi_{n+1}(x) \quad (3)$$

という方程式を満たす。 $\Psi_0(x)$ は開弦振幅の母関数そのものであり、それが満たす方程式

$$A\Psi_0(x) = \Psi_0(x) \quad (4)$$

は量子ミラー曲線とみなせる (closed topological vertex の場合は要注意である)。

2. 位相的弦理論の開弦振幅に関する結果

A. Closed topological vertex の場合

ある外線（計算が少し簡単になる）を選んで、そこに任意のヤング図形を指定した振幅を考える。開弦振幅をフェルミオン表示すれば [4]、対応する KP 階層の解がわかる。それから生成作用素 G が次のように読み取れる：

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - Q_1 Q_2 q^{i-1+D}) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - Q_1 q^{i-1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 Q_3 q^{i-1/2} x)}{(1 - q^{i-1/2} x)(1 - Q_1 Q_3 q^{i-1/2} x)} \quad (5)$$

Q_1, Q_2, Q_3 はケーラーパラメータである。これが定める A, B は次の形になる：

$$A = \frac{(1 - Q_1 Q_2 q^{D-2} - Q_1 q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{D-1} - Q_1 Q_2 Q_3 q^{1/2} x)}{(1 - Q_1 Q_2 q^{D-2} - q^{1/2} x)(1 - Q_1 Q_2 q^{D-1} - Q_1 Q_3 q^{1/2} x)} q^D, \quad (6)$$

$$B = x^{-1} (1 - Q_1 Q_2 q^{D-1}) \quad (7)$$

$\Psi_0(x)$ に対する q 差分方程式 $A\Psi_0(x) = \Psi_0(x)$ はすでに知っているものと同じである。ただし、この q 差分方程式は量子ミラー曲線そのものではなく、そこから余分の因子を取り除いてはじめて量子ミラー曲線になる [4]。

B. Strip geometry の場合

比較のため、strip geometry の場合の結果も示す。Resolved conifold（ケーラーパラメータ Q ）において対応する結果は次のようになる：

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - Qq^{i-1+D})^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{i-1/2} x)^{-1}, \quad (8)$$

$$A = (1 - q^{1/2} x (1 - Qq^D))^{-1} q^D, \quad (9)$$

$$B = x^{-1} (1 - Qq^{D-1})^{-1}. \quad (10)$$

一般の strip geometry の場合、strip の両端以外の外線の振幅に関する結果は

$$G = S(q^D) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^{i-1/2} x)^{-1}, \quad (11)$$

$$A = \left(1 - q^{1/2} x R(q^D)\right)^{-1} q^D, \quad (12)$$

$$B = x^{-1} R(q^{D-1})^{-1} \quad (13)$$

というような形になる。 $R(y)$ は有理式で、 $S(y)$ は無限乗積からなる。strip の両端の外線の振幅に対する結果は closed topological vertex に似ている。詳細は講演の際に示す。

参考文献

- [1] V. Kac and A. Schwarz, Geometric interpretation of the partition function of 2D gravity, Phys. Lett. **B257** (1991), 329–334.
- [2] J. Zhou, Emergent geometry of KP hierarchy, II, arXiv:1512.03196 [math-ph].
- [3] A. Alexandrov, D. Lewanski and S. Shadrin, Ramifications of Hurwitz theory, KP integrability and quantum curves, arXiv:1512.07026 [math-ph].
- [4] K. Takasaki and T. Nakatsu, Open string amplitudes of closed topological vertex J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016), 025201 (28pp)

Cherednik algebras and quantized Coulomb branches

小寺 諒介 (京都大学 数理解析研究所)

中島 啓 (京都大学 数理解析研究所)

1. クーロン枝

G を複素簡約代数群, \mathbf{N} をその有限次元表現とし,

$$G_{\mathcal{K}} = G(\mathbb{C}((t))), \quad G_{\mathcal{O}} = G(\mathbb{C}[[t]]), \quad \mathbf{N}_{\mathcal{O}} = \mathbf{N} \otimes \mathbb{C}[[t]]$$

と定める. $\mathbf{Gr}_G = G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ をアフィングラスマンとし,

$$\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}} = \{(gG_{\mathcal{O}}, s) \in \mathbf{Gr}_G \times \mathbf{N}_{\mathcal{O}} \mid g^{-1}s \in \mathbf{N}_{\mathcal{O}}\}$$

とする. 中島 [3], Braverman-Finkelberg-中島 [1] は同変 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}})$ 上に可換な積を定義し,

$$\mathcal{M}_C = \text{Spec } H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}})$$

と定義した. \mathcal{M}_C は, 3次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論のクーロン枝 (Coulomb branch) を, アフィン代数多様体として数学的に定義したものである. 定義から $\mathcal{A} = H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}})$ は \mathcal{M}_C の座標環を与える. $\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}}$ への \mathbb{C}^\times 作用を考えることにより, 非可換環 $\mathcal{A}_\hbar = H_*^{G_{\mathcal{O}} \times \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R}_{G,\mathbf{N}})$ が定義される. $\mathcal{A}_\hbar/\hbar\mathcal{A}_\hbar \cong \mathcal{A} = \mathbb{C}[\mathcal{M}_C]$ なので, \mathcal{A}_\hbar は \mathcal{M}_C の量子化を与えている.

次の二つの問題を考える.

- (i) G, \mathbf{N} に付随するクーロン枝 \mathcal{M}_C が物理で知られている場合, 上で与えた定義がそれを再現することをチェックせよ.
- (ii) (i) の状況で \mathcal{M}_C の自然な量子化が知られている場合, それと \mathcal{A}_\hbar が同型であることを証明せよ.

2. Jordan 箆に付随するクーロン枝

整数 $n \geq 1$ と $l \geq 0$ を固定し, $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^l$ とする. $G = GL(V)$, $\mathbf{N} = \text{End}(V) \oplus \text{Hom}(W, V)$ に対して 1 節の構成を適用する. この場合 (i) に対する答えは肯定的である.

定理 1([2]) $l = 0$ のとき

$$\mathcal{M}_C \cong (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times)^n / \mathfrak{S}_n$$

$l \geq 1$ のとき

$$\mathcal{M}_C \cong (\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}))^n / \mathfrak{S}_n$$

この設定では, 量子クーロン枝 \mathcal{A}_\hbar は $l = 0$ のとき 2 パラメータ, $l \geq 1$ のとき $l+1$ パラメータを持つ.

3. Cherednik 代数と量子クーロン枝

定理 1 の右辺の自然な量子化として, Cherednik 代数の spherical 部分代数がよく知られている. 次が主定理であり, (ii) に対する答えである.

定理 2 $G = GL(V)$, $\mathbf{N} = \text{End}(V) \oplus \text{Hom}(W, V)$ に付随する量子クーロン枝 \mathcal{A}_h は, $l = 0$ のとき trigonometric Cherednik 代数 H_n の spherical 部分代数と同型, $l \geq 1$ のとき cyclotomic Cherednik 代数 $H_{n,l}$ の spherical 部分代数と同型である.

以下で Cherednik 代数の定義を与える. $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ の第 i 成分の生成元を α_i とし, ζ を 1 の原始 l 乗根とする.

定義 trigonometric Cherednik 代数 H_n は, 2 パラメータ t, c を持ち次を満たす \mathbb{C} 代数である.

- \mathbb{C} ベクトル空間としては $H_n \cong \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \otimes \mathbb{C}[u_1, \dots, u_n]$ である.
- $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $\mathbb{C}[u_1, \dots, u_n]$ はそれぞれ部分代数かつ

$$s_i X_i = X_{i+1} s_i, \quad s_i X_j = X_j s_i \quad (j \neq i, i+1),$$

$$s_i u_i - u_{i+1} s_i = -c, \quad s_i u_j = u_j s_i \quad (j \neq i, i+1),$$

$$[u_i, X_i] = t X_i + c \left(\sum_{j < i} X_j s_{ji} + \sum_{i < j} X_i s_{ij} \right), \quad [u_i, X_j] = \begin{cases} -c X_i s_{ij} & (i < j) \\ -c X_j s_{ji} & (j < i) \end{cases}$$

cyclotomic Cherednik 代数 $H_{n,l}$ は, $l+1$ パラメータ $t, c, c_1, \dots, c_{l-1}$ を持ち次を満たす \mathbb{C} 代数である.

- \mathbb{C} ベクトル空間としては $H_{n,l} \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n] \otimes \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ である.
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n]$, $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ はそれぞれ部分代数かつ

$$s_i x_i = x_{i+1} s_i, \quad s_i x_j = x_j s_i \quad (j \neq i, i+1), \quad \alpha_i x_i = \zeta x_i \alpha_i, \quad \alpha_i x_j = x_j \alpha_i \quad (j \neq i),$$

$$s_i y_i = y_{i+1} s_i, \quad s_i y_j = y_j s_i \quad (j \neq i, i+1), \quad \alpha_i y_i = \zeta^{-1} y_i \alpha_i, \quad \alpha_i y_j = y_j \alpha_i \quad (j \neq i),$$

$$[y_i, x_j] = \begin{cases} t + c \sum_{k \neq i} \sum_{m=0}^{l-1} s_{ik} \alpha_i^m \alpha_k^{-m} + \sum_{m=1}^{l-1} c_m \alpha_i^m & (i = j) \\ -c \sum_{m=0}^{l-1} \zeta^m s_{ij} \alpha_i^m \alpha_j^{-m} & (i \neq j) \end{cases}$$

\mathfrak{S}_n ($l = 0$ のとき), $\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ ($l \geq 1$ のとき) の自明表現に対応する冪等元を e とし, Cherednik 代数 $H = H_n, H_{n,l}$ の spherical 部分代数を eHe で定義する.

参考文献

- [1] A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, II*, arXiv:1601.03586.
- [2] A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, *Coulomb branches of 3d $\mathcal{N} = 4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian* (with appendices by A. Braverman, M. Finkelberg, J. Kamnitzer, R. Kodera, H. Nakajima, B. Webster, and A. Weekes), arXiv:1604.03625.
- [3] H. Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, I*, arXiv:1503.03676.

Pieri rule for the K -theoretic P -functions

池田 岳 (岡山理科大学)*

概 要

K 理論的 P 関数は極大直交型 Grassmann 多様体の Schubert 構造層と同一視される (Naruse and Ikeda, Adv. Math. 2013). K 理論における積構造定数について set-valued decomposition tableaux を用いた予想を与える. この予想は Schur P 関数の構造定数に対する Cho (Trans. AMS, 2013) の結果の拡張である. Clifford, Thomas, and Yong (Crelle's journal, 2014), Pechenik and Yong (preprint, 2016) によって先に得られた記述との関係はまだわかっていない. 今回, ピエリ規則に相当する場合に予想が証明できたので報告する. Soojin Cho (Ajou university) との共同研究に基づく.

1. K 理論的 P 関数 $GP_\lambda(x|t)$ の定義

$\lambda = (\lambda_1 > \dots > \lambda_\ell > 0)$ を $\ell \leq n$ をみたす整数列とする. これを **strict partition** と呼ぶ. ℓ を λ の **length** と呼び $\ell(\lambda)$ で表す. x_1, \dots, x_n を変数として K -理論的 P -関数を

$$GP_\lambda(x|t) = \frac{1}{(n - \ell(\lambda))!} \sum_{w \in S_n} w \left(\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} x_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right)$$

と定義する (Naruse-Ikeda, 2013). ただし, ここに β をパラメータとして

$$x \oplus y = x + y + \beta xy, \quad x \ominus y = (x - y)/(1 + \beta y) \quad (1.1)$$

とした. n 次対称群 S_n の元 w は変数 x_1, \dots, x_n を置換する. $GP_\lambda(x)$ は多項式であることが示せる.

λ, μ, ν を strict partitions とする. 下のように**構造定数** $f_{\lambda, \mu}^\nu$ を定めることができる:

$$GP_\lambda(x) \cdot GP_\mu(x) = \sum_{\nu} \beta^{|\nu| - |\lambda| - |\mu|} f_{\lambda, \mu}^\nu \cdot GP_\nu(x). \quad (1.2)$$

GP_λ は $\beta = -1$ と特殊化するとき直交型の極大 Grassmann 多様体の K 理論的 Schubert 類と同一視されることがわかっている. 構造定数 $f_{\lambda, \mu}^\nu$ の組合せ的記述を与えることが目的である. この問題に関しては, 幾何的な結果 (Buch and Ravikumar, Crelle's journal, 2012) を元にして組合せ論を展開することで構造定数を与える Clifford, Thomas, and Yong (K 理論的 jeu de Taquin), Pechenik and Yong (Genomic tableaux) の先行結果がある. 本研究は GP 関数によるアプローチで構造定数の新しい組合せ的記述を予想し, 特別な場合に証明を与えた.

中筋麻貴さんには, 有益な議論, および Sage によるプログラム作成に対して, 深く感謝しています. なお, 本研究は科研費 (課題番号:15K04832) の助成を受けています.

2010 Mathematics Subject Classification: 4N15, 14M15

キーワード: Schubert calculus, orthogonal Grassmannian, K -theory

* e-mail: ike@xmath.ous.ac.jp

2. 集合値 decomposition tableaux

定義 2.1. $\{1, 2, \dots, n\}$ の元からなる有限列 (u_1, \dots, u_m) を **word** といい $u_1 \cdots u_m$ などと書く. Word $u_1 \cdots u_m$ が **reverse hook word** であるとは, ある $1 \leq s \leq m$ があって

$$u_1 < \cdots < u_s \geq u_{s+1} \geq \cdots \geq u_m \quad (2.3)$$

が成り立つことをいう.

定義 2.2 (Decomposition tableaux due to Serrano). Word $v = v_1 \cdots v_m$ が **reverse decomposition tableau** であるとは $m = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ をみたす strict partition $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{\ell})$ が存在して,

$$u_1 = v_1 \cdots v_{\lambda_{\ell}}, \quad u_i = v_{\lambda_{\ell} + \cdots + \lambda_{\ell-i+2} + 1} \cdots v_{\lambda_{\ell} + \cdots + \lambda_{\ell-i+1}} \quad (2 \leq i \leq \ell) \quad (2.4)$$

とするとき word の連結 (concatenation) $u_{i+1}u_i$ ($1 \leq i \leq \ell - 1$) において長さが λ_i より大きい reverse hook word である subword が存在しないことをいう. このとき λ を reverse decomposition v の形 (**shape**) という.

定義 2.3 (Set-valued decomposition tableaux). $\{1, \dots, n\}$ の空でない部分集合からなる列 $S = (S_1, \dots, S_m)$ を **set-valued word** と呼ぶ. Strict partition λ が存在し, $S_1 \times \cdots \times S_m$ の元を長さ m の word と見るときそれらがすべて形 λ の reverse decomposition tableau であるならば S は **set-valued reverse decomposition tableau** (SVRDT) であるという. SVRDT(λ) により形 λ の set-valued reverse decomposition tableaux 全体の集合を表す.

Set-valued word $S = (S_1, \dots, S_m)$ に対して, S_1, \dots, S_m に含まれる i の個数の総和を $\omega_i(S)$ で表す. $\omega(S) = (\omega_1(S), \dots, \omega_n(S)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ を S の **content** と呼ぶ. $|S| = \sum_{i=1}^n \omega_i(S)$, $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$ とする.

予想 2.1. 次が成り立つ

$$GP_{\lambda}(x) = \sum_{S \in \text{SVRDT}(\lambda)} \beta^{|\lambda| - |\lambda|} x^{\omega(S)}. \quad (2.5)$$

3. 構造定数の記述 — 予想, ピエリの規則

定義 3.1. $S = S_1 \cdots S_m \in \text{SVRDT}(\lambda)$ に対して $i = 1$ から $i = m$ の順に S_i の元を大きいものから順に並べて並べて得られる word を $\text{rw}(S)$ とする.

定義 3.2 (λ -good SVRDTs). λ, μ を strict partition とする. $S \in \text{SVRDT}(\mu)$ が λ -good であるとはすべての $k \geq 1$ に対して $\lambda + \omega(\text{rw}(S)_{\geq k})$ が strict partition であることをいう. $\text{rw}(S)_{\geq k}$ は $\text{rw}(S)$ の最初の k 文字からなる subword である.

予想 3.1. 次が成り立つ

$$f_{\lambda, \mu}^{\nu} = \#\{S \in \text{SVRDT}(\mu) \mid S \text{ is } \lambda\text{-good}, \omega(S) = \nu - \lambda\}. \quad (3.6)$$

定理 3.1 (GP 関数の Pieri rule). $\mu = (m)$ のとき予想 3.1 は正しい.

証明の方針は Cho による P 関数の構造定数に関する証明方法を集合値に拡張するものである.

Positive Representations of Split Real Quantum Groups

Ivan IP (Kyoto University)*

1. Positive Representations

The notion of *positive representations* was introduced in [2] and constructed in [4, 5] as a new research program devoted to the representation theory of split real quantum groups $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ and its modular double.

Let $q = e^{\pi i b^2}$, that is not a root of unity and $0 < b < 1$. We denote by $\mathcal{U} := \mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ the Hopf-* algebra of Drinfeld-Jimbo type associated to simple Lie algebra \mathfrak{g} generated by $\{E_i, F_i, K_i\}_{i \in I}$ where I is the set of simple roots, and the generators are self-adjoint:

$$E_i^* = E_i, \quad F_i^* = F_i, \quad K_i^* = K_i. \quad (1)$$

Generalizing the work of Teschner *et al.* [1, 6] on $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, we constructed for any $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ irreducible representations \mathcal{P}_λ of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ parametrized by $\lambda \in \mathbb{R}_+$ -span of the positive weights $P_+ \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, and satisfying the following properties:

Theorem 1.1. [2, 4, 5]

- The generators $\{E_i, F_i, K_i\}$ are represented by positive self-adjoint operators on $L^2(\mathbb{R}^N)$ where N is the length of the longest element w_0 of the Weyl group.
- Let $\tilde{q} = e^{\pi i b^{-2}}$. Define (for rescaled generators)

$$\tilde{e}_i := e_i^{\frac{1}{b^2}}, \quad \tilde{f}_i := f_i^{\frac{1}{b^2}}, \quad \tilde{K}_i := K_i^{\frac{1}{b^2}} \quad (2)$$

- in type ADE, $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ generates $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U}_{\tilde{q}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$,
- in type BCFG, $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ generates the Langlands dual $\tilde{\mathcal{U}} := \mathcal{U}_{\tilde{q}}({}^L\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$.

- the generators $\{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i, \tilde{K}_i\}$ commute weakly with $\{e_i, f_i, K_i\}$ up to a sign.

We call the family \mathcal{P}_λ the **positive representations** of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ and its modular double $\mathcal{U}_{q\tilde{q}}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) := \mathcal{U} \otimes \tilde{\mathcal{U}}$. The explicit representations of \mathcal{P}_λ has a particular nice form:

Theorem 1.2. [2, 4, 5] The generators $\{E_i, F_i, K_i\}$ can be expressed as Laurent polynomials in $\{U_k, V_k\}_{k=1}^N$ with positive coefficients in $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q, q^{-1}]$, where $U_k V_k = q^2 V_k U_k$ are N copies of the quantum planes. Moreover, if we set

$$U_k = e^{2\pi b x_k}, \quad V_k = e^{2\pi b p_k} \quad (3)$$

as the canonical representation of the quantum plane by positive operators, it recovers the action on \mathcal{P}_λ such that K_i is represented by multiplication operators. Finally, each triplet $\{E_i, F_i, K_i\}$ is unitary equivalent to Teschner's representation of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$.

This work was supported by KAKENHI JP26800004, JP16K17571.

2010 Mathematics Subject Classification: 81R50, 17B37.

Keywords: positive representations, modular double.

*e-mail: ivan.ip@math.kyoto-u.ac.jp

web: <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ivan.ip/>

2. Applications

The positive representations of $\mathcal{U}_{q\tilde{q}}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ demonstrated many properties parallel to the representation theory of compact quantum groups. Most importantly:

Theorem 2.1. [1, 6] \mathcal{P}_λ carries a (continuous) braided tensor category structure:

$$C : \mathcal{P}_\alpha \otimes \mathcal{P}_\beta \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \mathcal{P}_\gamma d\mu(\gamma), \quad R : \mathcal{P}_\alpha \otimes \mathcal{P}_\beta \simeq \mathcal{P}_\beta \otimes \mathcal{P}_\alpha \quad (4)$$

where the measure $d\mu(\gamma)$ is defined by the quantum dilogarithm.

Theorem 2.2. [3] Peter-Weyl theorem (with the L^2 -space appropriately defined):

$$L^2(SL_{q\tilde{q}}^+(2, \mathbb{R})) \simeq \int_{\mathbb{R}_+}^{\oplus} \mathcal{P}_\gamma \otimes \mathcal{P}_\gamma^* d\mu(\gamma) \quad (5)$$

Hence we expect the positive representations \mathcal{P}_λ for $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g}_\mathbb{R})$ will also carry a braided tensor category structure, and generalize the applications coming from compact quantum groups, in particular 3-manifold invariants of Reshetikhin-Turaev type.

Further connections to other areas include:

- **Cluster algebra:** The construction of \mathcal{P}_λ involves totally positive matrix, and the mutations associated to choice of w_0 coincides with some cluster mutations by quantum dilogarithms. Also, the explicit form of \mathcal{P}_λ involves positive coefficients which is closely related to the positivity phenomenon of cluster algebra.
- **Quantum Teichmüller theory:** by restricting \mathcal{P}_λ to the Borel part $\mathfrak{b}_\mathbb{R}$ of $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, we constructed the quantum mutation operator \mathbf{T} of the Kashaev's groupoid, generalizing Frenkel-Kim's construction [?] by the quantum plane.
- **Non-commutative geometry:** Positivity of the generators allowed us to defined a multiplier Hopf algebra structure of the split real quantum group, hence bringing Drinfeld-Jimbo quantum group to the C^* -algebraic level. As a result, we defined a continuous version of PBW basis, and constructed the universal R operator using the multiplier Drinfeld double, giving \mathcal{P}_λ a braiding structure.
- **Singular theory:** Recently we studied the Casimir operators, and by introducing the idea of virtual highest weights, we found that the eigenvalues are positive, and bound a region with singularity defined by the so-called discriminant variety, which is closely related to singular theory and primitive forms.

References

- [1] A.G. Bytsko, K. Teschner, *R-operator, co-product and Haar-measure for the modular double of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **240**, 171-196, (2003)
- [2] I. Frenkel, I. Ip, *Positive representations of split real quantum groups and future perspectives*, Int. Math. Res. Notices, **2014** (8), 2126-2164, (2014)
- [3] I. Ip, *Representation of the quantum plane, its quantum double and harmonic analysis on $GL_q^+(2, R)$* , Selecta Mathematica New Series, **19** (4), 987-1082, (2013)
- [4] I. Ip, *Positive representations of split real simply-laced quantum groups*, preprint, (2012)
- [5] I. Ip, *Positive representations of split real non-simply-laced quantum groups*, J. Alg (2015) **425**, 245-276, (2015)
- [6] B. Ponsot, J. Teschner, *Clebsch-Gordan and Racah-Wigner coefficients for a continuous series of representations of $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$* , Comm. Math. Phys., **224**, 613-655, (2001)

On the cohomology of conical symplectic resolutions

疋田 辰之 (京都大学数理解析研究所)*

概 要

A 型 Springer fiber のコホモロジー環が冪零軌道の閉包と Cartan 部分代数とのスキーム論的共通部分の座標環と同型であるという DeConcini-Procesi, Tanisaki の結果を conical symplectic resolution のコホモロジー環の記述に一般化する予想を定式化する. 予想の定式化には Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality と呼ばれる双対性を用いる.

1. Introduction

\mathbb{C} 上の半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の表現論はその普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の表現論と等価であり, その中心指標 $\chi : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ を固定した表現を考えることは $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi)$ の表現を考えることと等価である. そして $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi)$ は旗多様体 $\mathcal{B} = \{\text{Borel subalgebra } \subset \mathfrak{g}\}$ 上の (twisted) 微分作用素のなす環の層 \mathcal{D} の大域切断と同型であり, 適切な条件の下で $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi)$ の表現のなす圏と \mathcal{B} 上の \mathcal{D} 加群のなす圏は圏同値になる. このことを用いて例えば Kazhdan-Lusztig 予想のような問題が解決されたことはよく知られている (Beilinson-Bernstein, Brylinski-Kashiwara).

一方で $U(\mathfrak{g})$ や \mathcal{D} は自然な filtration を持ち, $\text{gr}(U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi))$ は \mathfrak{g} の nilpotent cone \mathcal{N} の座標環と (Poisson 代数として) 同型である. そして $\text{gr } \mathcal{D}$ は $T^*\mathcal{B}$ の構造層 (を \mathcal{B} に押し出したもの) と同型である. したがって $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi)$ や \mathcal{D} は $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ や $\mathcal{O}_{T^*\mathcal{B}}$ の非可換変形とみなせる. そして $T^*\mathcal{B}$ は \mathcal{N} の特異点解消 (より強く, conical symplectic resolution) になっており (Springer resolution と呼ばれる), 上の圏同値は conical symplectic resolution とその affinization の量子化の文脈に一般化することができる. 雑に言えば conical symplectic resolution は半単純 Lie 代数の一般化と思えなくもない.

ところで半単純 Lie 代数には分類があり, root と coroot をひっくり返すことによってその Langlands dual な Lie 代数を考えることができる. conical symplectic resolution の分類は知られていないが, 様々な具体例において, Langlands dual の関係にある半単純 Lie 環に付随する Springer resolution に対して成り立つ様々な性質が他の conical symplectic resolution のペアについても成り立つことが観察されている. このような conical symplectic resolution の間の双対性は symplectic duality と呼ばれており, Braden-Licata-Proudfoot-Webster によってそこで成り立つべき性質が多数定式化されている. ここではそのような性質と思われる現象をさらに付け加えることを試みる. 記号等の説明は後で行うことにするが, つまりは次のような現象があるということを主張したい.

Conjecture 1.1 ([10]). $(\mathfrak{M}, \mathcal{S}, \mathbb{T})$ と $(\mathfrak{M}', \mathcal{S}', \mathbb{T}')$ が symplectic dual のとき, 次数付き代数として

$$\begin{aligned} H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}'_0)^{\mathbb{T}'}], \\ H^*(\mathfrak{M}', \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}] \end{aligned}$$

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所
e-mail: thikita@kurims.kyoto-u.ac.jp

が成り立つ. ここで右辺の次数は \mathbb{S}^l , \mathbb{S} 作用から定まるものである.

ただし現状では symplectic duality の理解が不足しているため, その“定義”は conical symplectic resolution のペアであって期待される性質が成り立つもの, という暫定的な形を取っている. つまり conical symplectic resolution が与えられたときに, その symplectic dual を内在的に構成あるいは特徴付ける方法は知られていない (ただし [5] を参照). したがって symplectic duality という概念に依存するこの予想が意味する内容は将来的に変動する可能性があるが, 少なくとも具体例においては意味の定まる予想であり, 実際様々な例で成り立っていることが確認できるというのが本稿の内容である.

2. Conical symplectic resolutions

2.1. Definition

\mathfrak{M} を smooth algebraic symplectic variety, ω をその上の symplectic form とする.

Definition 2.1 (conical symplectic resolution). \mathfrak{M} とそこへの $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ が conical symplectic resolution であるとは,

1. $s^*\omega = s^2\omega$, $s \in \mathbb{S}$,
2. $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}_0 := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は projective birational,
3. $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = 0$,

が成り立つことを言う. ここで $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ は \mathbb{S} -weight が i の部分を表し, $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]_{<0} = \bigoplus_{i<0} \mathbb{C}[\mathfrak{M}]_i$ である.

Remark 2.2. [3] では $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $s^*\omega = s^\ell\omega$ となる状況で考えているが, ここで現れる例はすべて $\ell = 2$ と取れることと, 例えば $T^*\mathcal{B}$ などの場合に Conjecture 1.1 の cohomological degree と合わせるためにここでは $\ell = 2$ を仮定する.

\mathfrak{M}_0 は normal であり, 唯一の \mathbb{S} 固定点 o を持つ. 基本的な conical symplectic resolution の性質としては例えば次のようなものがある.

Proposition 2.3. $(\mathfrak{M}, \mathbb{S})$ を conical symplectic resolution とする. このとき次が成り立つ.

1. $R\pi_*\mathcal{O}_{\mathfrak{M}} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}_0}$, つまり \mathfrak{M}_0 は有理特異点を持つ.
2. \mathfrak{M} と $\mathfrak{L} := \pi^{-1}(o)$ はホモトピー同値, 特に $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$.
3. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ は isotropic subvariety.

Remark 2.4. 多くの例では $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$ は Lagrangian subvariety になっているが, 例えば $\mathfrak{M} = \mathbb{C}^2$ の場合 $\mathfrak{L} = \{0\}$ となり Lagrangian にはならない. 後でこのような例を除くための条件を課す (cf. § 3.1 の条件 3).

Theorem 2.5 (Kaledin [11]). 1. 有限個の strata による stratification $\mathfrak{M}_0 = \sqcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$ であって各 \mathfrak{M}_α が smooth symplectic になるものが存在する.

2. π は semi-small, つまり $\text{codim}_{\mathfrak{M}_0}\{x \in \mathfrak{M}_0 \mid \dim \pi^{-1}(x) \geq d\} \geq 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成立する.

$$3. H^{\text{odd}}(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) = 0.$$

上に現れる \mathfrak{M}_α を \mathfrak{M}_0 の symplectic leaf と呼ぶ。また、奇数次のコホモロジーが消えることから $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ は可換環になる。

2.2. Quantization of conical symplectic resolutions

symplectic form ω により $\mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ は Poisson 代数の構造を持つ。 \mathfrak{M}_0 の smooth locus 上にある symplectic form を用いると、smooth locus 上の Poisson 構造が定まるが、 \mathfrak{M}_0 が normal であることからこれは \mathfrak{M}_0 全体に延びる。特に $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ は Poisson 代数の構造を持つ。

Definition 2.6 (quantization). (\mathfrak{M}, ω) の量子化とは

1. \mathcal{Q} : \mathfrak{M} 上の結合的な平坦 $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -代数の (Zariski 位相に関する) 層であって \hbar -進位相に関して完備なもの
2. $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$: 代数の同型

の組であって $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q}$ が可換になることから誘導される Poisson 代数の構造が同型 $\mathcal{Q}/\hbar\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{M}}$ と compatible になるようなものを言う。

$Q(\mathfrak{M}, \omega)$ で (\mathfrak{M}, ω) の量子化の同型類の集合を表すことにする。このとき次の結果が知られている。

Theorem 2.7 (Bezrukavnikov-Kaledin [2]). 自然な全単射 (noncommutative period map と呼ばれる)

$$\text{Per} : Q(\mathfrak{M}, \omega) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})[[\hbar]]$$

が存在する。

$\text{Per}(\mathcal{Q}) = 0$ となる量子化を canonical な量子化と呼ぶ。また \mathbb{S} 作用を用いると \mathbb{S} 同変な量子化の概念を定義することができる。ただし \hbar の \mathbb{S} -weight は 2 とする。 $Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}}$ で \mathbb{S} 同変な量子化の同型類の集合を表すことにする。このとき次が知られている。

Proposition 2.8 (Losev [16]). Per は次の全単射を誘導する

$$Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}} \xrightarrow{\sim} H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$$

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)^{\mathbb{S}}$ とする。 $\mathcal{D} := \mathcal{Q}[\hbar^{-1/2}]$ とおき、 $\mathcal{D}(m) \subset \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}(0) := \mathcal{Q}[\hbar^{1/2}]$, $\mathcal{D}(m) := \hbar^{-m/2}\mathcal{D}(0)$ により定める。 $A := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D})^{\mathbb{S}}$ とすると、これは filtration $A(0) \subset A(1) \subset \dots \subset A$ (ここで $A(m) := \Gamma(\mathfrak{M}, \mathcal{D}(m))^{\mathbb{S}}$) を持ち、 $\text{gr } A$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ と次数付き Poisson 代数として同型になる。

2.3. Springer resolutions

最も基本的な conical symplectic resolution の例は Springer resolution である。 G を \mathbb{C} 上の半単純代数群、 B をその Borel 部分群、 $T \subset B$ を Cartan 部分群とする。 $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ をそれぞれ G, B, T の Lie 代数とし、 Killing form によって \mathfrak{g} とその双対と同一視する ($\kappa : \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}^*$)。 $\mathcal{N} \subset \mathfrak{g}^*$ を \mathfrak{g} の nilpotent cone の κ による像とする。

$$T^*(G/B) \simeq \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g}^* \mid \text{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{b}^\perp\}$$

を Springer resolution と呼ぶ。 $T^*(G/B)$ は余接空間なので smooth かつ symplectic form を持つ。 さらに第 2 成分への射影 $\mu : T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$ は projective かつ birational である。 $T^*(G/B)$ への \mathbb{S} 作用は $s \cdot (gB, X) = (gB, s^{-2}X)$ により与える。 また $T^*(G/B) \xrightarrow{\mu} \mathcal{N} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ は $T^*(G/B)$ への G 作用に関する moment map でもある。

Proposition 2.9. 1. $T^*(G/B)$ は conical symplectic resolution であり, その affinization は \mathcal{N} .

2. \mathcal{N} の symplectic leaf は G の adjoint orbit.

3. $\lambda \in H^2(T^*(G/B), \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{k}^*$ に対応する $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ の量子化は $U(\mathfrak{g})/(\text{Ker } \chi_\lambda)$. ここで $\chi_\lambda : Z(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ は highest weight $\lambda - \rho$ の Verma 加群の中心指標である。

2.4. Slodowy varieties

Springer resolution を冪零軌道の slice の κ による像に制限することで別の conical symplectic resolution が得られる。 $e \in \mathfrak{g}$ を冪零元, (e, h, f) を e を含む \mathfrak{sl}_2 -triple とする。 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)$ を \mathfrak{g} 中での f の centralizer とする。 このとき $S_e := \kappa(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f)) \cap \mathcal{N}$ を Slodowy slice と呼び, Springer resolution を $S_e \hookrightarrow \mathcal{N}$ に制限したものを $\tilde{S}_e \rightarrow S_e$ とする。 \tilde{S}_e を Slodowy variety と呼ぶ。 \tilde{S}_e への \mathbb{S} 作用は $s \cdot (gB, X) = (s^h gB, s^{-2} \text{Ad}(s^h)X)$ により定める。 $\chi := \kappa(e) \in S_e$ は S_e の唯一の \mathbb{S} 固定点になる。 $\mathcal{B}_e := \mu^{-1}(\chi)$ を e に付随する Springer fiber と呼ぶ。

$\mathfrak{g}(i) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = ix\}$ とおく。 $\mathfrak{g}(-1) \times \mathfrak{g}(-1) \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \chi([x, y])$ は $\mathfrak{g}(-1)$ 上の skew-symmetric な非退化双線型形式を定める。 Lagrangian subspace $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}(-1)$ を一つ固定し, $\mathfrak{m} := \mathfrak{l} \oplus (\oplus_{i \leq -2} \mathfrak{g}(i))$ とおく。 $M \subset G$ をそのリー代数が \mathfrak{m} となる冪単部分群とすると, M の $T^*(G/B)$ への作用の moment map は μ と $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{m}^*$ の合成で与えられる。

Proposition 2.10 (cf. [8]). 1. $\mathcal{N} \cap (\chi + \mathfrak{m}^\perp)$ に M は自由に作用し,

$$S_e \simeq (\mathcal{N} \cap (\chi + \mathfrak{m}^\perp))/M.$$

2. $\mu^{-1}(\mathcal{N} \cap (\chi + \mathfrak{m}^\perp))$ は smooth かつ M が自由に作用し,

$$\tilde{S}_e \simeq \mu^{-1}(\mathcal{N} \cap (\chi + \mathfrak{m}^\perp))/M.$$

特に \tilde{S}_e は symplectic reduction で書けるので symplectic である。 また, この Hamiltonian reduction としての S_e の記述を量子化することで finite W-algebra (の central quotient) が定義される。 \mathfrak{m}_χ を $\mathfrak{m} \rightarrow U(\mathfrak{g}), m \mapsto m - \chi(m)$, の像とする。

Definition 2.11 (finite W-algebra). $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{m}_\chi)^{\text{adm}}$ は自然に associative algebra の構造を持ち, これを finite W-algebra と呼ぶ。

Proposition 2.12. 1. \tilde{S}_e は conical symplectic resolution で, その affinization は S_e .

2. S_e の symplectic leaf は G の adjoint orbit と $\kappa(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f))$ の共通部分。

3. $\lambda \in H^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C})$ が自然な射 $H^2(T^*(G/B), \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C})$ の像に入るとき, 対応する $\mathbb{C}[S_e]$ の量子化は finite W-algebra の central quotient.

Remark 2.13. 一部の例外を除いて (特に G が simply-laced ならいつでも) $H^2(\tilde{S}_e, \mathbb{C}) \simeq H^2(T^*(G/B), \mathbb{C})$ (cf. [14])

2.5. S3 varieties of type A

$B \subset P \subset G$ を放物型部分群とすると、一般に $T^*(G/P)$ もまた conical symplectic resolution となり、例えば A 型の場合にはその affinization も具体的に与えられる。簡単のためここでは $G = \mathrm{SL}_n$ とする。 P の Levi 部分群の block の大きさをみることで分割 $\lambda \vdash n$ が定まる。 \mathfrak{p} を P の Lie 代数とする。 $\mathcal{N}_P := \mathrm{Ad}(G)(\mathfrak{p}^\perp) \subset \mathcal{N}$ とおく。このとき

$$T^*(G/P) \simeq \{(gP, X) \in G/P \times \mathfrak{g}^* \mid \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{p}^\perp\}$$

であり、第 2 成分への射影は $\mu_P : T^*(G/P) \rightarrow \mathcal{N}_P$ という射を与える。 $T^*(G/P)$ への \mathbb{S} 作用は Springer resolution の場合と同じく $s \cdot (gP, X) = (gP, s^{-2}X)$ で与える。

Proposition 2.14. 1. \mathcal{N}_P は Jordan type が λ の転置で与えられる冪零軌道の閉包の κ による像。

2. $T^*(G/P)$ は conical symplectic resolution で、その affinization は \mathcal{N}_P 。

3. \mathcal{N}_P の symplectic leaf は G の adjoint orbit。

Remark 2.15. A 型以外では μ_P は一般に generically finite であり、これが birational でも \mathcal{N}_P (これは Richardson orbit と呼ばれる冪零軌道の閉包と同型になる) は normal とは限らない。

Slodowy variety の場合と同様に μ_P を slice に制限したものはまた conical symplectic resolution を与える。放物型部分群 $B \subset Q \subset G$ をもう一つ取る。 L_Q を Q の Levi 部分群、 \mathfrak{l}_Q をその Lie 代数とする。 regular nilpotent 元 $e_Q \in \mathfrak{l}_Q$ を一つ固定し、 $\{e_Q, h_Q, f_Q\}$ を \mathfrak{l}_Q の中の \mathfrak{sl}_2 -triple とする。 μ_P を $\kappa(e_Q + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f_Q)) \cap \mathcal{N}_P \hookrightarrow \mathcal{N}_P$ に制限したものを $\mathcal{Y}_Q^P \rightarrow \kappa(e_Q + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(f_Q)) \cap \mathcal{N}_P$ と書くことにする。 $\mu_P^{-1}(\kappa(e_Q))$ は Spaltenstein variety と呼ばれ、 \mathcal{Y}_Q^P は S3 variety と呼ばれる。ちなみに S3 とは Slodowy, Spaltenstein, Springer のことである ([27])。例えば $Q = B$ のときは $e_Q = 0$ であり、 $\mathcal{Y}_Q^P = T^*(G/P)$ となる。逆に $P = B$ のときは $\mathcal{Y}_Q^P = \tilde{S}_{e_Q}$ となる。

2.6. Hypertoric varieties

$T^*\mathbb{C}^n$ のトーラス作用に関する Hamiltonian reduction によって conical symplectic resolution を構成することもできる (より詳しくは [24] を参照)。 $T^n = (\mathbb{C}^*)^n$ を n 次元トーラスとし、 \mathfrak{t}^n をその Lie 代数、 $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^n \simeq \mathbb{Z}^n$ を \mathfrak{t}^n の lattice とする。 $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^n$ を 0 でないベクトルの集合であって $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^n$ を張るものとする。 \mathfrak{t}^n の自然な基底を a_i に移すことによって $a : \mathfrak{t}^n \rightarrow \mathfrak{t}^d$ が定まり、次の完全系列が得られる

$$0 \rightarrow \mathfrak{t}^k \xrightarrow{L} \mathfrak{t}^n \xrightarrow{a} \mathfrak{t}^d \rightarrow 0.$$

これはトーラスの完全系列

$$1 \rightarrow T^k \rightarrow T^n \rightarrow T^d \rightarrow 1$$

を誘導する。

$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n, t_1^{-1} w_1, \dots, t_n^{-1} w_n)$ で与えられる T^n の $T^*\mathbb{C}^n$ への Hamiltonian な作用を考える。この作用に関する moment map は $\mu_n : T^*\mathbb{C}^n \rightarrow (\mathfrak{t}^n)^*$ 、 $\mu_n(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n) = (z_1 w_1, \dots, z_n w_n)$ であり、作用を部分

トーラス T^k に制限したものに関する moment map は $\mu = \iota^* \circ \mu_n$ である. $\alpha \in (\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^k)^*$ を T^k の指標とみなし, α に関する GIT 商 $\mu^{-1}(0) //_{\alpha} T^k$ を考える. これを hypertoric variety と呼ぶ. $\{a_1, \dots, a_n\}$ が unimodular のとき, すなわち任意の線形独立な部分集合 $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_d}\}$ が $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^k$ を張るとき, generic な α に対して hypertoric variety は smooth になることが知られており, \mathbb{S} 作用として $T^* \mathbb{C}^n$ への $s \cdot (z, w) = (s^{-1}z, s^{-1}w)$ という作用から誘導される作用を取ればこれは conical symplectic resolution になる.

2.7. Hilbert scheme of points

\mathbb{C}^2 中の n 点の Hilbert scheme $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) := \{I \subset \mathbb{C}[x, y] : \text{イデアル} \mid \dim \mathbb{C}[x, y]/I = n\}$ も conical symplectic resolution の例を与える (詳しくは [19] を参照). イデアルの定める閉部分スキームの点を重複度込みで足し上げることで Hilbert-Chow 射 $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \rightarrow \text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ が定まり, これは特異点解消になる. \mathbb{S} 作用は \mathbb{C}^2 への $s \cdot (x, y) = (s^{-1}x, s^{-1}y)$ という作用から誘導されるものを考える.

Definition 2.16 (rational Cherednik algebra). H_k を生成元が $\mathfrak{S}_n, x_i, y_i (i = 1, \dots, n)$, 関係式が $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0, wx_iw^{-1} = x_{w(i)}, wy_iw^{-1} = y_{w(i)}, [y_i, x_j] = ks_{ij} (i \neq j), [y_i, x_i] = 1 - k \sum_{j \neq i} s_{ij}$ で与えられる \mathbb{C} 上の associative algebra とする. ここで $s_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ は i と j の入れ替えである. H_k を (GL_n 型の) rational Cherednik algebra と呼び, $eH_k e$ を spherical rational Cherednik algebra と呼ぶ. ここで $e := \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w$ である.

Proposition 2.17. 1. $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ は conical symplectic resolution でその affinization は $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$.

2. $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^2)$ の symplectic leaf は点の重複度を並べることで得られる partition が一定になる locus.

3. quantization は GL_n 型の spherical rational Cherednik algebra.

平行移動によって \mathbb{C}^2 は $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ に作用する. $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2) \subset \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ を n 点の重心が原点になる locus とすると, $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2) \simeq \text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2) \times \mathbb{C}^2$ となる. $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ もまた conical symplectic resolution である.

2.8. Poisson deformation

既に述べたように \mathfrak{M} の非可換方向への変形のパラメータは $\mathfrak{t}^V := H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ で与えられていたが, 同様に可換な方向への変形のパラメータも \mathfrak{t}^V で与えられることが知られている. ここでの変形は Poisson 構造のデータ込みで考えている.

$(X, \{\cdot, \cdot\})$ を Poisson スキームとする. $\text{Art}_{\mathbb{C}}$ を局所 Artin \mathbb{C} -代数 (A, \mathfrak{m}_A) であつて $A/\mathfrak{m}_A \simeq \mathbb{C}$ となるもののなす圏とする. $(A, \mathfrak{m}_A) \in \text{Art}_{\mathbb{C}}$ に対して, $(X, \{\cdot, \cdot\})$ の $S = \text{Spec}(A)$ 上無限小 Poisson 変形とは, 平坦射 $\mathcal{X} \rightarrow S$ と S 上 relative な Poisson 構造 $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \times \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の組であつて \mathfrak{m}_A に対応する点に制限したとき $(X, \{\cdot, \cdot\})$ と一致するようなものを言う. $\text{PD}_{\mathcal{X}}$ で (A, \mathfrak{m}_A) に対して S 上の Poisson 変形全体の集合を対応させる $\text{Art}_{\mathbb{C}}$ から集合の圏への関手を表す. このとき, \mathfrak{M} や \mathfrak{M}_0 の Poisson 変形に関して例えば次のような結果が知られている.

Theorem 2.18 (Namikawa [20], [21], [22]). 以下の性質を満たす可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}_0 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathfrak{t}^\vee & \xrightarrow{h} & \mathfrak{t}^\vee/W \end{array}$$

1. W は有限群 (Namikawa Weyl 群と呼ばれる) で, W は \mathfrak{t}^\vee に作用する.
2. $\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{t}^\vee$, $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathfrak{t}^\vee/W$ の原点での formal completion は $\text{PD}_{\mathfrak{m}}$, $\text{PD}_{\mathfrak{m}_0}$ を pro-represent する. 特に $f^{-1}(0) \simeq \mathfrak{M}$ かつ $g^{-1}(h(0)) \simeq \mathfrak{M}_0$.
3. \mathfrak{t}^\vee の有限個の余次元 1 の線型部分空間 $\mathcal{H}^\vee = \{H\}$ が存在して, $t \in \mathfrak{t}^\vee$ に対し, $f^{-1}(t) \not\cong g^{-1}(h(t))$ であることと, $t \in \cup_{H \in \mathcal{H}^\vee} H$ となることは同値.

2.9. Grothendieck simultaneous resolutions

$\mathfrak{M} = T^*(G/B)$ の場合, Theorem 2.18 に現れる可換図式は Grothendieck simultaneous resolution としてよく知られたものになる. このとき $\mathfrak{t}^\vee \simeq \mathfrak{t}^*$ となり, Namikawa Weyl 群は通常の Weyl 群と一致する. $\mathcal{M}_0 \simeq \mathfrak{g}^*$ であり, 射 $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathfrak{t}^\vee/W$ は自然な射 $\mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*/G \simeq \mathfrak{t}^*/W$ により与えられる. \mathfrak{n} を \mathfrak{b} の nilpotent radical とすると, \mathcal{M} は

$$\tilde{\mathfrak{g}} := \{(gB, X) \in G/B \times \mathfrak{g}^* \mid \text{Ad}(g)^{-1}X \in \mathfrak{n}^\perp\}$$

で与えられ, 射 $\tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{t}^*$ は $\text{Ad}(g)^{-1}X$ の $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^* \rightarrow (\mathfrak{b}/\mathfrak{n})^* \simeq \mathfrak{t}^*$ での像を対応させることで得られる. $\pi_{\tilde{\mathfrak{g}}} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ を第 2 成分への射影とする. このとき, \mathcal{H}^\vee は coroot が定める hyperplane と一致する. したがって一般の conical symplectic resolution に対する \mathcal{H}^\vee は coroot hyperplane の類似と思える.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{t}^* & \longrightarrow & \mathfrak{t}^*/W \end{array}$$

2.10. Weyl group action

Grothendieck simultaneous resolution を用いると Springer fiber のコホモロジーへの Weyl 群作用が以下のように構成できる.

Proposition 2.19. $\pi_{\tilde{\mathfrak{g}}} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は small, つまり $\text{codim}_{\mathfrak{g}^*}\{X \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \pi_{\tilde{\mathfrak{g}}}^{-1}(X) \geq d\} > 2d$ が任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成り立つ.

このことから $\pi_{\mathfrak{g}^*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \simeq \text{IC}(\mathfrak{g}^{\text{rs}}, (\pi_{\mathfrak{g}^*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})|_{\mathfrak{g}^{\text{rs}}})$ となるのがわかる. ここで \mathfrak{g}^{rs} は \mathfrak{g} の regular semisimple 元からなる locus の κ による像であり, IC は intermediate extension である. $\pi_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ の \mathfrak{g}^{rs} への制限は W -covering になっていることから $(\pi_{\mathfrak{g}^*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}})|_{\mathfrak{g}^{\text{rs}}}$ には W が作用する. IC を取る操作は functorial であるから $\pi_{\mathfrak{g}^*} \mathbb{C}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ にも W が作用する. $\kappa(e) \in \mathfrak{g}^*$ でのファイバーを取ると $H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C})$ への W 作用が得られる.

Remark 2.20. 一般の \mathfrak{M} の場合にも同様にして $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{L}, \mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群が作用することがわかる (McGerty-Nevins).

3. Conjectures

3.1. Category \mathcal{O}

Braden-Licata-Proudfoot-Webster により提唱された symplectic duality では conical symplectic resolution に別の良い $\mathbb{T} := \mathbb{C}^*$ 作用が入る状況を考える. 以下, conical symplectic resolution とそこへの \mathbb{T} 作用の組 $(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ に次の条件を仮定する.

1. \mathbb{T} の \mathfrak{M} への作用は Hamiltonian であり, \mathbb{S} の作用と可換.
2. $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ は有限集合.
3. \mathfrak{M}_0 の minimal symplectic leaf は $\{o\}$.

$\mathcal{Q} \in Q(\mathfrak{M}, \omega)$ から §2.2 で述べたように \mathcal{D} や代数 A を構成すると, A には \mathbb{T} が作用する. その weight への分解を $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$ と書く. \mathcal{O}_a を有限生成 A 加群であって $A^{\geq 0}$ が locally finite に作用するものからなる圏とする. また \mathcal{O}_g を “good” な \mathbb{S} -同変 \mathcal{D} -加群であって support が $\mathfrak{M}^+ := \{p \in \mathfrak{M} \mid \lim_{\mathbb{T} \ni t \rightarrow 0} t \cdot p \text{ exists}\}$ に入るものからなる圏とする (詳細は [3] を参照).

例えば $\mathfrak{M} = T^*(G/B)$ で量子化のパラメータが regular, つまり Weyl 群の作用に関する stabilizer が自明になるとき, \mathcal{O}_a は通常の BGG category \mathcal{O} と圏同値になる. 従って \mathcal{O}_a は category \mathcal{O} の一般化とみなせる. Beilinson-Bernstein 型の局所化定理の類似として, 多くのパラメータで $\mathcal{O}_a \simeq \mathcal{O}_g$ が成り立つことが知られている ([4]). 局所化定理が成り立つとき, \mathcal{O} でその category \mathcal{O} を表すことにする.

3.2. Symplectic duality

$(\mathfrak{M}, \mathbb{S}, \mathbb{T})$ を上のおりとする. G を \mathbb{S} と可換な \mathfrak{M} の Hamiltonian symplectomorphism のなす群とする. $\mathbb{T} \subset G$ を \mathbb{T} を含む極大トーラス, $\mathbb{W} := N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ とする. \mathfrak{M} に対する coroot (正確にはそれが定める hyperplane) の概念は既に述べたが, \mathfrak{M} に対する root の概念も, $\mathfrak{M}^{\mathbb{T}} = \mathfrak{M}^{\mathbb{T}} \subset \mathfrak{M}$ の normal bundle に現れる \mathbb{T} -weight として定義することができる (例えば [18]). \mathcal{H} を \mathfrak{M} の root が定める \mathfrak{t} の hyperplane の集合とする. $\mathcal{I} := \mathfrak{M}^{\mathbb{T}}$ とおく. $p, q \in \mathcal{I}$ に対し, p が $\{m \in \mathfrak{M} \mid \lim_{\mathbb{T} \ni t \rightarrow 0} t \cdot m = q\}$ の閉包に含まれるとき $p \leq q$ と書き, これが定める partial order を \mathcal{I} に入れる.

Conjecture 3.1 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). 別の conical symplectic resolution と良い \mathbb{C}^* 作用の組 $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ (symplectic dual と呼ばれる) が存在して, $\mathfrak{M}^!$ に対応する記号には ! を付けることにすると

1. 順序を逆にする全単射 $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}^!$ が存在する.
2. $W \simeq W^!$ かつ $\mathbb{W} \simeq \mathbb{W}^!$.
3. $\mathfrak{t}^{\vee} \simeq \mathfrak{t}^!$ かつ $\mathfrak{t} \simeq (\mathfrak{t}^{\vee})^!$, つまり変形パラメータと同変パラメータが入れ替わる.
4. $\mathcal{H}^{\vee} = \mathcal{H}^!$ かつ $\mathcal{H} = (\mathcal{H}^{\vee})^!$, つまり coroot hyperplane と root hyperplane が入れ替わる.
5. \mathcal{O} と $\mathcal{O}^!$ は Koszul dual. ここで量子化のパラメータは “integral” なものを取る (詳細は後述).

Remark 3.2. $(\mathfrak{M}^!, \omega^!, \mathbb{S}^!, \mathbb{T}^!)$ の symplectic dual は $(\mathfrak{M}, \omega, \mathbb{S}, \mathbb{T})$.

以下で symplectic dual の例をいくつか挙げる. トーラス作用については省略する.

Example 3.3. G^\vee を G の Langlands dual とするとき, $T^*(G/B)$ と $T^*(G^\vee/B^\vee)$ は symplectic dual.

Example 3.4. A 型 S3 variety \mathcal{Y}_Q^P と \mathcal{Y}_P^Q は symplectic dual. 特に e が \mathfrak{I}_P の regular nilpotent のとき, \tilde{S}_e と $T^*(G/P)$ は symplectic dual.

Example 3.5. $0 \rightarrow \mathfrak{t}^k \rightarrow \mathfrak{t}^n \rightarrow \mathfrak{t}^d \rightarrow 0$ から定まる smooth hypertoric variety は, その双対 $0 \rightarrow (\mathfrak{t}^d)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^n)^* \rightarrow (\mathfrak{t}^k)^* \rightarrow 0$ から定まる smooth hypertoric variety と symplectic dual.

Example 3.6. $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ は自分自身と symplectic dual.

3.3. Koszul duality and integrality

少し Conjecture 3.1 の最後の条件について補足する. まずは Koszul duality について簡単に説明する.

Definition 3.7 (Koszul ring [1]). $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で次数付けられた環とする. 次の条件が成り立つとき, A は Koszul ring であるという.

1. A_0 は semisimple.
2. A_0 を (次数 0 の) 次数付き左 A 加群とみなしたとき, 次数付き projective resolution

$$\cdots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow A_0 \rightarrow 0$$

であって, 各 P^i がその次数 i 成分で生成されているものが存在する.

例えば V を \mathbb{C} 上有限次元ベクトル空間としたとき, 対称代数 SV は Koszul complex

$$\cdots \rightarrow SV \otimes \Lambda^2 V \rightarrow SV \otimes V \rightarrow SV \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

により Koszul である.

Theorem 3.8 (Beilinson-Ginzburg-Soergel [1]). $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} A_i$ を Koszul ring とする. さらに各 A_i は A_0 上左加群として有限生成であると仮定する. このとき $E(A) := \text{Ext}_A^*(A_0, A_0)$ はまた Koszul ring となり, $E(E(A)) \simeq A$ が成り立つ.

上の条件を満たす Koszul ring A に対し, $A^! := E(A)^{\text{op}}$ をその Koszul dual という. 例えば SV の Koszul dual は外積代数 $\Lambda(V^*)$ である.

\mathcal{C} を Noether かつ Artin な \mathbb{C} -linear Abel 圏であって enough projective かつ既約対象が有限個なものとする. P を各既約対象の projective cover の直和としたとき, \mathcal{C} は有限生成 $\text{End}(P)^{\text{op}}$ 加群の圏と圏同値になる. このような \mathcal{C} が Koszul であるとは $\text{End}(P)^{\text{op}}$ が Koszul ring である (特に次数付き環の構造が入る) こととし, \mathcal{C} と $\mathcal{C}^!$ が互いに Koszul dual な代数で統制されているとき, \mathcal{C} と $\mathcal{C}^!$ は Koszul dual であるという.

Theorem 3.9 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). \mathcal{O}_g は highest weight category.

Conjecture 3.10 (Braden-Licata-Proudfoot-Webster [3]). \mathcal{O} は Koszul.

また symplectic duality においては category \mathcal{O} を考える量子化のパラメータが integral であるということを仮定したが、その主張にも説明が必要である。まず量子化のパラメータの空間は $H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ であるから、そこには自然な lattice $H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ が存在する。しかし量子化のパラメータが integral であるという主張はその period が $H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ に入るという主張とは一般に異なる。例えば $\mathfrak{M} = T^*(G/P)$ のとき、period が $\lambda \in H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{C}) \simeq H^2(G/P, \mathbb{C})$ に対応する量子化は G/P 上の微分作用素環を $\lambda + \rho_P$ で twist したものに对应する。ここで ρ_P は G/P の canonical bundle の Euler 類の $1/2$ 倍であり、一般に $\rho_P \notin H^2(G/P, \mathbb{Z})$ である。この twist が line bundle による twist になっていることを量子化のパラメータが integral であることの意味として定めたい。つまりこの場合 λ が integral であるということを $\lambda + \rho_P \in H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ と定める。[3] では一般の \mathfrak{M} に対してこのような integral period という概念が存在することも仮定している。ここではとりあえず \mathfrak{M} の tangent bundle $T\mathfrak{M}$ の polarization $T^{1/2}$ の存在を仮定し、 $H^2(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ を $\det(T^{1/2})$ の Euler class の $1/2$ 倍で shift したものを integral なパラメータであるとしておく。ここで polarization とは \mathfrak{M} の K 群の元であって、 $T\mathfrak{M} = T^{1/2} + (T^{1/2})^*$ が成り立つもののことである。例えば旗多様体などの場合にはそのような polarization は具体的に取ることができる ([18])。このような polarization は Maulik-Okounkov による stable envelope の定義にも用いられることを注意しておく ([18],[23])。2つの量子化のパラメータが $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{Z})$ の元だけ異なるとき対応する \mathcal{O}_g は圏同値になることが知られている ([3]) ため、Koszul duality に関する予想は局所化定理の成立と integrality の仮定の下では量子化のパラメータの取り方によらない。

3.4. Main results

Conjecture 1.1 は DeConcini-Procesi, Tanisaki による A 型 Springer fiber のコホモロジー環の記述の一般化になっている。 $G = \mathrm{SL}_n$, P を放物型部分群, e を \mathfrak{l}_P の regular nilpotent 元とする。 P から定まる partition が λ のとき, e の Jordan type は λ である。

Theorem 3.11 (DeConcini-Procesi, Tanisaki [7],[25]). 次数付き代数として

$$H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[t^* \cap \mathcal{N}_P].$$

ここで共通部分はスキーム論的に取っている。

Remark 3.12. $\mathbb{C}[t^* \cap \mathcal{N}_P]$ には t への W 作用から自然に定まる W 作用を持ち、この同型は W 作用と compatible.

H を \mathbb{C} 上定義されたトーラスとし、 $X = \mathrm{Spec}(R)$ を \mathbb{C} 上のスキームであって H が作用するものとする。このときその固定点スキーム X^H を H 作用に関する weight が 0 でない homogeneous な元全体で生成されるイデアルで定義される閉部分スキームとして定義する。するとスキームとして $t^* \cap \mathcal{N}_P \simeq \mathcal{N}_P^T$ である。また $H^*(\mathcal{B}_e, \mathbb{C}) \simeq H^*(\tilde{S}_e, \mathbb{C})$ であることと、 \tilde{S}_e と $T^*(G/P)$ が symplectic dual であることから、この定理は Conjecture 1.1 の半分と同値であることがわかる。また予想のもう一方を似たような形で書くと次のようになる。

Proposition 3.13 ([10]). 次数付き代数として

$$H^*(G/P, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\kappa(e + \mathfrak{z}_{\mathfrak{l}_P}(f)) \cap S_e].$$

Remark 3.14. 両辺の各次数ごとの次元が一致することは例えば [17] から読み取れる. [17] では Slodowy variety の同変 K 群に canonical base を定義しており, 特別な canonical base の元の内積の公式を見ると G/P のコホモロジーが現れている.

より一般に次が証明できる.

Theorem 3.15 ([10]). Conjecture 1.1 は A 型 S3 variety, smooth hypertoric variety, $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合に正しい.

証明は各々の場合に知られているコホモロジー環の記述を用いて明示的に同型を作ることにより得られる. コホモロジー環の記述としては A 型 S3 variety の場合は [6], hypertoric variety の場合は [9] や [13], $\text{Hilb}_0^n(\mathbb{C}^2)$ の場合は [15] や [26] で知られている.

Remark 3.16. [12] において簾多様体のコホモロジー環に関する同様の同型が証明されている.

3.5. Variants

すでに述べたように $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ には Namikawa Weyl 群 W が自然に作用する. 一方で W が $\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]$ に自然に作用することもすぐわかる. Remark 3.12 より, 次のように予想することは自然であると思われる.

Conjecture 3.17. 予想の同型は $W \simeq \mathbb{W}^!$, $W^! \simeq \mathbb{W}$ 作用と compatible.

Remark 3.18. $H^*(\mathfrak{M}, \mathbb{C})$ への W 作用は定義から直ちに計算できるものではないが, $\mathbb{C}[(\mathfrak{M}_0)^{\mathbb{T}}]$ への W 作用は群作用から来ているため定義から直接計算することができる.

また, symplectic duality においては変形パラメータと同変パラメータが入れ替わることを思い出すと次のように予想できる.

Conjecture 3.19. 次数付き代数として

$$\begin{aligned} H_{G^!}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_0^{\mathbb{T}}], \\ H_{T^!}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C}[(\mathfrak{t}^{\vee} \times_{\mathfrak{t}^{\vee}/W} \mathcal{M}_0)^{\mathbb{T}}]. \end{aligned}$$

Example 3.20. $\mathfrak{M} = T^*(G/B)$ のとき,

$$\mathbb{C}[(\mathfrak{t}^{\vee} \times_{\mathfrak{t}^{\vee}/W} \mathcal{M}_0)^{\mathbb{T}}] = \mathbb{C}[(\mathfrak{t}^{\vee} \times_{\mathfrak{t}^{\vee}/W} \mathfrak{g}^*)^{\mathbb{T}}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{t}^{\vee} \times_{\mathfrak{t}^{\vee}/W} \mathfrak{t}^{\vee}] \simeq H_{T^{\vee}}^*(G^{\vee}/B^{\vee}, \mathbb{C}).$$

上では symplectic form を保つ群作用に関する同変コホモロジーを考えたが, symplectic form を保たない S 作用に関する同変コホモロジーに関しても次のように予想することができる. A を canonical な量子化から定まる $\mathbb{C}[\mathfrak{M}]$ の量子化とする. A は filtration を持つので, その Rees 代数 A_{\hbar} を考えることができる. ここで \hbar は Rees 代数を取るときに付け加えられるパラメータである. A_{\hbar}^k を \mathbb{T} -weight が k の部分とする.

Conjecture 3.21. 次数付き代数として

$$H_{S^!}^*(\mathfrak{M}^!, \mathbb{C}) \simeq A_{\hbar}^0 / \left(\sum_{k>0} A_{\hbar}^{-k} A_{\hbar}^k \right).$$

ただし $H_{S^!}^*(\text{pt}) \simeq \mathbb{C}[\hbar]$ とみなす.

Remark 3.22. この予想の右辺に現れているのは [3] で B -algebra と呼ばれているものである.

参考文献

- [1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), no. 2, 473–527
- [2] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Fedosov quantization in algebraic context, *Mosc. Math. J.* 4 (2004), no. 3, 559–592
- [3] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions II: category \mathcal{O} and symplectic duality, arXiv:1407.0964
- [4] T. Braden, N. Proudfoot, B. Webster, Quantizations of conical symplectic resolutions I: local and global structure, arXiv:1208.3863
- [5] A. Braverman, M. Finkelberg, H. Nakajima, Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N}=4$ gauge theories, II, arXiv:1601.03586
- [6] J. Brundan, V. Ostrik, Cohomology of Spaltenstein varieties, *Transform. Groups*, 16 (2011), 619–648
- [7] C. DeConcini, C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes and the flag variety, *Invent. Math.*, 64 (1981), 203–219
- [8] V. Ginzburg, Harish-Chandra bimodules for quantized Slodowy slices, *Represent. Theory* 13 (2009), 236–271
- [9] T. Hausel, B. Sturmfels, Toric hyperKähler varieties, *Doc. Math.*, 7 (2002), 495–534
- [10] T. Hikita, An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, *Int. Math. Res. Not.* (2016)
- [11] D. Kaledin, Symplectic singularities from the Poisson point of view, *J. Reine Angew. Math.* 600 (2006), 135–156
- [12] J. Kamnitzer, P. Tingley, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi, Highest weights for truncated shifted Yangians and product monomial crystals, arXiv:1511.09131
- [13] H. Konno, Cohomology rings of toric hyperkähler manifolds, *Internat. J. Math.*, 11 (2000), 1001–1026
- [14] M. Lehn, Y. Namikawa, C. Sorger, Slodowy slices and universal Poisson deformations, *Compos. Math.* 148 (2012), no. 1, 121–144
- [15] M. Lehn, C. Sorger, Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, *Duke Math. J.*, 110 (2001), 345–357
- [16] I. Losev, Isomorphisms of quantizations via quantization of resolutions, *Adv. Math.* 231 (2012), no. 3-4, 1216–1270
- [17] G. Lusztig, Bases in equivariant K -theory. II, *Represent. Theory.*, 3 (1999), 281–353
- [18] D. Maulik, A. Okounkov, Quantum Groups and Quantum Cohomology, arXiv:1211.1287
- [19] H. Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, University Lecture Series, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999
- [20] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, *Duke Math. J.* 156 (2011), no. 1, 51–85
- [21] Y. Namikawa, Poisson deformations of affine symplectic varieties, II, *Kyoto J. Math.* 50 (2010), no. 4, 727–752
- [22] Y. Namikawa, Poisson deformations and birational geometry, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 22 (2015), no. 1, 339–359
- [23] A. Okounkov, A. Smirnov, Quantum difference equation for Nakajima varieties, arXiv:1602.09007
- [24] N. Proudfoot, A survey of hypertoric geometry and topology, *Contemp. Math.*, 460 (2008), 323–338

- [25] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tôhoku Math. J. (2)*, 34 (1982), 575–585
- [26] E. Vasserot, Sur l’anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de \mathbf{C}^2 , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332 (2001), 7–12
- [27] B. Webster, Singular blocks of parabolic category \mathcal{O} and finite W -algebras, *J. Pure Appl. Algebra* 215 (2011), no. 12, 2797–2804