

✿ 日本数学会

2020年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2020年3月

於 日本大学

✿ 日本数学会

2020年度年会

**無限可積分系特別セッション
講演アブストラクト**

2020年3月

於 日本大学

無 限 可 積 分 系

3月18日(水) 第IX会場

14:15~16:15		(分)	頁
1	平出 耕一 (愛媛大理) 松岡 千博 (阪市大工)	複素エノン写像の力学系にあらわれる Stokes 的現象	(15) 1
2	松浦 望 (久留米工大)	平面離散弾性曲線の明示公式	(15) 3
3	田所 勇樹 (木更津工高専) 関口 昌由 (木更津工高専) 鎌田 勝 (木更津工高専*)	Nonlinear $O(3)$ sigma model in discrete complex analysis	(15) 5
4	桑野 泰宏 (鈴鹿医療科学大医用工)	中心力場におけるルンゲ・レンツ様ベクトル	(15) 7
5	白石 潤一 (東大数理)	非定常 Ruijsenaars 関数	(15) 9
6	白石 潤一 (東大数理)	非定常及び定常 Ruijsenaars 関数と Ruijsenaars 作用素の固有値問題	(15) 11
7	大久保 勇輔 (東大数理) 白石 潤一 (東大数理) 福田 真之 (東大理)	非定常 Ruijsenaars 関数と Ding-Iohara-Miki 代数の intertwining 作用素	(15) 13
16:30~17:30 特別講演			
	渡邊 英也 (京大数理研)	q -quantizations	15

3月19日(木) 第IX会場

9:45~11:30		(分)	頁
8	森山 翔文 (阪市大理)	量子曲線とワイル群	(15) 31
9	高崎 金久 (近畿大理工)	CP^1 の同変 Gromov-Witten 理論と同変戸田階層	(15) 33
10	山根 宏之 (富山大理)	一般化された量子群の典型的既約指標について	(15) 35
11	藤田 遼 (京大理)	ADE 型アフィン量子群の基本表現の間の正規化された R 行列の特異性について	(15) 37
12	行田 康晃 (名大多元数理)	有限型団代数・階数 2 の団代数における d ベクトルと f ベクトルの関係式	(15) 39
13	大久保 直人 (青学大理工) 増田 哲 (青学大理工) 津田 照久 (一橋大経済)	団代数を用いた $A_7^{(1)}$ 型 q -パンルヴェ系の高階化	(15) 41
14:15~16:00			
14	渋川 元樹 (神戸大理)	Another proof of difference equations for interpolation Jack polynomials	(15) 43
15	松縄 竜弥 (中大理工) 佐藤 智輝 (中大理工) 竹村 剛一 (お茶の水女大基幹)	Variants of confluent q -hypergeometric equations	(15) 45

16	川上拓志 (青学大理工)	4次元 Painlevé 型差分方程式について	(15)	47
17	川上拓志 (青学大理工)	行列第六 Painlevé 系の q -類似	(15)	49
18	伊藤雅彦 (琉球大理) 野海正俊 (神戸大理)	6パラメータの G_2 型楕円超幾何積分が満たす q 差分方程式系につ いて	(15)	51
19	長尾秀人 (明石工高専) 山田泰彦 (神戸大理)	パデ法と q -quadratic 差分ガルニエ系たち	(15)	53
16:15~17:15 特別講演				
	斉藤義久 (立教大理)	楕円 Artin 群について		55

複素エノン写像の力学系にあらわれる Stokes 的現象

平出 耕一 (愛媛大学)*1

松岡 千博 (大阪市立大学)*2

エノン写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は次で定まる 2 次写像である；

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + y - ax^2 \\ bx \end{pmatrix}.$$

ここで, $a, b \in \mathbb{C}$ はパラメータで $a \neq 0, b \neq 0$ であるとする. $P = (x_f, y_f)$ を f の不動点のうちの一つとし, α_1, α_2 は微分 $D_P f$ の固有値とする.

$$|\alpha_1| \neq 1, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

を仮定し, $\alpha = \alpha_1$ とおく. α に対する固有空間を E_α とする. 以下において, $0 < |\alpha| < 1$ の場合について述べる ($|\alpha| > 1$ 場合についても同様のことが成立する).

正則な写像 $\mathcal{P}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ で,

$$f \circ \mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(\alpha t) \quad (\forall t \in \mathbb{C})$$

と $\mathcal{P}(0) = P, \mathcal{P}'(0) \neq 0$ を満たすものが存在し, 与えられた $v \in E_\alpha, v \neq 0$ に対し $\mathcal{P}'(0) = v$ を満たすものは唯一つである. このとき, $\mathcal{P}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ は単射となり, すべての $t \in \mathbb{C}$ に対し $\mathcal{P}'(t) \neq 0$ を満たす. 曲線 $W_\alpha(P) = \mathcal{P}(\mathbb{C})$ は f で不変である. この曲線を α に付随する不変曲線と呼ぶことにする. $0 < |\alpha_1| < 1 < |\alpha_2|$ の場合, $W_{\alpha_1}(P)$ と $W_{\alpha_2}(P)$ はそれぞれ自分自身に集積し, 閉包の交わり $\overline{W_{\alpha_1}(P)} \cap \overline{W_{\alpha_2}(P)}$ は f の Julia 集合であり, 複雑な構造を持つ.

この講演では, P を原点に移す平行移動により f の共役をとり, それを改めて f で表し, 次の条件式を満たす正則な写像 $\mathcal{L}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ について述べる；

$$f \circ \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t+1)$$

$\mathcal{L}(t) = (x(t), y(t))$ とおく. このとき 2 階差分方程式が定まる；

$$x(t+1) - \lambda x(t) - bx(t-1) = -a[x(t)]^2, \quad y(t) = bx(t-1)$$

ここで, $\lambda = -2ax_f$. この差分方程式は, Borel-Laplace 変換の方法により摂動論を用いず解くことができる. $\zeta_1 = -\log \alpha = |\log \alpha| e^{i\theta_1}$ とおく. $\theta_1 \in \mathbb{R}$ は一つ選んで固定する. 解 $x(t)$ は Laplace 積分

$$x(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\zeta_N}^{\infty e^{i\theta_1}} e^{-\zeta t} X_R(\zeta) d\zeta$$

本研究は科研費 (課題番号: 17K05371, 18K03418) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 44A10, 37D45

キーワード: Henon map, Borel-Laplace transform, asymptotic expansion

*1 e-mail: hiraide.koichi.mu@ehime-u.ac.jp

*2 e-mail: cmatsuoka@osaka-cu.ac.jp

により求められる．ここで， $\zeta_N = N\zeta_1$ ， X_R は次の積分方程式を満たすリーマン面 X を原点と ζ_1 を結ぶ直線の近傍で一意化した関数である；

$$AX = -aX * X + C, \quad A(\zeta) = e^{-\zeta} - \lambda - be^\zeta$$

ここで， $X * X$ は畳み込みであり， C は定数である．上の Laplace 積分は領域 $\Re(\zeta_1 t) \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ は十分大) において正則関数の和として一様収束する．この $x(t)$ は上の差分方程式の関係式により自然に全平面 \mathbb{C} に解析接続される．このとき

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}) = W_\alpha(P) \setminus \{P\}$$

である．さらに， \mathcal{P} と \mathcal{L} の間に次の関係が成り立つ；

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{P}(C_1 e^{-\zeta_1 t}) \quad (\forall t \in \mathbb{C})$$

ここで， $C_1 = C_1(\theta_1) \neq 0$ は定数である．この C_1 は次の様に定まる．

定理 1 $\mathcal{P}'(0) = (1, \alpha^{-1}b)$ により \mathcal{P} を定めると，上の定数 C_1 は次の数に一致する；

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha^{-m} \int_0^{\infty e^{i\theta_1}} e^{-\zeta m} X_R(\zeta) \zeta$$

また， θ_1 の取り方に依存しない定数 $K > 1$ が存在し

$$K^{-1} < |C_1| < K$$

が成り立つ．

\mathcal{P} は \mathbb{C} から $W_\alpha(P)$ の上への単射なので，逆写像 \mathcal{P}^{-1} を持つ．従って， θ_1 を取り換えたとき， \mathcal{L} 達の間関係式が定まり， \mathcal{L} 達全体は一つの接続構造を持つことが分る．

$W_\alpha(P)$ の複雑な構造を見るためには，人工的パラメータ M を導入し，次に述べる Poincare の意味の様な漸近展開が有効に働く．

定理 2 $M \in \mathbb{C}$ とし， $R > 0$ とする．このとき，領域 $|e^{-\zeta_1(t+M)}| \leq R$ において

$$x(t+M) = \frac{b_{1,0}}{t} e^{-\zeta_1(t+M)} + \sum_{n=2}^N \frac{(n-1)!}{t^n} \sum_{\ell=0}^n b_{\ell, n-1} e^{-\zeta_\ell(t+M)} + R_N$$

が成り立ち，剰余項 R_N は次を満たす；

$$R_N = \frac{N!}{t^{N+1}} O(e^{\zeta_1 t/2})$$

.

参考文献

- [1] C.Matsuoka and K.Hiraide, Special functions created by Borel-Laplace transform of Hénon map, Electron. Res. Announc. Math. Sci. 18 (2011), 1–11

平面離散弾性曲線の明示公式

松浦望 (久留米工業大学)

概 要

ユークリッド平面内の離散弾性曲線を、楕円テータ関数を用いて明示的に構成する。

■楕円テータ関数 虚部が正の複素数 ω を固定し $e(k, z) = \exp(\pi\sqrt{-1}\omega k^2 + 2\pi\sqrt{-1}kz)$ とおく。準周期的な正則関数たち $\theta_1(z) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k+1/2, z+1/2)$, $\theta_3(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k, z)$, $\theta_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k+1/2, z)$, $\theta_4(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(k, z+1/2)$ を楕円テータ関数といい、集合 $\Omega = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ をその周期格子という。

■平面弾性曲線 弾性曲線は弾性エネルギーの臨界点として定義される曲線である。円と直線は自明な平面弾性曲線だから以下の議論では除外する。速さ1の非自明な平面弾性曲線 γ は、回転と平行移動の差を除いて

$$\gamma(s) = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -cs + \int_0^s \kappa(\sigma)^2 d\sigma \\ -2\kappa(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

と積分表示される。ただし a は正の定数、 c は実定数であり、関数 κ は γ の曲率で微分方程式 $4(\kappa'(s))^2 = -(\kappa(s)^2 - c)^2 + a^2$ の解である。この微分方程式が実数値の解 κ をもつためには定数 $a, c, \kappa(0)$ が連立不等式 $c+a > 0$ かつ $\max\{0, c-a\} \leq \kappa(0)^2 \leq c+a$ をみたさなければならない。平面弾性曲線の形状は比 c/a の値に応じて変化するが、特に $c=a$ のときは初等関数で簡単に積分することができ、これをボーダーライン弾性曲線と呼ぶ。

表現公式(1)のような積分表示ではなく、座標成分をすべて具体的な関数で書いたものを明示公式という。平面弾性曲線の明示公式として複数のものが知られているが、マンフォード[1]は次の定理のように楕円テータ関数を用いた。以下 $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $\mathbb{R}^{**} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ と書く。また複素数 z の共役複素数を \bar{z} と書く。

定理 1 ([1]で述べられている平面弾性曲線の明示公式を具体的に書き下したものを) 楕円テータ関数の周期格子 $\Omega = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ が $\bar{\Omega} = \Omega$ をみたすとす。すなわち定数 $y \in \mathbb{R}^{**}$ をひとつ固定して複素数 ω を

$$\omega = \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{-1}y, \\ \omega_2 = 1/2 + \sqrt{-1}y \end{cases} \quad (2)$$

とおく。定数の組 $(p, x) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ に対して、関数 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma(s)$ を

$$\gamma(s) = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \log \tau(s), \quad \tau(s) = \exp(-Asr) \theta_3(ps + Br - C)$$

と定める。ただし実定数 A, B と複素定数 C は

$$(A, B, C) = \begin{cases} \left(\frac{\theta_3''(0)\theta_4(0)^2}{\theta_3(0)\theta_1'(0)^2} + \frac{\theta_2(0)^2}{\theta_3(0)^2}, \frac{\theta_4(0)^2}{\theta_1'(0)^2 p}, x + \sqrt{-1}\frac{y}{4} \right) & \omega = \omega_1, \\ \left(\frac{\theta_3''(0)\theta_2(0)^2}{\theta_3(0)\theta_1'(0)^2} - \frac{\theta_4(0)^2}{\theta_3(0)^2}, \frac{\theta_2(0)^2}{\theta_1'(0)^2 p}, x \right) & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

とする。このとき γ は速さ1の平面弾性曲線で、その曲率は

$$\kappa(s) = \begin{cases} 2\pi p \sqrt{-1} \theta_4(0)^2 \frac{\theta_1(ps-C)\theta_4(ps-C)}{\theta_3(ps-C)\theta_2(ps-C)} & \omega = \omega_1, \\ -2\pi p \sqrt{-1} \theta_2(0)^2 \frac{\theta_1(ps-C)\theta_2(ps-C)}{\theta_3(ps-C)\theta_4(ps-C)} & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

で与えられる. 逆に, 円と直線とボーダーライン弾性曲線を除くすべての平面弾性曲線は, 回転と平行移動の差を除いてこのように表示できる.

■平面離散弾性曲線 写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して $l_n = |\gamma_{n+1} - \gamma_n|$ とおく. 以下では l_n が n によらない正の定数 l であるような場合を考え, このとき γ を平面離散曲線と呼ぶ. 平面離散曲線 γ に対して $\phi_n = \angle(\gamma_{n+1} - \gamma_n, \gamma_n - \gamma_{n-1})$ とおき, 数列 $\kappa_n = (2/l) \tan(\phi_n/2)$ を γ の離散曲率という.

ポベンコとスリス [2] は離散曲線に対して適当な離散弾性エネルギーを導入し, その臨界点として離散弾性曲線を定義した. 離散円と離散直線は自明な平面離散弾性曲線だから以下の議論では除外する. 非自明な平面離散弾性曲線 γ は, 回転と平行移動の差を除いて

$$\gamma_n = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -lcn + l \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_{k+1} \kappa_k \\ -2\kappa_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

と和分表示される. ただし a は正の定数, c は実定数であり, 数列 κ は γ の離散曲率で差分方程式 $4l^{-2}(\kappa_{n+1} - \kappa_n)^2 = -(\kappa_{n+1}\kappa_n - c)^2 + a^2$ の解である. この差分方程式が実数値の解 κ をもつためには, 定数 a, c, κ_0 が連立不等式 $\tilde{c} + \tilde{a} > 0$ かつ $\max\{0, \tilde{c} - \tilde{a}\} \leq \kappa_0^2 \leq \tilde{c} + \tilde{a}$ をみたさなければならない. ただし

$$\tilde{c} = c + \frac{l^2 a^2}{8}, \quad \tilde{a} = a \sqrt{1 + \frac{l^2 c}{4} + \frac{l^4 a^2}{64}}$$

である. 平面離散弾性曲線の形状は比 \tilde{c}/\tilde{a} の値に応じて変化するが, 特に $\tilde{c} = \tilde{a}$, すなわち $c = a$ のときは初等関数で簡単に和分することができ, これを離散ボーダーライン弾性曲線と呼ぶ.

定理 2 (平面離散弾性曲線の明示公式) 楕円テータ関数の周期格子 $\Omega = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$ を (2) のように選ぶ. 定数の組 $(p, l, x) \in (\mathbb{R} \setminus (1/2)\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}$ に対して, 関数 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $n \mapsto \gamma_n$ を

$$\gamma_n = \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \log \tau_n, \quad \tau_n = \exp(-Anr) \theta_3(pn + Br - C)$$

と定める. ただし実定数 A, B と複素定数 C は

$$(A, B, C) = \begin{cases} \left(\left(\frac{\theta_3'(p)}{\theta_3(p)} \frac{\theta_4(0)}{\theta_1'(0)} \frac{\theta_4(p)}{\theta_1(p)} + \frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)} \frac{\theta_2(p)}{\theta_3(p)} \right) l, \frac{\theta_4(0)}{\theta_1'(0)} \frac{\theta_4(p)}{\theta_1(p)} l, x + \sqrt{-1} \frac{y}{4} \right) & \omega = \omega_1, \\ \left(\left(\frac{\theta_3'(p)}{\theta_3(p)} \frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)} - \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)} \frac{\theta_4(p)}{\theta_3(p)} \right) l, \frac{\theta_2(0)}{\theta_1'(0)} \frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)} l, x \right) & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

とする. このとき γ は任意の整数 n に対して $|\gamma_{n+1} - \gamma_n| = l$ をみたす平面離散弾性曲線で, その離散曲率は

$$\kappa_n = \begin{cases} \frac{2\sqrt{-1} \theta_1(p) \theta_4(p) \theta_1(pn - C) \theta_4(pn - C)}{l \theta_3(p) \theta_2(p) \theta_3(pn - C) \theta_2(pn - C)} & \omega = \omega_1, \\ -\frac{2\sqrt{-1} \theta_1(p) \theta_2(p) \theta_1(pn - C) \theta_2(pn - C)}{l \theta_3(p) \theta_4(p) \theta_3(pn - C) \theta_4(pn - C)} & \omega = \omega_2 \end{cases}$$

で与えられる. 逆に, 離散円と離散直線と離散ボーダーライン弾性曲線を除くすべての平面離散弾性曲線は, 回転と平行移動の差を除いてこのように表示できる.

参考文献

- [1] David Mumford, *Elastica and computer vision*, Algebraic geometry and its applications (West Lafayette, IN, 1990), Springer, New York, 1994, pp. 491–506.
- [2] A. I. Bobenko and Yu. B. Suris, *Discrete time Lagrangian mechanics on Lie groups, with an application to the Lagrange top*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), no. 1, 147–188.

Nonlinear $O(3)$ sigma model in discrete complex analysis

関口 昌由, 田所 勇樹 (国立木更津工業高等専門学校基礎学系)*1
鎌田 勝 (国立木更津工業高等専門学校 名誉教授)

1. 序

2つの Riemann 多様体間のなめらかな写像 $\phi: X \rightarrow M$ に対するシグマ模型を汎関数

$$E(\phi) := \int_X |d\phi|^2 dv_X$$

で定める. ただし, v_X は X の体積形式とする. Mercat[3] は閉曲面上のセル分割とその双対に離散複素構造を導入し, 離散 Riemann 面を定義し, 周期行列を導出するアルゴリズムを与えた. 通常の複素構造と類似性があり, セル分割を細かくしていくと, 閉曲面の複素構造に近づいていくものである. さらに, Bobenko と Günther[1] は, Mercat の離散 Riemann 面をより精密に扱い, 新たな離散複素構造を定義した. 非線形 $O(3)$ シグマ模型を, この新しく定義された平面の離散 Riemann 面上で計算し, 不等式を導出した.

2. 非線形 $O(3)$ シグマ模型

\mathbb{R}^2 , 球面 S^2 をユークリッド計量, 球面計量が与えられた Riemann 多様体とし, dv_{S^2} を S^2 の体積形式とする. なめらかな写像 $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ に対する写像度 N を

$$N := \int_{\mathbb{R}^2} \phi^* dv_{S^2} \in \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$$

と定める. これはトポロジカル数とも呼ばれる. 写像 ϕ と立体射影 $\text{St}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の合成を無限遠点まで広げた合成写像

$$f := \text{St} \circ \phi: \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$$

に対して定義されるシグマ模型を, 非線形 $O(3)$ シグマ模型と呼ぶ. Belavin と Polyakov[2] は, この模型に対する不等式

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |d\phi|^2 dv_{\mathbb{R}^2} = \left\| \frac{df \mp i * df}{1 + |f|^2} \right\|^2 \pm 4\pi N \geq 4\pi |N| \quad (1)$$

を示した. 等号成立条件は, f が (反) 正則になる, つまり $df = \pm i * df$ を満たすときである.

3. 離散 Riemann 面

離散複素解析は 1950 年代頃から研究され, Smirnov らが研究し, Mercat, Bobenko により離散 Riemann 面の研究が始まった. 連結な有向閉曲面 Σ_g において, 2部グラフの構造をもった 4 角形分割を Λ と記す (図 1).

本研究は科研費基盤研究 (C)(課題番号:17K05234) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 30F10, 30G25

キーワード: 離散 Riemann 面, 非線形 $O(3)$ シグマ模型, 離散複素解析

*1 〒292-0041 千葉県木更津市清見台東 2-11-1

e-mail: tado@nebula.n.kisarazu.ac.jp

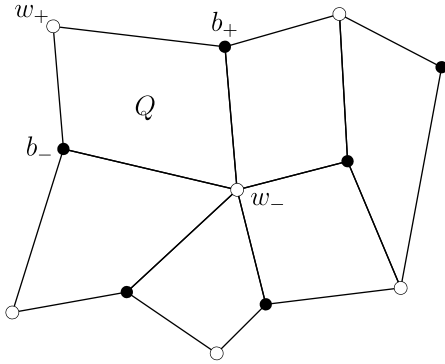


図 1: 4角形分割 Λ

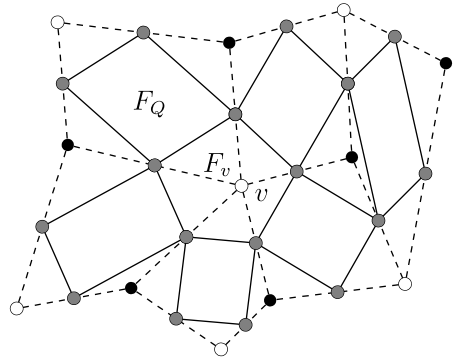


図 2: 中間グラフ X

各辺の端点は、白黒の頂点を1つずつ持つ. 各4角形を複素平面 \mathbb{C} に埋め込むことにより, 離散複素構造を定義する. 1つの4角形 Q に対して, 反時計回りに頂点 b_-, w_-, b_+, w_+ と呼ぶ. 頂点全体 $V(\Lambda)$ 上の関数 f が Q 上離散正則であるとは, 離散 Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{f(b_+) - f(b_-)}{b_+ - b_-} = \frac{f(w_+) - f(w_-)}{w_+ - w_-} \quad (2)$$

を満たすものと定義する. 図2のように, 各4角形の辺の中点を結んだ中間グラフ X から, 平行4辺形 F_Q と頂点 v 周りの多角形 F_v を得る. これより, 正則1形式などを定義することができ, 離散 Riemann 面上で Hodge 理論が展開される.

我々は, 種数 $g = 0$ のある離散 Riemann 面に関して計算を行った. 非線形 $O(3)$ シグマ模型に関する次の不等式を得た.

Theorem 1.

$$E_{\diamond}^W(f) = \left\| \frac{df \mp i * df}{1 + |f|^2} \right\|^2 \pm \mathcal{A}_{\diamond}^W(f) \geq |\mathcal{A}_{\diamond}^W(f)|. \quad (3)$$

ただし, $E_{\diamond}^W(f), \mathcal{A}_{\diamond}^W(f)$ は Belavin と Polyakov の不等式 (1) の各項における離散版である. 可能ならば, $E_{\diamond}^W(f)$ の変分に関する研究についても報告したい.

参考文献

- [1] Alexander I. Bobenko and Felix Günther. Discrete Riemann surfaces based on quadrilateral cellular decompositions. *Adv. Math.*, Vol. **311**, pp. 885–932, 2017.
- [2] A. A. Belavin and A. M. Polyakov. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, Vol. **22**, p. 245, 1975.
- [3] Christian Mercat. Discrete Riemann surfaces. Papadopoulos, Athanase (ed.), Handbook of Teichmüller theory. Volume I. Zürich: European Mathematical Society (EMS). IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics **11**, 541-575 (2007)., 2007.

中心力場におけるルンゲ・レンツ様ベクトル

鈴鹿医療科学大学 桑野泰宏* quanoy@suzuka-u.ac.jp

本講演では、中心力場における二体問題について考察する。なお、ここでは非相対論的古典力学における二体問題のみを扱うが、相対論的古典力学に拡張するのは容易である。また、量子論についてはここでは論じない。

中心力とは、質点に働く力の作用線が常に定点 O を通り、その大きさがその定点と質点の距離にのみ依存する力である。すなわち、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\hat{\mathbf{r}}$ と表せる力のことである。ここで、 \mathbf{r} は位置ベクトルを表し、 $r = |\mathbf{r}|$ 、 $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ である。以下、他のベクトル \mathbf{a} についても a や $\hat{\mathbf{a}}$ などを同様の意味で用いる。

中心力場においては、よく知られているようにエネルギー E と角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ が保存量となっている。ここで、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ は運動量、 m は換算質量である。惑星の公転運動については、これら以外に Runge-Lenz ベクトルと呼ばれる保存量が存在する [1, 2, 3]。 $F(r) = -K/r^2$ と書くとき、

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{mK} - \hat{\mathbf{r}} \quad (1)$$

は太陽から見て近日点に向かう向きをもち、その大きさは離心率 ($E < 0$ ならば $0 < e < 1$) に等しい定ベクトルである。

ところで、保存量は E , \mathbf{L} , \mathbf{e} で全部で 7 成分あるが、これらすべてが独立ではない。Runge-Lenz ベクトルはその形から $\mathbf{e} \perp \mathbf{L}$ であり、さらに

$$e^2 = 1 + \frac{2L^2 E}{mK^2} \quad (2)$$

の関係が成り立つから、5 成分だけが独立である。そしてこの 5 成分で公転軌道が決定される。二体問題は、 \mathbf{r} , \mathbf{p} 6 成分の初期条件を与えれば後の運動は運動方程式により決定されるが、残りの 1 つはある時刻における位置により与えられる。位置を与えるには 3 成分の情報が必要かということではなく、軌道が決定している段階では位置とは軌道の曲線に沿って付与された 1 パラメーターに他ならないので、これで数勘定は合っている。

ケプラー問題における Runge-Lenz ベクトルは、量子力学の (ポテンシャルの形が同じ) 水素型原子のエネルギー準位を代数的に決定した Pauli の論文で重要な役割を演じ、その結果は Schrödinger による Schrödinger 方程式を用いた結果より数ヶ月先んじたという [3]。

本講演では、一般の中心力場における Runge-Lenz 様ベクトルについて考察する。先行結果としては、たとえば [4] がある。

まず、中心力ポテンシャル $V(r)$ ($F(r) = -V'(r)$) のとき、運動方程式から軌道を決定する。 $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$ より、質点は原点を通り、 \mathbf{L} に垂直な平面上を運動する。この平面を公転軌道面と呼び、公転軌道面における極座標を (r, θ) とおく。ここで、 θ は Runge-Lenz 様ベクトル (もし存在すれば) の向きから測った偏角とする。

* <http://www015.upp.so-net.ne.jp/quano/quano.htm>

角運動量保存則 $L = mr^2\dot{\theta}$ 等を用いて、動径方向の運動方程式を書き換えると、

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{dV}{du} = 0 \quad (3)$$

となる。ここで、 $u = 1/r$ である。(3)の両辺に $du/d\theta$ を掛けて θ で積分することにより

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2m(E - V(u))}{L^2} - u^2 \quad (4)$$

を得る。 E は積分定数で、ここではエネルギーを与える保存量である。

ケプラー問題と同じく、Runge-Lenz 様ベクトル \mathbf{k} が公転軌道面上のベクトルとすると、偏角 θ の定義より、

$$\widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{r}} \cos \theta + \widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{L}} \sin \theta \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{r} \perp \mathbf{L}$ より、 $\widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{L}} = \widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{L}}$ となることを用いた。

(5)で、 $f(u, L^2, E) = \cos \theta$ とおくと、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\sin \theta \frac{d\theta}{du}, \quad \implies \quad \sin \theta = -\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{L} \quad (6)$$

となる。これらを(5)に代入して、その時間微分を計算すると

$$\frac{d\widehat{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{u^2}{mL} \left\{ (L^2u^2 - 2m(E - V)) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(m \frac{dV}{du} + L^2u \right) \frac{\partial f}{\partial u} - L^2f \right\} \widehat{\mathbf{r}} \times \widehat{\mathbf{L}} \quad (7)$$

となる。よって、 f は次の偏微分方程式をみたす [4].

$$(L^2u^2 - 2m(E - V)) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left(m \frac{dV}{du} + L^2u \right) \frac{\partial f}{\partial u} - L^2f = 0. \quad (8)$$

さらに、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ より、次の正規化条件もみたす [4].

$$f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \frac{(\widehat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2}{L^2} = 1. \quad (9)$$

実は、(8), (9) は (3), (4) より成り立つことを示す。つまり、(8), (9) は運動方程式を解く以上の新しい条件ではないことを明らかにする。

本講演では、調和振動子ポテンシャル $V(u) = m\omega^2/2u^2$ 、および $1/r, 1/r^2$ 混在型ポテンシャル $V(u) = -K_1u - K_2u^2$ を例にとりて、 f の存在や形、ひいては Runge-Lenz 様ベクトル \mathbf{k} の存在や形について論ずる。

参考文献

- [1] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, 「古典力学」(原書第3版) 2006(上巻), 2009(下巻), 吉岡書店.
- [2] 山内恭彦, 武田暁編著, 武田暁, 岩本文明, 上村洸, 和田靖執筆「大学演習 量子物理学」(復刊第4版), 2002, 裳華房.
- [3] 国場敦夫, ラプラス-ルンゲ-レンツベクトル, Gruppen Pest の始祖的例題, 数理科学 2007年7月号, 50-55.
- [4] D. M. Fradkin, Existence of dynamic symmetries O_4 and SU_3 for all classical central potential problems, Prog. Theo. Phys. **37** 798-812, 1967.

非定常 Ruijsenaars 関数

白石 潤一 (東京大学 大学院数理科学研究科)*

1. 非定常 Ruijsenaars 関数の定義

論文 [S] で導入された特殊関数「非定常 Ruijsenaars 関数」について、幾つかの定理と予想を述べる。

$N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし、次のような変数の組を用意する: $(x, p) = (x_1, x_2, \dots, x_N, p)$, $(s, \kappa) = (s_1, s_2, \dots, s_N, \kappa)$. 簡単のため、変数の添え字は N -周期的であるとす: 即ち $x_{i+N} = x_i$, $s_{i+N} = s_i$. また、 q, t を Macdonald 多項式のパラメータとする. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ が分割であるとは、それが有限個の非負整数の非増加列であることとする: 即ち、 $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, また $|\lambda| := \sum_i \lambda_i < \infty$. 全ての分割から成る集合を \mathcal{P} と書く. q -階乗などの標準的な記号は次の通り: $(u; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i u)$, $(u; q)_n = (u; q)_\infty / (q^n u; q)_\infty$, $(u; q, p)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - q^i p^j u)$.

Definition 1.1 (合同条件付き Nekrasov 因子). $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ に対して、合同条件付き $Nekrasov$ 因子 $\mathbf{N}_{\lambda, \mu}^{(k|N)}(u|q, \kappa)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\lambda, \mu}^{(k|N)}(u|q, \kappa) &= \mathbf{N}_{\lambda, \mu}^{(k)}(u|q, \kappa) \\ &= \prod_{\substack{j \geq i \geq 1 \\ j-i \equiv k \pmod{N}}} (uq^{-\mu_i + \lambda_{j+1}} \kappa^{-i+j}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}} \cdot \prod_{\substack{\beta \geq \alpha \geq 1 \\ \beta - \alpha \equiv -k-1 \pmod{N}}} (uq^{\lambda_\alpha - \mu_\beta} \kappa^{\alpha - \beta - 1}; q)_{\mu_\beta - \mu_{\beta+1}}. \end{aligned}$$

Definition 1.2 (非定常 Ruijsenaars 関数). 非定常 $Ruijsenaars$ 関数 $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ $\in \mathbb{Q}(s, \kappa, q, t)[[px_2/x_1, \dots, px_N/x_{N-1}, px_1/x_N]]$ を次のような形式級数と定める:

$$f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t) = \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)} \in \mathcal{P}} \prod_{i,j=1}^N \frac{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(ts_j/s_i|q, \kappa)}{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(s_j/s_i|q, \kappa)} \cdot \prod_{\beta=1}^N \prod_{\alpha \geq 1} (px_{\alpha+\beta}/tx_{\alpha+\beta-1})^{\lambda_\alpha^{(\beta)}}.$$

Proposition 1.3. $\kappa = 0$ とおけば、次の因子化公式を得る:

$$f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, 0|q, t) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(p^{j-i} q x_j / x_i; q, p^N)_\infty}{(p^{j-i} t x_j / x_i; q, p^N)_\infty} \cdot \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} \frac{(p^{N-j+i} q x_i / x_j; q, p^N)_\infty}{(p^{N-j+i} t x_i / x_j; q, p^N)_\infty}.$$

Definition 1.4 (正規化非定常 Ruijsenaars 関数). $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ を上の無限乗積で割って得られる級数 $\varphi^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ を導入する:

$$\begin{aligned} \varphi^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t) &\in \mathbb{Q}(q, t)[[px_2/x_1, \dots, px_N/x_{N-1}, px_1/x_N, \kappa s_2/s_1, \dots, \kappa s_N/s_{N-1}, \kappa s_1/s_N]], \\ \varphi^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t) &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(p^{j-i} t x_j / x_i; q, p^N)_\infty}{(p^{j-i} q x_j / x_i; q, p^N)_\infty} \cdot \prod_{1 \leq i \leq j \leq N} \frac{(p^{N-j+i} t x_i / x_j; q, p^N)_\infty}{(p^{N-j+i} q x_i / x_j; q, p^N)_\infty} \cdot f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t). \end{aligned}$$

即ち、 $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ の中の因子 $\prod_{i,j=1}^N \mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(ts_j/s_i|q, \kappa) / \mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(s_j/s_i|q, \kappa)$ は、 κ に関して $\kappa = 0$ で $Taylor$ 展開されたものとする。

本研究は科研費 (15K04808, 16K05186, 19K03512) の助成を受けたものである。

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: shiraish@ms.u-tokyo.ac.jp

2. 主張

Conjecture 2.1 (双対性予想). 次が成り立つ:

$$\varphi^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(x, p|s, \kappa|q, t) = \varphi^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(s, \kappa|x, p|q, t) \quad (\text{bispectral duality}),$$

$$\varphi^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(x, p|s, \kappa|q, t) = \varphi^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(x, p|s, \kappa|q, q/t) \quad (\text{Poincaré duality}).$$

K を非負整数 (level) とし, 分割 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ が条件 $K + \mu_N - \mu_1 \geq 0$ を満たすとす。この K, μ には, affine Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$ の dominant integrable weight $\Lambda(K, \mu) = (K + \mu_N - \mu_1)\Lambda_0 + \sum_{i=1}^{N-1} (\mu_i - \mu_{i+1})\Lambda_i$ と, その既約表現 $L(\Lambda(K, \mu))$ が対応する ($\Lambda_0, \dots, \Lambda_{N-1}$ は fundamental weight.). $\text{ch}_{L(\Lambda(K, \mu))}^{\widehat{\mathfrak{sl}}_N}$ を principal gradation による指標とする。パラメータ s, κ を次のように特殊化する:

$$s = (\kappa t)^\delta q^\mu = q^{-K\delta/N + \mu}, \quad \kappa = q^{-K/N} t^{-1}.$$

ここに, $\delta = (N-1, N-2, \dots, 1, 0)$ は階段状の分割, また, $t^\delta s = (t^{N-1}s_1, t^{N-2}s_2, \dots, ts_{N-1}, s_N)$ と記した。

Theorem 2.2 (affine 既約指標への退化). K, μ, s, κ を上の通りとする。このとき次が成り立つ:

$$\lim_{t \rightarrow q} x^\mu f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(x, p|q^{-K\delta/N + \mu}, q^{-K/N} t^{-1}|q, q/t) = \frac{1}{(p^N; p^N)_\infty} \cdot \text{ch}_{L(\Lambda(K, \mu))}^{\widehat{\mathfrak{sl}}_N}.$$

Remark 2.3. 証明には, affine Gelfand-Tsetlin pattern [FFNR], ないし Tingley の $\widehat{\mathfrak{sl}}_N$ -crystal [T] を用いる。右辺の因子 $1/(p^N; p^N)_\infty$ は $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ の指標と見做することができる。また, この極限は q に依存しないことに注意する。

Proposition 2.4 (level 零の場合). $K = 0, \mu = \emptyset$ とする。即ち, $s_i = 1$ ($1 \leq i \leq N$), $\kappa = t^{-1}$ と特殊化する。このとき, 任意の q, t に対して (つまり極限 $t \rightarrow q$ を取らなくとも) 次が成立する:

$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(x, p|1, \dots, 1, t^{-1}|q, q/t) = \frac{1}{(p^N; p^N)_\infty}.$$

Conjecture 2.5 (特殊値予想). $x = (1, \dots, 1), p = 1/t$ と特殊化すれば,

$\mathbb{Q}(q)[s_2/s_1, s_3/s_2, \dots, s_1/s_N][[1/t, \kappa]]$ における次の恒等式が成り立つ:

$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(1, \dots, 1, 1/t|s, \kappa|q, q/t) = \frac{1}{(\kappa^N; \kappa^N)_\infty} \left((q/t; q)_\infty \right)^N \\ \times \left(\frac{(\kappa^N q/t; q, \kappa^N)_\infty}{(\kappa^N q; q, \kappa^N)_\infty} \right)^N \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(\kappa^{j-i} q s_j / t s_i; q, \kappa^N)_\infty (\kappa^{N-j+i} q s_i / t s_j; q, \kappa^N)_\infty}{(\kappa^{j-i} q s_j / s_i; q, \kappa^N)_\infty (\kappa^{N-j+i} q s_i / s_j; q, \kappa^N)_\infty}.$$

参考文献

- [FFNR] B. Feigin, M. Finkelberg, A. Negut and L. Rybnikov, Yangians and cohomology ring of Laumon spaces, Sel. Math. New. Ser. (2011) **17**:573-607, DOI 10.1007/s00029-011-0059-x.
- [T] P. Tingley, Three Combinatorial Models for $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ Crystals, with Applications to Cylindric Plane Partitions, Int. Math. Res. Not. Article ID rnm 143, 41 pages, doi: 10.1093/imrn/rnm143.
- [S] J. Shiraishi, Affine Screening Operators, Affine Laumon Spaces, and Conjectures Concerning Non-Stationary Ruijsenaars Functions, Journal of Integrable Systems (2019) **3**, 1-30. doi: 10.1093/integr/xyz010.

非定常及び定常 Ruijsenaars 関数と Ruijsenaars 作用素の固有値問題

白石 潤一 (東京大学 大学院数理科学研究科)*

1. Ruijsenaars 作用素

論文 [S] で導入された特殊関数「非定常 Ruijsenaars 関数」を用いて, Ruijsenaars 作用素の固有値問題に関する予想を述べる.

Definition 1.1 (非定常 Ruijsenaars 関数). 非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\hat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ $\in \mathbb{Q}(s, \kappa, q, t)[[px_2/x_1, \dots, px_N/x_{N-1}, px_1/x_N]]$ を次のような形式級数と定める:

$$f^{\hat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t) = \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)} \in \mathbb{P}} \prod_{i,j=1}^N \frac{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(ts_j/s_i|q, \kappa)}{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(s_j/s_i|q, \kappa)} \cdot \prod_{\beta=1}^N \prod_{\alpha \geq 1} (px_{\alpha+\beta}/tx_{\alpha+\beta-1})^{\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}.$$

Definition 1.2. テータ関数を $\Theta_p(z) = (z; p)_{\infty} (p/z; p)_{\infty} (p; p)_{\infty}$ と記す. Ruijsenaars 作用素 $[R]D_x(p) = D_x(p|q, t)$ を次のように定める:

$$D_x(p) = \sum_{i=1}^N \prod_{j \neq i} \frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)} T_{q, x_i},$$

ここに, T_{q, x_i} は q -差分作用素 $q^{x_i \partial / \partial x_i}$ を表す.

(背景にある状況を踏まえて) 素朴に考えれば, 「非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\hat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ の定常極限 $\kappa \rightarrow 1$ は Ruijsenaars 作用素 $D_x(p)$ の固有関数を与える」と期待される. しかしながら, そのような極限は存在しない(発散する). 従って, 極限 $\kappa \rightarrow 1$ を取る前に $f^{\hat{q}^N}$ を規格化しなければならない. その方法のひとつは, $f^{\hat{q}^N}$ の x に関する定数項で割ることであると思われる.

$\lambda = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)})$ を分割の N -組とする. 簡単のため, 次のような記号を用意する: $|\lambda| = \sum_{i=1}^N |\lambda^{(i)}|$, また, $m_i = m_i(\lambda) = \sum_{\beta=1}^N \sum_{\alpha+\beta \equiv i \pmod{N}} \lambda_{\alpha}^{(\beta)} - \lambda_{\alpha}^{(\beta+1)}$. このとき, 次が成り立つ: $\prod_{\beta=1}^N \prod_{\alpha \geq 1} (px_{\alpha+\beta}/tx_{\alpha+\beta-1})^{\lambda_{\alpha}^{(\beta)}} = (p/t)^{|\lambda|} \prod_{i=1}^N x_i^{m_i}$. 条件 $m_1 = \dots = m_N = 0$ は, $|\lambda| \equiv 0 \pmod{N}$ を意味することに注意する.

Definition 1.3 (定数項). $\alpha(p|s, \kappa|q, t) = \sum_{d \geq 0} p^{Nd} \alpha_d(s, \kappa|q, t)$ を, 級数 $f^{\hat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ の x_i に関する定数項とする. 即ち,

$$\alpha(p|s, \kappa|q, t) = \sum_{\substack{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)} \in \mathbb{P} \\ m_1 = \dots = m_N = 0}} (p/t)^{|\lambda|} \prod_{i,j=1}^N \frac{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(ts_j/s_i|q, \kappa)}{\mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(s_j/s_i|q, \kappa)}.$$

本研究は科研費(15K04808, 16K05186, 19K03512)の助成を受けたものである.

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学 大学院数理科学研究科

e-mail: shiraish@ms.u-tokyo.ac.jp

2. 予想

Conjecture 2.1. 次が成り立つ:

1. 級数 $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ はある領域で収束して解析関数を与える. 特に, 変数 κ に関して, ある穴開き円板 $\{\kappa \in \mathbb{C} \mid |\kappa - 1| < r, \kappa \neq 1\}$ 上で正則である.
2. $\kappa = 1$ は, $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ 及び $\alpha(p|s, \kappa|q, t)$ の真性特異点である. (係数 $\alpha_d(s, \kappa|q, t)$ は, κ について $\kappa = 1$ で d 位の極を持つので.)
3. 商 $f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)/\alpha(p|s, \kappa|q, t)$ は $\kappa = 1$ で正則である.

Definition 2.2. Conjecture 2.1 に従い, 定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\text{st.}\widehat{q}^N}(x, p|s|q, t)$ を次のように定める:

$$f^{\text{st.}\widehat{q}^N}(x, p|s|q, t) = \left. \frac{f^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)}{\alpha(p|s, \kappa|q, t)} \right|_{\kappa=1}.$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, N$) とし, スペクトル変数 $s = (s_i)_{1 \leq i \leq N}$ を $s = t^\delta q^\lambda = (t^{N-i} q^{\lambda_i})_{1 \leq i \leq N}$ とおく. p 幂によって補正された座標変数を $p^{\delta/N} x = (p^{(N-i)/N} x_i)_{1 \leq i \leq N}$ と定める. また, $x^\lambda = \prod_{i=1}^N x_i^{\lambda_i}$ と記す.

Conjecture 2.3. 定常 Ruijsenaars 関数 $x^\lambda f^{\text{st.}\widehat{q}^N}(p^{\delta/N} x, p^{1/N}|s|q, q/t)$ は Ruijsenaars 作用素の固有関数を与える:

$$D_x(p) x^\lambda f^{\text{st.}\widehat{q}^N}(p^{\delta/N} x, p^{1/N}|s|q, q/t) = \varepsilon(p|s|q, t) x^\lambda f^{\text{st.}\widehat{q}^N}(p^{\delta/N} x, p^{1/N}|s|q, q/t),$$

$$\varepsilon(p|s|q, t) = \sum_{i=1}^N s_i + \sum_{d>0} \varepsilon_d(s|q, t) p^d.$$

Remark 2.4. $H^{\text{eCS}}(p|\beta)$ を, 結合定数 β , Weierstrass の楕円関数 $\wp(u)$ (ただし p が *elliptic nome*) を相互作用ポテンシャルに持つ楕円 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンとする. $q = e^h, t = e^{\beta h}, \kappa = q^{kh}$ とおき, 非定常 Ruijsenaars 関数 $\varphi^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, t)$ (の微分極限を $\varphi^{\text{eCS}}(x, p|\lambda, k|\beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi^{\widehat{q}^N}(x, p|s, \kappa|q, q/t)$ と定める. このとき, 次が成り立つと予想される:

$$\left(k p \frac{\partial}{\partial p} + H^{\text{eCS}}(p|\beta) \right) x^\lambda \varphi^{\text{eCS}}(x, p|\lambda, k|\beta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 x^\lambda \varphi^{\text{eCS}}(x, p|\lambda, k|\beta).$$

微分項 $p\partial/\partial p$ は非定常 Schrödinger 方程式の時間微分項に対応することに注意する. 「非定常 ($\kappa \neq 1, k \neq 0$)」ないし「定常 ($\kappa = 1, k = 0$)」という表現は, このことに由来する.

参考文献

- [R] R.N.M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities, Commun. Math. Phys. **110** (1987) 191-213.
- [S] J. Shiraishi, Affine Screening Operators, Affine Laumon Spaces, and Conjectures Concerning Non-Stationary Ruijsenaars Functions, Journal of Integrable Systems (2019) **3**, 1-30. doi: 10.1093/integr/xyz010.

非定常 Ruijsenaars 関数と Ding-Iohara-Miki 代数の intertwining 作用素

大久保 勇輔 (東大数理)
白石 潤一 (東大数理)
福田 真之 (東大理)

[1]において、非定常 Ruijsenaars 関数と呼ばれる Macdonald 関数のある種の Affine 類似が与えられた。本公演では、Ding-Iohara-Miki 代数 (DIM 代数) の intertwining 作用素を用いてこの関数の実現を与え、さらに intertwining 作用素の双対公式を通して非定常 Ruijsenaars 関数のいくつかの組み合わせ論的公式を与える。

まず、非定常 Ruijsenaars 関数は以下のように定義される。

Definition 1. $N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし、 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ を不定元の組とする。非定常 Ruijsenaars 関数 $f^{\hat{q}^N}(\mathbf{x}; p|\mathbf{s}, \kappa|q, t) \in \mathbb{Q}(q, t, \kappa, \mathbf{s})[[px_2/x_1, \dots, px_N/x_{N-1}, px_1/x_N]]$ を

$$f^{\hat{q}^N}(\mathbf{x}; p|\mathbf{s}, \kappa|q, t) = \sum_{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(N)} \in \mathcal{P}} \prod_{i,j=1}^N \frac{N_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(ts_j/s_i|q, \kappa)}{N_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}^{(j-i|N)}(s_j/s_i|q, \kappa)} \cdot \prod_{\beta=1}^N \prod_{\alpha \geq 1} (px_{\alpha+\beta}/tx_{\alpha+\beta-1})^{\lambda_{\alpha}^{(\beta)}}$$

によって定義する。ここに、 \mathcal{P} はパーティション全体の集合とし、変数 x_i は $x_{i+N} = x_i$ によって同一視する。さらに、階乗積の記号 $(a; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^{k-1}a)$ を用いて、

$$\begin{aligned} N_{\lambda, \mu}^{(k|N)}(u|q, \kappa) &= N_{\lambda, \mu}^{(k)}(u|q, \kappa) \\ &= \prod_{\substack{j \geq i \geq 1 \\ j-i \equiv k \pmod{N}}} (uq^{-\mu_i + \lambda_{j+1}} \kappa^{-i+j}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}} \cdot \prod_{\substack{\beta \geq \alpha \geq 1 \\ \beta - \alpha \equiv -k-1 \pmod{N}}} (uq^{\lambda_{\alpha} - \mu_{\beta}} \kappa^{\alpha - \beta - 1}; q)_{\mu_{\beta} - \mu_{\beta+1}} \end{aligned}$$

と定義した。

この関数は Affine 遮蔽作用素によって導出することができ、Affine Laumon 空間の Euler 指標に一致することが知られている。またこの関数の $\kappa \rightarrow 1$ 極限は Ruijsenaars 演算子の固有関数になっていることが予想されている [1]。

この関数を Ding-Iohara-Miki 代数の intertwining 作用素 $\Phi : \mathcal{F}^{\text{ver}} \otimes \mathcal{F}^{\text{hor}} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{hor}}$ と $\Phi^* : \mathcal{F}^{\text{hor}} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{hor}} \otimes \mathcal{F}^{\text{ver}}$ によって実現することができる。(\mathcal{F}^{hor} と \mathcal{F}^{ver} はそれぞれ、DIM 代数の Vertical 表現と Horizontal 表現と呼ばれる加群構造が入った Fock 空間である。) この作用素の合成 $\Phi^* \circ \Phi$ を図 1 のような十字架の図式で表す。これらを網目状に合成し (図 2)、

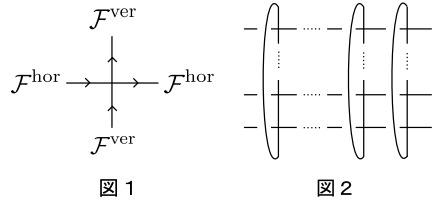


図 1

図 2

Vertical 表現に関するトレースをとると $\kappa = t^{-1/N}$ の非定常 Ruijsenaars 関数が得られる。

このときトレースを取る向きを水平方向に変えると、次のような θ 関数によって書かれる関数が得られる。

Definition 2. 関数 $f_N^{\text{ellip}}(\mathbf{x}; \mathbf{s}|q, t, p) \in \mathbb{Q}(q, t, p, \mathbf{s})[[x_2/x_1, \dots, x_N/x_{N-1}]]$ を

$$f_N^{\text{ellip}}(\mathbf{x}; \mathbf{s}|q, t, p) = \sum_{\theta} c_N^{\text{ellip}}(\theta; \mathbf{s}|q, t, p) \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_j/x_i)^{\theta_{ij}}$$

によって定義する. ここに, $\theta = (\theta_{i,j})$ は非負整数を成分に持つ上三角な $N \times N$ 行列 (対角成分は全て 0) 全体を走る. また

$$c_N^{\text{ellip}}(\theta; \mathbf{s}|q, t, p) = \prod_{k=2}^N \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\Theta(q^{\sum_{a>k} (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} t s_j / s_i; q, p)_{\theta_{i,k}}}{\Theta(q^{\sum_{a>k} (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} q s_j / s_i; q, p)_{\theta_{i,k}}} \cdot \prod_{k=2}^N \prod_{1 \leq i \leq j < k} \frac{\Theta(q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a>k} (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} q s_j / t s_i; q, p)_{\theta_{i,k}}}{\Theta(q^{-\theta_{j,k} + \sum_{a>k} (\theta_{i,a} - \theta_{j,a})} s_j / s_i; q, p)_{\theta_{i,k}}},$$

$$\Theta(a; q, p)_n := \begin{cases} \prod_{\ell=0}^{n-1} \theta_p(q^\ell a), & n \geq 0; \\ \prod_{\ell=0}^{n-1} \theta_p(q^{-\ell-1} a)^{-1}, & n < 0, \end{cases} \quad \theta_p(a) := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - p^k a)(1 - p^{k+1} a^{-1})$$

とした.

この関数の $p \rightarrow 0$ 極限は Macdonald 差分作用素の固有関数を与える. 上記 2 つの Macdonald 関数の Affine 類似あるいは楕円類似が本質的に同じものであるということ, intertwining 作用素の双対公式 [2] を通して発見した [3].

Theorem 3. 以下の公式が成立する :

$$f^{\widehat{\mathfrak{gl}}_N}(\mathbf{x}', p^{\frac{1}{N}} | \mathbf{s}', t^{-\frac{1}{N}} | q, t) = \mathcal{C} \times f_N^{\text{ellip}}(\mathbf{s}; \mathbf{x}|q, t, p).$$

ここに, $\mathbf{s}' = (t^{\frac{1}{N}} s_1, t^{\frac{2}{N}} s_2, \dots, t^{\frac{N}{N}} s_N)$, $\mathbf{x}' = (p^{-\frac{1}{N}} x_1, p^{-\frac{2}{N}} x_2, \dots, p^{-\frac{N}{N}} x_N)$ とし,

$$\mathcal{C} = \left(\frac{(pq/t; q, p)_\infty}{(p; p)_\infty (pt; q, p)_\infty} \right)^N \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\Gamma(tx_j/x_i; q, p)}{\Gamma(qx_j/x_i; q, p)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(ts_j/s_i; q)_\infty}{(qs_j/s_i; q)_\infty},$$

$$(a; q)_\infty = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{k-1} a), \quad (a; q, p)_\infty = \prod_{k, \ell=1}^{\infty} (1 - q^{k-1} p^{\ell-1} a), \quad \Gamma(a; q, p) = \frac{(qp/a; q, p)_\infty}{(a; q, p)_\infty}.$$

上記の 2 つの関数は $N \geq 2$ の場合のみに定義される関数であるが, $N = 1$ の場合に対応した関係式を得ることもできる. つまり以下の定理を得た [3].

Theorem 4. 以下の公式が成立する :

$$\exp \left(\sum \frac{1}{n} \frac{(1 - q^n \kappa^n)(1 - \kappa^n / t^n) \kappa^{-n} p^n}{(1 - q^n)(1 - t^{-n})(1 - p^n)} \right) = \sum_{\lambda} (p/\kappa)^{|\lambda|} \frac{\prod_{1 \leq i \leq j} (\kappa q^{-\lambda_i + \lambda_{j+1}} t^{i-j}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}} (\kappa q^{\lambda_i - \lambda_j} t^{-i+j+1}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}{\prod_{1 \leq i \leq j} (q^{-\lambda_i + \lambda_{j+1}} t^{i-j}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}} (q^{\lambda_i - \lambda_j} t^{-i+j+1}; q)_{\lambda_j - \lambda_{j+1}}}.$$

参考文献

- [1] J. Shiraishi, “Affine Screening Operators, Affine Laumon Spaces, and Conjectures Concerning Non-Stationary Ruijsenaars Functions,” [arXiv:1903.07495](https://arxiv.org/abs/1903.07495) [math.QA].
- [2] M. Fukuda, Y. Ohkubo, and J. Shiraishi, “Generalized Macdonald Functions on Fock Tensor Spaces and Duality Formula for Changing Preferred Direction,” [arXiv:1903.05905](https://arxiv.org/abs/1903.05905) [math.QA].
- [3] M. Fukuda, Y. Ohkubo, and J. Shiraishi, in preparation.

\imath QUANTIZATIONS

渡邊 英也 (京都大学数理解析研究所)

1. 概要

本講演の目的は、近年盛んに研究されている \imath 量子群を \imath 量子化 (\imath quantization; “ \imath ” は「アイ」と読む) という観点から紹介し、できるだけ多くの専門分野の方々に興味を持っていただくことである。「 \imath 量子化」は「 \imath 化」と「量子化」を合わせた、ここだけの用語である。

「量子化」とは、ある対象をパラメータ q で変形したものであって、適当な意味で $q \rightarrow 1$ なる極限 (古典極限) をとると元の対象を復元するようなものを指す。例えば、正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、Laurent 多項式 $[n] \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を

$$[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+1}$$

で定義すれば、 $[n] \rightarrow n$ ($q \rightarrow 1$) となるため、 $[n]$ は n の量子化であると言える。古典的 ($q \rightarrow 1$) な世界では q^{n-1} も q^{n-3} も等しく 1 でしかないが、量子的な世界ではこれらは明確に区別できる。つまり、量子的な対象は古典的な対象よりも多くの情報を持っているのである。従って、古典的な世界では見えない、量子的な世界に特有の現象を見ることができると期待される。そのような現象の古典極限は、古典的な世界での新発見となる。

一方、「 \imath 化」とは、Dynkin 図形を佐武図形に置き換えることを指す。Dynkin 図形は、Lie 代数 (複素半単純 Lie 代数) の情報を全て持ったグラフであり、佐武図形は、Lie 代数の実形 (real form) の情報を全て持ったグラフである。Lie 代数の、対合 (自己同型写像で、自乗して 1 になるもの) による固定部分 Lie 代数を、ここだけの用語として \imath Lie 代数と呼ぶ。“ \imath ” は、対合を意味する *involution* の頭文字を表している。Lie 代数の実形たちと、 \imath Lie 代数たちの間には自然な一対一対応があるため、佐武図形は \imath Lie 代数の情報を全て持っているとも言える。Lie 代数 \mathfrak{g} と \imath Lie 代数 \mathfrak{k} の組のことを対称対という。例えば、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$, $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ は対称対である。

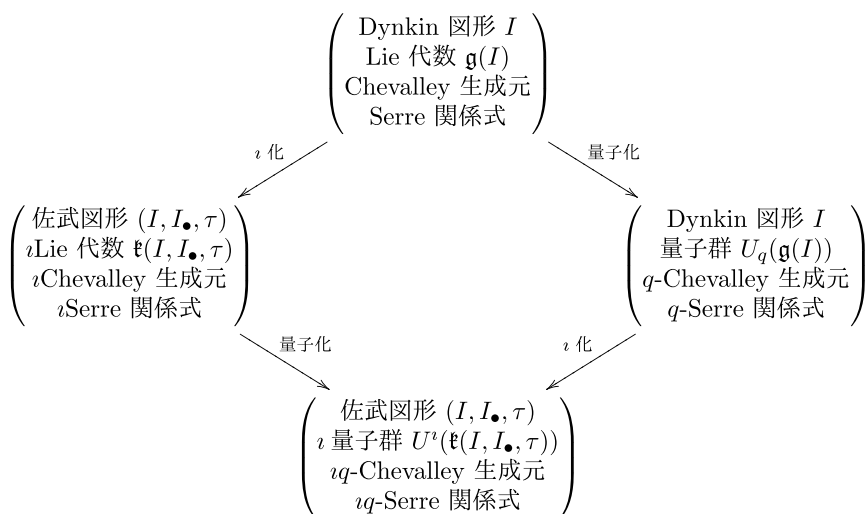
Lie 代数の表現論は、物事の対称性を表す数学的对象として、自然科学において重要な役割を果たす。Lie 代数 \mathfrak{g} の量子化としては、Drinfeld と Jimbo によって導入された量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ がよく知られている。しかし、リー代数に関するあらゆる現象が、量子群に関する現象として量子化されるわけではない。例えば、対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ が定める包含関係 $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ は、量子群を用いては量子化できない。つまり、 $U_q(\mathfrak{k}) \subset U_q(\mathfrak{g})$ という関係は成り立たない。

対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の量子化、すなわち量子対称対の例は [16, 12, 24] などで複数の方法で構成され、[17] で一つの統一的な構成法が提示された。量子対称対の理論では、 \mathfrak{g} の量子化は量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ で、 \mathfrak{k} の量子化は $U_q(\mathfrak{g})$ のある余イデアル部分代数 $U^{\imath}(\mathfrak{k})$ で与えられる。この $U^{\imath}(\mathfrak{k})$ を \imath 量子群と呼ぶ。 \imath 量子群 $U^{\imath}(\mathfrak{k})$ と量子群 $U_q(\mathfrak{k})$ はどちらも \mathfrak{k} の量子化であるが、これらは全くの別物である。 \imath 量子群は、その構成方法から量子対称対余イデアル部分代数 (quantum symmetric pair coideal subalgebra) とも呼ばれている。

量子群の表現論は、それ自身が興味深く美しいだけでなく、リー代数の表現論、直交多項式、結び目、可積分系など幅広い分野に応用されている。このような応用を可

能にする理論の多くは ι 量子群にまで自然に拡張され、 ι 量子群もこれらの分野へ応用されている。一方で、 ι 量子群の有限次元表現の分類・構造論については、まだ不明な点が多い。こういった基礎的な理論がきちんと整備されたとき、 ι 量子群はさらに活躍の場を広げることだろう。

本講演では、量子群において重要な理論である標準基底と結晶基底の ι 量子群版、すなわち ι 標準基底と ι 結晶基底の理論を紹介する。見通しをよくするために、Dynkin 図形から話を始める（従って、以下の話は Kac-Moody 代数にまで拡張され得るし、一部は既にされている [14, 7]）。Lie 代数は Dynkin 図形から、Chevalley 生成元と Serre 関係式で構成される。量子群は、Serre 関係式を量子化することによって得られる。一方、 ι Lie 代数は、Lie 代数を ι 化することで得られる。つまり、Dynkin 図形の代わりに佐武図形から構成される。すると、 ι 量子群は、量子群の ι 化であると同時に、 ι Lie 代数の量子化であると見ることができる。「 ι 量子群」という名前は前者、「量子対称対余イデアル部分代数」は後者的な視点を強調している感じがするが、どちらか一方の見方に捕らわれるべきではない。事実、 ι 標準基底の理論では ιq -Chevalley 生成元を q -Chevalley 生成元の ι 化と見るのがよく、 ι 結晶基底の理論では ι Chevalley 生成元の量子化と見るのがよい。



ι 標準基底、 ι 結晶基底の他にも重要な ι 量子化の例はたくさんあるが、講演者の力不足のため、ほんの一部のキーワードを列挙するに留める：

【 ι 量子化の例】

- 対称空間 GL / SO , GL / Sp の座標環の量子化 ([24])
- A 型量子群の Beilinson-Lusztig-MacPherson 構成の ι 化 ([4])
- ADE 型量子群の Hall 代数構成の ι 化 ([20, 21, 22])
- 籐多様体の ι 化 ([19])
- 組み紐群作用の ι 化 ([15, 21])
- Kazhdan-Lusztig 理論の ι 化 ([11, 5, 3, 8, 9])
- R 行列の ι 化 ([5, 2, 6])
- A 型 (量子) 多項式関手の ι 化 ([10])

本稿の末尾に連結な Dynkin 図形と印付き佐武図形のリストを載せた。「印付き」の意味は後で説明するが、印付き白丸 \otimes をただの白丸 \circ に置き換えたものが普通の佐武図形である。

2. LIE 代数

2.1. **Dynkin 図形による構成.** Dynkin 図形を参照する際には単に頂点集合 I のみを参照する。Dynkin 図形 I に対し、Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(I)$ を次の生成元と関係式で定義する：

$$\begin{aligned} \text{【生成元】} \quad & e_i, f_i, h_i, \quad i \in I \\ \text{【関係式】} \quad & [h_i, h_j] = 0, \\ & [h_i, e_j] = a_{i,j}e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{i,j}f_j, \\ & [e_i, f_j] = \delta_{i,j}h_i, \\ & (\text{ad } e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = 0 = (\text{ad } f_i)^{1-a_{i,j}}(f_j) \quad \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

ただし、 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I} \in \text{Mat}_I(\mathbb{Z})$ は I の Cartan 行列を表す。また、 $x \in \mathfrak{g}$ に対し $\text{ad } x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は

$$(\text{ad } x)(y) := [x, y] \quad \text{for all } y \in \mathfrak{g}$$

で定義される線形写像である。ここに現れる生成元たちを Chevalley 生成元、関係式たちを Serre 関係式と呼ぶ (普通は e_i, f_i を Chevalley 生成元、 $(\text{ad } e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = 0 = (\text{ad } f_i)^{1-a_{i,j}}(f_j)$ を Serre 関係式と呼ぶ)。

$U(\mathfrak{g})$ を \mathfrak{g} の普遍包絡代数とする。すなわち、 $U(\mathfrak{g})$ は \mathfrak{g} と同じ生成元と関係式で定義される結合代数である (ただし、Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]$ は交換子積に置き換える)。「 \mathfrak{g} の表現」と「 $U(\mathfrak{g})$ の表現」は同じものなので、本講演では特に区別しない。

2.2. **有限次元表現.** $\{e_i \mid i \in I\}, \{f_i \mid i \in I\}, \{h_i \mid i \in I\}$ で生成される \mathfrak{g} の部分 Lie 代数または $U(\mathfrak{g})$ の部分代数をそれぞれ $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}$ または $U(\mathfrak{n}^+), U(\mathfrak{n}^-), U(\mathfrak{h})$ と書く。すると、 $\mathfrak{g}, U(\mathfrak{g})$ はそれぞれ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^+)$$

と3つのパートに分解される。これらを三角分解と呼ぶ。

$P_+ := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ for all } i \in I\}$ とおき、 P_+ の元を優整ウェイト (dominant integral weight) と呼ぶ。 $\lambda \in P_+$ に対し、 $U(\mathfrak{g})$ の表現 $V(\lambda)$ を

$$V(\lambda) := U(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{i \in I} U(\mathfrak{g})e_i + \sum_{i \in I} U(\mathfrak{g})(h_i - \lambda(h_i)) \right)$$

で定義し、最高ウェイト λ の Verma 加群と呼ぶ。Verma 加群は唯一つの既約商を持つ。これを $L(\lambda)$ と書き、最高ウェイト λ の既約最高ウェイト表現と呼ぶ。 $L(\lambda)$ は $U(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現であり、 $U(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現は $L(\lambda)$ たちで尽くされている。また、 $U(\mathfrak{g})$ の有限次元表現は完全可約、つまり既約表現の直和に分解する。したがって、 $U(\mathfrak{g})$ の有限次元表現論では、与えられた有限次元表現がどのように既約分解するか、各有限次元既約表現の構造はどう記述できるかが問題となる。

既約分解すべき有限次元表現の例としては、既約表現のテンソル積が挙げられる。代数準同型写像 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ を

$$\Delta(x) := x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

で定義すると、 $U(\mathfrak{g})$ の表現 M, N のテンソル積 $M \otimes N$ は、 Δ を介して $U(\mathfrak{g})$ の表現になる：

$$x \cdot (m \otimes n) := \Delta(x)(m \otimes n) = xm \otimes n + m \otimes xn, \quad x \in U(\mathfrak{g}), m \in M, n \in N.$$

M と N が有限次元ならば、 $M \otimes N$ を既約分解するという問題は、 M と N が共に既約の場合、すなわち $M = L(\lambda), N = L(\mu), \lambda, \mu \in P_+$ の場合に帰着される。

3. 量子群

3.1. **Dynkin 図形による構成.** q を不定元とする。 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in \mathbb{Z}$ に対し

$$[n]_{q^a} := \frac{q^{an} - q^{-an}}{q^a - q^{-a}}, [n]_{q^a}! := \prod_{m=1}^n [m]_{q^a}, \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_{q^a} := \frac{[m]_{q^a}!}{[m-n]_{q^a}! [n]_{q^a}!}$$

とおく。これらはそれぞれ、整数 n 、階乗 $n!$ 、二項係数 $\binom{m}{n}$ の量子化である。

前章に引き続き、 I を Dynkin 図形とし、 $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ を Cartan 行列とする。各 $i \in I$ に対し、 $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ を、互いに素であって $d_i a_{i,j} = d_j a_{j,i}$ を満たすように選ぶ。Dynkin 図形 I に付随する量子群 $U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g}(I))$ とは、次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である：

$$\begin{aligned} \text{【生成元】} & E_i, F_i, K_i^{\pm 1}, i \in I \\ \text{【関係式】} & K_i K_i^{-1} = 1 = K_i^{-1} K_i, \\ & K_i K_j = K_j K_i, \\ & K_i E_j = q_i^{a_{i,j}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q_i^{-a_{i,j}} F_j K_i, \\ & [E_i, F_j] = \delta_{i,j} [K_i; 0]_{q_i}, \\ & S_{i,j}(E_i, E_j) = 0 = S_{i,j}(F_i, F_j) \quad \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

ただし、 $i \neq j$ に対し

$$S_{i,j}(x, y) := \sum_{r=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{i,j} \\ r \end{bmatrix}_{q_i} x^{1-a_{i,j}-r} y^r$$

とおき、さらに $q_i := q^{d_i}, [K_i; 0]_{q_i} := \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ とおいた。また、 $[E_i, F_j]$ は交換子積 $E_i F_j - F_j E_i$ である。この生成元と関係式たちを q -Chevalley 生成元、 q -Serre 関係式と呼ぶ（普通は、単に Chevalley 生成元と呼び、 $S_{i,j}(E_i, E_j) = 0 = S_{i,j}(F_i, F_j)$ だけを q -Serre 関係式と呼ぶ）。

3.2. **古典極限.** 量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ が \mathfrak{g} の量子化（より正確には $U(\mathfrak{g})$ の量子化）であるということの意味を明確にしよう。各 $i \in I$ に対し、 $(K_i; 0)_{q_i} := \frac{K_i - 1}{q_i - 1}$ とおく。さらに、 $\mathbf{A}_1 := \{f/g \in \mathbb{C}(q) \mid g(1) \neq 0\}$ とおき、 $E_i, F_i, (K_i; 0)_{q_i}, K_i^{\pm 1}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の \mathbf{A}_1 -部分代数を $U_q(\mathfrak{g})_{\mathbf{A}_1}$ と書く。代数準同型写像 $\mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbb{C}; f(q) \mapsto f(1)$ によって \mathbb{C} を \mathbf{A}_1 -代数とみなし、 $\overline{U_q(\mathfrak{g})} := U_q(\mathfrak{g})_{\mathbf{A}_1} \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ とおく。すると、 $\overline{U_q(\mathfrak{g})}$ は $U(\mathfrak{g})$ に同型な \mathbb{C} -代数になる。具体的には、 $\overline{E_i}, \overline{F_i}, \overline{(K_i; 0)_{q_i}}, \overline{K_i^{\pm 1}}$ が $e_i, f_i, h_i, 1$ にそれぞれ対応する。ここで、 $x \in U_q(\mathfrak{g})$ に対して $\bar{x} := x \otimes 1 \in \overline{U}$ とおいた。この意味では、 $E_i, F_i, (K_i; 0)_{q_i}$ を q -Chevalley 生成元と呼ぶべきなのかもしれない。以下、 $\overline{U_q(\mathfrak{g})}$ をこの対応で $U(\mathfrak{g})$ と同一視する。 $U_q(\mathfrak{g})$ の部分空間 S に対し、 $\overline{S} := (S \cap U_q(\mathfrak{g})_{\mathbf{A}_1}) \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ とおき、 $U(\mathfrak{g})$ の部分空間とみなす。

3.3. **有限次元表現.** $\{E_i \mid i \in I\}, \{F_i \mid i \in I\}, \{K_i^{\pm 1} \mid i \in I\}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数をそれぞれ $U_q(\mathfrak{g})^+, U_q(\mathfrak{g})^-, U_q(\mathfrak{g})^0$ と書く。すると、 $U_q(\mathfrak{g})$ は

$$U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g})^- \otimes U_q(\mathfrak{g})^0 \otimes U_q(\mathfrak{g})^+$$

と分解する。これを $U_q(\mathfrak{g})$ の三角分解と呼ぶ。明らかに、 $U_q(\mathfrak{g})^-, U_q(\mathfrak{g})^0, U_q(\mathfrak{g})^+$ は $U(\mathfrak{n}^-), U(\mathfrak{h}), U(\mathfrak{n}^+)$ の量子化であり、 $U_q(\mathfrak{g})$ の三角分解は $U(\mathfrak{g})$ の三角分解の量子化である。

$U(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の構成には $U(\mathfrak{g})$ の三角分解しか用いていないため、容易に量子化できる： $\lambda \in P_+$ に対し

$$V_q(\lambda) := U_q(\mathfrak{g}) / \left(\sum_{i \in I} U_q(\mathfrak{g}) E_i + \sum_{i \in I} U_q(\mathfrak{g}) (K_i - q_i^{\lambda(h_i)}) \right)$$

を最高ウェイト λ の Verma 加群と呼ぶ。Verma 加群は唯一つの既約商を持つ。これを $L_q(\lambda)$ と書き、最高ウェイト λ の既約最高ウェイト表現と呼ぶ。 $L_q(\lambda)$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現で、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現は実質的に $L_q(\lambda)$ たちで尽くされている。また、 $U(\mathfrak{g})$ の場合と同様に、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現も完全可約である。

構成方法から、 $L_q(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の量子化であることが期待される。この意味を明確にするために、 $L_q(\lambda)_{\mathbf{A}_1} := U_q(\mathfrak{g})_{\mathbf{A}_1} v_\lambda$ とおき、 $U(\mathfrak{g})$ の表現 $\overline{L_q(\lambda)} := L_q(\lambda)_{\mathbf{A}_1} \otimes_{\mathbf{A}_1} \mathbb{C}$ を考える。このとき、 $\overline{L_q(\lambda)}$ は $L(\lambda)$ に同型になる。従って、 $L_q(\lambda)$ は $L(\lambda)$ の量子化であると言える。

代数準同型写像 $\Delta : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ を

$$\begin{aligned} \Delta(E_i) &:= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta(F_i) &:= 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, \\ \Delta(K_i) &:= K_i \otimes K_i \end{aligned}$$

で定義すると、これは、 $U(\mathfrak{g})$ の Δ の量子化である。従って、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現のテンソル積 $L_q(\lambda) \otimes L_q(\mu)$ は、 \mathfrak{g} の有限次元既約表現のテンソル積 $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ の量子化である。よって、 $L(\lambda) \otimes L(\mu)$ を既約分解するという Lie 代数の問題は、 $L_q(\lambda) \otimes L_q(\mu)$ を既約分解するという量子群の問題に移る。より難しくなっただけのような気がするが、結晶基底、標準基底といった量子群ならではの道具があるため、量子の世界で考えた方がわかりやすいこともある。

3.4. 結晶基底. M を $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現とする。 M 上には、 E_i, F_i の作用を変形した柏原作用素と呼ばれる線形写像 $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i : M \rightarrow M$ が定義される。 M の $\mathbb{C}[q^{-1}]$ -格子 \mathcal{L} であって、柏原作用素で閉じているものを結晶格子と呼ぶ。 \mathbb{C} -線形空間 $\mathcal{L}/q^{-1}\mathcal{L}$ は M の $q = \infty$ における極限と見ることができ、柏原作用素 \tilde{E}_i, \tilde{F}_i は $\mathcal{L}/q^{-1}\mathcal{L}$ 上の線形写像を誘導する。 \mathbb{C} -線形空間 $\mathcal{L}/q^{-1}\mathcal{L}$ の基底 \mathcal{B} で、様々な条件を満たすものを M の結晶基底と呼ぶ。結晶基底はあくまで $q = \infty$ における基底であって、 M の本当の基底ではないのだが、表現の情報を全て持っている。以下では、組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ のことを結晶基底と呼ぶ。

M が有限次元既約表現 $L_q(\lambda)$, $\lambda \in P_+$ であるとき、その結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ が一意的に定まる。また、 M, N が結晶基底 $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M), (\mathcal{L}_N, \mathcal{B}_N)$ を持てば、 $(\mathcal{L}_M \otimes \mathcal{L}_N, \mathcal{B}_M \otimes \mathcal{B}_N)$ は $M \otimes N$ の結晶基底になる。

結晶基底は、結晶グラフという組合せ論的な道具で記述することができるため、表現論だけでなく組合せ論的な議論で表現の構造を調べることができる。例えば、有限次元表現 M の既約分解の様子は、 M の結晶グラフにおける特定の条件を満たす頂点を数え上げればわかる。特に、有限次元既約表現のテンソル積 $L_q(\lambda) \otimes L_q(\mu)$ がどのように既約分解するかは、純粋に組合せ論的な問題になる。

3.5. 標準基底. $\psi : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$ を bar-involution とする。すなわち、 ψ は \mathbb{C} -代数同型写像であって、 E_i, F_i, K_i, q をそれぞれ $E_i, F_i, K_i^{-1}, q^{-1}$ に送るものである。 ψ は、

普通は $\bar{\cdot}$ で表されるため bar-involution と呼ばれているが、添え字をつけたりして類似の対象を表したいので、本講演では別の記号を用いる。

$U_q(\mathfrak{g})$ の表現 M の bar-involution ψ_M とは、 M 上の \mathbb{C} -線形自己同型写像であって、

$$\psi_M(xm) = \psi(x)\psi_M(m), \quad \psi_M^2(m) = m \quad \text{for all } x \in U_q(\mathfrak{g}), m \in M$$

を満たすものである。 M が bar-involution ψ_M と結晶基底 $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M)$ を持つとき、 ψ_M で不変な M の基底で、 $q = \infty$ において \mathcal{B}_M に一致するものを M の標準基底と呼ぶ。

既約最高ウェイト表現 $L_q(\lambda)$ は、唯一の bar-involution ψ_λ と結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ を持ち、これらに関する標準基底 $B(\lambda)$ も唯一つ存在する。

M, N を $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現で、bar-involution ψ_M, ψ_N を持つとする。このとき、 $M \otimes N$ 上の bar-involution として $\psi_M \otimes \psi_N$ を考えたいが、これは bar-involution にはならない。そこで、準 R 行列 Θ を考える。 Θ は $U_q(\mathfrak{g})^- \otimes U_q(\mathfrak{g})^+$ のある元 Θ_α たちの形式的な無限和 $\sum_\alpha \Theta_\alpha$ で、

$$\Theta \cdot (\psi \otimes \psi)(\Delta(x)) = \Delta(\psi(x)) \cdot \Theta$$

を満たすものである。 Θ は形式的な無限和であるから $U_q(\mathfrak{g})^- \otimes U_q(\mathfrak{g})^+$ の元としては意味を持たないが、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現のテンソル積 $M \otimes N$ 上の作用素としては意味を持つ。そこで

$$\psi_{M,N} := \Theta \circ (\psi_M \otimes \psi_N) : M \otimes N \rightarrow M \otimes N$$

を考えると、これは $M \otimes N$ 上の bar-involution になる。 M, N が bar-involution ψ_M, ψ_N と結晶基底 $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M), (\mathcal{L}_N, \mathcal{B}_N)$ を持ち、これらに関する標準基底 B_M, B_N を持つならば、 $M \otimes N$ は bar-involution $\psi_{M,N}$ と結晶基底 $(\mathcal{L}_M \otimes \mathcal{L}_N, \mathcal{B}_M \otimes \mathcal{B}_N)$ に関して唯一つの標準基底 $B_M \diamond B_N$ を持つ。

4. i LIE 代数

4.1. 佐武図形による構成. 佐武図形は、頂点 (白丸 \circ 、黒丸 \bullet 両方の) 集合 I 、黒丸の集合 I_\bullet 、矢印が定義する写像 $\tau : I \rightarrow I$ の三つ組 (I, I_\bullet, τ) で表す。 τ を忘れ、黒丸を白丸と見ることによって I は Dynkin 図形になることに注意する。白丸の集合を I_\circ と書く； $I_\circ = I \setminus I_\bullet$ 。

佐武図形 (I, I_\bullet, τ) に対し、Lie 代数 $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}(I, I_\bullet, \tau)$ を次の生成元と関係式で定義する：

$$\begin{aligned} \text{【生成元】} \quad & e_i, i \in I_\bullet, \quad b_i, h_i^\tau, i \in I \\ \text{【関係式】} \quad & h_i^\tau = 0 \quad \text{if } i \in I_\circ \text{ and } \tau(i) = i, \\ & h_i^\tau + h_{\tau(i)}^\tau = 0 \quad \text{if } i \in I_\circ \text{ and } \tau(i) \neq i, \\ & [h_i^\tau, h_j^\tau] = 0, \\ & [h_i^\tau, e_j] = a_{i,j}^\tau e_j, \quad [h_i^\tau, b_j] = -a_{i,j}^\tau b_j, \\ & [e_i, b_j] = \delta_{i,j} h_i^\tau, \\ & (\text{ad } e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = 0 \quad \text{if } i \neq j, \\ & (\text{ad } b_i)^{1-a_{i,j}}(b_j) = c_{i,j} \quad \text{if } i \neq j \end{aligned}$$

ただし、 $c_{i,j}$ は、0 とは限らない \mathfrak{k} の元である。 $c_{i,j}$ を厳密に書くこともできるが、ここでは省略する。また、 $a_{i,j}^\tau$ は

$$a_{i,j}^\tau := \begin{cases} a_{i,j} & \text{if } i \in I_\bullet, \\ a_{i,j} - a_{\tau(i),j} & \text{if } i \in I_\circ. \end{cases}$$

で定める。ここに現れる生成元と関係式たちを ι Chevalley 生成元、 ι Serre 関係式と呼ぶ(ここだけの用語である)。

I は Dynkin 図形なので、Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(I)$ を考えることができる。このとき、

$$e_i \mapsto e_i, \quad b_i \mapsto \begin{cases} f_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ f_i + \overline{T_{w_\bullet}}(e_{\tau(i)}) & \text{if } i \in I_o, \end{cases} \quad h_i^\tau \mapsto \begin{cases} h_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ h_i - h_{\tau(i)} & \text{if } i \in I_o. \end{cases}$$

という対応で \mathfrak{k} を \mathfrak{g} の部分 Lie 代数とみなせる。すると、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は、佐武図形 (I, I_\bullet, τ) に対応する対称対になる。ただし、 w_\bullet は I_\bullet に付随する Weyl 群の最長元で、 $\overline{T_{w_\bullet}}$ は対応する組み紐群作用である。

量子群を $q \rightarrow 1$ にすると元の Lie 代数が復元されたように、 ι Lie 代数は佐武図形を対角型にすると元の Lie 代数が得られる。対角型とは、Dynkin 図形のコピーを 2 つ用意して、対応する頂点を矢印で繋いで得られる佐武図形のことである。すなわち、 I を Dynkin 図形、 $I_1 = \{i_1 \mid i \in I\}$, $I_2 = \{i_2 \mid i \in I\}$ をそのコピー、 τ を

$$i_1 \leftrightarrow i_2, \quad \text{for all } i \in I$$

としたとき、 $(I_1 \sqcup I_2, \emptyset, \tau)$ で表される佐武図形である。このとき、

$$b_{i_1} \mapsto e_i, \quad b_{i_2} \mapsto f_i, \quad h_{i_1}^\tau \mapsto -h_i, \quad h_{i_2}^\tau \mapsto h_i, \quad \text{for all } i \in I$$

という対応で \mathfrak{k} は $\mathfrak{g}(I)$ に同型になる (\mathfrak{g} は $\mathfrak{g}(I_1 \sqcup I_2) \simeq \mathfrak{g}(I) \oplus \mathfrak{g}(I)$ であることに注意)。

ι Lie 代数 \mathfrak{k} は簡約 Lie 代数であることが知られている。簡約 Lie 代数は、だいたい半単純 Lie 代数なので、簡単のため \mathfrak{k} は半単純 Lie 代数として話を進める。すると、 \mathfrak{k} は、ある Dynkin 図形 I' から作られる Lie 代数 $\mathfrak{g}(I')$ に同型になる。同型写像 $\iota: \mathfrak{g}(I') \rightarrow \mathfrak{k}$ を一つ固定する。 $\mathfrak{g}(I')$ の Chevalley 生成元 $e_{i'}, f_{i'}, h_{i'}$, $i' \in I'$ の ι による像を \mathfrak{k} の Chevalley 生成元と呼ぶ。ここで注意すべきは、 \mathfrak{k} の Chevalley 生成元と ι Chevalley 生成元は本質的に異なるということである。従って、 $\iota(e_{i'}), \iota(f_{i'}), \iota(h_{i'})$ たちを e_i, b_i, h_i^τ たちで書き下すというのは非自明な問題である。このことから、 ι Chevalley 生成元を単に Chevalley 生成元と呼ぶことは避けるべきである。

5. ι 量子群

5.1. 佐武図形による構成. 佐武図形 (I, I_\bullet, τ) に付随する ι 量子群 $U^\iota(\mathfrak{k}) = U^\iota(\mathfrak{k}(I, I_\bullet, \tau))$ とは、次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である：

$$\begin{aligned} \text{【生成元】} \quad & E_i, \quad i \in I_\bullet, \quad B_i, (K_i^\tau)^{\pm 1}, \quad i \in I \\ \text{【関係式】} \quad & K_i^\tau (K_i^\tau)^{-1} = 1 = (K_i^\tau)^{-1} K_i^\tau, \\ & K_i^\tau = 1 \quad \text{if } i \in I_o \text{ and } \tau(i) = i, \\ & K_i^\tau K_{\tau(i)}^\tau = 1 \quad \text{if } i \in I_o \text{ and } \tau(i) \neq i, \\ & K_i^\tau K_j^\tau = K_j^\tau K_i^\tau, \\ & K_i^\tau E_j = q_i^{a_{i,j}^\tau} E_j K_i^\tau, \quad K_i^\tau B_j = q_i^{-a_{i,j}^\tau} B_j K_i^\tau, \\ & [E_i, F_j] = \delta_{i,j} [K_i^\tau; 0]_{q_i}, \\ & S_{i,j}(E_i, E_j) = 0 \quad \text{if } i \neq j, \\ & S_{i,j}(B_i, B_j) = C_{i,j} \quad \text{if } i \neq j. \end{aligned}$$

ただし、 $C_{i,j}$ は $U^\iota(\mathfrak{k})$ の元で、 $c_{i,j} \in \mathfrak{k}$ の量子化である。本当は $C_{i,j}$ はパラメータ $\mathfrak{s} = (s_i)_{i \in I_o} \in (\mathbb{C}(q)^\times)^{I_o}$ に依存するのだが、テクニカルな話になるのでここでは無視する。

ι 量子群 $U^\iota(\mathfrak{k})$ は、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に埋め込める。すなわち、

$$E_i \mapsto E_i, \quad B_i \mapsto \begin{cases} F_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ F_i + \varsigma_i T_{w_\bullet}(E_{\tau(i)}) K_i^{-1} & \text{if } i \in I_\circ, \end{cases} \quad K_i^\tau \mapsto \begin{cases} K_i & \text{if } i \in I_\bullet, \\ K_i K_{\tau(i)}^{-1} & \text{if } i \in I_\circ. \end{cases}$$

という対応で $U^\iota(\mathfrak{k})$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とみなせる。ただし、 T_{w_\bullet} は、Lusztig の $T''_{i,1}$ に関する w_\bullet に対応する組み紐群作用である。さらに、この埋め込みによって $U^\iota(\mathfrak{k})$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の右余イデアル部分代数になる：

$$\Delta(U^\iota(\mathfrak{k})) \subset U^\iota(\mathfrak{k}) \otimes U_q(\mathfrak{g}).$$

従って、 $U^\iota(\mathfrak{k})$ の表現のテンソル積は $U^\iota(\mathfrak{k})$ の表現にはならない。代わりに、 $U^\iota(\mathfrak{k})$ の表現と $U_q(\mathfrak{g})$ の表現のテンソル積は考えることができる。古典的な世界では \mathfrak{k} の表現のテンソル積は \mathfrak{k} の表現になるので、あえて \mathfrak{k} の表現と \mathfrak{g} の表現のテンソル積を考える状況はないと思う。

ι 量子群の生成元と関係式たちを ιq -Chevalley 生成元、 ιq -Serre 関係式と呼ぶ。 ιq -Chevalley 生成元は q -Chevalley 生成元の ι 化とも、 ι Chevalley 生成元の量子化ともとれる。どちらが正しいということではなく、状況に応じて適切な見方をすればよい。例えば、これから説明する ι 標準基底の理論では ιq -Chevalley 生成元を q -Chevalley 生成元のように扱うのがよい。一方、埋め込み $U^\iota(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は明らかに埋め込み $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ の量子化であるため、この場合は ιq -Chevalley 生成元は ι Chevalley 生成元の量子化と見るべきである。

5.2. ι 標準基底. ιq -Chevalley 生成元を q -Chevalley 生成元の ι 化と思うことで、量子群における標準基底の理論を ι 量子群に拡張することができる ([6, 9])。繰り返しになるが、 ι 化とみなすということは、対角型の佐武図形を考えると量子群の世界を復元するということである。そこで、まずは対角型のときに $U^\iota(\mathfrak{k}), U_q(\mathfrak{g})$ がどうなっているか見てみよう。 $U_q(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g}(I_1 \sqcup I_2))$ は $U_q(\mathfrak{g}(I)) \otimes U_q(\mathfrak{g}(I))$ に同型である。この同型は、

$$\begin{aligned} E_{i_1} &\leftrightarrow F_i \otimes 1, & F_{i_1} &\leftrightarrow E_i \otimes 1, & K_{i_1} &\leftrightarrow K_i^{-1} \otimes 1, \\ E_{i_2} &\leftrightarrow 1 \otimes E_i, & F_{i_2} &\leftrightarrow 1 \otimes F_i, & K_{i_2} &\leftrightarrow 1 \otimes K_i \end{aligned}$$

で与えられる。従って、 $U_q(\mathfrak{g})^+ \simeq U_q(\mathfrak{g}(I))^- \otimes U_q(\mathfrak{g}(I))^+$ であることに注意する。このとき、埋め込み $U^\iota(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は

$$\begin{aligned} B_{i_1} &\mapsto E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ B_{i_2} &\mapsto 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_i^{-1}, \\ K_{i_1}^\tau &\mapsto K_i^{-1} \otimes K_i^{-1}, & K_{i_2}^\tau &\mapsto K_i \otimes K_i \end{aligned}$$

で与えられる。一方、 $U^\iota(\mathfrak{k})$ は

$$B_{i_1} \mapsto E_i, \quad B_{i_2} \mapsto F_i, \quad K_{i_1}^\tau \mapsto K_i^{-1}, \quad K_{i_2}^\tau \mapsto K_i$$

という対応で $U_q(\mathfrak{g}(I))$ に同型である。この同型の下では、埋め込み $U^\iota(\mathfrak{k}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g})$ は $\Delta : U_q(\mathfrak{g}(I)) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}(I)) \otimes U_q(\mathfrak{g}(I))$ に他ならない。

一般の佐武図形に戻る。標準基底の理論には、まず $\bar{\text{involution}}$ が必要であった。今、 ιq -Chevalley 生成元を q -Chevalley 生成元の代わりだと思っているので、自然な定義は

$$E_i \mapsto E_i, \quad B_i \mapsto B_i, \quad K_i^\tau \mapsto (K_i^\tau)^{-1}, \quad q \mapsto q^{-1}$$

なる $\psi^\iota : U^\iota(\mathfrak{k}) \rightarrow U^\iota(\mathfrak{k})$ である。このような写像の存在は ιq -Serre 関係式によって保証されている (本当はパラメータ ς の取り方に依存する [1, 6])。この ψ^ι を $U^\iota(\mathfrak{k})$ の

ι bar-involution と呼ぶ。 $U^i(\mathfrak{t})$ の表現の ι bar-involution も、量子群の場合と同様に定義できる。

次に、結晶基底が必要であったが、 ι 量子群にはまだ結晶基底の理論がない。標準基底の定義をよく見てみると、本当に必要なのは結晶基底ではなく、なんらかの $\mathbb{C}[q^{-1}]$ -格子 \mathcal{L} と、 $\mathcal{L}/q^{-1}\mathcal{L}$ の基底 \mathcal{B} である。従って、 $U^i(\mathfrak{t})$ の表現 M が ι bar-involution と適当な $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ を持てば、 M の ι 標準基底が定義できる。問題は、量子群の場合の結晶格子、結晶基底のように、良い $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ がとれるかということである。

試しに $U^i(\mathfrak{t})$ の有限次元既約表現の場合を考察してみたいが、 $U^i(\mathfrak{t})$ の表現論についてはまだ何も議論していないので、これはできない。そこで、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 $L_q(\lambda)$ を考えてみよう。 $U^i(\mathfrak{t})$ は $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数であるから、 $L_q(\lambda)$ は $U^i(\mathfrak{t})$ の表現とも見れる。 $L_q(\lambda)$ は結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ を持つため、あとは ι bar-involution を自然に定めればよい。 ι bar-involution の候補はもちろん $L_q(\lambda)$ の bar-involution ψ_λ であるが、これは ι bar-involution ではない。この状況は、量子群において bar-involution のテンソル積が、テンソル積の bar-involution ではないことに似ている。実際、佐武図形が対角型のときは、2つの問題は全く同じことである。量子群の場合は、この問題は準 R 行列 Θ によって解決されたため、 Θ を ι 化すればよい。

準 R 行列 Θ の ι 化 Υ は、準 K 行列と呼ばれ、 $U_q(\mathfrak{g})^+$ の形式的な元として定義される。すなわち、 $\Upsilon = \sum_{\beta} \Upsilon_{\beta}$, $\Upsilon_{\beta} \in U_q(\mathfrak{g})^+$ は

$$\Theta^i \cdot \psi(x) = \psi^i(x) \cdot \Theta^i \quad \text{for all } x \in U^i(\mathfrak{t})$$

を満たす。 Υ は $U_q(\mathfrak{g})^+$ の元としては意味を持たないが、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現 M への作用素としては意味を持つ。 M が bar-involution ψ_M を持つとき、

$$\psi_M^i := \Upsilon \circ \psi_M : M \rightarrow M$$

は M の ι bar-involution になる。特に、 $\psi_\lambda^i := \Upsilon \circ \psi_\lambda$ は $L_q(\lambda)$ の ι bar-involution である。

以上の議論から、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現 M が bar-involution ψ_M と結晶基底 $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M)$ を持てば、 M の ι bar-involution ψ_M^i と $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M)$ に関する ι 標準基底を定義することができる。 $L_q(\lambda)$ の ψ_λ^i , $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ に関する ι 標準基底 $B(\lambda)^i$ は唯一つ存在し、 $L_q(\lambda)$ の ι 標準基底と呼ばれている。

M を、 $U^i(\mathfrak{t})$ の表現で、 ψ_M^i , $(\mathcal{L}_M, \mathcal{B}_M)$ に関する ι 標準基底 B_M^i を持つものとし、 N を、 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現で、 ψ_N , $(\mathcal{L}_N, \mathcal{B}_N)$ に関する標準基底 B_N を持つものとする。このとき、

$$\psi_{M,N}^i := \Delta(\Upsilon) \circ \Theta \circ (\Upsilon^{-1} \otimes 1) \circ (\psi_M^i \otimes \psi_N)$$

とおけば、これは $M \otimes N$ 上の ι bar-involution となる。さらに、 $\psi_{M,N}^i$, $(\mathcal{L}_M \otimes \mathcal{L}_N, \mathcal{B}_M \otimes \mathcal{B}_N)$ に関する $M \otimes N$ の ι 標準基底 $B_M^i \diamond B_N$ が一意に定まる。これを $M \otimes N$ の ι 標準基底と呼ぶ。

M, N が共に $U_q(\mathfrak{g})$ の表現で、標準基底 B_M, B_N を持つとき、 $M \otimes N$ の ι 標準基底として、 $M \otimes N$ の標準基底 $B_M \diamond B_N$ から得られるもの $(B_M \diamond B_N)^i$ と、 $B_M^i \diamond B_N$ が考えられるが、これらは一致する。

5.3. ι 結晶基底. 結晶基底の理論の ι 量子群版、すなわち ι 結晶基底の理論は、 ι 標準基底の理論や他の ι 量子化に比べてかなり遅れてしまっている。ここでは、 ι 結晶基底が遅れている原因と最近の進展、そして今後の展望を述べる。

結晶基底は、量子群の有限次元表現論から来る概念であったので、まずは ι 量子群の有限次元表現について考えよう。[13, 23, 25] ではそれぞれ AI 型、AII 型、AIII 型の佐武図形に付随する ι 量子群の有限次元既約表現の分類について論じられている。Lie 代数や量子群の場合は、 $(q-)$ Chevalley 生成元を軸に、ほとんど型に依らない議論が可能であったが、ここに挙げた先行研究の手法は型毎に大きく異なっている。そのため、

このままでは一般の佐武図形に対して ι 量子群の有限次元表現を論ずることなど到底できない。

ιq -Chevalley 生成元を q -Chevalley 生成元の ι 化とすることで標準基底を ι 化できたので、 ιq -Chevalley 生成元は q -Chevalley 生成元と同じ働きををすると思われるかもしれないが、それは幻想である。もしそうだとすれば、 q -Chevalley 生成元が Chevalley 生成元と同じ働きをすることから、 ιq -Chevalley 生成元は Chevalley 生成元と同じ働きををするはずである。一方で、 ιq -Chevalley 生成元は ι -Chevalley 生成元の量子化でもあるため、 ι -Chevalley 生成元のようにも振る舞い、その表現論的な役割は Chevalley 生成元とは本質的に異なるはずである。現に、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現 $L_q(\lambda)$ を考えれば、これは $L(\lambda)$ の量子化であるため、 ιq -Chevalley 生成元の $L_q(\lambda)$ における役割は、 ι Chevalley 生成元の $L(\lambda)$ における役割と同じでなければならない。従って、 ι 量子群の表現論を展開するには ι Lie 代数の Chevalley 生成元 (ι Chevalley 生成元ではない) を量子化すべきなのである。

ι Lie 代数の Chevalley 生成元を量子化する最初の試みは [18] でなされた。そこでは、Chevalley 生成元の一部である h に対応するものが量子化された。 h たちの重要な性質としては、互いに可換で、個数が十分多いということがある。[18] では、量子化された h たちはこの性質を維持しているため、非常に良い量子化であると言える。さらに、量子化された h たちを Chevalley 生成元の一部のように扱うことによって、AI 型の ι 量子群の有限次元既約表現の分類が再定式化された [27]。これによって、 ι 量子群の表現論で型に依らない議論が可能になるかという期待が高まったが、そう簡単な話ではなかった。量子化された h たちは、確かに上に挙げた良い性質を満たすのだが、それ以上のことが (少なくとも講演者には) 何もわからないという欠点がある。やはり、Chevalley 生成元全部を量子化しなくては意味がなさそうである。

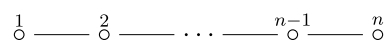
残念ながら Chevalley 生成元全部を $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の中で量子化することは不可能で、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ を少し膨らまさなければならない ([26])。佐武図形の代わりに印付き佐武図形を考え、印付き白丸 \otimes 毎に $l^{\pm 1}$ という新しい元を追加し、 $B = \frac{l-1}{q-q^{-1}}$ という関係式を加えることで、新しい代数 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ を構成する。 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ は $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ を部分代数として含み、古典極限をとると $U(\mathfrak{k})$ になる。包含関係 $U^{\iota}(\mathfrak{k}) \subset U^{\iota}(\mathfrak{k})$ があるので、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現は $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現とみなせる。逆に、特別な $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現 (古典ウェイト表現と呼ぶ) は $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現に持ち上げることができる。つまり、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の古典ウェイト表現論は、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現論に含まれるのである。さらに、AI, AII, AIII, AIV 型 (他の型でも、頂点が少ない場合には同様のことが確認されているため、以下で述べることは一般の佐武図形で正しいと思われる) の $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ には Chevalley 生成元の量子化が存在するので、その有限次元表現論は量子群の場合と同様に展開できる。特に、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の有限次元既約表現で、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の古典ウェイト表現から来るものは、 \mathfrak{k} の有限次元既約表現の量子化であることがわかる。このことから、有限次元古典ウェイト表現は、 ι Lie 代数の有限次元表現の量子化であると言える。また、対角型の場合にこの構成を行うことで、有限次元古典ウェイト表現は、量子群の有限次元表現の ι 化であるとも言える。

ここで、古典ウェイト表現はどれくらい特別な表現かという疑問が湧いてくる。古典ウェイト表現でない有限次元既約表現の存在が知られているため、「古典ウェイト表現というクラスは十分広い」とは言い難い。しかし、 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現を $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の表現とみなしたのもや、 $U^{\iota}(\mathfrak{k})$ の古典ウェイト表現と $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現のテンソル積は古典ウェイト表現になるし、 ι Lie 代数の有限次元表現の量子化を完全に含んでいることから、「とんでもなく狭い」というわけではなさそうである。

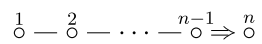
さて、Chevalley 生成元が手に入ったので、結晶基底を ι 化することができる。結晶基底によって、有限次元表現の既約分解が組合せ論の問題に帰着されたように、 ι 結晶基底が完成すれば、有限次元古典ウェイト表現の既約分解が組合せ論的な議論で解決できるようになる。これは、 \mathfrak{g} の有限次元既約表現を \mathfrak{k} の表現として既約分解すると

DYNKIN 図形

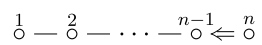
A.



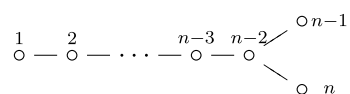
B.



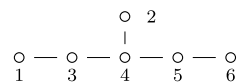
C.



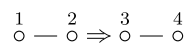
D.



E.



F.

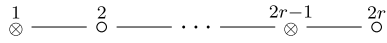


G.



印付き佐武図形

AI-1.



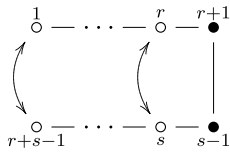
AI-2.



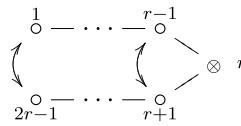
AII.



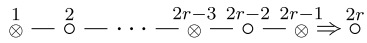
AIII.



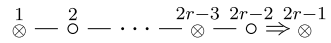
AIV.



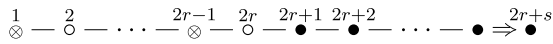
BI-1.



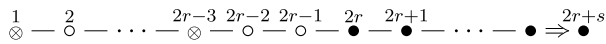
BI-2.



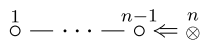
BII-1.



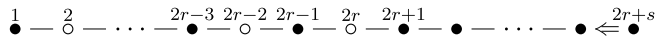
BII-2.



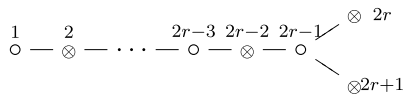
CI.



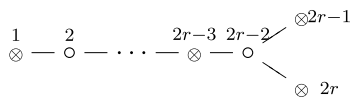
CII.



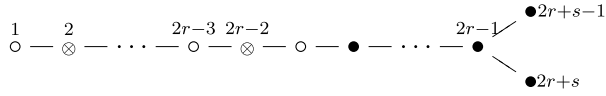
DI-1.



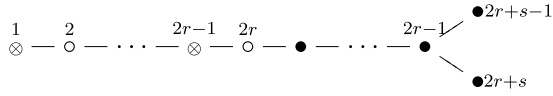
DI-2.



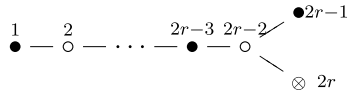
DI-3.



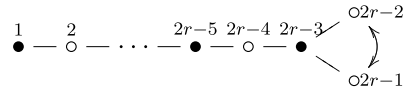
DI-4.



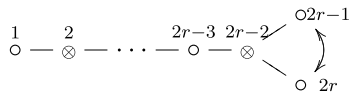
DII-1.



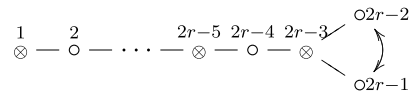
DII-2.



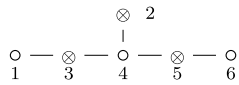
DIII-1.



DIII-2.



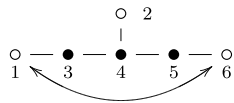
EI.



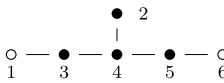
EII.



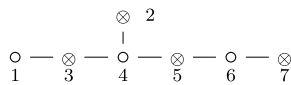
EIII.



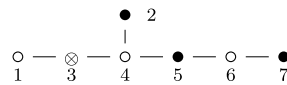
EIV.



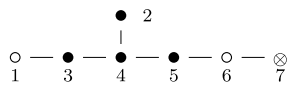
EV.



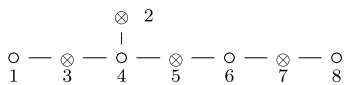
EVI.



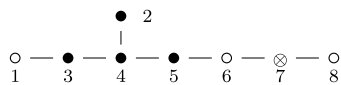
EVII.



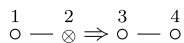
EVIII.



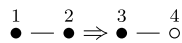
EIX.



FI.



FII.



G.



REFERENCES

- [1] M. Balagovic and S. Kolb, The bar involution for quantum symmetric pairs, *Represent. Theory* 19 (2015), 186–210.
- [2] M. Balagovic and S. Kolb, Universal K-matrix for quantum symmetric pairs, *J. Reine Angew. Math.* 747 (2019), 299–353.
- [3] H. Bao, Kazhdan-Lusztig theory of super type D and quantum symmetric pairs, *Represent. Theory* 21 (2017), 247–276.
- [4] H. Bao, J. Kujawa, Y. Li, and W. Wang, Geometric Schur duality of classical type, *Transform. Groups* 23 (2018), no. 2, 329–389.
- [5] H. Bao and W. Wang, A New Approach to Kazhdan-Lusztig Theory of Type B via Quantum Symmetric Pairs, *Astérisque* 2018, no. 402, vii+134 pp.
- [6] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs, *Invent. Math.* 213 (2018), no. 3, 1099–1177.
- [7] H. Bao and W. Wang, Canonical bases arising from quantum symmetric pairs of Kac-Moody type, arXiv:1811.09848.
- [8] H. Bao, W. Wang, and H. Watanabe, Multiparameter quantum Schur duality of type B, *Proc. Amer. Math. Soc.* 146 (2018), no. 8, 3203–3216.
- [9] H. Bao, W. Wang, and H. Watanabe, Canonical bases for tensor products and super Kazhdan-Lusztig theory, to appear in the *Journal of Pure and Applied Algebra*, arXiv:1808.09388v4.
- [10] V. Buciumas and H. Ko, Polynomial functors and two-parameter quantum symmetric pairs, arXiv:1904.12851v4.
- [11] M. Ehrig and C. Stroppel, Nazarov-Wenzl algebras, coideal subalgebras and categorified skew Howe duality, *Adv. Math.* 331 (2018), 58–142.
- [12] A. M. Gavrilyk and A. U. Klimyk, q -deformed orthogonal and pseudo-orthogonal algebras and their representations, *Lett. Math. Phys.* 21 (1991), no. 3, 215–220.
- [13] N. Z. Iorgov and A. U. Klimyk, Classification theorem on irreducible representations of the q -deformed algebra $U'_q(\mathfrak{so}_n)$, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2005, no. 2, 225–262.
- [14] S. Kolb, Quantum symmetric Kac-Moody pairs, *Adv. Math.* 267 (2014), 395–469.
- [15] S. Kolb and J. Pellegrini, Braid group actions on coideal subalgebras of quantized enveloping algebras, *J. Algebra* 336 (2011), 395–416.
- [16] T. H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in connection with quantum groups, *Orthogonal polynomials* (Columbus, OH, 1989), 257–292, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 294, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
- [17] G. Letzter, Symmetric pairs for quantized enveloping algebras, *J. Algebra* 220 (1999), no. 2, 729–767.
- [18] G. Letzter, Cartan subalgebras for quantum symmetric pair coideals, *Represent. Theory* 23 (2019), 88–153.
- [19] Y. Li, Quiver varieties and symmetric pairs, *Represent. Theory* 23 (2019), 1–56.
- [20] M. Lu and W. Wang, Hall algebras and quantum symmetric pairs I: Foundations, arXiv:1901.11446.
- [21] M. Lu and W. Wang, Hall algebras and quantum symmetric pairs II: Reflection functors, arXiv:1904.01621.
- [22] M. Lu and W. Wang, Hall algebras and quantum symmetric pairs III: Quiver varieties, arXiv:1910.01263.
- [23] A. Molev, Representations of the twisted quantized enveloping algebra of type C_n , *Mosc. Math. J.* 6 (2006), no. 3, 531–551, 588.
- [24] M. Noumi, Macdonald’s symmetric polynomials as zonal spherical functions on some quantum homogeneous spaces, *Adv. Math.* 123 (1996), no. 1, 16–77.
- [25] H. Watanabe, Crystal basis theory for a quantum symmetric pair $(\mathbf{U}, \mathbf{U}^J)$, to appear in *Int. Math. Res. Not.*, arXiv:1704.01277v2.
- [26] H. Watanabe, Classical weight modules over q quantum groups, arXiv:1912.11157.
- [27] H. Wenzl, On representations of $U'_q \mathfrak{so}_n$, arXiv:1805.06268v2.

(H. WATANABE) RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY,
KYOTO 606-8502, JAPAN
Email address: `hideya@kurims.kyoto-u.ac.jp`

量子曲線とワイル群

森山翔文 (大阪市立大学)

ABJM 行列模型とは多重積分

$$Z_k(N_1|N_2) = \int_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}} \frac{d^{N_1}\mu}{N_1!(2\pi)^{N_1}} \frac{d^{N_2}\nu}{N_2!(2\pi)^{N_2}} e^{\frac{ik}{4\pi}(\sum_{m=1}^{N_1}\mu_m^2 - \sum_{n=1}^{N_2}\nu_n^2)} \times \frac{\prod_{m<m'}^{N_1} (2 \sinh \frac{\mu_m - \mu_{m'}}{2})^2 \prod_{n<n'}^{N_2} (2 \sinh \frac{\nu_n - \nu_{n'}}{2})^2}{\prod_{m=1}^{N_1} \prod_{n=1}^{N_2} (2 \cosh \frac{\mu_m - \nu_n}{2})^2} \quad (1)$$

である。(この行列模型は、M理論における M2 ブレーンの世界体積理論を記述する ABJM 理論の 3次元球面上の分配関数であるが、ここでは詳しい説明を省略する。) N_1, N_2 は行列のランクに由来する積分の次元で整数であり、 k はチャーン-サイモンズレベルに由来し場の理論では整数に量子化されているが、行列模型を考察する範囲では実数と考えても差し支えない。多重積分はすべて実軸に沿って実行されている。簡単のため等ランク $N_2 = N_1 = N$ の場合を考える。ランク N を粒子数とみなし、大正準分配関数

$$\Xi_k(z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_k(N|N) \quad (2)$$

を導入すると、大正準分配関数はフレドホルム行列式を用いて

$$\Xi_k(z) = \text{Det}(1 + z\hat{H}^{-1}) \quad (3)$$

と書き換えられ、スペクトラル演算子は

$$\hat{H} = (\hat{Q}^{\frac{1}{2}} + \hat{Q}^{-\frac{1}{2}})(\hat{P}^{\frac{1}{2}} + \hat{P}^{-\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

により与えられる。ここで、 (\hat{Q}, \hat{P}) は正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ に従う正準変数の指数関数

$$(\hat{Q}, \hat{P}) = (e^{\hat{q}}, e^{\hat{p}}) \quad (5)$$

であり、プランク定数は行列模型のレベルと $\hbar = 2\pi k$ により同定される。スペクトラル演算子は再定義により $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に帰着され、また行列模型の解析を通じて、同じく $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の位相的弦理論の自由エネルギーという関数を用いて記述される。これから行列模型の役割を外して、

『量子曲線のフレドホルム行列式 \Leftrightarrow 局所代数曲線上の位相的弦理論の自由エネルギー』

という対応関係が予想された。これを **ST/TS (Spectral Theories/Topological Strings) 対応** という。例えば種数 1 の場合に限って解析を進めるには、デルペッツォ幾何の量子曲線の明示的な表示が必要である。デルペッツォ幾何は q パンルヴェ方程式の解析においても重要な役割を果たしている [1]。古典的な場合を参照しながら、量子化された場合の代数曲線を書き下したい。以下、量子曲線を対称型で指定する。

D_5 曲線の場合は $\prod_{i=1}^8 e_i = (h_1 h_2)^2$ を満たす変数 $(h_1, h_2, e_1, e_2, \dots, e_7, e_8, E, \alpha)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \widehat{H}/\alpha &= \widehat{Q}\widehat{P} + (e_3 + e_4)\widehat{P} + e_3 e_4 \widehat{Q}^{-1}\widehat{P} \\ &+ (e_1^{-1} + e_2^{-1})\widehat{Q} + E/\alpha + h_2^{-1} e_3 e_4 (e_5 + e_6)\widehat{Q}^{-1} \\ &+ (e_1 e_2)^{-1}\widehat{Q}\widehat{P}^{-1} + h_1 (e_1 e_2)^{-1} (e_7^{-1} + e_8^{-1})\widehat{P}^{-1} + h_1^2 (e_1 e_2 e_7 e_8)^{-1}\widehat{Q}^{-1}\widehat{P}^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

により媒介変数表示される [2, 3]. このとき, 量子曲線は相似変換

$$(\widehat{Q}', \widehat{P}') = (\widehat{Q}, (\widehat{Q} + e_3)\widehat{P}(\widehat{Q} + h_1 e_7^{-1})^{-1}), \quad (\widehat{Q}', \widehat{P}') = ((\widehat{P} + h_2^{-1} e_5)^{-1}\widehat{Q}(\widehat{P} + e_1^{-1}), \widehat{P}) \quad (7)$$

を通じて変換される. ここで, 8 個の漸近的な点配置に対する 10 個の媒介変数表示と, 相似変換 $(\widehat{Q}', \widehat{P}') = (A\widehat{Q}, B\widehat{P})$ により, $2 + 2 = 4$ 個の余分な自由度があるため, ゲージ固定条件 $e_2 = e_4 = e_6 = e_8 = 1$ を課せる. すると, 曲線の対称性として $(q = e^{ih})$

$$s_3/s_4 : (h_1, h_2, e_1, e_3, e_5) \mapsto \left(h_1, \frac{q e_1 e_5}{h_1 h_2}, e_1, \frac{q e_1 e_3 e_5}{h_1 h_2^2}, e_5 \right) / \left(\frac{h_1 h_2}{q e_1 e_5}, h_2, \frac{h_2}{q e_5}, e_3, \frac{h_2}{q e_1} \right) \quad (8)$$

などが得られ, D_5 ワイル群と同型の対称性である. このワイル群の作用に対して

$$(\bar{h}_1, \bar{h}_2) = (q h_1, q^{-1} h_2) \quad (9)$$

と再定義すると, 量子効果 q が完全に取り込まれる.

E_6 曲線はトーリック表示できる最大次数であるので, 同様に進められる. ではより高次の量子曲線, E_7 曲線や E_8 曲線の定義式はどのように書き下せるか. 本講演ではこれを説明し, 時間があればその応用について議論したい. また [4] との関連も議論したい.

References

- [1] K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(7), 073001 (2017).
- [2] N. Kubo, S. Moriyama and T. Nosaka, *JHEP* **1901**, 210 (2019).
- [3] K. Hasegawa, *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, Mathematical Society of Japan, 2011.
- [4] K. Takemura, *Journal of Integrable Systems* 2.1 (2017): xyx008.

CP¹ の同変 Gromov-Witten 理論と同変戸田階層

高崎金久 (近畿大学理工学部)

同変戸田階層はリーマン球面 CP¹ の同変 Gromov-Witten (GW) 不変量の母関数を特徴付けるための可積分階層として Getzler によって導入された [1]. Getzler 自身は母関数の種数 0 部分が同変戸田階層の無分散極限の特殊解であることを示すにとどまったが [2], Okounkov と Pandharipande は全種数の母関数に対して同変戸田階層との関係を確認した [3]. 彼らは Kontsevich の局所化計算の方法によって同変 GW 不変量をグラフ展開し, それをフェルミオンの言葉に翻訳して Getzler の主張を確認した. その後, Milanov は Givental の全種数 GW 不変量再構成法によって Getzler の主張を再確認し [4], Tseng とともにその結果を CP¹ のオービフォールドに拡張した [5]. 本講演では, Okounkov と Pandharipande の方法を振り返り, 彼らが “dressing operator” と呼んだものに新たな役割が見出せることを報告する.

同変戸田階層は 2次元 (2D) 戸田階層の簡約系として捉えられる (Milanov と Tseng の論文 [5] の付録を参照されたい). $t = (t_k)_{k \geq 1}$ と $\bar{t} = (\bar{t}_k)_{k \geq 1}$ を時間変数, s を空間変数, Λ をシフト作用素 $\Lambda = e^{\partial_s}$ ($\partial_s = \partial/\partial s$) とするとき, 2D 戸田階層の Lax 形式は 2つの差分型 Lax 作用素

$$L = \Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Lambda^{1-n}, \quad \bar{L}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n \Lambda^{n-1}$$

を用いて定式化される. 同変戸田階層は

$$L - \nu \log L = \bar{L}^{-1} - \nu \log \bar{L} - \nu \log Q \quad (1)$$

という簡約条件で特徴付けられる. ここで ν, Q は同変 GW 理論のパラメータで, ν は 1次元 トーラス T の CP¹ への作用を定める重みである ($H_T^*(\text{CP}^1) \simeq \mathbb{C}[h]/(h(h-\nu))$ が成立する). $\log L$ と $\log \bar{L}$ は $L = W \Lambda W^{-1}$, $\bar{L} = \bar{W} \Lambda \bar{W}^{-1}$ を満たす dressing operator

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \Lambda^{-n}, \quad \bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n \Lambda^n$$

を用いて

$$\log L = W \log \Lambda W^{-1}, \quad \log \bar{L} = \bar{W} \log \Lambda \bar{W}^{-1}, \quad \log \Lambda = \partial_s$$

と定義される.

Okounkov と Pandharipande の dressing operator V, \bar{V}^{-1} は同変 GW 不変量のフェルミオン表示の中に登場する. 彼らはそれを用いて同不変量の母関数を 2D 戸田階層の τ 関数

$$\begin{aligned} \tau &= \langle s | \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k J_k \right) g \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k J_{-k} \right) | s \rangle, \\ g &= V^{-1} e^{J_1} Q^{L_0} e^{J_{-1}} \bar{V}^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

に書き直した. ここで $\{J_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ と $\{L_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は複素自由フェルミ場に付随するいつもながらの Heisenberg 代数と Virasoro 代数の基底である. これを W, \bar{W} の言葉に翻訳すれば

$$\exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Lambda^k \right) U \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k \Lambda^{-k} \right) = W^{-1} \bar{W} \quad (3)$$

科学研究費 No. 18K03350

¹ 彼らは W, W^* という記号を用いたが, ここでは前述の W, \bar{W} と区別するために V, \bar{V} と表す.

という因子分解問題の解になる。ここで U は

$$U = V^{-1}e^\Lambda Q^H e^{\Lambda^{-1}}\bar{V}^{-1}, \quad H = s - 1/2$$

という差分作用素である。差分作用素に翻訳された V, \bar{V} (紛らわしいが、同じ記号で表す) は

$$V = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Lambda^{-n}, \quad \bar{V} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \Lambda^n$$

という (それぞれ下三角型・上三角型の $\infty \times \infty$ 行列に相当する) 形をしている。

Okounkov と Pandharipande の論文はかなり間接的なやり方で V, \bar{V} を導入し、それを用いて同変 GW 不変量の母関数を (2) の形に書き直している。この τ 関数が同変戸田階層の特殊解を与えることは別の論理 (同変 GW 理論に基づく) で説明している。結局 V, \bar{V} の正体は Okounkov と Pandharipande の論文からはよくわからない²。

ここでは改めて (2) から出発し、 V, \bar{V} を

$$\begin{aligned} V(\Lambda - \nu \log \Lambda)V^{-1} &= \Lambda + H - \nu \log \Lambda, \\ \bar{V}^{-1}(\Lambda^{-1} - \nu \log \Lambda)\bar{V} &= \Lambda^{-1} + H - \nu \log \Lambda \end{aligned} \quad (4)$$

という条件 (Okounkov と Pandharipande の考察や最近の論文 [6] から読み取れる) を満たす差分作用素として捉え直す。このような差分作用素 (一意的ではない) は ν に関するべき級数展開 $V = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k V^{(k)}$, $\bar{V} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \bar{V}^{(k)}$ の形で直接的に構成できる。これに基づいて次のことが証明できる。

定理 因子分解問題 (3) によって W, \bar{W} を定めれば、

$$W(\Lambda - \nu \log \Lambda)W^{-1} = \bar{W}(\Lambda^{-1} - \nu \log \Lambda)\bar{W}^{-1} - \nu \log Q \quad (5)$$

という等式が成立し、対応する L, \bar{L} は同変戸田階層への簡約条件 (1) を満たす。

証明の方針 簡約条件 (1) は時間発展で保たれるので、初期時刻 $t = \bar{t} = \mathbf{0}$ で成立することを示せば十分である。それを示すには (5) が初期時刻において成立することを確かめればよい。 W, \bar{W} の初期値は因子分解問題 (3) (初期時刻では具体的に解ける) から読み取れる。それを用いて計算すれば、初期時刻で (5) が成立することがわかる。

参考文献

- [1] E. Getzler, The equivariant Toda lattice, Publ. RIMS, Kyoto University, **40** (2004), 507–534.
- [2] E. Getzler, The equivariant Toda conjecture, arXiv:math/0207025.
- [3] A. Okounkov and R. Pandharipande, The equivariant Gromov-Witten theory of \mathbf{P}^1 , Ann. Math. **163**, (2006), 561–605.
- [4] T. E. Milanov, The equivariant Gromov-Witten theory of $\mathbf{C}P^1$ and integrable hierarchies, Int. Math. Res. Not. (2008), rnn 073, 21 pp.
- [5] T. E. Milanov and H. H. Tseng, Equivariant orbifold structures on the projective line and integrable hierarchies, Adv. Math. **226** (2011), 641–672. arXiv:0707.3172.
- [6] A. Oblomkov, A. Okounkov and R. Pandharipande, GW/PT descendent correspondence via vertex operators, arXiv:1806.0071.

²そもそもこの論文にはいくつかのつじつまの合わない記述が目につく。例えば、論文は V を上三角型、 \bar{V} を下三角型に選ぶと言っているが、これは論文が要求するもう一組の条件 $\langle s|V = \langle s|, \bar{V}|s\rangle = |s\rangle$ と矛盾するように思われる。後の論文 [6] にも同様の記述がある。ことによると、上三角・下三角の定義が我々と違うのかもしれない。

一般化された量子群の典型的既約指標について

山根 宏之 (富山大学学術研究部理学系)

\mathbb{K} を標数 0 の体とする。 $\mathbb{K}^\times := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ とおく。 I を空でない集合とし \mathfrak{A} を $\{\alpha_i | i \in I\}$ を基とする自由 \mathbb{Z} 加群とする (\mathfrak{A} の階数は $|I|$ である)。写像 $\chi : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ を $\chi(\lambda + \mu, \nu) = \chi(\lambda, \nu)\chi(\mu, \nu)$, $\chi(\lambda, \mu + \nu) = \chi(\lambda, \mu)\chi(\lambda, \nu)$ ($\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{A}$) を満たすものとする。このような χ に対して次の公理 (U1)-(U6) を満たす単位元 1 をもつ結合的 \mathbb{K} -代数 U が一意的に存在する。 $[X, Y] := XY - YX$ ($X, Y \in U$) である。

(U1) U は, 生成元 K_λ, L_λ ($\lambda \in \mathfrak{A}$), E_i, F_i ($i \in I$) をもつ。

(U2) 次の等式が成り立つ。 $K_0 = L_0 = 1$, $K_\lambda K_\mu = K_{\lambda+\mu}$, $L_\lambda L_\mu = L_{\lambda+\mu}$, $K_\lambda L_\mu = L_\mu K_\lambda$, $K_\lambda E_i = \chi(\lambda, \alpha_i) E_i K_\lambda$, $K_\lambda F_i = \chi(\lambda, -\alpha_i) F_i K_\lambda$, $L_\lambda E_i = \chi(-\alpha_i, \lambda) E_i L_\lambda$, $L_\lambda F_i = \chi(\alpha_i, \lambda) F_i L_\lambda$, $E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij}(-K_{\alpha_i} + L_{\alpha_i})$.

(U3) 写像 $\varsigma_1 : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow U$, $(\lambda, \mu) \mapsto K_\lambda L_\mu$, は単射であり, $\varsigma_1(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$ は \mathbb{K} 上一次独立である。

(U4) $U^0 := \text{Span}_{\mathbb{K}} \varsigma_1(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A})$ とおき, U^+ (resp. U^-) を 1 および E_i (resp. F_i) ($i \in I$) で生成される U の \mathbb{K} -部分代数とする。 \mathbb{K} -線形写像 $\varsigma_2 : U^- \otimes U^0 \otimes U^+ \rightarrow U$, $Y \otimes Z \otimes X \mapsto YZX$, は \mathbb{K} -線形同型写像である。

(U5) 次の性質を満たす \mathbb{K} -部分空間 U_λ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) が存在する。 $U^0 \subset U_0$, $E_i \in U_{\alpha_i}$, $F_i \in U_{-\alpha_i}$ ($i \in I$), $U = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{A}} U_\lambda$, $U_\mu U_\nu \subset U_{\mu+\nu}$ ($\mu, \nu \in \mathfrak{A}$) 。

(U6) $U_\lambda^\pm := U_\lambda \cap U^\pm$ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) とおく。 $\mathfrak{A}^+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ ($\subset \mathfrak{A}$) とする。任意の $\lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ に対して $\{X \in U_\lambda^+ | \forall i \in I, [X, F_i]\} = \{0\}$ かつ $\{Y \in U_{-\lambda}^- | \forall i \in I, [E_i, Y]\} = \{0\}$ である。

$\dim U_\lambda^+ = \dim U_{-\lambda}^-$ ($\lambda \in \mathfrak{A}^+$) が成り立つ。 $q_\lambda := \chi(\lambda, \lambda)$ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) とおく。写像 $\text{ord} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を $\text{ord}(\lambda) := |\{\sum_{r=0}^k q_\lambda^r | k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}|$ により定義する。 $U^{+'} := (\sum_{\lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}} U_\lambda^+) \setminus \{0\}$ とおく。写像 $\text{deg} : U^{+'} \rightarrow \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ を $\text{deg}(X) := \lambda$ ($X \in U_\lambda^+ \cap U^{+'}$, $\lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$) により定義する。

Kharchenko の PBW 定理 ([1, Theorem 2]) $U^{+'}$ の部分集合 S と S 上の全順序 \leq で次の (*) を満たすものが存在し, $R_\chi^+ := \text{deg}(S) (\subset \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\})$ は, S によらずに定まる。

(*) $\{X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_k^{n_k} | X_t \in S, 0 \leq n_t < \text{ord}(\deg(X_t)) (1 \leq t \leq k), X_1 < X_2 < \cdots < X_k\}$ は U^+ の \mathbb{K} -基底である。

(明らかに $\alpha_i \in R_\chi^+$ ($i \in I$) である。) 以後, $|R_\chi^+| < \infty$ と仮定する。このとき $\deg|_S$ は単射であり, 任意の $\beta \in R_\chi^+$ に対して β を含む \mathfrak{A} の \mathbb{Z} -基が存在する。 $R_\chi^{+, \text{fin}} := \{\beta \in R_\chi^+ | \text{ord}(\beta) < \infty\}$ とおき, $R_\chi^{+, \text{inf}} := \{\beta \in R_\chi^+ | \text{ord}(\beta) = \infty\}$ とおく。明らかに $R_\chi^+ = R_\chi^{+, \text{fin}} \cup R_\chi^{+, \text{inf}}$ である。 $\dot{I} := \{i \in I | q_{\alpha_i} = 1\}$ および $\dot{R}_\chi^{+, \text{inf}} := \{\beta \in R_\chi^{+, \text{inf}} | q_\beta \neq 1\}$ とおく。 $R_\chi^{+, \text{inf}} = \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}} \cup \{\alpha_i | i \in \dot{I}\}$ が成り立つ。 $\dot{\mathfrak{A}} := \bigoplus_{i \in I \setminus \dot{I}} \mathbb{Z} \alpha_i \subset \mathfrak{A}$ とおく。 G を \mathfrak{A} から \mathfrak{A} への \mathbb{Z} -加群の同型写像全体のなす群とする。 $\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}$ と $\lambda \in \mathfrak{A}$ に対して, $\chi(\beta, \lambda) \chi(\lambda, \beta) = q_\beta^{k_\lambda^\beta}$ となる $k_\lambda^\beta \in \mathbb{Z}$ がある。 $\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}$ に対して $s_\beta \in G$ を $s_\beta(\lambda) := \lambda - k_\lambda^\beta \beta$ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) により定義する。 $s_\beta^2 = e$ が成り立つ。 W を s_β ($\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}$) により生成される G の部分群とする。 群の準同型写像 $\text{sgn} : W \rightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{Z}$ で $\text{sgn}(s_\beta) = -1$ となるものが存在する。 \mathbb{Z} -加群の準同型写像 $\hat{\rho} : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{K}^\times$ を $\hat{\rho}(\alpha_i) := q_{\alpha_i}$ ($i \in I$) により定義する。 $\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}$ に対して $\hat{\rho}(\beta) = q_\beta^{r_\beta}$ となる $r_\beta \in \mathbb{Z}$ が存在する。

$\Lambda : U^0 \rightarrow \mathbb{K}$ を \mathbb{K} -代数の準同型写像とする。 U -左加群 $\mathcal{L}(\Lambda)$ を, ある $v_\Lambda \in \mathcal{L}(\Lambda) \setminus \{0\}$ が存在して, $E_i v_\Lambda = 0$ ($i \in I$), $Z v_\Lambda = \Lambda(Z) v_\Lambda$ ($Z \in U^0$) であり, $\mathcal{L}(\Lambda)_\lambda := U_\lambda v_\Lambda$ ($\lambda \in \mathfrak{A}$) とおいて, $\mathcal{L}(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{A}^+} \mathcal{L}(\Lambda)_{-\lambda}$ であり ($\mu \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}^+$ ならば $\mathcal{L}(\Lambda)_{-\mu} = \{0\}$), 任意の $\lambda \in \mathfrak{A}^+ \setminus \{0\}$ に対して, $\{Y \in \mathcal{L}(\Lambda)_{-\lambda} | \forall i \in I, F_i Y = 0\} = \{0\}$ を満たすものとする。 $\mathcal{L}(\Lambda)$ は U -既約左加群である。

以後, $\dim \mathcal{L}(\Lambda) < \infty$ を仮定する。このとき, $\mu \in \mathfrak{A} \setminus \dot{\mathfrak{A}}$ に対して $\dim \mathcal{L}(\Lambda)_\mu = 0$ が成り立つ。 $\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}$ に対して $\Lambda(K_\beta L_{-\beta}) = q_\beta^{n_\beta^\Lambda}$ となる $n_\beta^\Lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する。 W の \mathfrak{A} への群としての左作用 \cdot で $s_\beta \cdot \lambda := s_\beta(\lambda) - (r_\beta + n_\beta^\Lambda) \beta$ ($\beta \in \dot{R}_\chi^{+, \text{inf}}, \lambda \in \mathfrak{A}$) となるものが存在する。

主定理 ([2, Theorem 3.13]) 任意の $\beta \in R_\chi^{+, \text{fin}}$ に対して $\hat{\rho}(\beta) \Lambda(K_\beta L_{-\beta}) \notin \{q_\beta^t | 1 \leq t \in \text{ord}(\beta) - 1\}$ を仮定する。このとき, 任意の $\lambda \in \dot{\mathfrak{A}}$ に対して, 次の等式が成り立つ。

$$\dim \mathcal{L}(\Lambda)_\lambda = \sum_{w \in W} \text{sgn}(w) \dim U_{\lambda - w \cdot 0}^-.$$

謝辞 : 本研究は科研費基盤研究 (C) (課題番号:19K03420) の助成を受けたものである。

References

- [1] V. Kharchenko, A quantum analogue of the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, Algebra and Logic 38 (1999), no. 4, 259-276.
- [2] H. Yamane, Typical Irreducible Characters of Generalized Quantum Groups, preprint, arXiv:1909.08881v2.

ADE型アフィン量子群の基本表現の間の 正規化されたR行列の特異性について

藤田 遼 (京都大学大学院 理学研究科)*

1. イントロダクション

有限次元複素単純Lie代数 \mathfrak{g} に付随する (非振型) アフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ は体 $\mathbb{k} := \mathbb{Q}(q)$ 上の Hopf 代数であって, 包絡環 $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ の由緒正しい量子アフィン化と見なされる. その有限次元表現の圏 $\mathcal{C} := U_q(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}$ の構造は $U(\widehat{\mathfrak{g}})\text{-mod}$ の構造よりずっと複雑で, 特にアーベル圏として半単純でない上にモノイダル圏として対称でない (一般に $M \otimes N \not\cong N \otimes M$). ここでは, 圏 \mathcal{C} の2つの既約対象のテンソル積の間の絡作用素として実現される R 行列について考える. これらはスペクトル変数付き Yang-Baxter 方程式を満たす行列値有理関数と見なされる. その特異性はテンソル積表現の可約性を強く反映し, 圏 \mathcal{C} のモノイダル構造に関する本質的な情報を含んでいる.

2. ADE型統一分母公式

本稿では ADE 型 Lie 代数 \mathfrak{g} に付随するアフィン量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の基本表現の間の R 行列について述べる. I を \mathfrak{g} の Dynkin 図形の頂点集合, $(c_{ij})_{i,j \in I}$ を Cartan 行列とする. 各 $i \in I$ に対し, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ の i 次基本表現 $V_i(z)$ はスペクトル変数 $z \in \mathbb{k}^\times$ に依存する圏 \mathcal{C} の既約対象であり, 最高ウェイトベクトル $v_i \in V_i(z)$ を持つ. 組 $(i, j) \in I^2$ に対し, (正規化された) R 行列 $R_{ij}(u)$ は, スペクトル変数を形式的にとった上で, $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 上の同型

$$R_{ij}(z_2/z_1): V_i(z_1) \otimes V_j(z_2) \rightarrow V_j(z_2) \otimes V_i(z_1),$$

であって条件 $R_{ij}(z_2/z_1)(v_i \otimes v_j) = v_j \otimes v_i$ を満たすものとして定義される. $R_{ij}(u)$ はスペクトル変数の比 $u = z_2/z_1$ に有理的に依存し, その分母 $d_{ij}(u) \in \mathbb{k}[u]$ を考えることに意味がある. 分母 $d_{ij}(u)$ の明示的計算は既に伊達-尾角 [1] (A 型), Kang-柏原-Kim [4] (D 型), Oh-Scrimshaw [7] (E 型) によってそれぞれ個別に得られている. これに対し, 本稿の主定理は分母 $d_{ij}(u)$ が統一的に記述できることを主張するものである.

定理 1 ([2]). 各 $(i, j) \in I^2$ に対し R 行列 $R_{ij}(u)$ の分母 $d_{ij}(u)$ は次のように書ける:

$$d_{ij}(u) = \prod_{\ell=1}^{h-1} (u - q^{\ell+1})^{\tilde{c}_{ij}(\ell)}. \quad (1)$$

ここで, h は \mathfrak{g} の Coxeter 数であり, $\tilde{c}_{ij}(\ell)$ は量子 Cartan 行列 $C(z) := \left(\frac{z^{c_{ij}} - z^{-c_{ij}}}{z - z^{-1}} \right)_{i,j \in I}$ の逆行列 $C(z)^{-1}$ の (i, j) 成分を $z = 0$ の周りで級数展開したときの z^ℓ の係数を表す.

3. Dynkin 籠の表現論による解釈

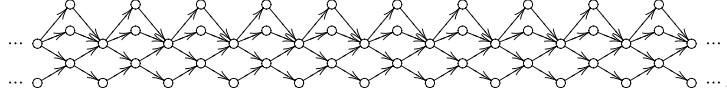
公式 (1) のひとつの利点は, \mathfrak{g} と同じ ADE 型の Dynkin 籠 Q の表現論を用いた解釈を持つことである. まず, それを述べるために記号の準備を行う. パリティ関数 $(\epsilon_i) \in \{0, 1\}^I$

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 理学研究科 数学教室
e-mail: rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

を, $c_{ij} = -1$ のとき $\epsilon_i \neq \epsilon_j$ なるように選んでおく. このとき以下の頂点集合 Δ_0 と矢集合 Δ_1 からなる籐 $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ を考える:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &:= \{(i, p) \in I \times \mathbb{Z} \mid p \equiv \epsilon_i \pmod{2}\}, \\ \Delta_1 &:= \{(i, p) \rightarrow (j, p+1) \mid (i, p), (j, p+1) \in \Delta_0, c_{ij} = -1\}.\end{aligned}$$

例えば \mathfrak{g} が D_5 型るとき, 籐 Δ は次のような形をしている:



Happel [3] によって, 籐 Δ は Dynkin 籐 Q の表現圏の有界導来圏 $\mathcal{D}_Q := D^b(\text{CQ-mod})$ の Auslander-Reiten 籐と同型であることが知られている. この同型は, 特に集合 Δ_0 と圏 \mathcal{D}_Q の直既約対象の同型類集合 $\text{ind } \mathcal{D}_Q$ の間の全単射 $\mathbf{H}_Q: \Delta_0 \cong \text{ind } \mathcal{D}_Q$ を導く.

以上の記号のもとで, 次の定理 2 は定理 1 と同値である.

定理 2 ([2]). 各 $(i, p), (j, r) \in \Delta_0$, に対して, R 行列 $R_{ij}(u)$ の $u = q^r/q^p$ における極の位数は $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(\mathbf{H}_Q(j, r), \mathbf{H}_Q(i, p))$ に等しい.

系. 各 $(i, p), (j, r) \in \Delta_0$ に対し, 次の 3 条件は互いに同値である:

- テンソル積表現 $V_i(q^p) \otimes V_j(q^r)$ は既約である;
- $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ 加群としての同型 $V_i(q^p) \otimes V_j(q^r) \cong V_j(q^r) \otimes V_i(q^p)$ が存在する;
- $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(\mathbf{H}_Q(i, p), \mathbf{H}_Q(j, r)) = 0$ かつ $\text{Ext}_{\mathcal{D}_Q}^1(\mathbf{H}_Q(j, r), \mathbf{H}_Q(i, p)) = 0$.

4. 証明と応用について

定理 2 (ゆえに定理 1) は, 既知の個別計算とは独立に, 次数付き籐多様体の幾何を用いて証明することができる. このとき Keller-Scherotzke [6] による次数付き籐多様体の構造と導来圏 \mathcal{D}_Q を結びつける結果が本質的に用いられる. また応用として, Kang-柏原-Kim [5] による量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性の一般化について, それが基本表現の族から生じる場合には次数付き籐多様体の同変 K 理論を用いた幾何学的な解釈を与えることができる.

参考文献

- [1] E. Date and M. Okado, *Calculation of excitation spectra of the spin model related with the vector representation of the quantized affine algebra of type $A_n^{(1)}$* , Internat. J. Modern Phys. A **9** (1994), no. 3, 399–417.
- [2] R. Fujita, *Graded quiver varieties and singularities of normalized R-matrices for fundamental modules*, preprint.
- [3] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), no. 3, 339–389.
- [4] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 8, 1549–1602.
- [5] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 591–685.
- [6] B. Keller and S. Scherotzke, *Graded quiver varieties and derived categories*, J. Reine Angew. Math. **713** (2016), 85–127.
- [7] S.-j. Oh and T. Scrimshaw, *Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: Exceptional cases*, Comm. Math. Phys. **368** (2019), no. 1, 295–367.

有限型団代数・階数2の団代数における d ベクトルと f ベクトルの関係式

行田 康晃 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

1. d ベクトルと f ベクトル

団 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, 係数 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, 交換行列 $B = (b_{ij})$ の組 (シード) の変換

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{if } i = \ell \text{ or } j = \ell; \\ b_{ij} + [-b_{i\ell}]_+ b_{\ell j} + b_{i\ell} [b_{\ell j}]_+ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$y'_j = \begin{cases} y_\ell^{-1} & \text{if } j = \ell; \\ y_j y_\ell^{[b_{\ell j}]_+} (y_\ell \oplus 1)^{-b_{\ell j}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$x'_j = \begin{cases} x_j & \text{if } j \neq \ell; \\ \frac{y_\ell \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{i\ell}]_+} + \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{i\ell}]_+}}{(y_\ell \oplus 1) x_\ell} & \text{if } j = \ell \end{cases}$$

は ℓ に関する **変異** と呼ばれる [FZ07]. ただし, $[x]_+ = \max(x, 0)$ とする. この変換を, ℓ を任意にとりながら, 初期条件 ($\mathbf{x}_{t_0} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $B = (b_{ij})$) から次々と作用させることを考える. 変異は対合であるため, この操作を介して得られるシードは n 正則木 \mathbb{T}_n の頂点と同一視することができる. これを **団パターン** という, また, 団の元 x_i 達のことを **団変数** という. 団パターンに含まれるの団の1つを $\mathbf{x}_t = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$ とする. 係数として $y_1 = \dots = y_n = 1$, 係数間の演算 \oplus を $1 \oplus 1 = 1$ と定めると, 任意の団変数 $x_{j;t}$ は x_1, \dots, x_n の有理関数となるが, このとき特に分母が単項式となる (ローラン現象). $x_{j;t}$ の分母が $x_1^{d_{1j;t}} \cdot x_n^{d_{nj;t}}$ であるとき, 団 \mathbf{x}_t に関する j 番目の d ベクトル $\mathbf{d}_{j;t}$ を次で定義する:

$$\mathbf{d}_{j;t} = (d_{1j;t}, \dots, d_{nj;t})^T.$$

一方, 各 $x_{j;t}$ について, y 変数 $\{y_1, \dots, y_n\}$ の和 \oplus として

$$\prod_{i=1}^n y_i^{a_i} \oplus \prod_{i=1}^n y_i^{b_i} = \prod_{i=1}^n y_i^{\min(a_i, b_i)}.$$

で定まるものを導入し, $x_{j;t}$ に関する F 多項式 $F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ を次のように定義する:

$$F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y}) = x_{j;t} \big|_{x_1 = \dots = x_n = 1}.$$

さらに, $F_{j;t}^{B;t_0}(\mathbf{y})$ の y_i に関する最大次数を $f_{ij;t}$ としたとき, 団 \mathbf{x}_t に関する j 番目の f ベクトル $\mathbf{f}_{j;t}$ を次で定義する:

$$\mathbf{f}_{j;t} = (f_{1j;t}, \dots, f_{nj;t})^T.$$

2. 主結果

本講演における主結果は次の定理である：

定理 2.1 ([Gyo19, Theorem 1.7]). ランク n (1つの団に含まれる団の個数) が2, または団パターンに含まれる団変数が有限個 (有限型) であるような団パターンについて, 以下の等式が成立する: 任意の $i \in \{1, \dots, n\}, t \in \mathbb{T}_n$ に対して,

$$[\mathbf{d}_{i;t}]_+ = \mathbf{f}_{j;t}. \quad (1)$$

この定理は f ベクトルと d ベクトルがランク2や有限型の団代数においては本質的に同等なベクトルであることを示している. また, これは [FZ07, Conjecture 7.17] の部分的解決であり (予想そのものは否定的に解決されている), 二部ベルトに付随する頂点 t に付随する団変数に関して (1) を示した [FZ07], 交換行列が歪対象行列であるような有限型について示した [Rin11, GP12], C_n 型について示した [FGL18] の結果の拡張である.

3. f ベクトルによる団の一意性予想についての部分的解決

次の予想を考える：

予想 3.1 ([GY19, Conjecture 4.4]). 任意の交換行列 B を固定し, そこから定まる団パターンを考える. 任意の頂点 $t, s \in \mathbb{T}_n$ について, $\{\mathbf{f}_{1;t}, \dots, \mathbf{f}_{n;t}\} = \{\mathbf{f}_{1;s}, \dots, \mathbf{f}_{n;s}\}$ ならば $\{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \dots, x_{n;s}\}$.

この予想を f ベクトルによる団の一意性予想と呼ぶ. この予想により団に付随する n 個の f ベクトルを横に並べた行列, F 行列から元の F 多項式が一意的に定まることがわかる. 団と係数は [FZ07] により C 行列, G 行列と呼ばれる2つの行列族と, F 多項式で決定されることがわかっているので, この予想が解決されることによって団と係数は C 行列, G 行列, F 行列の3つの行列族で決定されることが示される. 本講演の主結果を応用することで, この予想の部分的解決を得た：

定理 3.2 ([Gyo19, Theorem 1.10]). 任意のランク2または有限型の団パターンを考える. 任意の頂点 $t, s \in \mathbb{T}_n$ について, $\{\mathbf{f}_{1;t}, \dots, \mathbf{f}_{n;t}\} = \{\mathbf{f}_{1;s}, \dots, \mathbf{f}_{n;s}\}$ ならば $\{x_{1;t}, \dots, x_{n;t}\} = \{x_{1;s}, \dots, x_{n;s}\}$.

参考文献

- [FGL18] C. Fu, S. Geng, and P. Liu, *Cluster algebras arising from cluster tubes I: integer vectors*, 2018. preprint, arXiv:1801.00709 [math.RA].
- [FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster Algebra IV: Coefficients*, *Comp. Math.* **143** (2007), 112–164.
- [GP12] S. Geng and L. Peng, *The dimension vectors of indecomposable modules of cluster-tilted algebras and the Fomin-Zelevinsky denominators conjecture*, *Acta. Math.* **28** (2012), no. 3, 581–586.
- [GY19] Y. Gyoda and T. Yurikusa, *F-matrices of cluster algebras from triangulated surfaces*, 2019. preprint, arXiv:1902.09317 [math.CO].
- [Gyo19] Y. Gyoda, *Relation between f-vectors and d-vectors in cluster algebras of finite type or rank 2*, 2019. preprint, arXiv:1904.00779 [math.RA].
- [Rin11] C. M. Ringel, *Cluster-concealed algebras*, *Adv. Math.* **226** (2011), no. 2, 1513–1537.

団代数を用いた $A_7^{(1)}$ 型 q -パウルヴェエ系の高階化

増田 哲 (青山学院大学)

大久保 直人 (青山学院大学)

津田 照久 (一橋大学)

概 要

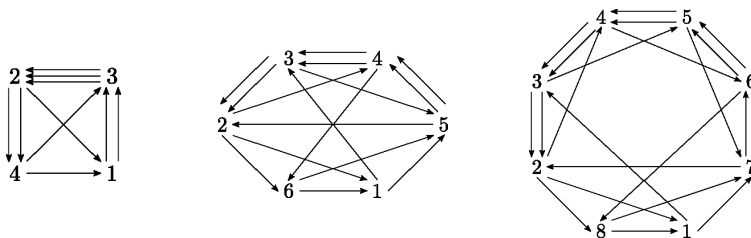
団代数において籠を不変に保つ変異列から様々な離散ソリトン系や q -パウルヴェエ系が得られることが知られている [1]. 特に Bershtein–Gavrylenko–Marshakov [2] は 2 階の全ての q -パウルヴェエ系について、背景のワイル群対称性を団代数から導出した. 我々は「閉路グラフに付随する鏡映」を考えることにより様々なワイル群の双有理的实现を統一的に構成する枠組みを与えた [3]. 一方、2 階の q -パウルヴェエ系のリストに限ってもワイル群の作用が「閉路グラフに付随する鏡映」の形で表されないものが存在する¹. 本講演では $A_7^{(1)}$ 型 q -パウルヴェエ系とその高階化の例を紹介する.

頂点集合を $V = \{1, 2, \dots, 2N + 2\}$ とし、符号付き隣接行列を

$B = (b_{i,j}) = (\text{辺 } i \rightarrow j \text{ の本数})$

$$\begin{aligned}
 &= E_{2,1} - E_{1,2} + E_{2N+2,2N+1} - E_{2N+1,2N+2} + 2 \sum_{i=2}^{2N} (E_{i+1,i} - E_{i,i+1}) + \sum_{i=1}^{2N} (E_{i,i+2} - E_{i+2,i}) \\
 &\quad + E_{1,2N+1} - E_{1,2N+2} - E_{2,2N+1} + E_{2,2N+2} - E_{2N+1,1} + E_{2N+2,1} + E_{2N+1,2} - E_{2N+2,2}
 \end{aligned}$$

とする籠 Q を考える. 但し $E_{i,j}$ は行列単位である. $N = 1, 2, 3$ の場合は下図の通りである. $N = 1$ の場合が $A_7^{(1)}$ 型 q -パウルヴェエ系に対応する [2].



頂点 $k \in V$ における籠の変異 $Q' = \mu_k(Q)$ をある組み合わせ的操作で定め², 変数 $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in V}$ の変異を

$$y'_i = \mu_k(y_i) = \begin{cases} y_k^{-1} & (i = k) \\ y_i \frac{(1 + y_k)^{\max\{b_{i,k}, 0\}}}{(1 + y_k^{-1})^{\max\{b_{k,i}, 0\}}} & (i \neq k) \end{cases}$$

と定める [4]. このとき $\mu_k^2 = \text{id}$ (対合性) および $\mu_i \circ \mu_j = \mu_j \circ \mu_i$ ($b_{i,j} = 0$) が成り立つ. 一般に変異は籠 Q の形を変えることに注意しておく.

¹ 実際, $A_7^{(1)}$ 型および $A_6^{(1)}$ 型曲面に付随する q -パウルヴェエ系がそのような例である.

² $Q' = \mu_k(Q)$ は Q に対して次の手順で定める. (1) $i \rightarrow k \rightarrow j$ という部分グラフごとに辺 $i \rightarrow j$ を加え, (2) k を含むすべての辺の向きを反転し, (3) 現れた 2-閉路を消す.

定理 1 組 (Q, \mathbf{y}) の変換

$$\begin{aligned} t_0 &= (2N+2, 2N+1, \dots, 2, 1) \circ \mu_1, \\ t_1 &= (1, 2, \dots, 2N+1, 2N+2) \circ \mu_{2N+2}, \\ \pi &= (1, 2N+2) \circ (2, 2N+1) \circ \dots \circ (N+1, N+2) \circ \iota \end{aligned}$$

を考える。但し (i_1, i_2, \dots, i_k) は籠 Q の頂点の巡回置換とし、辺の向きを一斉に反転する操作 ι は $\iota(y_i) = 1/y_i$ ($\forall i$) と作用する。

- (1) 変換 t_0, t_1, π は籠 Q を不変に保つ。
- (2) 双有理変換群 $G = \langle t_0, t_1, \pi \rangle$ は次の基本関係を満たす。

$$t_0 t_1 = t_1 t_0 = \pi^2 = \text{id}, \quad t_0 = \pi t_1 \pi$$

証明 (1) は籠の変異の定義から容易に確かめられる。また、頂点の互換 (i, j) に対し $(i, j) \circ \mu_i = \mu_j \circ (i, j)$ が成り立つことと変異の対合性から (2) は分かる。 ■

上記の双有理変換群は $A_1^{(1)}$ 型の拡大アフィン・ワイル群と同型である。符号付き隣接行列 B はあるユニモジュラー行列 $U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2N+2}) \in GL_{2N+2}(\mathbb{Z})$ によって

$${}^T U B U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus N} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と標準化できる。そこで

$$f_i = \mathbf{y}^{\mathbf{u}_{2i-1}}, \quad g_i = \mathbf{y}^{\mathbf{u}_{2i}} \quad (i = 1, \dots, N), \quad b_0 = \mathbf{y}^{\mathbf{u}_{2N+1}}, \quad b_1 = \mathbf{y}^{\mathbf{u}_{2N+2}}$$

とおくと [3, 5] と同様の議論により次が従う。

定理 2 双有理変換群 $G = \langle t_0, t_1, \pi \rangle$ は 2-形式 $\omega = \sum_{i=1}^N \frac{df_i \wedge dg_i}{f_i g_i}$ を保つ。

即ち b_0, b_1 は離散力学系のパラメタと看做せる。実際、これらの変数への t_0 の作用は

$$t_0 : b_0 \mapsto q^{-1} b_0, \quad b_1 \mapsto q b_1 \quad (q = \prod_{i \in V} y_i : \text{定数})$$

となる。 $N = 1$ の場合、 t_0 の作用は $A_7^{(1)}$ 型 q -パルヴェエ系の時間発展そのものである。尚、離散 KdV 方程式に対応する無限グラフの簡約化からも同じ籠 Q が得られる [6]。

参考文献

- [1] N. Okubo, Bilinear equations and q -discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras, J. Phys. A **48** (2015) 355201.
- [2] M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization, J. High Energy Phys. **2018**, 077.
- [3] 増田哲, 大久保直人, 津田照久, Birational Weyl group actions via mutation combinatorics in cluster algebras, RIMS 講究録 **2127** (2019) に所収；津田照久, 日本数学会 2019 年度秋季総合分科会・無限可積分系セッション特別講演.
- [4] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, Compos. Math. **143** (2007) 112–164.
- [5] A. P. Fordy and A. Hone, Discrete integrable systems and Poisson algebras from cluster maps. Comm. Math. Phys. **325** (2014) 527–584.
- [6] N. Okubo, Co-primeness preserving higher dimensional extension of q -discrete Painlevé I, II equations, arXiv:1704.05403.

Another proof of difference equations for interpolation Jack polynomials

渋川 元樹 (神戸大学・理)*

概 要

Knop-Sahi により与えられた補間 Jack 多項式の高階差分方程式の、構造的な別証明を述べる。

$r, k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $d, \alpha \in \mathbb{R}$ とし, \mathcal{P} を長さ r 以下の partitions の集合

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r \mid m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r\}$$

とする. 以下断らない限り, $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k}, \mathbf{x} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^r$ とし,

$$\begin{aligned} e_{r,k}(\mathbf{z}) &:= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq r} z_{j_1} \cdots z_{j_r}, \quad |\mathbf{z}| := e_{r,1}(\mathbf{z}), \quad \Delta(\mathbf{z}) := \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j), \\ H_{r,k}^{(J)}(\mathbf{z}) &:= \sum_{l=0}^k \left(\frac{2}{d}\right)^{k-l} \sum_{\substack{I \subset [r] \\ |I|=l}} \frac{1}{\Delta(\mathbf{z})} \left(\prod_{i \in I} z_i \partial_{z_i} \right) \Delta(\mathbf{z}) \sum_{\substack{J \subset [r] \setminus I \\ |J|=k-l}} \left(\prod_{j \in J} z_j \partial_{z_j} \right), \\ S_r^{(d)}(u; \mathbf{z}) &:= \sum_{l=0}^r H_{r,l}^{(J)}(\mathbf{z}) u^{r-l}, \quad I_r^{(d)}(u; \mathbf{x}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{k=1}^r \left(x_k + \frac{d}{2}(u+r-k)\right) \end{aligned}$$

とする. 任意の $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ に対し, $P_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2}) = P_{\mathbf{k}}(z_1, \dots, z_r; \frac{d}{2})$ を r 変数の Jack 多項式とする. 更に補間 Jack 多項式 $P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})$ を, (1)^{ip} vanishing property

$$P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{m} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2}\right) = 0 \quad \text{unless } \mathbf{k} \subset \mathbf{m} \in \mathcal{P}$$

と, (2)^{ip} 正規化条件

$$P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) = P_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{z}; \frac{d}{2}\right) + (\text{lower terms}) \quad (1)$$

の2条件を満たすものとして定義する (一意に定まる). また便宜の為に

$$\Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{k}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})}, \quad \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) := \frac{P_{\mathbf{k}}(\mathbf{1}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})} \Phi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \frac{P_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}; \frac{d}{2})}{P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}}(\mathbf{k} + \frac{d}{2}\delta; \frac{d}{2})}$$

とおく.

補題 1.

$$e^{|\mathbf{z}|} \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k} \subset \mathbf{n}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}^{(d)} \Psi_{\mathbf{n}}^{(d)}(\mathbf{z}). \quad (2)$$

キーワード: Jack polynomials, interpolation (shifted) Jack polynomials, difference equations

* 〒657-8501 兵庫県神戸市灘区六甲台町 1-1 神戸大学大学院理学科学研究科

e-mail: g-shibukawa@math.kobe-u.ac.jp

補題 2. 任意の $0 \leq p \leq r$ について,

$$\left[\frac{(\text{ad } \mathbf{z})^p}{p!} S_r^{(d)}(u; \mathbf{z}) \right] \Psi_{\mathbf{k}}^{(d)}(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{J \subset [r] \\ |J|=p}} \Psi_{\mathbf{k}^J}^{(d)}(\mathbf{z}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{k}^J) I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{k}). \quad (3)$$

ただし, $J^c := [r] \setminus J$, $\epsilon_j := (\delta_{ij})_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{Z}^r$, $\mathbf{k}^J = \mathbf{k} + \sum_{j \in J} \epsilon_j$

$$h_{\pm, J}^{(d)}(\mathbf{x}) := \prod_{j \in J, k \in J^c} \frac{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k) \pm \frac{d}{2}}{x_j - x_k - \frac{d}{2}(j-k)}, \quad I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{k}) := \left(\frac{2}{d}\right)^r \prod_{k \in J^c} \left(x_k + \frac{d}{2}(u+r-k)\right)$$

とする.

補題 1. と補題 2. より次を得る.

定理 3 (Knop-Sahi [2]). 後退差分作用素を

$$T_{x_j} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \epsilon_j), \quad T_{\mathbf{x}}^J := \prod_{j \in J} T_{x_j}$$

とし,

$$D_r^{(d)\text{ip}}(u; \mathbf{x}) := \sum_{J \subset [r]} (-1)^{|J|} I_{J^c}^{(d)}(u; \mathbf{x}) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x}) \prod_{j \in J} \left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right) T_{\mathbf{x}}^J,$$

$$D_{r,p}^{(d)\text{ip}}(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{J \subset [r] \\ 0 \leq |J| \leq p}} (-1)^{|J|} e_{r-|J|, p-|J|} \left(\left(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \delta \right)_{J^c} \right) h_{-,J}^{(d)}(\mathbf{x}) \prod_{j \in J} \left(x_j + \frac{d}{2}(r-j)\right) T_{\mathbf{x}}^J$$

とおく. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^r$, $\mathbf{k} \in \mathcal{P}$ に対し,

$$D_r^{(d)\text{ip}}(u; \mathbf{x}) P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}} \left(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \delta; \frac{d}{2} \right) = P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}} \left(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \delta; \frac{d}{2} \right) I_r^{(d)}(u; \mathbf{k}),$$

$$D_{r,p}^{(d)\text{ip}}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}} \left(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \delta; \frac{d}{2} \right) = P_{\mathbf{k}}^{\text{ip}} \left(\mathbf{x} + \frac{d}{2} \delta; \frac{d}{2} \right) e_{r,p} \left(\mathbf{k} + \frac{d}{2} \delta \right).$$

また任意の $u, v \in \mathbb{C}$ に対し,

$$[D_r^{(d)\text{ip}}(u; \mathbf{x}), D_r^{(d)\text{ip}}(v; \mathbf{x})] = 0.$$

特に $i, j \in [r]$ について

$$[D_{r,i}^{(d)\text{ip}}(\mathbf{x}), D_{r,j}^{(d)\text{ip}}(\mathbf{x})] = 0.$$

参考文献

- [1] T. H. Koornwinder : *Okounkov's BC-type interpolation Macdonald polynomials and their $q = 1$ limit*, Sémin. Lothar. Combin, **72** (2014/15), 27pp.
- [2] F. Knop and S. Sahi : *Difference equations and symmetric polynomials defined by their zeros*, Internat. Math. Res. Notices, **10** (1996), 473–486.
- [3] I. G. Macdonald : *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, 1995.

Variants of confluent q -hypergeometric equations

松縄 竜弥 (中央大学大学院 理工学研究科)
 佐藤 智輝 (中央大学大学院 理工学研究科)
 竹村 剛一 (お茶の水女子大学 基幹研究院)

初等関数に続く重要な関数たちとして様々な特殊関数が知られている。代表的な特殊関数として超幾何関数があり、これはリーマン球面上で3点 $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点をもつ超幾何微分方程式をみたす。そして、特異点の合流操作により、クンマーの合流型超幾何関数、放物柱関数などの特殊関数が現れる。

超幾何関数の q -変形として、 q 超幾何級数は

$${}_2\phi_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(q; q)_n (c; q)_n} x^n, \quad (\lambda, q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda q^i).$$

により定められる。これは、 q 超幾何方程式

$$(x - q)f(x/q) - ((a + b)x - q - c)f(x) + (abx - c)f(qx) = 0.$$

の解となっている。 $q \rightarrow 1$ の極限において、通常の超幾何級数と超幾何微分方程式に移行する。 q 超幾何級数や q 超幾何方程式においても、合流操作で得られる関数や q 差分方程式がいくつか知られている ([3])。

[1] において、特異点が t_1, t_2, ∞ ($0 \neq t_1 \neq t_2 \neq 0$) となる超幾何微分方程式の q 変形 (2次の変異版 q 超幾何方程式, the variant of the q -hypergeometric equation of degree 2) が導入された。2次の変異版 q 超幾何方程式は

$$\begin{aligned} & (x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) + q^{\alpha_1+\alpha_2}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)g(qx) \\ & - [(q^{\alpha_1} + q^{\alpha_2})x^2 + Ex + p(q^{1/2} + q^{-1/2})t_1t_2]g(x) = 0, \quad (1) \\ & p = q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+\alpha_1+\alpha_2)/2}, \quad E = -p\{(q^{-h_2} + q^{-l_2})t_1 + (q^{-h_1} + q^{-l_1})t_2\} \end{aligned}$$

という形で与えられ、これは q ホイン方程式でパラメーターを特殊化したものとなっている。

この差分方程式の解は、[1] でいくつか求められている。 $\lambda = (h_1 + h_2 - l_1 - l_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1)/2$ とおくことで、

$$g_1(x) = x^{-\alpha_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\lambda+\alpha_1}; q)_{k+\ell}}{(q^{\alpha_1-\alpha_2+1}; q)_{k+\ell}} \frac{(q^{\lambda+\alpha_1-h_2+l_2}; q)_k (q^{\lambda+\alpha_1-h_1+l_1}; q)_\ell}{(q; q)_k (q; q)_\ell} \cdot (q^{h_1+1/2}t_1x^{-1})^k (q^{l_2+1/2}t_2x^{-1})^\ell. \quad (2)$$

本研究は科研費 (課題番号:18K03378) の助成を受けたものである。

は一つの解となっており、他の解として次のものがある。

$$g_2(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (x/(q^{l_1-1/2}t_1); q)_n q^n \frac{(q^{\lambda+\alpha_1}; q)_n (q^{\lambda+\alpha_2}; q)_n}{(q^{h_1-l_1+1}; q)_n (q^{h_2-l_1+1}t_2/t_1; q)_n (q; q)_n}.$$

本講演においては、2次の変異版 q 超幾何方程式とその解について、合流操作を考察する ([2])。

第一の合流は、式 (1) において $q^{\alpha_2+l_2} = q^{h_1+h_2-l_1-\alpha_1+1-2\lambda}$ を固定したうえで $q^{\alpha_2} \rightarrow 0$ という極限で得られるものであり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & q^{h_1+h_2-l_1-2\lambda+1/2}t_2(q^{l_1-\frac{1}{2}}t_1-x)g(qx) + (x-q^{h_1+\frac{1}{2}}t_1)(x-q^{h_2+\frac{1}{2}}t_2)g(x/q) \quad (3) \\ & - [q^{\alpha_1}x^2 - q^{h_1+h_2-\lambda+1/2}(q^{-h_2}t_1 + q^{-h_1}t_2 + q^{-l_1}t_2)x \\ & \quad + q^{h_1+h_2-\lambda}(q+1)t_1t_2]g(x) = 0. \end{aligned}$$

式 (2) の関数から極限操作で得られる

$$\begin{aligned} & x^{-\alpha_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\lambda+\alpha_1}; q)_{k+\ell} (q^{\lambda+\alpha_1-h_1+l_1}; q)_\ell}{(q; q)_k (q; q)_\ell} q^{-\ell(\ell+2k-1)/2} \quad (4) \\ & (q^{-\lambda-\alpha_1+h_1+1/2}t_1x^{-1})^k (-q^{-2\lambda-2\alpha_1-l_1+h_1+h_2+1/2}t_2x^{-1})^\ell \end{aligned}$$

は、 q -差分方程式 (3) の一つの解となっている。

第二の合流は、式 (3) において $q^{-l_1} \rightarrow 0$ として得られ、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & q^{h_1+h_2-2\lambda}t_1t_2g(qx) + (x-q^{h_1+1/2}t_1)(x-q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) \quad (5) \\ & - [q^{\alpha_1}x^2 - q^{h_1+h_2-\lambda+1/2}(q^{-h_2}t_1 + q^{-h_1}t_2)x + q^{h_1+h_2-\lambda}(q+1)t_1t_2]g(x) = 0. \end{aligned}$$

式 (4) の関数から極限操作で得られる

$$x^{-\alpha_1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{\lambda+\alpha_1}; q)_{k+\ell}}{(q; q)_k (q; q)_\ell} q^{-k\ell} (q^{-\lambda-\alpha_1+h_1+1/2}t_1x^{-1})^k (q^{-\lambda-\alpha_1+h_2+1/2}t_2x^{-1})^\ell \quad (6)$$

は、 q -差分方程式 (5) の一つの解となっている。

参考文献

- [1] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q -hypergeometric equation, arXiv:1910.12560.
- [2] R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of confluent q -hypergeometric equations, in preparation.
- [3] Y. Ohyama, A unified approach to q -special functions of the Laplace type, arXiv:1103.5232.

4次元 Painlevé 型差分方程式について

川上 拓志 (青山学院大学)*

最近, 講演者は坂井秀隆氏, 中村あかね氏との共同研究 [3] 及び [1] において, 相空間が 4 次元である Painlevé 型微分方程式の分類を行った. 具体的には, 大島利雄氏によるアクセサリパラメータが 4 つの Fuchs 型微分方程式の分類 [4]

特異点の数 = 5	11,11,11,11,11		
4	21,21,111,111	31,22,22,1111	22,22,22,211
3	211,1111,1111	221,221,11111	32,11111,11111
	222,222,2211	33,2211,111111	44,2222,22211
	44,332,11111111	55,3331,22222	66,444,222211

の中で, 連続的なモノドロミー保存変形を許容する特異点が 4 点・5 点の Fuchs 型方程式からスタートし, 「特異点の合流」及び「不確定特異点における形式的標準形の退化」を可能な限り行い, その結果得られた線型方程式のモノドロミー保存変形を考慮することで 40 個の Painlevé 型微分方程式のなす退化図式を得た. この研究により, 特に相空間が 4 次元の場合については Painlevé 型微分方程式の全貌がつかめたといい状況である.

注. 上の表の 11,11,11,11,11 などの数字は Fuchs 型微分方程式のスペクトル型である. Fuchs 型方程式系

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{x - u_j} Y \quad (A_j \in M(m, \mathbb{C}), \text{ 簡単のため対角化可能とする}) \quad (1)$$

に対し, A_j ($j = 1, \dots, n, \infty$, ただし $A_\infty := -\sum_{j=1}^n A_j$) の固有値が $\theta_1^j, \dots, \theta_{l_j}^j$ でそれぞれの重複度が $m_1^j, \dots, m_{l_j}^j$ であるとき, m の分割 $\mathcal{P}_j = m_1^j \dots m_{l_j}^j$ の $(n+1)$ 個の組 $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_\infty$ を方程式 (1) のスペクトル型と呼ぶ. スペクトル型は Fuchs 型でない微分方程式に対しても定義されるが, ここでは省略する.

一方, 相空間が 2 次元の場合は離散 Painlevé 方程式を基本とした枠組みが存在し, Painlevé (微分) 方程式もその中に自然に位置づけられることが知られている (坂井理論 [5]). 従って, 4 次元 (あるいはさらに高次元) の場合にも 2 次元の場合と同様, 離散方程式を基本とした枠組みを構築したい.

そのために, 講演者は上の表の特異点を 3 つしか持たない 9 つの Fuchs 型方程式に着目する. 特異点 3 点の Fuchs 型方程式は (非自明な) 連続的なモノドロミー保存変形を持たないが, 離散的なモノドロミー保存変形 (Schlesinger 変換と呼ばれる) は可能である. 従ってその 9 つの Fuchs 型方程式からは相空間が 4 次元の Painlevé 型加法的差分方程式が得られる.

本講演では, スペクトル型の間にある同値関係を定義することでそれら 9 つの間に木構造が成り立ち, それが Painlevé 型差分方程式の退化図式を与えることが期待されるということを指摘したい.

* 〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1 青山学院大学 理工学部
e-mail: kawakami@gem.aoyama.ac.jp

S_1, S_2 を (Fuchs 型とは限らない) 線型常微分方程式のスペクトル型としたとき, これらの間に同値関係を次のように定義する.

定義. $S_1 \sim S_2 \stackrel{\text{def}}{\iff}$ スペクトル型 S_1 を持つ線型方程式から, Möbius 変換, (逆) Laplace 変換, addition の有限回の合成で, スペクトル型 S_2 を持つ線型方程式が得られる.

ここで addition とは, 係数行列をスカラー行列でずらす変換で, スカラーゲージ変換で実現できる. スペクトル型 S の同値類を $[S]$ と書くことにする.

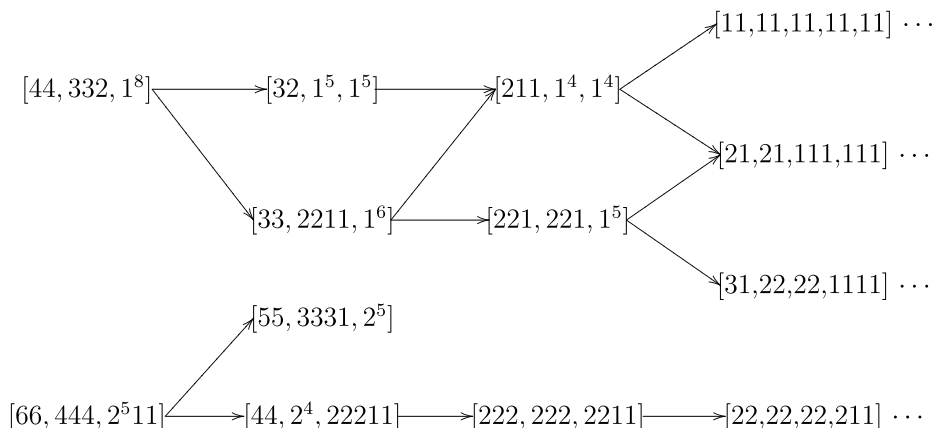
定義. $[S_1] \rightarrow [S_2] \stackrel{\text{def}}{\iff}$ S_1, S_2 と同値なスペクトル型を持つ線型方程式 E_1, E_2 が存在して, E_1 から特異点の合流または形式的標準形の退化で E_2 が得られる.

なぜこのような定義をするかという点,

予想. 離散的モノドロミー保存変形方程式は Laplace 変換で不変.

が成り立つと予想されるからである (Möbius 変換, addition で不変なことは明らかである). すなわち, 直観的には変形方程式が同じ線型方程式を同値と見なすということである. このとき次が成り立つ.

定理. 上の表の特異点 3 点のスペクトル型の同値類の間に下のような図式が成り立つ.



離散変形も共に考えると, 退化図式が 2 つの流れに統合されることが見て取れる.

議論の詳細については, [2] を参照していただければ幸いです.

参考文献

- [1] H. Kawakami, Four-dimensional Painlevé-type equations associated with ramified linear equations I: Matrix Painlevé systems, to appear in *Funkcial. Ekvac.*, arXiv:1608.03927, II: Sasano systems, *Journal of Integrable Systems*, Volume 3, Issue 1 (2018), xyy013, III: Garnier systems and Fuji-Suzuki systems, *SIGMA* **13** (2017), 096, 50 pages.
- [2] H. Kawakami, Four-dimensional Painlevé-type difference equations, arXiv:1802.00116.
- [3] H. Kawakami, A. Nakamura, and H. Sakai, Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations, *MSJ Memoirs* **37** (2018), 25–111.
- [4] T. Oshima, Fractional calculus of Weyl algebra and Fuchsian differential equations, *MSJ Memoirs* **28** (2012).
- [5] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.

行列第六 Painlevé 系の q -類似

川上 拓志 (青山学院大学)*

近年, Painlevé 方程式の一般化に関する研究が活発になされているが, Painlevé 方程式の (特に第六 Painlevé 方程式の) 拡張としては次の 4 つが代表的であると思われる: Garnier 系 (多変数拡張), Fuji-Suzuki-Tsuda 系 (A 型 affine Weyl 群対称性を持つ拡張), Sasano 系 (D 型 affine Weyl 群対称性を持つ拡張), 行列第六 Painlevé 系 (非可換拡張). この中で行列 Painlevé 系以外についてはその q -類似が知られているが, 今回, 行列第六 Painlevé 系の q -類似を構成したので報告する. 方法としては, ある種の線型 q -差分方程式の接続保存変形を考えるのであるが, その線型方程式はスペクトル型により特徴づけられる.

次のような $2m \times 2m$ の線型 q -差分方程式系

$$Y(qx, t) = A(x, t)Y(x, t), \quad A(x, t) = A_2x^2 + A_1(t)x + A_0(t) \quad (1)$$

を考える. ここで

$$A_2 = \text{diag}(\overbrace{\kappa_1, \dots, \kappa_1}^m, \overbrace{\kappa_2, \dots, \kappa_2}^{m-1}, \kappa_3), \quad A_0(t) \stackrel{\text{相似}}{\sim} \text{diag}(\overbrace{\theta_1 t, \dots, \theta_1 t}^m, \overbrace{\theta_2 t, \dots, \theta_2 t}^m).$$

また, $A(x, t)$ は (x の多項式行列として) 次の Smith 標準形を持つとする:

$$A(x, t) \stackrel{\text{対等}}{\sim} \begin{pmatrix} I_m & O \\ O & \prod_{i=1}^4 (x - \alpha_i) I_m \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{cases} a_i t & (i = 1, 2), \\ a_i & (i = 3, 4). \end{cases}$$

従ってこの方程式のスペクトル型は $(m, m; m, m-1, 1; m, m, m, m)$ である (線型 q -差分方程式のスペクトル型については [3] を参照されたい). このとき線型 q -差分方程式 (1) は (generic には) 次のように書けることがわかる:

$$A(x, t) = \begin{pmatrix} WK\{\kappa_1(xI_m - F)(xI_m - \alpha) + \kappa_1 G_1\}K^{-1}W^{-1} & WK(xI_m - F) \\ \kappa_1(\gamma x + \delta)W^{-1} & K(xI_m - \beta)(xI_m - F) + KG_2 \end{pmatrix}.$$

ただし $G_1 = q^{-1}\kappa_1^{-1}(F - a_1 t I_m)(F - a_2 t I_m)G^{-1}$, $G_2 = q\kappa_1 G(F - a_3 I_m)(F - a_4 I_m)$ であり, F, G, W は $m \times m$ 行列である. α, \dots, δ も $m \times m$ 行列で F, G で書ける. さらに F と G は次の交換関係を満たす:

$$F^{-1}GFG^{-1} = \rho K, \quad \rho = \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 \kappa_1}{\theta_1 \theta_2}, \quad K = \text{diag}(\overbrace{\kappa_2, \dots, \kappa_2}^{m-1}, \kappa_3). \quad (2)$$

この関係式により, F と G が (gauge の自由度を除くと) $2m$ 個のアクセサリパラメータで書けることがわかる. t は変形パラメータである.

この線型 q -差分方程式 (1) の接続保存変形は, ある t 方向の方程式

$$Y(x, qt) = B(x, t)Y(x, t)$$

と (1) が両立することと同値になるが, その両立条件は次の F, G, W についての非線型 q -差分方程式 (神保-坂井の q - P_{VI} [1] の非可換拡張とも見なせる) で記述される.

* 〒252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1 青山学院大学 理工学部
e-mail: kawakami@gem.aoyama.ac.jp

定理. (1)の接続保存変形は次の非線型 q -差分方程式系と同値 (バーは t に関する q -シフトを表す) :

$$\bar{F}KF = \frac{\theta_1\theta_2}{\kappa_1 a_1 a_2} \left(\bar{G} - t \frac{a_1 a_2}{\theta_1} \right) \left(\bar{G} - t \frac{a_1 a_2}{\theta_2} \right) (\bar{G} - q^{-1} \kappa_1^{-1})^{-1} (\bar{G} - \rho)^{-1}, \quad (3)$$

$$\bar{G}KG = q^{-1} \kappa_1^{-1} (F - a_1 t)(F - a_2 t)(F - a_3)^{-1}(F - a_4)^{-1}, \quad (4)$$

$$W^{-1}\bar{W} = q\kappa_1(\bar{G} - K^{-1})^{-1}(\bar{G} - q^{-1}\kappa_1^{-1})K^{-1}, \quad (5)$$

及び交換関係 (2).

方程式系 (3), (4) は連続極限 $q \rightarrow 1$ により行列第六 Painlevé 系を導く. 実際, $q = e^{-\varepsilon}$ とおき, 新しいパラメータ σ_i, ζ_i, μ_i を次で定める :

$$\theta_i = e^{-\varepsilon\sigma_i} \quad (i = 1, 2), \quad a_i = e^{\varepsilon\zeta_i} \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \kappa_i = e^{\varepsilon\mu_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

さらに新しい従属変数 Q, P を次で定める :

$$F = \tilde{Q}, \quad G = e^{\varepsilon(\zeta_2 + \zeta_4 + \sigma_2)} e^{\varepsilon(\tilde{Q}\tilde{P} + I)} (\tilde{Q} - e^{\varepsilon\zeta_1} t I) (\tilde{Q} - e^{\varepsilon\zeta_4} I)^{-1}$$

かつ

$$\tilde{Q} = (Q - I)^{-1}(Q - tI),$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{t-1}(Q - I) \{ P(Q - I) + \zeta_1 + \zeta_4 + \mu_1 + \sigma_1 - (\zeta_1 - \zeta_2)Q^{-1} + (\sigma_1 - \sigma_2)(t-1)(Q - tI)^{-1} \}.$$

このとき, $\varepsilon \rightarrow 0$ により, Q, P は次の行列第六 Painlevé 系を満たすことがわかる :

$$\begin{aligned} & t(t-1) \frac{dQ}{dt} \\ &= (Q-t)PQ(Q-1) + Q(Q-1)P(Q-t) \\ & \quad + (\sigma_1 - \sigma_2 + 1)Q(Q-1) + (\zeta + 2\mu_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - 1)Q(Q-t) + (\zeta_1 - \zeta_2)(Q-1)(Q-t), \\ & t(t-1) \frac{dP}{dt} \\ &= -(Q-1)P(Q-t)P - P(Q-t)PQ - PQ(Q-1)P \\ & \quad - [(\sigma_1 - \sigma_2 + 1)\{P(Q-1) + QP\} + (\zeta + 2\mu_1 + \sigma_1 + \sigma_2 - 1)\{P(Q-t) + QP\} \\ & \quad \quad + (\zeta_1 - \zeta_2)\{P(Q-t) + (Q-1)P\}] \\ & \quad - (\zeta_1 + \zeta_3 + \sigma_1 + \mu_1)(\zeta_1 + \zeta_4 + \sigma_1 + \mu_1). \end{aligned}$$

ここで $\zeta := \zeta_1 + \dots + \zeta_4$. F と G の交換関係 (2) を ε に関して展開して ε^1 の係数を見ると P, Q の交換関係

$$PQ - QP = (\zeta_1 + \dots + \zeta_4 + \sigma_1 + \sigma_2 + \mu_1)I_m + M, \quad M = \text{diag}(\overbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}^{m-1}, \mu_3)$$

を得る.

議論の詳細については, 現在準備中の論文 [2] を参照していただければ幸いである.

参考文献

- [1] M. Jimbo and H. Sakai, A q -analog of the sixth Painlevé equation, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996), 145–154.
- [2] H. Kawakami, A q -analogue of the matrix sixth Painlevé system, in preparation.
- [3] H. Sakai and M. Yamaguchi, Spectral types of linear q -difference equations and q -analog of middle convolution, *Int. Math. Res. Not.*, Volume **2017**, Issue 7 (2017), 1975–2013.

6 パラメータの G_2 型楕円超幾何積分 が満たす q 差分方程式系について

伊藤 雅彦 (琉球大学・理)

野海 正俊 (神戸大学・理)

以下 $|p| < 1$ である $p \in \mathbb{C}^*$ を固定し, 記号

$$\theta(x; p) = (x; p)_\infty (px^{-1}; p)_\infty, \quad (x; p)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - p^i x)$$

を用いる. また, $\theta(x_1, \dots, x_k; p) = \theta(x_1; p) \cdots \theta(x_k; p)$ とする. Ruijsenaars の楕円ガンマ函数は

$$\Gamma(x; p, q) = \frac{(pqx^{-1}; p, q)_\infty}{(x; p, q)_\infty}, \quad (x; p, q)_\infty = \prod_{i,j=0}^{\infty} (1 - p^i q^j x) \quad (|p| < 1, |q| < 1)$$

により定義される. 記号 $\Gamma(x_1, \dots, x_k; p, q) = \Gamma(x_1; p, q) \cdots \Gamma(x_k; p, q)$ を用いる.

ここ数年, 講演者らは G_2 型ルート系に付随する q 超幾何積分や楕円超幾何積分に関する性質を研究している ([1], [2]). 2018 年度の日本数学会で以下の公式が成立することを紹介した.

定理. ([2, 3]) $a_k \in \mathbb{C}^*$ ($1 \leq k \leq 5$) は $|a_k| < 1$ を満たすとする. $z_1 z_2 z_3 = 1$ とし, 平衡条件

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 = pq$$

の下で以下が成立する:

$$\begin{aligned} & \frac{(p; p)_\infty^2 (q; q)_\infty^2}{12 (2\pi\sqrt{-1})^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{k=1}^5 \Gamma(a_k z_i, a_k z_i^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} \Gamma(z_i z_j, z_i^{-1} z_j, z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \\ &= \prod_{i=1}^5 \frac{\Gamma(a_i^2; p, q)}{\Gamma(a_i; p, q)} \prod_{1 \leq i < j \leq 5} \Gamma(a_i a_j; p, q) \prod_{1 \leq i < j < k \leq 5} \Gamma(a_i a_j a_k; p, q) \prod_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} \Gamma(a_i a_j a_k a_l; p, q). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし積分路 \mathbb{T}^2 は単位円の直積 $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_i| = 1 \ (i = 1, 2)\}$ を表す.

本講演では, (1) の左辺の積分に含まれるパラメータ a_i を 5 個から 6 個に拡張した場合を考察する.

G_2 型楕円超幾何積分.

$a_k \in \mathbb{C}^*$ ($1 \leq k \leq 6$) は $|a_k| < 1$ を満たすとする. $z_1 z_2 z_3 = 1$ とし

$$\begin{aligned} & I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \\ &= \frac{(p; p)_\infty^2 (q; q)_\infty^2}{12 (2\pi\sqrt{-1})^2} \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{k=1}^6 \Gamma(a_k z_i, a_k z_i^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} \Gamma(z_i z_j, z_i^{-1} z_j, z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)} \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \end{aligned} \quad (2)$$

とおく. $I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ は以下の三項間の q 差分方程式を満たす.

本研究は科研費 [課題番号: (B)15H03626, (C)18K03339] の助成を受けたものである.

定理 1. 平衡条件 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = -p$ の下で以下の三項間関係式が成立する:

$$c_1 I(qa_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) + c_2 I(a_1, qa_2, a_3, a_4, a_5, a_6) + c_3 I(a_1, a_2, qa_3, a_4, a_5, a_6) = 0.$$

ただし, 係数 c_1, c_2, c_3 は, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とするとき, 以下で与えられる.

$$c_i = \frac{\theta(-a_k a_j^{-1}; p)}{a_k \theta(-a_i, a_i a_j, a_i a_j^{-1}, a_i a_k, a_i a_k^{-1}; p)} \prod_{l=4}^6 \frac{\theta(a_l a_j a_k; p)}{\theta(a_l a_i; p)}. \quad (3)$$

定理 2. 平衡条件 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = -pq^{-1}$ の下で以下の三項間関係式が成立する:

$$c_{23} I(a_1, qa_2, qa_3, a_4, a_5, a_6) + c_{13} I(qa_1, a_2, qa_3, a_4, a_5, a_6) + c_{12} I(qa_1, qa_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0.$$

ただし係数 c_{23}, c_{13}, c_{12} は, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ とするとき, 以下で与えられる.

$$c_{jk} = \frac{a_i^4 \theta(a_i^2, qa_i^2, qa_i a_j, qa_i a_k; p)}{\theta(a_i, a_i a_j^{-1}, -a_i a_j^{-1}, a_i a_k^{-1}, -a_i a_k^{-1}, p)} \prod_{l=4}^6 \theta(a_i a_l; p) \prod_{4 \leq m < n \leq 6} \theta(a_i a_m a_n; p). \quad (4)$$

$T_{q,u}$ で変数 u に関する q シフト作用素を表すことにする; $T_{q,u} f(u) = f(qu)$. 定理 1 と 2 を組み合わせることで, 平衡条件 $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = -pq$ の下で, 積分 (2) が満たす 1 階連立の q 差分方程式系が得られる. つまり, $a_6 = -pq(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)^{-1}$ を $I(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ に代入した関数を $\tilde{I} = \tilde{I}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ と書いて a_1, a_2, \dots, a_5 の関数とみなすと, \tilde{I} が満たす階数 2 の q 差分方程式系が以下で与えられる.

$$T_{q,a_1}(\tilde{I}, T_{q,a_2} \tilde{I}) = (\tilde{I}, T_{q,a_2} \tilde{I}) A, \quad \text{ただし} \quad A = \begin{pmatrix} \tilde{c}_6 & 0 \\ \tilde{c}_2 & \tilde{c}_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_{16} \\ 0 & \tilde{c}_{12} \end{pmatrix}^{-1}.$$

ここで行列成分の \tilde{c}_i は (3) で $a_3 \leftrightarrow a_6$ の入れ替えの後 $a_6 \rightarrow q^{-1} a_6$ に置き換えたもの. また \tilde{c}_{ij} は (4) で $a_3 \leftrightarrow a_6$ の入れ替えの後 $a_6 \rightarrow q^{-2} a_6$ に置き換えたもの. 特に係数行列 A の行列式は

$$\det A = \frac{\tilde{c}_6 \tilde{c}_{26}}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_{12}}$$

で与えられる.

講演では, 定理 1, 2 の導出方法, 途中の計算に使ったテータ関数の関係式を紹介する. また, 定理 2 で $a_3 = \pm p^{\frac{1}{2}} q^{-\frac{1}{2}}$ のようにパラメータを特殊化すると (4) で $c_{12} = 0$ となり, 三項間関係式が二項間関係式に退化する. そのことを応用して公式 (1) の別証明が得られることも紹介する.

参考文献

- [1] 伊藤, 宮永, 野海: G_2 型 Weyl 群不変な q 超幾何積分の行列式公式, 日本数学会 2018 年度年会 無限可積分系セッション (東大) 講演アブストラクト, 6-7.
- [2] 伊藤, 野海: G_2 型 Gustafson q -ベータ積分の楕円化とその無限積表示について, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション (岡山大) 講演アブストラクト, 11-12.
- [3] M. Ito and M. Noumi: Elliptic extension of Gustafson's q -integral of type G_2 , arXiv:1902.04858.

パデ法と q -quadratic 差分ガルニエ系たち

長尾秀人 (明石工業高等専門学校・一般科目)

山田泰彦 (神戸大学大学院・理学研究科)

パデ補間を応用して, q -quadratic 差分ガルニエ系に対する, 時間発展方程式, ラックス形式および超幾何関数型特殊解の行列式表示を構成した. 本講演では, その結果について報告する.

1. q 差分ガルニエ系 (q - G_N) の線形方程式 $L_1(z) = 0$

$$L_1(x) \propto A_{N+1}(x)F_N(x/q)y(qx) + qc_1c_2B_{N+1}(x/q)F_N(x) - R_{2N+1}(x)y(x) = 0. \quad (1)$$

ここで $\prod_{i=1}^{N+1} a_i/b_i = q \prod_{i=1}^2 c_i/d_i$, $A(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (x - a_i)$, $B(x) = \prod_{i=1}^{N+1} (x - b_i)$, $F_N(x) = \sum_{i=0}^N f_i x^i$, $R_{2N+1}(x) = \sum_{i=0}^{2N+1} r_i x^i$.

$R_{2N+1}(z)$ の特徴付け

- 特性指数 d_1, d_2 at $x = 0$, c_1, c_2 at $x = \infty$.
- $2N$ 個の見かけの特異点 i.e. $F_N(x)F_N(x/q)$ の零点

q - G_N は [4] で定義された系と等価である.

2. q -quadratic 差分ガルニエ系 (qq - G_N) の線形方程式 $L_1(z) = 0$

$$L_1(z) \propto A_{N+1}(z)B_{N+1}(k/z)w_1(z/q)F_{N-1}(z/q)y(qz) + A_{N+1}(qk/z)B_{N+1}(z/q)w_1(z)F_{N-1}(z) - R_{2N+1}(z)y(z) = 0. \quad (2)$$

ここで $\prod_{i=1}^{N+1} a_i/b_i = qc_1c_2$, $A(z) = \prod_{i=1}^{N+1} (z - a_i)$, $B(z) = \prod_{i=1}^{N+1} (z - b_i)$, $w_1(z) = z - k/z$, $F_{N-1}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i (z + k/z)^i$, $R_{2N+1}(z) = \sum_{i=-2N-1}^{2N+1} r_i z^i$.

$R_{2N+1}(z)$ の特徴付け

- qk -antisymmetry 対称性 i.e. $R_{2N+1}(qk/z) = -R_{2N+1}(z)$
- 特性指数 $1/c_1, 1/c_2$ at $z = 0$, c_1, c_2 at $z = \infty$.
- $2N$ 個の見かけの特異点 i.e. $w(z)F_{N-1}(z)$ の零点

$N = 2$ の場合は E_7 型パンルヴェ方程式になる.

3. 合流型 q -quadratic 差分ガルニエ系 (qq - G_N^c) の線形方程式 $L_1(z) = 0$

$$L_1(z) \propto A_{N+1}(z)B_{N+1}(k/z)w_1(z/q)F_{N-2}(z/q)y(qz) + A_{N+1}(qk/z)B_{N+1}(z/q)w_1(z)F_{N-2}(z) - R_{2N}(z)y(z) = 0. \quad (3)$$

ここで $\prod_{i=1}^{N+1} a_i/b_i = qc_1^2$.

$R_{2N}(z)$ の特徴付け

- qk -antisymmetry 対称性 i.e. $R_{2N}(qk/z) = -R_{2N}(z)$
- 特性指数 $1/c_1, q/c_1$ at $z = 0, c_1, c_1/q$ at $z = \infty$.
- $2N - 2$ 個の見かけの特異点 i.e. $w(z)F_{N-2}(z)$ の零点

$N = 3$ の場合は E_8 型パンルヴェ方程式になる。 $qq-G_N^c$ は [3] で定義された系と等価である。

4. パデ法 適当な特殊多項式の母関数 $\psi(x)$ を与え、パデ補間の問題

$$\psi_s = \frac{P_m(x_s)}{Q_n(x_s)} \quad (s = 0, 1, \dots, m+n) \quad (4)$$

(P_m, Q_n はそれぞれ x の m 次, n 次多項式) を設定して, $y(x) = P_m(x), \psi(x)Q_n(x)$ を解に持つ 3 項間線形差分方程式を構成してパンルヴェ方程式, ラックス形式, 特殊解の 3 つを同時に求める。

5. パデ法の応用

- $q-G_N$ の場合: 母関数

$$\psi(x) = c^{\log_q x} \prod_{i=1}^N \frac{(a_i x, b_i)_\infty}{(a_i, b_i x)_\infty} \quad (5)$$

を与え, パデ問題 (4) を設定すれば, $q-G_N$ の線形方程式 (1) が構成できる。ここで, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i)_j = \prod_{k=0}^{j-1} (1 - \alpha_1 q^k)(1 - \alpha_2 q^k) \cdots (1 - \alpha_i q^k)$ とする。

- $qq-G_N$ の場合 [1][2]: 母関数

$$\psi(z) = \prod_{i=1}^N \frac{(a_i z, \frac{qka_i}{z}, b_i, qkb_i)_\infty}{(a_i, qka_i, b_i z, \frac{qkb_i}{z})_\infty} \quad (6)$$

($x = z + \frac{qk}{z}$) を与え, パデ問題 (4) を設定すれば, $qq-G_N$ の線形方程式 (2) が構成できる。

- $qq-G_N^c$ の場合: 母関数 (6) に拘束条件 $q^{-m+n} \prod_{i=1}^N b_i/a_i$ を課して同様の計算を行うと, $qq-G_N^c$ の線形方程式 (3) を得る。
- 母関数 (5)(6) と拘束条件の有無を加味して比較すれば, $q-G_N, qq-G_N, qq-G_N^c$ の関係図式が与えられる。この関係図式は講演時に提示説明する。

参考文献

- [1] Nagao H., and Yamada Y., *Variations of the q -Garnier system*, J.Phys. A: Math. Theor., **51** (2018), 135204–135222, arXiv:1710.03998 [nlin.SI].
- [2] Nagao H., and Yamada Y., *Study of q -Garnier system by Padé method*, Funkcialaj Ekvacioj, **61** (2018), 109–133, arXiv:1601.01099 [nlin.SI].
- [3] Ormerod, C.M., and Rains E.M., *Commutation Relations and Discrete Garnier Systems*, SIGMA, **12** (2016), 110, 50 pages.
- [4] Sakai H., *A q -analog of the Garnier system*, Funkcialaj Ekvacioj **48** (2005), 273–297.

楕円 Artin 群について

斉藤 義久 (立教大学理学部)*

1. Introduction

本講演では、与えられた楕円ルート系に対して対応する楕円 Artin 群を定義し、その基本的な性質を紹介する。まず用語の説明から始めたい。

1.1. 楕円ルート系とは？

楕円ルート系は、特異点理論の研究に端を発し、1980年代半ばに齋藤恭司氏によって導入されたルート系の拡張概念である ([8])。まず、定義を正確に述べよう。

定義 1. (1) 有限次元実ベクトル空間 F とその上の対称線形形式 $I : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられた時、 F の non-isotropic¹ なベクトルからなる集合 R が以下の条件を満たす時、 (F, I) に属する**一般化されたルート系 (generalized root system)** という。

1. R が生成する \mathbb{Z} -加群を $Q(R)$ と書く時、 $Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong F$.
2. 任意の $\alpha \in R$ に対して、 $r_{\alpha}(R) = R$. ただし、 $\alpha^{\vee} := 2\alpha/I(\alpha, \alpha)$ として、

$$r_{\alpha}(u) := u - I(u, \alpha^{\vee})\alpha \quad (u \in F).$$

3. 任意の $\alpha, \beta \in R$ に対して、 $I(\beta, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z}$.

(2) 特に I が半正定値で、かつ I の radical $\text{rad}(I)$ の次元が 2 であるとき、 (R, I) に属する一般化されたルート系を**楕円ルート系 (elliptic root system)** という。

(3) R を (F, I) に属する楕円ルート系とするとき、 r_{α} ($\alpha \in R$) が生成する $\text{GL}(F)$ の部分群を $W(R)$ と書き、**楕円 Weyl 群 (elliptic Weyl group)** と呼ぶ。

既存のルート系の場合をご存知の方は、この定義が、 I の (2 次形式としての) 符号を除けば、既存の場合のそれと全く同じであることに気が付かれることと思う。実際、 I が正定値であれば、得られる R は有限ルート系であり、 I が半正定値かつ $\dim_{\mathbb{R}}(\text{rad}(I)) = 1$ であれば、得られる R はアフィンルート系となる²。すなわち、楕円ルート系は既存の理論の自然な拡張になっている。

Remark. 以下、楕円ルート系 R に対して、断りなしに被約性と既約性を仮定する。

4. 任意の $\alpha \in R$ に対して、 $\mathbb{R}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$ (被約性).
5. $R = R_1 \sqcup R_2$ なる R の分割であって、 $I(\alpha, \beta) = 0$ ($\alpha \in R_1, \beta \in R_2$) となるものは存在しない (既約性).

本研究は齋藤恭司氏 (京都大学数理解析研究所) との共同研究に基づく。また、本研究は科研費 (課題番号:16K05055) の助成を受けたものである。

* 〒110-0016 東京都豊島区西池袋1-34-8 立教大学 理学部

e-mail: yoshihisa@rikkyo.ac.jp, yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp

¹ $\alpha \in F$ が non-isotropic であるとは、 $I(\alpha, \alpha) \neq 0$ であることを言う。

² 正確には『アフィンルート系の実ルート全体の』と言うべき。この定義だと、虚ルートは R に含まれない。

例 ($X_l^{(1,1)}$ 型ルート系) . R_f を (F_f, I_f) に属する X_l 型有限ルート系 ($X = A \sim G$) とする. この時, F_f は l 次元実ベクトル空間であることに注意しよう. さて, $l+2$ 次元実ベクトル空間 F を

$$F := F_f \oplus (\mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a)$$

とし, F 上の対称双線型形式 $I : F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$I|_{F_f \times F_f} = I_f, \quad \text{rad}(I) = \mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a$$

で定める. このとき, I は半正定値で $\dim(\text{rad}(I)) = 2$ となる. F の部分集合 R を

$$R := \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \mid \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

とおくと, R は (F, I) に属する一般化されたルート系 (楕円ルート系) になる. こうして定まる楕円ルート系 R を $X_l^{(1,1)}$ 型ルート系と呼ぶ.

$X_l^{(1,1)}$ 型ルート系は, 楕円ルート系の中で最も基本的なクラスであり, アフィンルート系における untwisted type の楕円アナロジーである. このことは Weyl 群の構造を見るとより明確になる. 実際, 簡単な計算から次がわかる:

$$W(R) \cong W(R_f) \times Q(R_f^\vee)^{\oplus 2}.$$

ただし, $R_f^\vee := \{\alpha_f^\vee \in F \mid \alpha \in R_f\}$ (R_f の dual root system), $Q(R_f^\vee)$ はその root lattice.

1.2. 楕円ルート系の性質

初めて定義を見た方は

単に radical の次元がちょっと増えただけで, 何がそんなに違うのか?

という疑問を持たれることだろう. ところが, 少し真面目に考えようとする

radical の次元が 0, 1 の場合と, 2 (以上) の場合では, 話が全く異なる

ということに気づく. 以下, このことをもう少し詳しく見ていこう.

(a) 楕円ルート系は Kac-Moody 理論に由来しない

Kac-Moody 理論では, 一般化 Cartan 行列 $A = (a_{i,j})$ を与えることから全てが出発する. ご存知の方も多いと思うので詳細は省略するが, ルート全体が張る実ベクトル空間を F と書くとき, F 上に A から定まる対称双線型形式 I が構成される. I が半正定値と仮定すると, 対応するルート系は有限型 ($\dim_{\mathbb{R}} \text{rad}(I) = 0$ の場合) か, アフィン型 ($\dim_{\mathbb{R}} \text{rad}(I) = 1$ の場合) に限られてしまう.

他方, 楕円ルート系が属する (F, I) においては, $\dim_{\mathbb{R}} \text{rad}(I) = 2$ であり, こういう状況は Kac-Moody 理論では絶対に実現出来ない. すなわち, 楕円ルート系は Kac-Moody 理論の範疇の外側に生息しているのである.

(b) 自己同型群の構造が異なる

有限型ルート系 R_f では, ルート系の自己同型群 $\text{Aut}(R_f)$ は対応する Weyl 群 $W(R_f)$ にほぼ等しい. より正確には, Dynkin 図形の diagram automorphism から生成される有限群を除いて, 両者は等しい. 事情はアフィンルート系 R_a でも同様である.

$$W(R_f) \cong \text{Aut}(R_f), \quad W(R_a) \cong \text{Aut}(R_a) \quad (\text{up to 有限群}).$$

言い換えれば,

有限型・アフィン型のルート系においては、
 ルート系の対称性は Weyl 群によって (ほぼ) 記述される

ということになっている。

他方、楕円ルート系においては、事情が全く異なる。例えば上に紹介した $X_1^{(1,1)}$ 型ルート系の場合、ルート系 R は

$$R = \{\alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \mid \alpha_f \in R_f, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

と定義されているであった。 $g := \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、

$$\phi_g : \alpha_f + m\delta_b + n\delta_a \mapsto \alpha_f + (pm + qn)\delta_b + (rm + sn)\delta_a$$

とおけば、これは F の 1 次変換に自然に拡張され、 $\mathrm{Aut}(R)$ の元を定める。しかしながら、このような変換は楕円 Weyl 群 $W(R)$ の元によって作り出すことは出来ない。

一般の楕円ルート系では対称性がもう少し崩れているために、modular 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ はフルに作用出来ないが、 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群 (合同部分群) が作用することになる。いずれにせよ、

**楕円ルート系 R の対称性は Weyl 群だけでは記述することが出来ず、
 R は合同部分群という無限離散群の作用も同時に持っている**

ということになっている。この事実の帰結として、楕円ルート系の理論には、楕円曲線や保型形式の理論が自然に現れる。これは有限型・アフィン型のルート系にはない、楕円ルート系に特有の著しい性質である。

1.3. Marked elliptic root system と楕円図形

既に述べたように、楕円ルート系とは

null root の方向が 2 つ (= radical が 2 次元) あるようなルート系

であると言って良い。ただし、このままでは理論をコントロールするのが難しいので、既存の理論 (アフィンルート系の理論) に帰着させる方法を考える必要がある。そのために用いられるのが、marking と呼ばれる概念である。

定義 3. $\mathrm{rad}(I)$ の 1 次元部分空間 G であって、 $G \cap Q(R) \neq \{0\}$ となるものを **marking** と呼ぶ。さらに、組 (R, G) を **marked elliptic root system (MERS と略記)** と呼ぶ。

marking G が指定されると、canonical な射影 $\pi_G : F \rightarrow F/G$ が定まる。この時、 $R_a := \pi_G(R)$ はアフィンルート系になる。アフィンルート系はその構造が詳しく調べられており、既存の理論が適用出来る。つまり、

**marking G の指定 = 既存の理論 (アフィンルート系の理論) への
 “落とし方” の指定**

というわけである。さらに、MERS (R, G) に対して、**楕円図形 (elliptic diagram)** と呼ばれる有限グラフ $\Gamma(R, G)$ を定めることが出来る。詳しい構成法は原論文 [8] に譲ることにするが、大雑把に言えば

- 1 階部分と 2 階部分から成る “2 階建て” のグラフである.
- 1 階部分は, 商アフィンルート系 $R_a = \pi_G(R)$ の Dynkin 図形 $\Gamma(R_a)$.
- 2 階部分には, ある方法で作った “ $\Gamma(R_a)$ の subgraph のコピー” を貼り付ける.
- 1 階の頂点と 2 階の頂点の間は, その内積値に応じて辺を結ぶ. ただし, 『2 重点線』という新しい辺が現れる.

というものである. 頂点を結ぶ辺を書き込むルールは次の通り. 楕円図形 $\Gamma(R, G)$ の頂点 α, β に対し,

$$\begin{aligned} \alpha \circ \quad \quad \quad \circ \beta & \quad \text{if } I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha) = 0, \\ \alpha \circ \text{---} \circ \beta & \quad \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = -1, \\ \alpha \circ \xrightarrow{\mu} \circ \beta & \quad \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = -\mu \text{ and } I(\beta, \alpha^\vee) = -1 \text{ for } \mu = 2, 3, 4, \\ \alpha \circ \xrightarrow{\infty} \circ \beta & \quad \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = -2, \\ \alpha \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \beta & \quad \text{if } I(\alpha, \beta^\vee) = I(\beta, \alpha^\vee) = 2. \end{aligned}$$

1 ~ 4 番目のルールは (記法は異なるが) 通常の Dynkin 図形の場合のそれと同じである. 他方, 5 番目のルールが新しいもので 『2 重点線の引き方』を指定している.

Remark. (1) 上の説明には, 2 階部分に相当する 『 $\Gamma(R_a)$ の subgraph のコピーの作り方』が欠落しているが, 記述が長くなりすぎるので省略した. 出来上がるグラフの具体形は Appendix に書いたので, そちらを参照して頂きたい.

(2) 通常の場合と異なり, 楕円図形 $\Gamma(R, G)$ の頂点集合は “単純ルート” に対応しているわけではない. 実際, Appendix の実例を見て頂ければ分かる通り, $\Gamma(R, G)$ の頂点の数は, (R, G) が属するベクトル空間 F の次元より一般には大きい³.

この時. 次の定理が知られている.

定理 4 (MERS の分類定理 [8]). 『商アフィンルート系 R_a が reduced である』との仮定の下に, MERS の同型類はその楕円図形で完全に分類される.

1.4. ルート系に関連する代数系

古典的な意味でのルート系が与えられると, それに付随して種々の関連する代数系が生み出される. 典型的な例としては,

1. Weyl 群や Hecke algebra, あるいは Braid 群 (or Artin 群).
2. Lie 群や代数群⁴.
3. (Kac-Moody) Lie algebra と Quantum universal enveloping algebra.

などが挙げられよう. さらに, これら代数系の表現論は微分方程式や数理論理, あるいは代数幾何学とも深く関連し, 豊かで芳醇な世界を形成している.

³そもそも, 楕円ルート系は既存の意味でのルート系ではないので, (Kac-Moody 理論で言うところの) 単純ルートは存在しない.

⁴この系列は, 単純にルート系だけで決まるわけではないので, 『ルート系から生み出される』というのには, 少々無理がある.

他方, 出発点を楕円ルート系 (もしくはMERS) に取り替えた場合でも, 同様の代数系が (部分的に) 構成できる. 中でも, 今回は1の系列に属する代数系に着目する. 特に, Artin群の楕円アナロジーである, **楕円 Artin群 (elliptic Artin group)** について詳しく紹介させて頂きたい⁵.

Remark. 3の系列に属するものとして, **toroidal Lie algebra (TLA)**, **quantum toroidal algebra (QTA)** と呼ばれる代数系がある⁶. 特に, A型のQTAは理論物理学との関連から, 近年盛んに研究されている. 他方, 2の系列に属する代数系 (elliptic Lie groups?) については, 組織的な研究はまだ行われていないように思う.

2. 楕円 Artin群の定義 (その1)

2.1. プロトタイプ (有限ルート系の場合)

R_f を (F_f, I_f) に属する有限ルート系とし, $W(R_f)$ をその Weyl群とする. よく知られているように, 単純ルートの集合 $\Pi_f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset R_f$ を1つ選ぶと, $W(R_f)$ は単純鏡映 $r_i := r_{\alpha_i}$ ($1 \leq i \leq l$) で生成され, その基本関係式は

$$(1) r_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq l)$$

(2) braid relations (対応する Dynkin 図形で決まる)

から成る. 付随する **Artin群 (Artin group)** を $A(R_f)$ と書く⁷. すなわち, $A(R_f)$ とは, Dynkin 図形の頂点に対応する元 a_i ($1 \leq i \leq l$) たちで生成され, braid relations のみ (生成元² = 1 は課さない) を基本関係式とする群をいう.

以上は Artin群 $A(R_f)$ の代数的な定義であり, 多くの表現論の教科書には大抵このように書かれている. 他方, 我々にとって重要なのは,

Artin群 $A(R_f)$ とは, ある空間 (正則軌道空間) の基本群である

という理解である. 以下, このことを復習しよう.

実ベクトル空間 F_f に対し, 複素化された双対空間

$$F_{f,\mathbb{C}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(F_f, \mathbb{C})$$

を考える. $W(R_f)$ の F_f への作用は, contragradient action $W(R_f) \curvearrowright F_{f,\mathbb{C}}^*$ を誘導するが, 各鏡映 r_{α_f} ($\alpha_f \in R_f$) の固定点集合は, $F_{f,\mathbb{C}}^*$ 内の複素超平面

$$H_{\alpha_f} := \{h_f \in F_{f,\mathbb{C}}^* \mid \langle h_f, \alpha_f \rangle = 0\}$$

によって与えられる. ただし, $F_{f,\mathbb{C}} := F_f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ として, $\langle \cdot, \cdot \rangle : F_{f,\mathbb{C}}^* \times F_{f,\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ は canonical pairing. この時, 差集合

$$F_{f,\mathbb{C}}^* \setminus \bigcup_{\alpha_f \in R_f} H_{\alpha_f}$$

⁵ 1の系列の代数系うち, Weyl群 (elliptic Weyl group) については次節以降で詳しく述べる. また, Hecke algebra (elliptic Hecke algebra) については, 今回は詳しく述べないが, double affine Hecke algebra (DAHA) のことと思ってほぼ良く (see [13]), 直交多項式や可積分系の理論と関連が深い.

⁶ これらについては, 今回は説明しない.

⁷ 『braid群』と呼ばれることが多い気がするが, 今回は楕円の場合の呼称に合わせて『Artin群』と呼ぶことにする. このノートでは, 『braid群』と『Artin群』は同じものを指す.

には $W(R_f)$ が自然に作用するが、作り方からこの作用は固定点を持たない。この $W(R_f)$ の fixed free action に関する商集合

$$(W(R_f) \backslash F_{f,\mathbb{C}}^*)_{reg} := W(R_f) \backslash \left(F_{f,\mathbb{C}}^* \setminus \bigcup_{\alpha_f \in R_f} H_{\alpha_f} \right)$$

を正則軌道空間 (regular orbit space) という。

定理 5 ([3],[4]). 正則軌道空間の基本群は Artin 群と同型である。すなわち、

$$\pi_1((W(R_f) \backslash F_{f,\mathbb{C}}^*)_{reg}) \cong A(R_f).$$

以上より、Artin 群 $A(R_f)$ は 2 つの“定義”を持つことが示されたことになる。

(A) 生成元と基本関係式による代数的な定義。

(G) 正則軌道空間の基本群という幾何学的な定義。

(A) のメリットは、その扱い易さにある。多くの表現論の文献で、 $A(R_f)$ の定義として (A) を採用しているのも、そのためであろう。また、 $A(R_f)$ の群としての性質を調べる際にも、(A) を採用した方が良い場合がある。次の定理はその典型であろう。

定理 6 ([4]). $A(R_f)$ の中心は \mathbb{Z} と同型である⁸。

この定理の証明自体は、純代数的なものである。しかしながら、このような定理が成り立つ (あるいは『成り立ちそうだ』と考える) 背景に、『 $A(R_f)$ とは正則軌道空間の基本群である』という幾何学的理解 (G) があることは言うまでも無い。

歴史的な経緯を考えても、やはり (G) の方が先である。この手の問題を最初に考えたのは、Artin ([1], 1925) であるが、彼は \mathbb{C} の点の配置空間 (configuration space of points) の基本群を考えて、braid 群 (= A 型 Artin 群) の概念に到達している。決して、対称群の基本関係式から『生成元² = 1』を外した訳ではない。

上に紹介した定理 5 にしても、(説明の都合上 (A) を先に書いたが) 考察の本当の順序は逆である。すなわち、まず正則軌道空間の基本群という理解 (G) があり ([3])、その後で生成元と基本関係式からなる代数的な理解 (A) がある ([4])、というのが正しい。

次節以降、我々はこの setting の楕円ルート系版を議論していくが、(A) と (G) の両方を同時に考えることがポイントになる。

2.2. 代数的な定義

楕円 Artin 群の代数的な定義を与えるにあたり、まず楕円 Weyl 群の生成元と関係式による表示を復習する。 F を $l+2$ 次元の実ベクトル空間、 $I: F \times F \rightarrow \mathbb{R}$ を F 上の対称双線型形式であって、 $\dim_{\mathbb{R}} \text{rad}(I) = 2$ であるものとする。この時、 $l+4$ 次元の実ベクトル空間 F_{Λ} と、その上の非退化双線型形式 $I_{\Lambda}: F_{\Lambda} \times F_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ の組 $(F_{\Lambda}, I_{\Lambda})$ が 2 条件

- F は F_{Λ} の部分ベクトル空間である。
- $I_{\Lambda}|_{F \times F} = I$.

⁸ 中心の生成元は、Coxeter 元の Coxeter 数乗である。

を満たす時, (F, I) の full extension であるという.

R を (F, I) に属する楕円ルート系とする. $\alpha \in R$ に対して, 鏡映 $s_\alpha \in O(F_\Lambda, I_\Lambda)$ を

$$s_\alpha(u) := u - I_\Lambda(u, \alpha^\vee)\alpha \quad (u \in F_\Lambda)$$

と定める. 次は構成から明らかであろう.

$$s_\alpha|_F = r_\alpha.$$

s_α ($\alpha \in R$) で生成される $O(F_\Lambda, I_\Lambda)$ の部分群を $W_\Lambda(R)$ と書き, 楕円 Weyl 群 $W(R)$ の full extension と呼ぶ. $W_\Lambda(R)$ については, 以下のような生成元と基本関係式による表示が知られている.

定理 7 ([12],[11]). (R, G) を (F, I) に属する MERS, $\Gamma(R, G)$ をその楕円図形, $\Pi(R, G) \subset R$ をその頂点集合とする. この時, full extension $W_\Lambda(R)$ は s_α ($\alpha \in \Pi(R, G)$) によって生成される. また, その基本関係式は次のように記述される.

(1) $l \geq 2$ の時: 以下のリストにある subdiagram が $\Gamma(R, G)$ の中に現れる毎に, 右の関係式を仮定する.

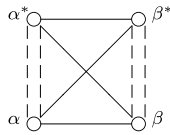
(W0)	$\alpha \circ$		$s_\alpha^2 = 1,$
(W1) ₀	$\alpha \circ$	$\circ \beta$	$s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha,$
(W1) ₁	$\alpha \circ$	— $\circ \beta$	$s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta,$
(W1) ₂	$\alpha \circ$	$\xrightarrow{2^{\pm 1}} \circ \beta$	$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$
(W1) ₃	$\alpha \circ$	$\xrightarrow{3^{\pm 1}} \circ \beta$	$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta s_\alpha,$

以下の diagrams においては, α, β, γ は Γ_a の頂点集合 Π_a に属すると仮定する.

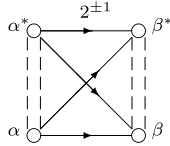
(W2) ₁		$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$
-------------------	--	--

次の2つの diagrams においては, α は辺 $\alpha \circ \xrightarrow{\mu} \circ \beta$ において b-side と仮定する (ただし $\mu = 2^{\pm 1}, 3^{\pm 1}$).

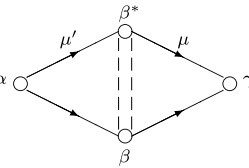
(W2) ₂		$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta = s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha,$
(W2) ₃		$s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} = s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta$ and $s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha = s_{\alpha^*} s_\beta s_\alpha s_{\alpha^*} s_\beta.$

(W3)₁  $s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta}$ and $s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\beta^*} = s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha}$.

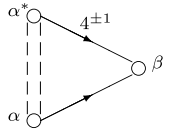
次の diagram においては, α は辺 $\alpha \circ \xrightarrow{2^{\pm 1}} \beta$. において b-side と仮定する.

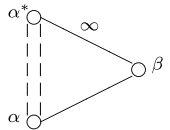
(W3)₂  $s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta}$.

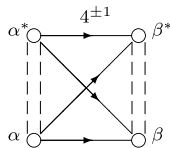
次の diagram においては, α, γ は 2 重点線で繋がる頂点を持たず, かつ $\Gamma(R, G)$ の中で繋がっていないと仮定する.

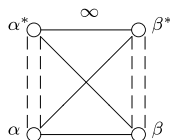
(W4)  $s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\gamma} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\gamma} = s_{\gamma} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\gamma} s_{\alpha} s_{\beta} s_{\beta^*}$ and $s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\gamma} s_{\alpha} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha} = s_{\alpha} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\gamma} s_{\beta} s_{\beta^*}$.

(2) $l \geq 1$ の時: (1) に現れた (W0), および以下のリストにある subdiagram に対して右の関係式を仮定する.

(W2)₄  $s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta}$
 $= s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha},$

(W2)_{\infty}  $s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta}$
 $= s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\alpha},$

(W3)₄  $s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\beta^*} = s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha},$

(W3)_{\infty}  $s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} = s_{\beta^*} s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} = s_{\alpha} s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\beta^*} = s_{\alpha^*} s_{\beta} s_{\beta^*} s_{\alpha}.$

関係式 (W1) _{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は, 古典的によく知られた Coxeter relations に他ならない. 他方, (W2) _{μ} , (W3) _{μ} ($\mu = 1, 2, 3, 4, \infty$) と (W4) は既存の理論には現れない関係式で **elliptic Coxeter relations** と呼ばれる.

Remark. (1) $l = 1$ の場合, 通常の Coxeter relations は仮定しない.

(2) (W3)₄ (resp. (W3)_{\infty}) の diagram を考える場合, この中には (W2)₄ (resp. (W2)_{\infty})

と同型な subdiagram が複数含まれているが、これらに対応する関係式は仮定しない $((W3)_4$ (resp. $(W3)_\infty$) の関係式のみ仮定する)。

楕円 Artin 群の代数的な定義を与えよう。考え方は有限型 (プロトタイプ) の場合と同じで『Weyl 群の定義関係式から、生成元の 2 乗 = 1 を外せ』というものである。

定義 8. a_α ($\alpha \in \Pi(R, G)$) を生成元とし、Coxeter relations と elliptic Coxeter relations のみ (2 乗 = 1 は仮定しない) を基本関係式とする群を $A^a(R, G)$ と書き、**代数的楕円 Artin 群 (algebraic elliptic Artin group)** と呼ぶ。

これで、楕円 Artin 群の定義を与えることが、“一応” 出来た。ただし、これだけではいささか不十分である。なぜなら、

- 『Weyl 群の定義関係式から「生成元の 2 乗 = 1」という関係式を外す』というアイデアは、有限型の時には確かに上手く行ったが、楕円ルート系の場合にも有効である保証は何処にもない

からである。代数的定義のみで止まってしまうのは、楕円 Artin 群は単にアナロジーとして導入されただけのものに過ぎず、実体を伴わないものになってしまう。『空間の基本群として定義出来る』という設定まで込めて拡張出来て初めて、楕円 Artin 群は『Artin 群の概念の楕円ルート系の場合への拡張』と呼ぶことが出来る。楕円 Artin 群の幾何学的定義については次節にまとめる。

他方、代数的な定義のメリットは、(プロトタイプである $A(R_f)$ の場合と同様に) 群としての性質を調べ易い点にある。例として、Coxeter 元と呼ばれる $A(R, G)$ の元とその性質について紹介する。

定義 9. 以下のように定まる $A^a(R, G)$ の元 $c(A(R, G))$ を **Coxeter 元 (Coxeter element)** という：

$$c(A(R, G)) := \prod_{\alpha \in \Pi(R, G)} a_\alpha.$$

ただし、積の順序は次のルールに従うものとする。

- **ルール：** 1 階部分の頂点 α に対し、2 階部分の頂点 α^* (α と 2 重点線で結ばれる頂点) が存在する時は、 $a_\alpha a_{\alpha^*}$ の順に続けて積を取る。

定義から明らかなように、Coxeter 元は一意的には決まらず、積の順序に依存する。

命題 & 定義 10. $\Gamma(R, G)$ から 2 重点線とその両端に現れる 2 頂点を取り除くと、必ずいくつかの A 型 Dynkin 図形の disjoint union になる (ここまでが命題)。この時、現れる A 型 Dynkin 図形の rank の最大値に 1 を加えた非負整数を (R, G) の **Coxeter 数 (Coxeter number)** と呼び、 $m(R, G)$ と書く。

以上の言葉の準備の下に、次が成り立つ。

- 命題 1 1** ([11]). (1) $A^a(R, G)$ の中で Coxeter 元を含む共役類は一意に定まる.
 (2) Coxeter 元の Coxeter 数乗 $c(A(R, G))^{m(R, G)} \in A^a(R, G)$ は, Coxeter 元の積の順序の取り方に依らず, 一意に定まる.
 (3) $c(A(R, G))^{m(R, G)}$ は $A^a(R, G)$ の中心に属する.

これらの性質は, 有限ルート系の場合の Coxeter 元・Coxeter 数が満たす性質の, 楕円ルート系の場合への自然な拡張になっている⁹.

3. 楕円 Artin 群の定義 (その 2)

まず空間の設定を整えた後, 楕円 Artin 群を楕円正則軌道空間の基本群として, 幾何学的に導入する.

3.1. 楕円ルート系に由来する complex domain の family

(R, G) を (F, I) に属する MERS とする. この時, $G \cap Q(R)$ は rank 1 の free \mathbb{Z} -module になるが, その生成元 δ_a を 1 つ選ぶ:

$$G \cap Q(R) = \mathbb{Z}\delta_a.$$

自然な射影 $\pi_G : F \rightarrow F/G$, および商アフィンルート系 $R_a = \pi_G(R)$ を思い出そう. R の部分集合 $\Pi_a = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ を次の条件を満たすように取る.

- $\pi_G(\Pi_a) = \{\pi_G(\alpha_0), \pi_G(\alpha_1), \dots, \pi_G(\alpha_l)\}$ は R_a の単純ルートの集合である.
- $\pi_G(\alpha_0)$ は, R_a の Dynkin 図形 $\Gamma(R_a)$ の中で “0 番目の頂点” に対応する¹⁰.

この時, R_a の primitive な positive null root $\delta(R_a)$ は $\pi_G(\alpha_i)$ ($0 \leq i \leq l$) の 1 次結合で

$$\delta(R_a) = \sum_{i=0}^l n_i \pi_G(\alpha_i) \quad (n_i \in \mathbb{Z}_{>0}, n_0 = 1)$$

と書くことが出来る. そこで,

$$\delta_b := \sum_{i=0}^l n_i \alpha_i \in Q(R)$$

とおくと, δ_b, δ_a は $\text{rad}(I)$ の基底になる. さらに, $L_f := \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{R}\alpha_i$ とおくと, 分解

$$F = L_f \oplus (\mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a) \quad (3.1.1)$$

が指定される.

(F_Λ, I_Λ) を (F, I) の full extension とする. $\lambda_b, \lambda_a \in F_\Lambda$ を

$$I_\Lambda(L_f, \lambda_{\natural}) = 0, \quad I_\Lambda(\delta_{\natural}, \lambda_{\natural}) = \delta_{\natural, \natural}, \quad I_\Lambda(\lambda_{\natural}, \lambda_{\natural}) = 0 \quad (\natural, \sharp = b, a)$$

⁹そもそも, 齋藤恭司氏が楕円ルート系の理論を作る際に楕円図形を導入した目的は『Coxeter 元の理論の楕円版を作るため』であり, これらの概念は楕円ルート系の理論の核心とも言える.

¹⁰いい加減な言い方ではあるが, 正確に述べようとするといわずらに記述が長くなるので, この程度に留めた. アフィンルート系の理論をご存知の方ならば, この程度で通じると思う.

によって定義する時, (3.1.1) は分解

$$\begin{aligned} F_\Lambda &= (\mathbb{R}\lambda_b \oplus \mathbb{R}\lambda_a) \oplus F \\ &= (\mathbb{R}\lambda_b \oplus \mathbb{R}\lambda_a) \oplus L_f \oplus (\mathbb{R}\delta_b \oplus \mathbb{R}\delta_a) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

に拡張される. 以後, 常にこの分解を固定して議論することにする.

さて, 実ベクトル空間の埋め込みの列

$$F_\Lambda \xrightarrow{\iota_F} F \xrightarrow{\iota_0} \text{rad}(I) \quad (3.1.3)$$

を考える. 各実ベクトル空間に対して複素化された双対空間

$$F_{\Lambda, \mathbb{C}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(F_\Lambda, \mathbb{C}), \quad F_{\mathbb{C}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C}), \quad \text{rad}(I)_{\mathbb{C}}^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\text{rad}(I), \mathbb{C})$$

を取ると, 埋め込みの列 (3.1.3) から双対空間の全射列

$$F_{\Lambda, \mathbb{C}}^* \xrightarrow{\iota_F^*} F_{\mathbb{C}}^* \xrightarrow{\iota_0^*} \text{rad}(I)_{\mathbb{C}}^* \quad (3.1.4)$$

が誘導される. F_Λ 上の対称双線型形式 I_Λ は非退化なので, 複素ベクトル空間の同型 $\nu: F_{\Lambda, \mathbb{C}} := F_\Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ が

$$\langle \nu(u_\Lambda), v_\Lambda \rangle := I_{\Lambda, \mathbb{C}}(u_\Lambda, v_\Lambda) \quad \text{for } u_\Lambda, v_\Lambda \in F_{\Lambda, \mathbb{C}}$$

により定まる. ここに $\langle \cdot, \cdot \rangle: F_{\Lambda, \mathbb{C}}^* \times F_{\Lambda, \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ は canonical pairing, $I_{\Lambda, \mathbb{C}}$ は I_Λ の複素化である. $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ 上の対称双線型形式 $I_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ を

$$I_{\Lambda, \mathbb{C}}^*(h_\Lambda, h'_\Lambda) := I_{\Lambda, \mathbb{C}}(\nu^{-1}(h_\Lambda), \nu^{-1}(h'_\Lambda)) \quad \text{for } h_\Lambda, h'_\Lambda \in F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*,$$

で定め,

$$c_{\sharp} := \nu(\delta_{\sharp}), \quad d_{\sharp} := \nu(\lambda_{\sharp}) \quad \text{for } \sharp = b, a \quad \text{and} \quad \mathfrak{h}_f := \nu(L_f \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

とおく. この時, (3.1.2) は複素ベクトル空間の分解

$$F_{\Lambda, \mathbb{C}}^* = (\mathbb{C}c_b \oplus \mathbb{C}c_a) \oplus \mathfrak{h}_f \oplus (\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a) \quad (3.1.5)$$

を誘導する.

Note. (1) 構成から, 複素化された双対空間 $F_{\mathbb{C}}^*$ (resp. $\text{rad}(I)_{\mathbb{C}}^*$) は $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ の部分空間 $\mathfrak{h}_f \oplus (\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a)$ (resp. $\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a$) と自然に同一視される:

$$F_{\mathbb{C}}^* = \mathfrak{h}_f \oplus (\mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a), \quad \text{rad}(I)_{\mathbb{C}}^* = \mathbb{C}d_b \oplus \mathbb{C}d_a.$$

(2) 分解 (3.1.5) の下に, $h_\Lambda \in F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ を

$$h_\Lambda = t_b c_b + t_a c_a + z + \omega_b d_b + \omega_a d_a \quad (z \in \mathfrak{h}_f, t_b, t_a, \omega_b, \omega_a \in \mathbb{C}). \quad (3.1.6)$$

と書く. この時, 次が成り立つ.

$$I_{\Lambda, \mathbb{C}}^*(h_\Lambda, h_\Lambda) = I_{\Lambda, \mathbb{C}}^*(z, z) + 2t_b \omega_b + 2t_a \omega_a. \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{H} := \{\omega = \omega_b d_b + \omega_a d_a \in \text{rad}(I)_{\mathbb{C}}^* \mid \omega_b \neq 0, \omega_a \neq 0, \Im(\omega_b/\omega_a) > 0\},$$

$$\tilde{\mathbf{E}} := (\iota_0^* \circ \iota_F^*)^{-1}(\mathbf{H}) \cap Z, \quad \mathbf{E} := (\iota_F^*)^{-1}(\mathbf{H})$$

とおく。ただし、 Z は次式で定義される $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ の 2 次超曲面とする：

$$Z := \{h_{\Lambda} \in F_{\Lambda, \mathbb{C}}^* \mid I_{\Lambda, \mathbb{C}}^*(h_{\Lambda}, h_{\Lambda}) = 0\}.$$

簡単のため、 $\tilde{\omega} = \iota_F^*|_{\tilde{\mathbf{E}}} : \tilde{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}$ を $\varphi = \iota_0^*|_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ と書く。この時、今後の話の主要な舞台となる complex domain の family

$$\tilde{\mathbf{E}} \xrightarrow{\tilde{\omega}} \mathbf{E} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{H} \quad (3.1.8)$$

が得られる。

3.2. 楕円 Artin 群の幾何学的な定義

R の (F_{Λ} の部分集合としての) 自己同型群を

$$\text{Aut}_{\Lambda}(R) := \{\varphi \in O(F_{\Lambda}, I_{\Lambda}) \mid \varphi(R) = R\}$$

と定義する。自然な左作用 $\text{Aut}_{\Lambda}(R) \curvearrowright F_{\Lambda}$ は、複素化された双対空間 $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ への $\text{Aut}_{\Lambda}(R)$ の左作用を誘導するが、この作用は family (3.1.8) と両立する、つまり $\text{Aut}_{\Lambda}(R)$ が family (3.1.8) に equivariant に作用することがわかる。

特に、作用を $\text{Aut}_{\Lambda}(R)$ の部分群である $W_{\Lambda}(R)$ に制限してみよう。鏡映 $s_{\alpha} \in W_{\Lambda}(R)$ は radial $\text{rad}(I)$ に自明に作用するので、family (3.1.8) の底空間 \mathbf{H} にも自明に作用する。言い換えると、 $W_{\Lambda}(R)$ の family (3.1.8) への作用は fiber を不変に保つ。この事実はすぐに重要な意味を持つことになる。

各 $\alpha \in R$ に対し、

$$H_{\alpha} := \{h_{\Lambda} \in \tilde{\mathbf{E}} \mid \langle h_{\Lambda}, \alpha \rangle = 0\}$$

とおくと、差集合

$$\tilde{\mathbf{E}} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_{\alpha}$$

には $W_{\Lambda}(R)$ が fixed point free に作用する。

定義 1 2. この作用に関する商集合

$$(W_{\Lambda}(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg} := W_{\Lambda}(R) \backslash \left(\tilde{\mathbf{E}} \setminus \bigcup_{\alpha \in R} H_{\alpha} \right)$$

を楕円正則軌道空間 (elliptic regular orbit space) という。

上の 2 重下線を引いた事実より、family (3.1.8) から fiber bundle

$$\tilde{p} : (W_{\Lambda}(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg} \rightarrow \mathbf{H} \quad (3.2.1)$$

が得られる. この時, 次の定理が成り立つ. これは我々の主結果の一つである.

定義 & 定理 1 3 ([7],[11]). fiber bundle $\tilde{p} : (W_\Lambda(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg} \rightarrow \mathbf{H}$ の fiber の基本群

$$\pi_1(\tilde{p}^{-1}(\omega)) \quad (\omega \in \mathbf{H})$$

を $A^g(R, G)$ と書き **幾何学的楕円 Artin 群 (geometric elliptic Artin group)** という. この時, 代数的楕円 Artin 群 $A^a(R, G)$ と幾何学的楕円 Artin 群 $A^g(R, G)$ は群として同型である.

この定理によって, 楕円ルート系に付随する Artin 群に対しても

(A) 生成元と基本関係式による代数的定義

(G) 空間の基本群による幾何学的定義

が一致することが示された. 以後, 我々はこの群を単に **楕円 Artin 群 (elliptic Artin group)** と呼び, $A(R, G)$ と書く.

4. Modular group action

4.1. 楕円ルート系への合同部分群の作用

1.2 節で述べたように, 最も典型的な例である $X_l^{(1,1)}$ 型のルート系では, modular 群 $SL_2(\mathbb{Z})$ が R に (marking の取り替えとして) 作用する. 一般の楕円ルート系では対称性が崩れているために, $SL_2(\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群 (合同部分群) が作用することになる. 定義を正確に述べよう.

$\varphi \in \text{Aut}_\Lambda(R)$ とすると, 簡単な計算から φ は $\text{rad}(I)$ を不変に保つことがわかる. そこで,

$$\text{rad}_{\mathbb{Z}}(I) := \mathbb{Z}\delta_b \oplus \mathbb{Z}\delta_a$$

とし,

$$\text{Aut}_\Lambda^+(R) := \{\varphi \in \text{Aut}_\Lambda(R) \mid \varphi|_{\text{rad}(I)} \in \text{SL}(\text{rad}_{\mathbb{Z}}(I))\}$$

と定める. 他方,

$$\text{O}_{sp}(F_\Lambda, I_\Lambda) := \begin{array}{l} F_\Lambda \text{ の isometry であって, 分解 (3.1.2) を} \\ \text{保つもの全体のなす } \text{O}(F_\Lambda, I_\Lambda) \text{ の部分群} \end{array}$$

とし,

$$\Gamma_{sp}^+ := \text{res}_0(\text{Aut}_\Lambda^+(R) \cap \text{O}_{sp}(F_\Lambda, I_\Lambda))$$

とおく. ここに $\text{res}_0 : \text{Aut}_\Lambda^+(R) \rightarrow \text{SL}(\text{rad}_{\mathbb{Z}}(I))$ は $\varphi \mapsto \varphi|_{\text{rad}(I)}$ で定まる写像. この時, 具体的な計算によって次がわかる.

命題 1 4 ([11]). Γ_{sp}^+ は $\Gamma_0(n)$ ($n = 1, 2, 3$) のいずれかに同型である¹¹. ここに

$$\Gamma_0(n) := \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid r \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Remark. 言うまでもないが, $\Gamma_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ である.

4.2. 楕円 Artin 群への作用

Γ_{sp}^+ は $\mathrm{Aut}_\Lambda(R)$ の部分群であり, (3.2.1) の fiber bundle $\tilde{p} : (W_\Lambda(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg} \rightarrow \mathbf{H}$ に equivariant, かつ fixed point free に作用する. そこで, quotient bundle

$$\Gamma_{sp}^+ \backslash \tilde{p} : \Gamma_{sp}^+ \backslash (W_\Lambda(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg} \rightarrow \Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H} \quad (4.2.1)$$

を考えよう. fiber bundle の long homotopy exact sequence の一般論から, 完全系列

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathrm{fiber}) \rightarrow \pi_1\left(\Gamma_{sp}^+ \backslash (W_\Lambda(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg}\right) \rightarrow \pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H}) \rightarrow 1 \quad (4.2.2)$$

を得る. 以下, この完全系列を詳しく調べよう. まず, 次の命題が成り立つことに注意する.

命題 1 5 ([11]). (4.2.1) の fiber bundle は global section を持つ. したがって, homotopy 完全系列 (4.2.2) は split する.

次に, 左端の基本群 $\pi_1(\mathrm{fiber})$ であるが, (3.2.1) の元の fiber bundle と (4.2.1) の quotient bundle で fiber は同型であり, その基本群は楕円 Artin 群 $A(R, G)$ に等しい. これに命題 1 5 を併せると,

$$\pi_1\left(\Gamma_{sp}^+ \backslash (W_\Lambda(R) \backslash \tilde{\mathbf{E}})_{reg}\right) \cong A(R, G) \rtimes \pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H})$$

が従う. つまり,

楕円 Artin 群 $A(R, G)$ は $\pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H})$ の作用を持つ

ということがわかった.

最後は $\pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H})$ の構造であるが, これについては次が成り立つ.

命題 1 6 ([11],[10]).

$$\pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H}) \cong \begin{cases} A(A_2) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(1), \\ A(B_2) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(2), \\ A(G_2) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{if } \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(3). \end{cases} \quad (4.2.3)$$

¹¹ この言い方は本当は正確ではない. (R, G) が $BC_l^{(2,4)}$ 型の MERS の場合には, $\Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(4)$ となる. ただし, この場合には F_Λ の spritting (3.1.2) を別のものに取り替えることで, 『 $\Gamma_0(n)$ ($n = 1, 2, 3$) のいずれかがルート系に作用する』という状況を作り出すことが出来る. 詳しくは原論文 [11] を参照されたい.

右辺に現れる $A(X_2)$ ($X = A, B, G$) は rank 2 の有限型 Artin 群であり、これらが rank 2 のもの全てである。比較的易しいので、証明の概略を書いておく。

概略 $\pi_1(\Gamma_{sp}^+ \backslash \mathbf{H})$ が、 $\Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(n)$ の $\pi_1(\mathbf{H}) \cong \mathbb{Z}$ による中心拡大と同型であることは、すぐにわかる。実際に計算してみると、 $n = 1, 2, 3$ の場合には、その中心拡大が (4.2.3) の右辺の現れる群になっていることがわかる。 \square

Remark. (1) 証明の概略を見てもお分かり頂けると思うが、この命題では『 Γ_{sp}^+ が $\Gamma_0(n)$ ($n = 1, 2, 3$) のいずれかに同型になる』という事実が非常に効いている¹²。

(2) 話の中に直接登場してはいないが、ここに現れる人物たちは保形形式の理論に非常に深い関係がある。 \mathbf{H} が

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{\omega = \omega_b d_b + \omega_a d_a \in \text{rad}(I_{\mathbb{C}}^*) \mid \omega_b \neq 0, \omega_a \neq 0, \Im(\omega_b/\omega_a) > 0\} \\ &\cong \{(\omega_b, \omega_a) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \Im(\omega_b/\omega_a) > 0\} \end{aligned}$$

で与えられていたことを思いだそう。座標の比を取る写像

$$\pi_{\mathbf{H}} : (\omega_b, \omega_a) \mapsto \tau := \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

を考えることで、Poincaré 上半平面への全射 (\mathbb{C}^* -bundle)

$$\pi_{\mathbf{H}} : \mathbf{H} \rightarrow \mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \Im(\tau) > 0\}$$

が得られる。保形形式の理論では \mathbf{H} ではなく、 \mathfrak{H} を考えるのが普通であるが、今回は敢えてそうしなかった。理由は以下の通りである。

合同部分群 Γ_{sp}^+ は、Poincaré 上半平面 \mathfrak{H} に 1 次分数変換で作用するわけだが、この作用は固定点 (cusp) を持つ。したがって、そのままでは homotopy long exact sequence の一般論を適用することが出来ない¹³。他方、比を取らずに \mathbf{H} のままで考えると、合同部分群 Γ_{sp}^+ の作用は linear であり、固定点を持たない。したがって homotopy long exact sequence の一般論を適用することが出来て、上に述べた結果を (より簡単に) 得ることが出来る、というカラクリになっている。

(3) 前項でも述べたように、この話は保型形式や楕円積分の理論と密接な関わりがある。実際、楕円積分にはいくつかの標準形が知られているが、

$$\begin{aligned} \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(1) \text{ の場合} &\leftrightarrow \text{Weierstrass の標準形} \\ \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(2) \text{ の場合} &\leftrightarrow \text{Legendre の標準形} \\ \Gamma_{sp}^+ \cong \Gamma_0(3) \text{ の場合} &\leftrightarrow \text{Hesse の標準形} \end{aligned}$$

という綺麗な対応になっている (see [10])。

以上の結果を全て併せると、

¹² $n \geq 4$ だとしても商空間 $\Gamma_0(n) \backslash \mathbf{H}$ を考えることはもちろん可能であるが、その基本群は Artin 群ではなくなってしまう。

¹³ orbifold fundamental group の一般論を使えばこの問題は回避出来るはずであろうと思っているが、今回はそうした formulation は採用しなかった。

- 楕円 Artin 群 $A(R, G)$ は rank 2 Artin 群の作用をの作用を持つ
- この rank 2 Artin 群の作用は、楕円ルート系への合同部分群の作用に由来する
ということがわかったことになる。

楕円ルート系の特徴の一つに、

合同部分群の作用を持つ

という事実があることは最初にも述べた。この事実の帰結として、楕円 Weyl 群は合同部分群 Γ_{sp}^+ の作用を持つ。しかしながら、この作用を（純代数的なレベルで）楕円 Weyl 群の q -変形である楕円 Hecke 代数（ \equiv double affine Hecke algebra）に拡張しようとすると、“何故か” そのまま拡張することが出来ず、 Γ_{sp}^+ の \mathbb{Z} による中心拡大（ $=$ rank 2 の Artin 群）が現れてしまう。筆者にとって

なぜ q -変形すると、modular group action が \mathbb{Z} による中心拡大を受けるのか？

は、ずっと気になっていた問題だったのだが、今回の話でそれなりに納得のいく解答が得られたように思う。

5. Further problems

最後に今回の話題と関連する問題をいくつか挙げておく。

(1) 楕円 Artin 群の中心の決定問題

これは『今後の課題』というより『やり残した問題』というべき話である。予想として次を挙げておく。

予想. $A(R, G)$ の中心は \mathbb{Z} と同型で、 $c(A(R, G))^{m(R, G)}$ で生成される。

今のところ、

- $c(A(R, G))^{m(R, G)}$ が中心に含まれる（命題 1 1）

ということは OK だが『それだけで生成されるかどうか？』がわからない。以下に、予想が正しそうだと思われる、いくつかの状況証拠を挙げておく。

- 1) 有限ルート系に付随する Artin 群の場合、中心は \mathbb{Z} と同型で、Coxeter 元の Coxeter 数乗で生成される（定理 6）。
- 2) 楕円 Hecke 代数¹⁴ の場合、中心は Coxeter 元の Coxeter 数乗で生成される¹⁵。
- 3) 楕円 Weyl 群の場合もそうなっている¹⁶。

¹⁴ 適当な Laurent 多項式環を係数とする $A(R, G)$ の群環を考えて、それを “Hecke relations” と呼ばれる 2 次の関係式で割ったもの。正確な定義は [13] を参照。

¹⁵ 楕円 Hecke 代数 \equiv DAHA が直交多項式の理論において重要な役割を果たすことは、よく知られている。直交多項式業界では、ここに現れた『中心の生成元 $=$ Coxeter 元の Coxeter 数乗』のことを \mathbf{q} と書く習慣になっている。この \mathbf{q} は『Macdonald 型 \mathbf{q} -差分作用素』という時の “ \mathbf{q} ” に他ならない。

¹⁶ これは上の 2 からすぐに従うので、『状況証拠』と言うべきでは無いかも知れない。

1) が Brieskorn-Saito [4] によることは既に述べた。彼らは、その証明の中で『Coxeter 群では word problem が解ける』という事実を本質的に使っており、その論法を我々の場合に適用することは出来ない。“elliptic case で word problem を解く”ことが本筋かも知れないが、現状では『elliptic case における word problem とは何か?』を正しく定式化することすら出来ていないので、どうしたら良いか見当が付かない。

(2) 楕円正則軌道空間は $K(\pi, 1)$ space か?

有限ルート系に付随する正則軌道空間の場合には、1 次以外の homotopy 群は自明であることが知られている ([5])。このような性質を持つ空間を $K(\pi, 1)$ space と呼ぶ。すなわち、ここで問題にしているのは『楕円正則軌道空間の 2 次以上の homotopy は消えるか?』ということに他ならない。

楕円正則軌道空間のトポロジカルな性質を知る上で重要な問題であるのは間違いないが、今のところ『正しそう』とも『正しくなさそう』とも言えない。

(3) なぜ q -変形すると modular group action が \mathbb{Z} による中心拡大を受けるのか?

楕円 Weyl 群の q -変形である楕円 Hecke 環に関して、この問題が解決済みであることは既に述べた通りである。他方、今回は割愛したが、実は同じことは Lie algebra side (1.4 節で述べた 3 の系列) でも起こる。

よく知られているように、affine Lie algebra (of untwisted type) は、simple Lie algebra に 1 変数 Laurent 多項式環を tensor して得られる Lie algebra (loop Lie algebra) の中心拡大として得られる。この構成において、tensor する Laurent 多項式環の変数の個数を 1 から 2 に増やすと、**toroidal Lie algebra (TLA)** と呼ばれる Lie algebra が得られるが、この Lie algebra は $X_l^{(1,1)}$ 型の楕円ルート系をルート系に持つ。そして、『modular 群 $SL_2(\mathbb{Z})$ が $X_l^{(1,1)}$ 型の楕円ルート系に作用する』という事実の帰結として、 $SL_2(\mathbb{Z})$ が TLA に作用することがわかる¹⁷。TLA にはその q -変形である **quantum toroidal algebra (QTA)** が知られているが、TLA に対する $SL_2(\mathbb{Z})$ -action を QTA の場合に (純代数的なレベルで) 拡張しようとする、やはり $SL_2(\mathbb{Z})$ の範囲に収まらず、 \mathbb{Z} による中心拡大 (= rank 2 の Artin 群) が現れてしまう。

今回の話の経験からして『基本群を考えているから』というのが答えなのだろうが、こちらの問題に関しては、今のところ満足のいく解答は得られていない。

参考文献

- [1] E. Artin, “The theory of braids”, in collected papers, 491-498.
- [2] N. Bourbaki, “Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6”, Éléments de Mathématique, Hermann Paris, 1968.
- [3] E. Brieskorn, “Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe”, Invent. Math., **12**, 57-61(1971).
- [4] E. Brieskorn and K. Saito, “Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen”, Invent. Math., **17**, 245-271, (1972).

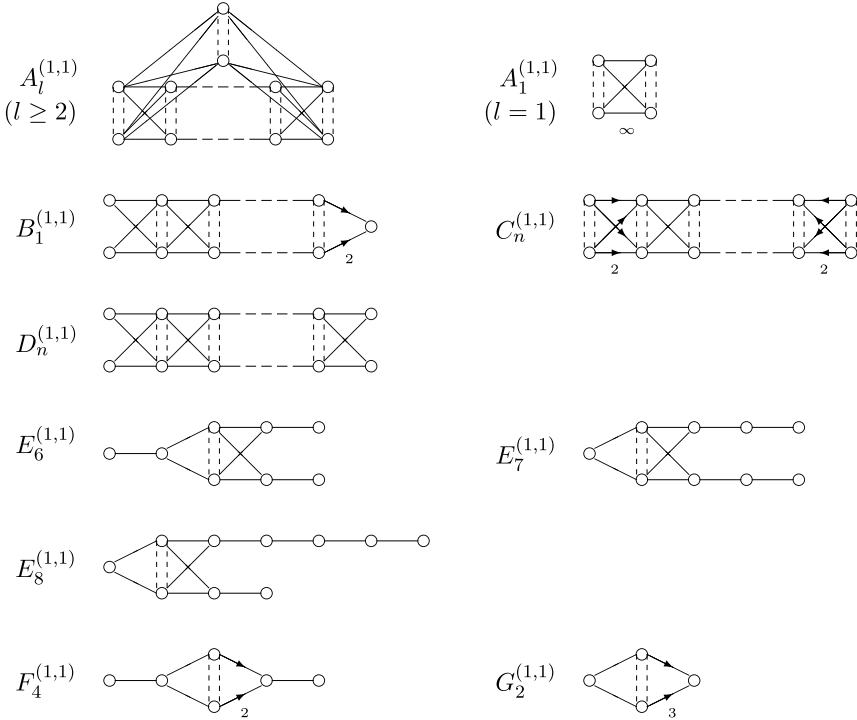
¹⁷ 正確に言うと次のようになっている。今回の話の中に登場した複素ベクトル空間 $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ は、TLA の Cartan subalgebra と同一視される。 $F_{\Lambda, \mathbb{C}}^*$ は楕円ルート系由来の $SL_2(\mathbb{Z})$ -action を持つが、それが Lie algebra 全体の自己同型に自然に延びる。

- [5] P. Deligne, “Les immeubles des groupes de tresses généralisés”, *Invent. Math.* **17**, 273-302 (1972).
- [6] V. G. Kac, “Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed.”, Cambridge University Press.
- [7] Van der Lek, “The homotopy type of complex hyperplane complements”, Doctor Thesis, Nijmegen (1983).
- [8] K. Saito, “Extended affine root systems I”, *Publ. RIMS* **21**, No.1 (1985), 75–179.
- [9] K. Saito, “Extended affine root systems II”, *Publ. RIMS* **26**, No.1 (1990), 15–78.
- [10] K. Saito, “A view on elliptic integrals from primitive forms (period integrals of type A_2 , B_2 and G_2)”, to appear in *Journal of Pure and Applied Mathematics*.
- [11] K. Saito and Y. Saito, “Elliptic Artin groups”, in preparation.
- [12] K. Saito and T. Takebayashi, “Extended affine root systems III”, *Publ. RIMS* **33** (1997), 301–329.
- [13] Y. Saito and M. Shiota, “On Hecke algebras associated with elliptic root systems and the double affine Hecke algebras”, *Publ. RIMS.* **45** (2009), 845-905.

A. Appendix

◦ List of elliptic diagrams

(1) “untwisted” case



(2) "twisted" case

